Fontainebleau N-77

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 83

FILTRES ET TOPOLOGIES

G. MATHERON

1968

NOTE Gst N° 83

FILTRES ET TOPOLOGIES

En vue de préparer une théorie des topologies aléatoires, nous allons examiner le cas où un espace E LCD de départ est muni d'une topologie $\mathcal{T}$ moins fine que sa topologie naturelle $\mathcal{G}(E)$. On a donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$, si l'on désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des $G \in \mathcal{G}$ ouverts pour cette topologie. Cet ensemble $\mathcal{T}$ peut, en particulier, être ouvert ou fermé dans $\mathcal{G}$: nous étudierons ici ces deux hypothèses $\mathcal{T} \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$. Avant d'aborder cette étude, nous examinerons le cas (plus simple) des filtres ouverts ou fermés.

I - Filtres

Nous désignerons par $\mathcal{A}$ une famille de parties de E stable pour $\bigcap$ et permise pour $\bigcup$. Moyennant les axiomes supplémentaires $\emptyset \notin \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ est un filtre. En fait, nous étudierons seulement la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{F}(E)$ ou à $\mathcal{G}(E)$, en supposant que celle ci soit ouverte ou fermée dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{G}$). D'où les quatre cas suivants à étudier :

1 - $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$
2 - $\mathcal{A} \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$
3 - $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$
4 - $\mathcal{A} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$

1 - $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$

Considérons l'application $F \to \mathcal{A}_F$ qui, à tout $F \in \mathcal{F}$ fait correspondre la famille :

(1) $$\mathcal{A}_F = \{F' : F' \in \mathcal{F}(E),\ F' \supset F\}$$

des fermés contenant F.

Proposition 1. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $\mathcal{A}_F \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$ et cette famille est stable pour $\bigcap$ et permise pour $\bigcup$. Si de plus $F \neq \emptyset$, $\mathcal{A}_F$ est un filtre fermé de parties fermées ($\emptyset \notin \mathcal{A}_F$)

On vérifie immédiatement que la famille $\mathcal{A}_F$ est stable pour $\bigcap$ et permise pour $\bigcup$ dans $\mathcal{F}(E)$. D'autre part, si $F'_n \in \mathcal{A}_F$, $F'_n \to F'$ entraine $F' \in \mathcal{A}_F$: en effet, tout $x \in F$ appartient à F'_n, donc aussi à F' (critère 2' de convergence) Enfin, si $F \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{A}_F$. Pour $F = \emptyset$, on a $\mathcal{A}_F = \mathcal{F}(E)$. Pour $F = E$, on a $\mathcal{A}_F = \{E\}$

Proposition 2. Réciproquement, toute famille $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$ non vide, stable pour $\bigcap$ et permise pour $\bigcup$ dans $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathcal{A}_F$ pour un $F \in \mathcal{F}(E)$

En effet, posons $F = \bigcap_{F' \in \mathcal{A}} F'$. Comme $\mathcal{A}$ est permis pour $\bigcap$, il suffit de montrer $F \in \mathcal{A}$ pour avoir $\mathcal{A} = \mathcal{A}_F$. Considérons la famille filtrante des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$. Elle converge vers F. (En effet, si $G \in \mathcal{G}$ rencontre F, il rencontre tous les $F' \in \mathcal{A}$. Si un compact K est disjoint de F, on peut extraire de l'intersection $\bigcap_{F' \in \mathcal{A}} (F' \cap K)$ une intersection finie vide, de sorte que K est disjoint d'un $F' \in \mathcal{A}$). Comme $\mathcal{A}$ est fermée par hypothèse, on a $F \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_F$

Ainsi, $F \to \mathcal{A}_F$ est une bijection de $\mathcal{F}(E)$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles non vides stables pour $\bigcap$ et permises pour $\bigcup$. Mais $\mathcal{F}(E)$ et $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ sont des espaces topologiques :

Proposition 3. L'application $F \to \mathcal{A}_F$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}(E)$ sur le sous-espace compact de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles non vides stables pour $\bigcap$ et permises pour $\bigcup$.

En effet, montrons que cette application est bicontinue.

a/ Soit $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}(E)$. Montrons $\mathcal{A}_{F_n} \to \mathcal{A}_F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$. Pour celà, vérifions d'abord le critère 1' : soit $F' \supset F$ un élément de $\mathcal{A}_F$. La suite $F_n \cup F'$ converge vers $F \cup F' = F'$ dans $\mathcal{F}(E)$ (continuité de $\cup$), et $F_n \cup F' \in \mathcal{A}_{F_n}$. Vérifions maintenant le critère 2' : soit $F'_{n_\xi} \in \mathcal{A}_{F_{n_\xi}}$ et $F'_{n_\xi} \to F'$ dans $\mathcal{F}(E)$. On a $F'_{n_\xi} \supset F_{n_\xi}$. Or cette inclusion se conserve par passage à la limite (si $x \in F$, soit $x_{n_\xi} \to x$, selon le critère 1'. On a $x_{n_\xi} \in F'_{n_\xi}$ d'où, selon le critère 2', $x \in F'$ et $F \subset F'$) . Donc $F' \in \mathcal{A}_F$, ce qui achève la démonstration.

avec $x_{n_\xi} \in F_{n_\xi}$

b/ Soit maintenant $\mathcal{A}_{F_n}$ une suite convergeant vers $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$. Montrons que $\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{A}_F$ et que les F_n convergent vers F dans $\mathcal{F}(E)$.
De la suite F_n, nous pouvons extraire une suite F_{n_ξ} convergeant vers un élément $F \in \mathcal{F}(E)$. D'après a/, on a $\mathcal{A}_{F_{n_\xi}} \to \mathcal{A}_F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, d'où $\mathcal{A} = \mathcal{A}_F$
Comme $F = \bigcap_{F' \in \mathcal{A}} F'$ est déterminé de manière unique, on a $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}(E)$.

