

GENERALISATION DU THEOREME DE RECOUVREMENT

Considérons, sur la droite réelle, un schéma booléen caractérisé par sa densité θ de germes primaires, et par la granulométrie en nombre F des grains primaires. Nous poserons :

$$U(h) = \int_0^h [1 - F(x)] dx$$

On sait que $e^{-\theta U(h)}$ représente la probabilité conditionnelle pour que $x + h$ soit dans les pores lorsque l'on sait que x est lui-même dans les pores. On retrouve ce résultat comme suit : lorsque n germes (extrémités gauches des grains primaires) tombent entre 0 et h (probabilité $\frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h}$), ces n germes sont répartis indépendamment sur $(0, h)$ avec une densité uniforme. La probabilité pour que l'un, donné, de ces grains ne couvre pas h est $\frac{1}{h} \int_0^h F(y) dy$. Lorsque 0 est dans les pores, la probabilité pour que h ne soit pas couvert est donc :

$$\sum_n \frac{(\theta h)^n}{n!} e^{-\theta h} \left[\frac{1}{h} \int_0^h F(y) dy \right]^n = e^{-\theta \int_0^h [1 - F(y)] dy} = e^{-\theta U(h)}$$

Désignons par $G(x)$ la granulométrie, en nombre, des grains obtenus après passage en booléen, c'est à dire après la réunion ensembliste des grains primaires implantés au hasard sur la droite. Il est intéressant de relier la granulométrie booléenne G à la granulométrie primaire F . Pour cela, nous allons évaluer la probabilité conditionnelle pour que h soit couvert sachant que 0 ne l'est pas. Cet événement est somme des événements incompatibles suivants : " $h - x$ est dans les pores, un germe primaire est tombé entre $h-x$ et $h-x + dx$, et ce germe est l'origine d'un grain booléen de longueur supérieure à x ". En raison du caractère semi-markovien du schéma, cet événement a la probabilité $\theta dx e^{-\theta U(h-x)} [1 - G(x)]$. Comme, enfin, 0 étant dans les pores, $e^{-\theta U(h)}$ est la probabilité pour que h soit couvert, on obtient l'équation intégrale :

$$(1) \quad e^{-\theta U(h)} + \theta \int_0^h e^{-\theta U(h-x)} [1 - G(x)] dx = 1$$

Désignons par $R(\lambda; \theta)$ et $\Gamma(\lambda; \theta)$ les transformées de Laplace de $e^{-\theta U(x)}$ et de $G(dx)$: elles dépendent de θ .

$$(2) \quad \begin{cases} \Gamma(\lambda; \theta) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} G(dx) \\ R(\lambda; \theta) &= \int_0^{\infty} e^{-\theta U(x) - \lambda x} dx \end{cases}$$

L'équation intégrale (2) s'écrit :

$$(3) \quad R + \theta \frac{1 - \Gamma}{\lambda} R = \frac{1}{\lambda}$$

On en déduit les formules réciproques :

$$(4) \quad \begin{cases} R = \frac{1}{\lambda + \theta(1 - \Gamma)} \\ 1 - \Gamma = \frac{1}{\theta} \frac{1 - \lambda R}{R} \end{cases}$$

R désignant, ne l'oublions pas, la transformée de la fonction $e^{-\theta \int_0^x [1 - F(x)] dx}$ et non celle de $F(dx)$.

Espérances. Désignons par $m = \int_0^{\infty} [1 - G(x)] dx$ l'espérance (si elle existe) de la traversée des grains booléens. La première relation (4) montre que $R(\lambda)$ se comporte en $1/\lambda (1 + \theta m)$ au voisinage de $\lambda = 0$. D'après les théorèmes taubériens ($e^{-\theta U}$ étant monotone), on en déduit :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{e^{-\theta U(h)}}{h} = \frac{1}{1 + \theta m}$$

