

MESURES ET CAPACITES

Sur un espace E localement compact dénombrable (en abrégé LCD), on construit l'espace compact $\mathcal{U}(E)$ des ouverts de E , muni de sa topologie compacte dénombrable $\mathcal{W}$, puis l'espace compact $\Phi_g(\mathcal{U})$ des fonctions d'ouverts $T(G)$ semi-continues inférieurement (s.c.i.) pour la topologie de $\mathcal{U}$

Proposition 1 Dans $\Phi_g(\mathcal{U})$, les fonctions croissantes constituent un espace compact Φ_{gc}

En effet, soit T_n une suite de fonction convergeant vers T dans Φ_g et vérifiant $T_n(G) \leq T_n(G')$ si $G \subset G'$.

Soient G et G' deux ouverts de E avec $G \subset G'$. On peut trouver (critère 1' de convergence) une suite $G'_n \rightarrow G'$ avec $T_n(G'_n) \rightarrow T(G')$. La continuité de l'intersection dans $\mathcal{U}$ donne $G'_n \cap G \rightarrow G$, et le critère 2' de convergence montre alors, les T_n étant croissants :

$$T(G) \leq \liminf T(G'_n \cap G) \leq \liminf T_n(G'_n) = T(G')$$

Topologie de Φ_{gc} Les ouverts de type W^c , dans Φ_{gc} , sont de la forme

$$\left\{ T : \inf_{G \in W_K^c} T(G) < a \right\}. \text{ Comme } T \text{ est croissante, posant pour tout compact } K :$$

$$T(K) = \inf_{G \supset K} T(G)$$

les ouverts de ce premier type sont de la forme $\{ T(K) < a \}$, K compact.

De même, les ouverts du type W_K sont de la forme $\left\{ \inf_{G \in W_K} T(G) > b \right\}$ c'est à dire $\{ T(G') > b \}$, G' ouvert.

D'où les critères de convergence : $T_n \rightarrow T$ si et seulement si on a à la fois :

- 1 - $T(G) \leq \liminf T_n(G)$ pour tout ouvert G
- 2 - $T(K) \geq \limsup T_n(K)$ pour tout compact K

Ces critères 1 et 2 sont équivalents respectivement aux critères 1' et 2' suivants :

$$1' - \forall G \in \mathcal{G}, \exists G_n \in \mathcal{G}, G_n \rightarrow G, T_n(G_n) \rightarrow T(G)$$

$$2' - G_{n_k} \in \mathcal{G}, G_{n_k} \rightarrow G \Rightarrow T(G) \leq \liminf T_{n_k}(G_{n_k})$$

Lemme 1 Si T_n converge vers T dans $\Phi_{\mathcal{G}}$, pour tout ouvert G on peut trouver une suite G_n vérifiant :

$$G_n \subset G, G_n \rightarrow G \text{ et } T_n(G_n) \rightarrow T(G)$$

En effet, d'après 1', on peut trouver une suite $G'_n \rightarrow G$ avec $T_n(G'_n) \rightarrow T(G)$.

Posons $G_n = G \cap G'_n$. Les G_n convergent vers G (continuité de $\cap$). D'après 2' et la croissance des T_n on a :

$$T(G) \leq \liminf T_n(G_n) \leq \limsup T_n(G_n) \leq \lim T_n(G'_n) = T(G). \text{ Donc } T_n(G_n) \rightarrow T(G).$$

Lemme 2. Dans $\mathcal{G}(E)$, soient deux suites convergentes $G_n \rightarrow G$ et $G'_n \rightarrow G'$ telles que $G_n \subset G$ et $G'_n \subset G'$. On a :

$$G_n \cap G'_n \rightarrow G \cap G' \text{ et } G_n \cup G'_n \rightarrow G \cup G'$$

La première convergence résulte de la continuité de $\cap$. Montrons la deuxième.