<u>Corollaire.</u> La topologie du sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ formé des familles stables pour $\cap$ et permises pour $\cup$ est engendrée par les parties de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ de la forme :

1 - $\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \cap V^G = \emptyset\}$

2 - $\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \cap V^K \neq \emptyset\}$

En effet, L'ouvert $V_G \subset \mathcal{F}(E)$ est l'ensemble des F rencontrant l'ouvert G : il a pour image l'ensemble des $\mathcal{A}_F$ vérifiant $\mathcal{A}_F \subset V_G$; de même, V^K a pour image l'ensemble des $\mathcal{A}$ contenant au moins un élément disjoint du compact K .

<u>Remarque</u>. L'homéomorphisme $F \to \mathcal{A}_F$ échange les ouverts de type V_G et V^K ; à $V_G \subset \mathcal{F}(E)$ correspond $V^{V^G} \subset \mathcal{F}(\mathcal{F})$ et V^G est compact dans $\mathcal{F}(E)$.
De même, V^K a pour image V_{V^K} avec V^K ~~compact~~ ouvert dans $\mathcal{F}(E)$

A tout $F' \in \mathcal{A}_F$, nous pouvons associer son complémentaire $G' = \complement F'$; en particulier, $G = \complement F$. Posons :

$$(2) \qquad \mathcal{T}_G = \{ G' : G' \in \mathcal{G}(E) , G' \subset G \}$$

$\mathcal{T}_G$ est l'image de $\mathcal{A}_F$ dans l'homéomorphisme $F' \to \complement F'$ de $\mathcal{F}(E)$ sur $\mathcal{G}(E)$. On a donc $\mathcal{T}_G \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$. La définition (2) montre que $\mathcal{T}_G$ coincide avec la topologie induite par $\mathcal{G}$ sur $G = \complement F$. Elle est stable pour la réunion et permise dans $\mathcal{G}$ pour l'intersection. Elle coincide avec $\mathcal{G}$ si et seulement si $F = \emptyset$, c'est à dire si $G = E$.

Inversement, soit $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ une famille fermée non vide d'ouverts de E, stable pour $\bigcup$ et permise dans $\mathcal{G}$ pour $\bigcap$. Comme $\mathcal{T}$ est fermée, elle est stable pour la réunion infinie et s'identifie avec la topologie induite par $\mathcal{G}$ sur $G = \bigcup_{G' \in \mathcal{T}} G'$
Enonçons :

<u>Proposition 4</u>. L'application $G \to \mathcal{T}_G$ est un homéomorphisme de $\mathcal{G}(E)$ sur le sous-espace compact de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ constitué des familles fermées non vides stables pour $\bigcup$ et permises pour $\bigcap$. Tout élément $\mathcal{T}$ de cet espace coincide avec la topologie $\mathcal{T}_G$ induite par $\mathcal{G}$ sur l'ouvert $G = \bigcup_{G' \in \mathcal{T}} G'$

2 - $\mathcal{A} \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$

Nous appellerons <u>filtre ouvert</u> une famille ouverte $\mathcal{B} \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ constituée d'ouverts appartenant à $\mathcal{G}(E)$, permise pour $\bigcup$ stable pour $\bigcap$ et telle que $\emptyset \notin \mathcal{B}$. En particulier, la famille vide $\emptyset \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ est un filtre ouvert.

<u>Proposition 1</u>. L'ensemble des filtres ouverts est fermé, donc compact, dans $\mathcal{G}(\mathcal{G})$

Soit, en effet, $\mathcal{B}_n$ une famille de filtres ouverts convergeant vers $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(\mathcal{G})$
Si $\mathcal{B} = \emptyset$, $\mathcal{B}$ est un filtre ouvert. Supposons $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Montrons que $\mathcal{B}$ est permise pour $\bigcup$. Soient donc $G \in \mathcal{B}$ et $G' \in \mathcal{G}(E)$. On a $G \cup G' \in \mathcal{B}$. En effet, dans le cas contraire, (critère 1'), soit $S_n \to G \cup G'$ avec $S_n \notin \mathcal{B}_n$. On a $S_n \cap G \notin \mathcal{B}_n$ (sinon, $S_n = (S_n \cap G) \cup S_n$ appartiendrait à la famille $\mathcal{B}_n$ permise pour $\bigcup$). Par suite, (critère 2') $\lim (S_n \cap G) = (G \cup G') \cap G = G \notin \mathcal{B}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est stable pour $\cap$. Soient $G \in \mathcal{B}$ et $G' \in \mathcal{B}$

Comme $\mathcal{B}$ est ouvert et permis pour $\cup$, on peut trouver deux voisinages compacts W_B et $W_{B'}$ (B et B' ouverts relativement compacts dans E) avec :

$G \in W_{\bar{B}} \subset W_B \subset \mathcal{B}$ et $G' \in W_{\bar{B}'} \subset W_{B'} \subset \mathcal{B}$

Pour n assez grand, on a $W_B \subset \mathcal{B}_n$ et $W_{B'} \subset \mathcal{B}_n$. Il en résulte $W_{B \cap B'} \subset \mathcal{B}_n$ (puisque $\mathcal{B}_n$ est stable pour $\cap$) et a fortiori $W_{\bar{B} \cap \bar{B}'} \subset \mathcal{B}_n$: mais l'ensemble des $\mathcal{B} \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$ contenant l'ouvert $W_{\bar{B} \cap \bar{B}'}$ est fermé dans $\mathcal{G}(\mathcal{G})$. Donc $W_{\bar{B} \cap \bar{B}'} \subset \mathcal{B}$ et par suite $G \cap G' \in \mathcal{B}$

Enfin, $\emptyset \notin \mathcal{B}$: celà resulte du critère 2' de convergence, puisque $\emptyset \notin \mathcal{B}_n$.