Mais $U(h) = \int_0^h [1 - F(x)] dx$ a pour limite l'espérance m' des grains primaires, et d'autre part $e^{-\theta U(\infty)}$ est la probabilité q pour qu'un ~~XXX~~ point ne soit pas couvert. D'où :

$$(5) \quad q = e^{-\theta m'} = \frac{1}{1 + \theta m}$$

C'est là un résultat connu de la théorie des schémas booléens. On notera surtout que l'existence de m entraîne celle de m' . Inversement, d'ailleurs, si m' existe, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\theta U(x)} dx$ diverge. La fonction $e^{-\theta U}$ étant monotone, $R(\lambda)$ est équivalent à $e^{-\theta m'}/\lambda$ pour $\lambda \rightarrow 0$. La deuxième relation (4) montre que $m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1-R(\lambda)}{\lambda}$ existe également, et vaut $\frac{1}{\theta} [e^{\theta m'} - 1]$.

Ainsi, ou bien les lois F et G admettent toutes deux des espérances finies, ou bien aucune d'elles n'en possède.

Exemple 1. Déterminer la granulométrie primaire F induisant, pour un θ donné, une granulométrie booléenne G donnée d'avance : ce problème n'a pas nécessairement de solution admissible (F positive croissante variant de 0 à 1).

Si $G(x) = 1 - e^{-ax}$ est une loi exponentielle, le schéma booléen est une chaîne de Markov à deux états. Montrons qu'il est possible de trouver une granulométrie primaire F (non exponentielle) engendrant cette chaîne de Markov par passage en booléen. On veut avoir $\Gamma = a/(a+\lambda)$, d'où, selon (4) :

$$R = \frac{a+\lambda}{\lambda} \frac{1}{a+\theta+\lambda}$$

On en tire aussitôt :

$$e^{-\theta U(x)} = e^{-(a+\theta)x} + \frac{a}{a+\theta} [1 - e^{-(a+\theta)x}]$$

ou encore :

$$e^{-\theta U(x)} = \frac{a}{a+\theta} + \frac{\theta}{a+\theta} e^{-(a+\theta)x}$$

On reconnaît bien la probabilité de transition d'une chaîne à deux états. Mais il faut vérifier que cette expression de $e^{-\theta U}$ conduit à une véritable granulométrie F . Passons donc aux logarithmes, et dérivons en x . Il vient :

$$(6) \quad 1 - F(x) = \frac{(a+\theta) e^{-(a+\theta)x}}{a + \theta e^{-(a+\theta)x}}$$

Il s'agit bien d'une fonction décroissante, nulle à l'infini et valant 1 à l'origine : F est une véritable granulométrie. L'espérance m' du grain primaire existe et vaut $m' = U(\infty) = \frac{1}{\theta} \log \frac{a+\theta}{\theta}$

Cette granulométrie (6), qui n'est pas exponentielle, apporte une solution à ce problème paradoxal qui consiste à simuler l'absence de mémoire des phénomènes markoviens, à partir de données initiales non markoviennes.

Exemple 2 : Files d'attente. Nous venons d'utiliser la première relation (4). En général, on se donne plutôt la granulométrie primaire, et on cherche à en déduire la granulométrie booléenne G . En théorie des files d'attente, un problème *semblable* se pose dans le cas où les guichets en fonction sont assez nombreux pour que tout client survenant soit aussitôt servi. Si F est la loi du temps de service de chaque client, G représentera la loi gouvernant la période T d'activité : T est l'intervalle de temps séparant l'arrivée du premier client et l'instant où les guichets redeviennent tous libres simultanément pour la première fois. On a $P(T < \infty) = 1$ si $F(0) = 1$, c'est à dire si $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 - \lambda R(\lambda)}{R(\lambda)} = 0$ autrement dit, si $R(\lambda) \rightarrow \infty$ pour $\lambda \rightarrow 0$. Il en est ainsi si l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta U(x)} dx$$