Si $K \subset G \cup G'$, K compact, on peut trouver deux compacts $K_1 \subset G$ et $K'_1 \subset G'$

avec $K = K_1 \cup K'_1$ (résultat classique). Pour n assez grand, on a $K_1 \subset G_n$

et $K'_1 \subset G'_n$, d'où $K \subset G_n \cup G'_n$, et le critère 2 de convergence. Si G_0 est un

ouvert non contenu dans $G \cup G'$, il n'est pas non plus contenu dans $G_n \cup G'_n \subset G \cup G'$.

Le critère 1 est donc automatiquement vérifié, et la convergence annoncée en résulte.

Proposition 2. Le sous-espace $\chi(E) \subset \Phi_{\mathcal{G}}(\mathcal{G})$ des fonctions $T \in \Phi_{\mathcal{G}}(\mathcal{G})$ croissantes et fortement sous-additives est compact.

Soit T_n une suite convergeant vers T dans $\Phi_{\mathcal{G}}$, avec pour $G, G' \in \mathcal{G}$:

$$T_n(G \cup G') + T_n(G \cap G') \leq T_n(G) + T_n(G')$$

Le critère 1' et les lemmes 1 et 2 montrent que l'on peut trouver deux suites

G_n et G'_n vérifiant :

$$\begin{aligned}
G_n &\subset G, & G_n &\rightarrow G, & T_n(G_n) &\rightarrow T(G) \\
G'_n &\subset G', & G'_n &\rightarrow G', & T_n(G'_n) &\rightarrow T(G') \\
G_n \cap G'_n &\rightarrow G \cap G' & \text{et} & & G_n \cup G'_n &\rightarrow G \cup G'
\end{aligned}$$

D'après le critère 2', on en déduit :

$$\begin{aligned}
T(G \cup G') &\leq \lim T_n(G_n \cup G'_n) \\
T(G \cap G') &\leq \lim T_n(G_n \cap G'_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(G \cup G') + T(G \cap G') &\leq \lim T_n(G_n \cup G'_n) + \lim T_n(G_n \cap G'_n) \\
&\lim [T_n(G_n \cup G'_n) + T_n(G_n \cap G'_n)] \\
&\lim [T_n(G_n) + T_n(G'_n)] = T(G) + T(G')
\end{aligned}$$

Proposition 3. $\chi(E)$ est un espace de capacités de Choquet.

Soit $T \in \chi(E)$. T se prolonge sur $\mathcal{P}(E)$ selon la formule :

$$(1) \quad T(A) = \inf_{G \supset A} T(G)$$

a/ On vérifie que $A_n \uparrow A$ entraîne $T(A_n) \uparrow T(A)$. (Démonstration, par exemple, dans Brelot, *Éléments de la théorie classique du potentiel*, C.D.U., p. 64 : cette démonstration utilise la sous-additivité)

b/ Pour un compact K , $T(K)$ possède la propriété de continuité à droite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists G \in \mathcal{G}, G \supset K : K \subset K' \subset G \Rightarrow T(K') \leq T(K) + \varepsilon$$

Cela résulte de la seule définition (1). On peut, en effet, trouver $G \supset K$ avec $T(G) \leq T(K) + \varepsilon$, et par suite $T(K') \leq T(K) + \varepsilon$ pour $K' \subset G$

c/ Si on pose $T_*(G) = \sup_{K \subset G} T(K)$, on a $T_*(G) = T(G)$. C'est ici qu'intervient la semi-continuité inférieure de $T(G)$. On a d'abord $T_*(G) \leq T(G)$, d'après la définition de $T(K)$. Mais, T étant s.c.i., on peut trouver $K \subset G$ tel que $G' \supset K$ entraîne $T(G') \geq T(K) - \varepsilon$, donc aussi $T_*(G) \geq T(K) \geq T(G) - \varepsilon$ et finalement $T_*(G) = T(G)$.