<u>Lemme 1.</u> Soient K et K' deux compacts de E et $G \in \mathcal{G}(E)$ un ouvert avec $G \supset K \cap K'$ On peut trouver deux ouverts B et B' avec $B \supset K$, $B' \supset K'$ et $G \supset B \cap B'$

Soient, en effet, B_n et B'_n deux systèmes fondamentaux de voisinages ouverts décroissants et relativement compacts de K et K' . Supposons que pour tout n on ait $B_n \cap B'_n \not\subset G$. Soit $x_n \in B_n \cap B'_n \cap \complement G$. La suite x_n admet une valeur d'adhérence $x \in K \cap K' \cap \complement G$, ce qui contredit $G \supset K \cap K'$. Donc on peut trouver n avec $B_n \cap B'_n \subset G$, $B_n \supset K$ et $B'_n \supset K'$.

<u>Proposition 2.</u> L'ensemble des filtres ouverts non vides coincide avec l'ensemble des parties de $\mathcal{G}(E)$ de la forme $W_K = \{ G : G \in \mathcal{G} , G \supset K \}$ où K est un compact non vide.

On vérifie immédiatement que W_K est un filtre ouvert si K est compact non vide. Inversement, soit $\mathcal{B}$ un filtre ouvert non vide. Si $\mathcal{B} = \{E\}$, (ce qui suppose E compact, puisque $\mathcal{B}$ doit être ouvert), on a bien $\mathcal{B} = W_E$. Supposons donc $\mathcal{B} \neq \{E\}$. Pour tout $G \in \mathcal{B}$ on peut trouver un voisinage ouvert $W_K^{G_i}$ de G inclus dans $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est permis pour $\cup$, on peut se limiter aux W_K : $G \in W_K \subset \mathcal{B}$. Soit $\mathcal{C}$ la classe des compacts K non vides tels que $W_K \subset \mathcal{B}$. On a

$$\mathcal{B} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}} W_K$$

Montrons que cette classe $\mathcal{C}$ est stable pour $\cap$. Si K et K' sont dans $\mathcal{C}$, on a $G \cap G' \in \mathcal{B}$ dès que $G \supset K$ et $G' \supset K'$ (puisque $\mathcal{B}$ est stable pour $\cap$) . Mais si G_0 est un ouvert contenant $K \cap K'$, on peut, d'après le lemme 1, trouver deux ouverts G et G' avec $G_0 \supset G \cap G'$, $G \supset K$, $G' \supset K'$. Donc $G_0 \in \mathcal{B}$, et $W_{K \cap K'} \subset \mathcal{B}$ c'est à dire $K \cap K' \in \mathcal{C}$

La classe $\mathcal{C}$ stable pour $\cap$ ne contient pas $\emptyset$ (sinon $\emptyset \in \mathcal{B}$). C'est donc une base de filtre. L'intersection $K_0 = \bigcap_{K \in \mathcal{C}} K$ est un compact non vide (si $K_0 = \emptyset$ on pourrait trouver une intersection finie d'élements de $\mathcal{C}$ appartenant elle-même à $\mathcal{C}$ et vide). De plus $K_0 \in \mathcal{C}$. En effet, supposons $W_{K_0} \not\subset \mathcal{B}$. On pourrait trouver un ouvert G avec $K_0 \subset G \notin \mathcal{B}$. Mais $G \notin \mathcal{B}$ équivaut à $\forall\ K \in \mathcal{C}$, $K \cap \complement G \neq \emptyset$. On en déduit que l'intersection $\bigcap_{K \in \mathcal{C}} (K \cap \complement G) = K_0 \cap \complement G$ ne peut pas être vide : mais ceci contredit $K_0 \subset G$
Ainsi, $K_0 \in \mathcal{C}$ et $W_{K_0} \subset \mathcal{B}$

Enfin, si $G \in \mathcal{B}$, on a $G \in W_K$ pour un $K \in \mathcal{C}$, et par suite aussi $G \supset K_0$ c'est à dire $G \in W_{K_0}$, et $\mathcal{B} \subset W_{K_0}$, d'où l'égalité $\mathcal{B} = W_{K_0}$;

<u>Corollaire.</u> L'application $K \to W_K$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts non vides de E sur l'ensemble des filtres ouverts non vides.

Nous pouvons donc identifier ces deux ensembles, et par suite munir $\mathcal{K}(E)$ de la topologie induite par celle de $\mathcal{G}(\mathcal{G})$, que nous appellerons la <u>topologie myope</u>.

<u>Proposition 3.</u> La <u>topologie myope</u> sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts non vides de E est engendrée par les parties de $\mathcal{K}$ de la forme :

1 - $S^{K_0} = \{ K : K \in \mathcal{K},\ K \not\subset K_0 \}$ pour $K_0 \in \mathcal{K}(E)$

2- $S_{G_0} = \{ K : K \in \mathcal{K},\ K \subset G_0 \}$ pour $G \in \mathcal{G}(E)$

En effet, la topologie induite par celle de $\mathcal{G}(\mathcal{G})$ sur l'ensemble des filtres ouverts (permis pour $\cup$) est engendrée par les parties de la forme :

1 - $\{\mathcal{B} : W_{K_c} \not\subset \mathcal{B}\}$

2 - $\{\mathcal{B} : W_{G_c} \subset \mathcal{B}\}$

qui correspondent bijectivement à celles de l'énoncé: pour 2 , celà est évident. Pour 1, on écrit : $W_{K_c} \not\subset \mathcal{B} \iff \exists G \in \mathcal{G},\ G \supset K_c, G \not\supset K \ (\mathcal{B} = W_K)$

$\iff K \not\subset K_0$

Corollaire. La topologie myope sur $\mathcal{K}(E)$ est engendrée par la restriction à $\mathcal{K}(E)$ des parties de $\mathcal{F}(E)$ de la forme $V_{\complement K_0}$ et $V^{\complement G_0}$. Elle coincide avec la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$ si et seulement si E est compact.

