N-80

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 86

PROCESSUS A DEUX ETATS ET RENOUVELLEMENTS MARKOVIENS

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 86

PROCESSUS A DEUX ETATS ET RENOUVELLEMENTS MARKOVIENS

I - DEFINITIONS

Au sens classique, un processus de renouvellement est un schéma d'implantation aléatoire de points sur la droite réelle dans lequel les distances séparant deux points consécutifs sont des variables aléatoires indépendantes obéissant à une même loi $F(dx)$, qui suffit alors à caractériser entièrement le schéma. A partir de cette définition, on peut envisager des généralisations diverses. On peut, en premier lieu, lever la condition d'indépendance et la remplacer, par exemple, par une condition de dépendance markovienne : la loi $F(dx)$ cède la place à un noyau markovien $F(y;dx)$ représentant la loi conditionelle de la longueur X d'un intervalle sachant que l'intervalle précédent est de longueur $Y = y$. Ce noyau suffit à caractériser le schéma (sous réserve d'une condition d'ergodicité : existence de la loi limite μ vérifiant $\mu = \mu F$, soit :

$$\mu(A) = \int \mu(dx)\ F(x;A)$$

et admettant une espérance mathématique $m = \int x\mu(dx) < \infty$ cette dernière condition est évidemment nécessaire pour que le nombre $\nu = 1/m$ moyen de points par unité de longueur ne soit pas nul). En deuxième lieu, on peut cesser d'imposer aux intervalles successifs d'obéir à la même loi. Plus précisément, nous caractériserons chaque intervalle par deux variables aléatoires : sa longueur L, et son état ou son affectation E, et nous supposerons qu'il y a indépendance conditionnelle entre les caractéristiques (E_{n+i}, L_{n+i}) $(i > o)$ des successeurs de l'intervalle de caractéristiques (E_n, L_n) et celles de ses prédécesseurs (E_{n-j}, L_{n-j})

($j < o$), lorsque l'on connaît (E_n, L_n). Il s'agit donc d'un processus de Markov $(E_n, L_n)_{n \in N}$ à temps discret prenant ses valeurs dans l'espace produit $\Omega \times R$, où Ω est l''espace des états E. Ce processus est défini par la donnée d'un noyau markovien $P(e, \ell ; de', d\ell')$ sur $\Omega \times R_+$. [On notera que les familles $(E_n)_{n \in N}$ ou $(L_n)_{n \in N}$ ne sont pas en général des processus markoviens.]

Exemples - 1) Prenons comme espace Ω des états la droite réelle R. La construction précédente conduit à une fonction aléatoire $f(x)$ variant par saut (constante et égale à E_n sur l'intervalle n de longueur aléatoire L_n). Cette fonction aléatoire $f(x)$ n'est pas markovienne (en $x \in R$), contrairement à la famille $(E_n, L_n)_{n \in N}$- Nous dirons que $f(x)$ est un processus à renouvellements markoviens.

2) Supposons que l'espace des états Ω soit fini ou dénombrable, soit $\Omega = \{e_1, e_2, \dots\}$. La construction précédente conduit à une partition de la droite en composantes de nature $e_1, e_2, \dots$: un intervalle L_n relève de la composante e si $E_n = e$. On obtient ainsi une famille de fonctions aléatoires en tout ou rien $f_1(x), f_2(x) \dots$ ($f_i(x) = 1$ ou o selon que x appartient ou non à un intervalle de caractéristique e_i) , vérifiant $\sum_i f_i = 1$, $f_i f_j = o$ si $i \neq j$ - (ces fonctions aléatoires ne sont pas markoviennes). C'est à partir des probabilités de transition :

$$P_{ij}\,(\ell\,;d\ell') = P(L_{n+1} \in (\ell',\ \ell' + d\ell'),\ E_{n+1} = e_j \,|\, L_n = \ell, E_n = e_i)$$

de la famille markovienne $(E_n,\ L_n)$ qu'il convient de reconstituer la loi spatiale des $f_i(x)$. La tâche est ardue dans le cas général. Nous examinerons uniquement les deux cas typiques suivants :