est divergente. Cette condition est remplie, en particulier, pour $U(\infty) = m' < \infty$ et on a alors $E(T) = m < \infty$. Mais il se pourrait que l'on ait $U(\infty) = \infty$ sans que l'intégrale ci-dessus converge : dans ce cas, on a toujours $P(T < \infty) = 1$ mais cette fois $E(T) = \infty$. Si, par exemple, $1 - F(x)$ est équivalent à a/x pour x grand (cas du rapport X/Y de deux variables exponentielles réduites, avec $1 - F(x) = 1/(1+x)$), on a $U(x)$ équivalent à $a \log x$, et $e^{-\theta U(x)}$ à $x^{-\theta a}$. L'intégrale diverge pour $\theta < 1/a$: on a alors $P(T < \infty) = 1$ et $E(T) = \infty$.

Exemple 3 : Théorème de recouvrement. On se donne le segment $(0, l)$ de longueur l sur l'axe des x . On implante l'extrémité gauche d'un grain en 0, puis indépendamment, n autres germes sur $(0, l)$? Chacun de ces $n+1$ germes est l'origine d'un segment de longueur X_i aléatoire, les X_i étant indépendants et obéissant à la même loi F . Quelle est la probabilité pour que le segment $(0, l)$ soit recouvert par ces $n+1$ grains?

On résoud ce problème, au moins théoriquement, en poissonnisant. Si les germes relèvent d'un schéma poissonien de densité θ , la probabilité pour que le segment soit couvert est, par définition, $1 - G_0(\ell)$, c'est à dire la granulométrie booléenne. Si donc $P_n(\ell)$ désigne la probabilité que nous cherchons, nous avons identiquement :

$$(7) \quad 1 - G_0(\ell) = e^{-\theta\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta\ell)^n}{n!} P_n(\ell)$$

Si donc on sait former l'expression $1 - G_0(\ell)$ de la solution de (4), et développer en θ le produit $e^{\theta\ell} [1 - G_0(\ell)]$, la relation (7) permettra le calcul de la probabilité $P_n(\ell)$ de recouvrement.

Application. Traçons le cas classique où les $n+1$ segments ont tous la même longueur a ($< \ell$). On a $1 - F(x) = 1$ pour $x < a$ et 0 pour $x > a$, d'où : $U(h) = h$ si $h < a$, et a si $h > a$. On en tire :

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \int_0^a e^{-\theta h - \lambda h} dh + e^{-\theta a} \int_a^\infty e^{-\lambda h} dh \\ &= \frac{\lambda + \theta}{\lambda(\lambda + \theta)} e^{-(\lambda + \theta)a} \end{aligned}$$

La relation (4) donne alors :

$$(8) \quad \frac{1 - R(\lambda)}{\lambda} = \frac{1 - e^{-(\lambda + \theta)a}}{\lambda + \theta e^{-(\lambda + \theta)a}}$$

Le premier membre de (8) est la transformée de $1 - G(\ell)$. La transformée de $e^{\theta\ell} [1 - G(\ell)]$ s'en déduit, pour $\lambda > \theta$, en remplaçant λ par $\lambda - \theta$, ce qui donne :

$$\frac{1 - R(\lambda - \theta)}{\lambda - \theta} = \frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda - \theta(1 - e^{-\lambda a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \left(\frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda} \right)^{n+1}$$

Ainsi $\frac{e^n P_n(\ell)}{n!}$ admet la transformée $\left(\frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda} \right)^{n+1}$. Si $f_a(x)$ est la densité $1/a$ uniforme sur $(0, a)$, la transformée de f_a est $\frac{1 - e^{-\lambda a}}{\lambda}$. On a donc :

$$(9) \quad P_n(\ell) = n! \frac{a^{1+n}}{\ell^n} f_a^{*(n)}(\ell)$$

On retrouve ainsi un résultat classique (cf. Feller, Vol. II, I, 9, 11, et XIV, 2, Ex. a, où cet auteur utilise une méthode de poissonisation qui ne diffère pas substantiellement de la notre.)



- janvier 1968