Remarque. Pour la topologie myope, $\mathcal{K}(E)$ est homéomorphe à l'ensemble des filtres ouverts non vides. Ainsi $\mathcal{K}(E)$ n'est pas compact (sauf si E lui-même est compact). Mais, d'après la proposition 1, l'ensemble des filtres ouverts, y compris le filtre vide $\emptyset$, est compact. Dans $\mathcal{G}(\mathcal{G})$, les voisinages du filtre vide $\emptyset$ sont des familles $\{W_{K_c} \not\subset \mathcal{B}\}$ du type 1. On peut donc compactifier $\mathcal{K}(E)$ en lui adjoignant un élément ω dont les voisinages seront les S^{K_c} . On peut interpréter cet élément comme représentant E lui-même (non compact), ou un fermé $F \in \mathcal{F}(E)$ non compact quelconque. En un certain sens, on peut dire que tous les fermés non compacts sont ainsi identifiés à ω : la topologie myope n'est pas capable de les distinguer les uns des autres, elle ne voit distinctement que les compacts (d'où la terminologie).

Proposition 4. Soit $\mathcal{F}(K_1)$ l'ensemble des $F \in \mathcal{F}(E)$ contenus dans un compact K_1. La topologie myope et celle de $\mathcal{F}(E)$ induisent sur $\mathcal{F}(K_1)$ une même topologie compacte.

Le corollaire de la proposition 3 montre que la topologie myope induit sur $\mathcal{F}(K_1) - \emptyset$ la même topologie que $\mathcal{F}(E)$, les V_G et les V^K coincidant sur $\mathcal{F}(K_1)$ avec les $V_{\complement K_0}$ et les X $V^{\complement G_0}$. D'autre part, on sait que $\mathcal{F}(K_1) - \emptyset$ est compact.

<u>Proposition 5</u>. (convergence myope). Une suite K_n de compacts non vides converge dans $\mathcal{K}(E)$ si et seulement si on peut trouver un compact K_o contenant tous les K_n et si la suite K_n est convergente pour la topologie de $\mathcal{F}(E)$

La condition est suffisante d'après la proposition 4. Elle est nécessaire : si $K_n \to K$ dans $\mathcal{K}(E)$, soit S_{B_o} un voisinage de K, B_o étant un ouvert relativement compact. Pour n assez grand, on a $K_n \in S_{B_o}$, soit $K_n \subset B_o \subset \overline{B}_o$ La proposition 4, appliquée à $\mathcal{F}(\overline{B}_o)$ montre ensuite que K_n converge vers K selon la topologie de $\mathcal{F}(E)$.

<u>Remarque.</u> Dans le compactifié $\mathcal{K}(E) \cup \{\omega\}$ (avec, par exemple, $\omega = E$) une suite K_n converge vers $\omega = E$ si et seulement si on a $K_n \in S^{K_o}$ pour tout K_o dès que n est assez grand, c'est à dire si et seulement si on peut trouver une suite d'éléments $x_n \in K_n$ convergeant vers ∞ dans le compactifié de E.

Soit $\mathcal{B} = W_{K_o}$ un filtre ouvert non vide. $\mathcal{B} \cup \{\phi\}$ est une topologie moins fine que $\mathcal{G}$ et permise dans $\mathcal{G}$ pour $\bigcup$: c'est la topologie obtenue en identifiant les points du compact K_o.

Inversement, soit $\mathcal{T}$ une topologie moins fine que $\mathcal{G}$, permise pour $\bigcup$ dans $\mathcal{G}$ et telle que $\mathcal{T} - \phi \in \mathcal{G}(\mathcal{G})$. $\mathcal{T} - \phi$ est un filtre ouvert non vide, car $E \in \mathcal{T}$, donc, d'après la proposition 2, est de la forme W_{K_o} avec $K_o \in \mathcal{K}(E)$ Enonçons :

<u>Proposition 6.</u> Toute topologie $\mathcal{T}$ sur E moins fine que $\mathcal{G}$, permise pour $\bigcup$ et telle que $\mathcal{T} - \phi$ soit ouvert dans $\mathcal{G}(E)$ est de la forme $W_K \cup \{\phi\}$ avec $K \in \mathcal{K}(E)$. ~~XXXXXXXXXXX~~ et inversement. Cette topologie s'obtient en identifiant les points d'un compact $K \in \mathcal{K}(E)$ -

3 – $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$

Nous appellerons <u>filtre fermé</u> une famille $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ <u>non vide</u> stable pour $\bigcap$ permise pour $\bigcup$, fermée dans $\mathcal{G}$, d'ouverts de E. Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ est nécessairement de la forme W_{G_0}.

<u>Proposition 1.</u> Tout filtre fermé $\mathcal{A}$ est de la forme W_{G_0} avec $G_0 \in \mathcal{G}(E)$. L'application $G_0 \to W_{G_0}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{G}(E)$ sur le sous-espace compact de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ constitué des filtres fermés.

Soit $\mathcal{A}$ un filtre fermé (non vide). Considérons la limite dans $\mathcal{G}(E)$ de la famille filtrante des intersections finies d'éléments de $\mathcal{A}$, qui sont elles mêmes des éléments de $\mathcal{A}$. Cette limite est ~~XXXX~~ un ouvert $G_0 \in \mathcal{A}$, puisque $\mathcal{A}$ est fermée. Comme $G_0 \subset G$ pour tout $G \in \mathcal{G}$, on a $G_0 = \bigcap_{G \in \mathcal{A}} G$. Enfin, $\mathcal{A}$ étant ~~finie~~ permise pour $\bigcup$, tout ouvert G contenant $G_0 \in \mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$. Par suite $\mathcal{A} = W_{G_0}$.