d/ Il est équivalent de procéder en sens inverse : partir d'une fonction $T(K)$ croissante, fortement sous-additive et continue à droite, définir $T(G) = \sup_{K \subset G} T(K)$ (cette définition entraîne à elle seule que $T(G)$ est sci) et vérifier $T(K) = \inf_{G \supset K} T(G)$ (c'est ici qu'intervient la continuité à droite de $T(K)$)

e/ La continuité à droite de $T(K)$ entraîne ensuite $T(K_n) \downarrow T(K)$ pour $K_n \downarrow K$ (l'inverse n'étant pas vrai).

f/ Le théorème des capacités donne ensuite $T(A) = \sup_{K \subset A} T(K)$ pour tout A appartenant à la classe de Souslin engendrée par les compacts, en particulier, E étant LCD, pour tout A appartenant à la σ -algèbre de Borel $\sigma(\mathcal{F})$ sur E .

Proposition 4. Le sous-espace $\mathcal{M}(E)$ des $\mu \in \mathcal{X}$ vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(G \cup G') = \mu(G) + \mu(G')$ pour $G \cap G' = \emptyset$ est compact dans $\mathcal{X}(E)$.

En effet, soit $\mu_n \rightarrow \mu$ dans $\mathcal{X}$ avec $\mu_n \in \mathcal{M}$. De $\mu_n(\emptyset) = 0$, le critère 2' déduit $\mu(\emptyset) \leq 0$. Mais on peut trouver $G_n \rightarrow \emptyset$ avec $\mu_n(G_n) \rightarrow \mu(\emptyset)$, donc $\mu(\emptyset) \geq 0$ et $\mu(\emptyset) = 0$.

Si $G \cap G' = \emptyset$, soit $S_n \rightarrow G \cup G'$ avec $\mu_n(S_n) \rightarrow \mu(G \cup G')$. On a $S_n \cap G \rightarrow G$ et $S_n \cap G' \rightarrow G'$. Le critère 2' donne alors :

$$\begin{aligned} \mu(G) &\leq \liminf \mu_n(S_n \cap G) \\ \mu(G') &\leq \liminf \mu_n(S_n \cap G') \\ \mu(G) + \mu(G') &\leq \liminf \mu_n[S_n \cap (G \cup G')] \leq \lim \mu_n(S_n) = \mu(G \cup G') \end{aligned}$$

L'inégalité inverse résulte de la sous-additivité, et permet de conclure.

La proposition 3 permet d'identifier $\mathcal{M}(E)$ avec l'espace des mesures positives définies sur $\sigma(\mathcal{F})$ et vérifiant :

- 1- $\mu(\emptyset) = 0$
- 2- $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pour des $A_n \in \sigma(\mathcal{F})$ disjoints
- 3- $\mu(K) = \inf_{G \supset K} \mu(G)$ pour tout compact K

La topologie induite sur $\mathcal{M}(E)$ par celle de $\Phi_{\mathcal{G}}$ n'est autre que la topologie vague. C'est une topologie compacte.

Proposition 5. $\Phi_{\mathcal{F}}(E)$ s'identifie à un sous-espace compact de $\chi(E)$

A toute fonction scs est associée la fonctionnelle $X(G) = \sup_{x \in G} f(x)$ vérifiant :

$$(1) \quad X\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right) = \sup_{i \in I} X(G_i)$$

et inversement, toute fonction $X(G)$ vérifiant (1) est la fonctionnelle associée à la fonction scs $f(x) = \inf_{G \ni x} X(G)$ (cf. Note 74)

La topologie de $\Phi_{\mathcal{F}}$ est engendrée par les $\{X(G) > b\}$ et les $\{X(K) < a\}$. La relation (1) entraîne que X est croissante et sous-additive. Il suffit donc de montrer que X est sci sur $\mathcal{G}(E)$

Soit donc $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ avec $B_n \subset \bar{B}_n \subset B_{n+1}$ ouverts relativement compacts.

De (1) résulte qu'il existe un B_n avec $X(G) \leq X(B_n) + \varepsilon$. Par suite, tout $G' \supset \bar{B}_n$ vérifie $X(G) \leq X(G') + \varepsilon$, et X est sci.