Inversement, si $G_0 \in \mathcal{G}$, W_{G_0} est manifestement un filtre fermé. Il reste à montrer que l'application injective $G_0 \to W_{G_0}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{G}(E)$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ constitué des filtres fermés.

a/ Soit $G_n \to G_0$ dans $\mathcal{G}$. Montrons $W_{G_n} \to W_{G_0}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. De W_{G_n} extrayons une suite $W_{G_{n_k}} \to \mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. On a $G_0 \in \mathcal{A}$ (puisque $G_{n_k} \in W_{G_{n_k}}$ converge vers G_0), et $\mathcal{A} \subset W_{G_0}$ (puisque tout $G \in \mathcal{A}$ est limite de $G'_{n_k} \supset G_{n_k}$). La partie délicate de la démonstration consiste à établir l'inclusion $W_{G_0} \subset \mathcal{A}$ (qui achèvera de démontrer a/)

Soit donc $G' \supset G_0$. Montrons que tout voisinage $W_K^{B_i}$ de G rencontre $\mathcal{A}$. Ce voisinage ouvert contient un voisinage compact de G' : on peut, en effet, trouver des ouverts relativement compacts B'_i, B avec $B'_i \subset \overline{B'_i} \subset B_i$ $\overline{B} \supset B \supset K$ et $G' \in W_{\overline{B}}^{B'_i} \subset W_{B}^{\overline{B'_i}} \subset W_K^{B_i}$ avec $B \cap B'_i = \emptyset$. Comme $G_0 \subset G'$, pour n_k assez grand, on a $G_{n_k} \in W^{B'_i}$ et $B \cup G_{n_k} \in W_B^{B'_i}$ (puisque B est disjoint de B'_i). On a donc a fortiori $B \cup G_{n_k} \in W_B^{\overline{B'_i}}$ et, cet ensemble étant compact, on peut extraire de la suite $B \cup G_{n_k}$ une suite partielle convergeant vers un élément G'' suite partielle convergeant vers un élément $G'' \in W_{B}^{B'_i} \subset W_K^{B_i}$. Mais $G'' \in \mathcal{A}$ (critère 2') et $\mathcal{A}$ rencontre le voisinage $W_K^{B_i}$ de G' : comme ce voisinage est quelconque et que $\mathcal{A}$ est fermé, il en résulte $G' \in \mathcal{A}$: ce qui établit l'inclusion $W_{G_0} \subset \mathcal{A}$, d'où l'égalité.

Comme $\mathcal{A} = W_{G_0}$ quelle que soit la suite partielle $W_{G_{n_k}}$, on a bien $\mathcal{A} = \lim W_{G_n} = W_{G_0}$.

b/ Inversement, si $W_{G_n} \to \mathcal{A}$, soit G_{n_k} une suite partielle convergeant vers un élément G_0 dans $\mathcal{G}$ (E). D'après a/, on a $\mathcal{A} = W_{G_0}$, et, par suite, G_n converge vers G_0.

4 - $\mathcal{A} \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$

Si $\mathcal{A}$ est une famille ouverte, stable pour $\cap$, permise pour $\cup$, de fermés $F \in \mathcal{F}$ on a nécessairement $\mathcal{A} = \emptyset$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ (E).

En effet, si $\mathcal{A} \neq \emptyset$, soit $F \in \mathcal{A}$. Il existe un voisinage $V_{G_i}^{B}$ de F contenu dans $\mathcal{A}$ (avec $G_i \cap B = \emptyset$). Comme $\mathcal{A}$ est permis pour $\cup$, on a $V_{G_i} \subset \mathcal{A}$. Prenons deux points x_i et y_i dans chaque G_i, avec $x_i \neq y_j$ pour tout (i,j). (On suppose qu'aucun ouvert de E n'est fini). Les fermés $\cup \{x_i\}$ et $\cup \{y_j\}$ sont dans V_{G_i}, donc dans $\mathcal{A}$: leur intersection, qui est $\emptyset$, est dans $\mathcal{A}$, et $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ (E).

II - TOPOLOGIES MOINS FINES QUE $\mathcal{U}$

Dans ce qui suit, $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}(E)$ désignera une famille d''ouverts de E, stable pour l'intersection finie et pour la réunion infinie. Ainsi $\mathcal{T} \cup \{\phi\} \cup \{E\}$ est une topologie moins fine que la topologie naturelle $\mathcal{U}(E)$. Nous examinerons deux cas : topologie ouverte, si $\mathcal{T} \in \mathcal{U}(\mathcal{U})$ et topologie fermée, si $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$

1 - Topologies ouvertes.

nous les caractériserons à l'aide du lemme suivant :

Lemme. Pour qu'une famille $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(\mathcal{U})$ soit stable pour la réunion, il faut et il suffit qu'elle soit permise dans $\mathcal{U}$ pour la réunion.

La condition est manifestement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Si $\mathcal{A} = \phi$, $\mathcal{A}$ est permis pour $\bigcup$. Si $G \in \mathcal{A}$, soit $W_{\mathcal{B}}^{G_i}$ un voisinage ouvert de G inclus dans $\mathcal{A}$. On a alors $G \in W_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{A}$ (En effet, admettant comme toujours qu'aucun ouvert de E n'est fini, on peut prendre dans chaque G_i deux points x_i et y_i tels que $X = \bigcup\{x_i\}$ et $Y = \bigcup\{y_i\}$ soient disjoints. ~~XXXXXXXXXXX~~ Si $G' \in W_{\mathcal{B}}$, $G' - X$ et $G' - Y$ sont dans $W_{\mathcal{B}}^{G_i} \subset \mathcal{A}$. Leur réunion qui est G' est également dans $\mathcal{A}$). Par suite tout ouvert $G' \supset G$ est dans $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est permis dans $\mathcal{U}$ pour $\bigcup$.

Conséquence. Compte tenu de I,2º, prop.2, le lemme ci-dessus montre que toute famille $\mathcal{T} \in \mathcal{U}(\mathcal{U})$ stable pour $\bigcup$ et $\bigcap$ est soit vide, soit de la forme W_K avec $K \in \mathcal{K}(E)$. Dans le premier cas, $\mathcal{T} \cup \{\phi\} \cup \{E\}$ est la topologie grossière, dans le deuxième cas, $W_k \cup \{\phi\}$ est la topologie obtenue en identifiant les points du compact K.

2 - Topologies fermées.

Nous appellerons topologie fermée (moins fine que $\mathcal{G}$) une famille $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ d'ouverts de E fermée dans $\mathcal{G}(E)$, contenant $\emptyset$ et E , stable pour $\cup$ et $\cap$.
Il suffit de supposer $\mathcal{T}$ stable pour la réunion finie. En effet, si G_i , $i \in I$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, les ~~intersections~~ réunions finies d'éléments de cette famille sont dans $\mathcal{T}$, constituent une famille filtrante convergeant vers la réunion $\bigcup_{i\in I} G_i$ dans $\mathcal{G}(E)$, et, comme $\mathcal{T}$ est fermée, cette réunion est dans $\mathcal{T}$.

Lemme 1. Une famille $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ contenant $\emptyset$ et E est stable pour l'intersection si et seulement si elle est de la forme :

$$(1) \qquad \mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \left(W^{K_i} \cup W_{G_i} \right)$$

où les K_i et les G_i constituent une famille de compacts non vides et une famille d'ouverts non vides de E indexées par un même ensemble I .

On vérifie immédiatement que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soit A un ouvert n'appartenant pas à $\mathcal{A}$ (donc $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$). On peut trouver un voisinage $W_K^{G_1, \dots G_n}$ de A disjoint de $\mathcal{A}$ avec K, $G_1, \dots G_n$ non vides. Ainsi, $G \in \mathcal{A}$ entraine $G \in W^K \cup W_{G_1} \cup \dots \cup W_{G_n}$
En fait, on peut se limiter au cas n = 1 (un seul ouvert G_1 intervenant dans la définition du voisinage $W_K^{G_1}$ de G) . En effet, supposons que l'on puisse trouver dans chaque $W_K^{G_j}$ (j = 1,2,.. n) un ouvert $G'_j \in \mathcal{A}$. L'intersection $\bigcap_{j=1}^{n} G'_j$ appartiendrait à $\mathcal{T}$ et à $W_K^{G_1, \dots G_n}$ contrairement à l'hypothèse.

Le complémentaire de $\mathcal{A}$ est donc de la forme $\bigcup_{i\in I} \left(W_{K_i} \cap W^{G_i} \right)$ et la relation (1) en résulte.

<u>Lemme 1'</u> (énoncé fort) . Si $\mathfrak{A} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ est stable pour $\bigcap$ [illegible] , on peut dans la relation (1) supposer que les compacts K_i sont minimaux et que les ouverts G_i sont maximaux. Autrement dit, pour chaque $i \in I$, $W_{K_i}^{G_i}$ est disjoint de $\mathfrak{A}$, mais : 1/ si $G' \supset G_i$ strictement, on peut trouver un ouvert G appartenant à $\mathfrak{A}$ et à $W_{K_i}^{G'}$; 2/ si $K' \supset K_i$ strictement, on peut trouver un ouvert G appartenant à $\mathfrak{A}$ et à $W_{K'}^{G_i}$. Dans ces conditions, on a de plus $G_i \in \mathfrak{A}$ pour tout $i \in I$.

La démonst ration va reposer sur le théorème de Zorn.

a/ Soit $A \notin \mathfrak{A}$ un ouvert, et W_K^G le voisinage de A disjoint de $\mathfrak{A}$ obtenu comme dans la démonstration de l'énoncé faible. On a $K = K_i$ pour un $i \in I$, et inversement, A décrivant $\complement\mathfrak{A}$, on épuise ainsi les familles K_i et G_i figurant dans la relation (1).

Munissons l'ensemble des couples $(K',G') \in \mathcal{K}(E) \times \mathcal{G}(E)$ et vérifiant $W_{K'}^{G'} \subset \complement\mathfrak{A}$ de la relation d'ordre :

$$(K'_1 , G'_1) \geqslant (K'_2 , G'_2) \text{ si } K'_1 \subset K'_2 \text{ et } G'_1 \supset G'_2$$

et montrons que cet ensemble ordonné est inductif.

Soit (K_j , G_j) , $j \in J$, une famille totalement ordonnée, avec $(K_{j'}, G_{j'}) \geqslant (K_j, G_j)$ si $j' \geqslant j$. Posons :

$$G_0 = \bigcup_{j \in J} G_j \qquad\qquad K_0 = \bigcap_{j \in J} K_j$$

On a $W_{K_0}^{G_0} \supset W_{K_j}^{G_j}$ pour tout $j \in J$, et $W_{K_0}^{G_0} \supset \bigcup_J W_{K_j}^{G_j}$. Montrons l'inclusion inverse. Si B est un ouvert appartenant à $W_{K_0}^{G_0}$, on a $B \supset K_0$ et $B \not\supset G_0$. Mais $B \supset \bigcap_J K_j$, c'est à dire $\bigcap_J (K_j \cap \complement B) = \emptyset$, entraine qu'il existe $j_1 \in J$ avec $B \supset K_{j_1}$. De même, $B \not\supset \bigcup_J G_j$ entraine qu'il existe $j_2 \in J$ avec $G_{j_2} \not\subset B$? Prenant $j_0 = \mathrm{Sup}(j_1 , j_2)$, on a donc $B \in W_{K_{j_0}}^{G_{j_0}}$, d'où l'inclusion cherchée, et l'égalité :

$$W_{K_0}^{G_0} = \bigcup_{j\in J} W_{K_j}^{G_j}$$

Par suite, $W_{K_0}^{G_0} \subset \int\mathcal{C}\!\mathcal{l}$, et l'ensemble des $(K',G') \in \mathcal{K}\times\mathcal{G}$ tels que $W_{K'}^{G'} \subset \int\mathcal{O}$ est inductif. D'après le théorème de Zorn, il existe donc un élément (K'_0, G'_0) maximal pour $\geqslant$ tel que $K'_0 \subset K$ et $G'_0 \supset G$. Les propriétés 1 et 2 en résultent.

b/ Montrons maintenant que ce G'_0 maximal appartient à $\mathcal{C}\!\mathcal{l}$, ce qui achèvera la démonstration du lemme. Désignons par $i_0 \in I$ l'indice i associé à A ($K = K_{i_0}$, et $G_{i_0} = G$ est remplacé par G'_0 qui le contient).

Si pour tout $i \in I$ on a $K_i \not\subset G'_0$, alors $G'_0 \in \mathcal{C}\!\mathcal{l}$ d'après la relation (1). Soit au contraire $i \in I$ avec $K_i \subset G'_0$. Pour tout $G \in \mathcal{T}$, on a $G \not\supset K_{i_0}$ ou $G \supset G'_0$. Soit $G \in \mathcal{C}\!\mathcal{l}$ un ouvert (par exemple E) avec $G \supset G'_0 \supset K_i$. La relation (1) entraine $G \supset G_i$. Par suite $W_{K_{i_0}}^{G'_0 \cup G_i}$ est disjoint de $\mathcal{C}\!\mathcal{l}$. Comme G'_0 est maximal, on voit que $K_i \subset G'_0$ entraine $G_i \subset G'_0$ pour tout $i \in I$, ce qui signifie précisément $G'_0 \in \mathcal{C}\!\mathcal{l}$.

<u>Proposition 1</u>. Si dans la relation (1) chaque K_i est réduit à un point x_i , la famille :

$$(2) \qquad \mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \left(W^{\{x_i\}} \cup W_{G_i} \right)$$

est une topologie fermée.

Si G et G' sont dans $\mathcal{T}$, on a pour tout $i \in I$: ou bien $x_i \notin G$ et $x_i \notin G'$, et, dans ce cas, $x_i \notin G \cup G'$ – ou bien G (ou G') contient G_i , et dans ce cas $G \cup G' \supset G_i$. Ainsi $\mathcal{T}$ est stable pour $\bigcup$, et c'est une topologie d'après ce qui précède.

Cependant cette forme (2) n'est pas la plus générale possible. Montrons le par un contre-exemple, à partir des propositions suivantes.

<u>Proposition 2</u>. Si $\mathcal{T}$ est une topologie fermée, il existe un ouvert $\Omega \subset E$ et une application $f : \Omega \to E$ telle que l'on ait :

(3)
$$\mathcal{T} = \bigcap_{x \in \Omega} \left(W^{f(x)} \cup W_x \right)$$

En effet, $\mathcal{T}$ est de la forme (1). Posons $\Omega = \bigcup_I G_i$. Soit $x \in \Omega$ et $i \in I$ tel que $x \in G_i$. L'ouverture de $\complement\{x\}$ pour la topologie $\mathcal{T}$ ne peut pas contenir K_i. Donc il existe au moins un point $y \in K_i$ tel que y n'appartienne à aucun $G \in \mathcal{T}$ ne contenant pas x. Posant $y = f(x)$, on voit que $\mathcal{T}$ est inclus dans linterscction $\bigcap_{x \in \Omega} \left(W^{f(x)} \cup W_x \right)$

Inversement, si un ouvert G est tel que, pour tout $x \in \Omega$, ou bien $x \in G$ ou bien $f(x) \notin G$, considérons un $i \in I$ et l'ouvert G_i de la relation (1). On a $G_i \subset G$, ou bien : $\exists\ x \in G_i\ \ x \notin G$. Mais alors $f(x) \in K_i$ n'appartient pas non plus à G, et $K_i \not\subset G$. Ainsi G appartient à $W^{K_i} \cup W_{G_i}$ pour tout $i \in I$, et $G \in \mathcal{T}$. L'égalité (3) en résulte.

<u>Remarque.</u> Toute famille $\mathcal{T}$ d'ouverts de la forme (3) est stable pour $\bigcap$ et pour la réunion infinie, contient $\emptyset$ et E, donc constitue une topologie moins fine que $\mathcal{G}$. Mais pour une application f quelconque, $\mathcal{T}$ n'est pas fermée en général dans $\mathcal{G}(E)$.

<u>Proposition 3</u>. Si f est une application continue d'un ouvert $\Omega \subset E$ dans E, la famille $\mathcal{T}$ définie par la relation (3) est une topologie fermée.

Montrons que $\mathcal{T}$ est fermée. Si $G_n \in \mathcal{T}$ et $G_n \to G$ dans $\mathcal{G}$, on a, pour tout $x \in \Omega$, ou bien $x \in G$ ou bien $x \notin G$. Si $x \notin G$, on peut trouver une suite $x_n \to x$ avec $x_n \notin G_n$ (critère 1'). Pour n assez grand, $x_n \in \Omega$. Comme $G_n \in \mathcal{T}$, $x_n \notin G_n$ entraine $f(x_n) \notin G_n$. Mais $f(x_n)$ converge vers $f(x)$ dans E, et le critère 2' entraine $f(x) \notin G$. Par suite $G \in \mathcal{T}$

<u>Conséquence.</u> Si Ω est un ouvert, $f : \Omega \to E$ une application continue, avec $\Omega \cap \overline{f(\Omega)} = \emptyset$ la topologie fermée (3) ne se met pas en général sous la forme (2). L'intersection des $G \in \mathcal{T}$ ~~XXXX~~ contenant un point x donné de $f(\Omega)$ ne constitue pas, en général, un ensemble ouvert.

Nous donnerons dans la Note 84 une caractérisation complète des topologies fermées. Munissons maintenant l'ensemble $\mathfrak{F}_T \subset \mathcal{F}(\mathcal{G})$ des topologies fermées de la topologie induite par celle de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Notons tout de suite que cet espace $\mathfrak{F}_T$ <u>n'est pas compact.</u> Si $\mathcal{T}_n \to \mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, on a bien $\emptyset \in \mathcal{T}$, $E \in \mathcal{T}$ et $G \in \mathcal{A}$, $G' \in \mathcal{A} \Rightarrow G \cap G' \in \mathcal{A}$ (grace à la continuité de $\cap$). Mais $\mathcal{A}$ n'est pas stable pour $\cup$ en général.

<u>Critère de convergence.</u> Une suite $\mathcal{T}_n$ converge vers $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1' - $\forall G \in \mathcal{A}, \ \exists G_n \in \mathcal{T}_n, \ G_n \to G$

2' - $G_{n_k} \in \mathcal{T}_{n_k}, \ G_{n_k} \to G \Rightarrow G \in \mathcal{A}$

La proposition suivante nous permettra dans la Note 84 d'introduire une autre topologie sur $\mathfrak{F}_T$.

<u>Proposition 4.</u> Une famille $\mathcal{T}$ d'ouverts de E est une topologie fermée si et seulement si elle est de la forme :

$$\mathcal{T} = \{ T(G) \ ; \ G \in \mathcal{G} \} \tag{4}$$

où T est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ vérifiant les conditions suivantes :

1 - $T(\emptyset) = \emptyset$ et $T(G) \supset G$ pour tout $G \in \mathcal{G}$

2 - $T[T(G)] = T(G)$

3 - $T(G \cup G') = T(G) \cup T(G')$

4- $G_n \to G$ et $T(G_n) \to G'$ dans $\mathcal{G}$ entraine : $T(G) \subset G'$

Les trois premières propriétés sont, paradoxalement, celles d'une fermeture topologique. La quatrième exprime, nous le verrons dans la Note 84, que T est semi-continue inférieurement.

a/ Soit $\mathcal{T}$ une topologie fermée, et $G \in \mathcal{G}$ un ouvert. L'ensemble $\mathcal{T} \cap W_G$ fermé dans $\mathcal{G}(E)$ n'est pas vide (il contient E), et il est stable pour $\cap$. La limite dans $\mathcal{G}(E)$ de la famille filtrante pour $\supset$ des $G' \in \mathcal{T} \cap W_G$ est donc elle-même dans $\mathcal{T} \cap W_G$. Désignons la par $T(G)$: $T(G)$ est le plus petit ouvert contenant G et appartenant à $\mathcal{T}$.

On vérifie immédiatement que l'application T possède les propriétés 1 et 2. Comme $T(G) \cup T(G') \in \mathcal{T}$ contient $G \cup G'$, et que $T(G) \cup T(G') \subset T(G \cup G')$, T vérifie 3. Enfin, si $G_n \to G$ et $T(G_n) \to G'$, l'inclusion $G_n \subset T(G_n)$ entraine $G \subset G'$. Mais $G' \in \mathcal{T}$, puisque $\mathcal{T}$ est fermée, d'où, d'après 1 et 2, $T(G) \subset T(G') = G'$.

b/ Inversement, soit T une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ vérifiant les quatre propriétés de la proposition, et soit $\mathcal{T}$ la famille définie par la relation (4). D'après 1, on a $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $T(E) \supset E$, d'où $E = T(E) \in \mathcal{T}$. 3 exprime que $\mathcal{T}$ est stable pour la réunion et que $T(G)$ est une fonction croissante de G. Mais $T(G) \cap T(G') \subset T(G)$ entraine $T[T(G) \cap T(G')] \subset T(G)$, puis $T[T(G) \cap T(G')] \subset T(G) \cap T(G')$, d'où l'égalité, d'après 2 : $\mathcal{T}$ est stable pour $\cap$.

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que $\mathcal{T}$ est fermés. Si $G_n \to G$ dans $\mathcal{G}$ avec $G_n \in \mathcal{T}$, c'est à dire $T(G_n) = G_n$, on a $T(G_n) \to G$, et, d'après 4, $T(G) \subset G$, donc $T(G) = G$, d'après 1 : donc $G \in \mathcal{T}$.

Pour plus de commodité, nous allons traduire la proposition 4 dans le langage des fermés.

<u>Proposition 4'.</u> Une famille $\mathcal{T}'$ de fermés de E s'identifie à l'ensemble des fermés d'une topologie $\mathcal{T}$ fermée moins fine que $\mathcal{G}$ si et seulement si elle

est de la forme :

$$(4') \qquad \mathcal{T}' = \{ S(F) : F \in \mathcal{F}(E) \}$$

où S est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

1 - $S(E) = E$ et $F \supset S(F)$ pour tout $F \in \mathcal{F}$
2 - $S[S(F)] = S(F)$
3 - $S(F \cap F') = S(F) \cap S(F')$
4 - $F_n \to F$ et $S(F_n) \longrightarrow F'$ dans $\mathcal{F}$ entraine : $F' \subset S(F)$

1, 2 et 3 exprime que l'application S possède les propriétés d'une ouverture topologique. 4 exprime que S est semi-continue supérieurement. S(F) est le plus grand fermé de $\mathcal{T}'$ contenu dans F.

On voit qu'il est possible d'identifier $\mathcal{F}_T$ avec l'espace des applications s.c.s. de $\mathcal{F}$ dans lui-même, et, en particulier, de munir $\mathcal{F}_T$ de la topologie de la seme-continuité ~~inférieure~~ supérieure. Nous poursuivrons ce travail dans la Note 84.

Table des matières