3) <u>Processus à deux états et renouvellements markoviens</u>

On suppose ici $\Omega\ = \{o,\ 1\}$ et on admet que les états o et 1 se succèdent en alternant ($P_{ij}\ (\ell;\ d\ell') = o$ si $i = j$). Le processus est défini par les deux noyaux :

$$F_o\ (y;dx) \qquad\qquad F_1(y;dx)$$

$F_o(y;dx)$ par exemple, représente la loi de la longueur d'un pore précédé d'un grain de longueur y. On doit admettre l'existence des lois stationnaires ("à priori") $F_o(dx)$ et $F_1(dx)$, qui sont les granulométries en nombre des pores et des grains : elles doivent posséder des espérances m_o et m_1, et vérifier le système :

$$(1)\qquad \begin{cases} F_o(A) = \int_o^{\infty} F_1(dy)\ F_o(y;A) \\ F_1(A) = \int_o^{\infty} F_o(dy)\ F_1(y;A) \end{cases}$$

pour tout évènement A - (ergodicité des noyaux F_1F_o et F_oF_1)

4) <u>Processus de renouvellement à plusieurs états</u> (ou à une infinité dénombrable d'états)

On admet cette fois que les $(E_n)_{n \in N}$ constituent à eux seuls une chaîne de Markov, et que la longueur L_n de l'intervalle n est indépendante des $L_{n'}$, $(n' \neq n)$ conditionnellement en E_n :

autrement dit, la longueur L d'un intervalle appartenant à la composante e_i obéit toujours à une même loi $F_i(d\ell)$, quelles que soient les hypothèses faites par ailleurs sur les autres intervalles.

Le schéma est caractérisé cette fois par les <u>granulométries</u> en nombre F_i et la <u>matrice de transition</u> P_{ik} (probabilité pour qu'une composante e_k succède à une composante e_i). On admettra que P_{ik} est irréductible et que les états sont persistants - (mais la chaîne peut être périodique : en particulier, il peut y avoir un ordre de succession obligé des états (phénomènes cycliques) -

Le cas d'un processus de renouvellement à deux états est particulièrement simple. Nous l'avons étudié dans la note 77 - Nous nous proposons ici d'examiner le cas particulier 3/ ci-dessus.

II - PROCESSUS A DEUX ETATS ET RENOUVELLEMENTS MARKOVIENS

Reprenons les notations de l'exemple 3, en posant aussi :

$$F_0(z) = \int_0^z F_0(dz), \qquad F_0(x;y) = \int_0^y F_0(x;dy) \text{ etc...}$$

Si l'on suppose que les granulométries stationnaires F_0 et F_1 existent et possèdent les espérances finies m_0 et m_1, les probabilités à priori p_0 (p_1) pour qu'un point donné appartienne aux pores (aux grains) sont :

$$p_o = \frac{m_o}{m_o+m_1} \quad , \qquad p_1 = \frac{m_1}{m_o+m_1}$$

(Ce point devrait faire l'objet d'une généralisation du théorème de renouvellement. Nous l'admettrons sans démonstration[1]). Pour calculer la covariance $C_{11}(h) = P(x \in e_1,\ x+h \in e_1)$, nous introduirons d'abord les covariances conditionnelles $H_{ij}(y;x)$ définie comme suit ($i,j = 0$ ou 1) : $H_{ij}(y;x)$ est la probabilité d'avoir $x \in e_j$ ($x \geqslant 0$ lorsque 0 est l'origine d'un intervalle e_i succédant à un intervalle $e_{i'}$ (i' complémentaire de i) de longueur y. La propriété markovienne de la famille (L_n, E_n) entraîne aussitôt :

$$(2) \quad \begin{cases} H_{o1}(y;x) = 1 - H_{oo}(y;x) = \displaystyle\int_o^x F_o(y;dz)\ H_{11}(z;x-z) \\[2ex] H_{1o}(y;x) = 1 - H_{11}(y;x) = \displaystyle\int_o^x F_1(y;dz)\ H_{11}(z;x-z) \end{cases}$$

Ce système d'équations intégrales doit permettre - (en principe) de déterminer les noyaux $H_{ij}(y;x)$ -

Montrons comment la covariance rectangle $C_{o1}(h)$ se déduit ensuite des H_{ij} -

On s'intéresse à l'évènement "$0 \in e_o,\ h \in e_1$". Si 0 appartient à un segment e_o de longueur $\ell \in (x, x+dx)$ (probabilité $\frac{p_o}{m_o} \times F_o(dx) = \frac{x}{m_1+m_o}\ F_o(dx)$), l'extrémité gauche de ce segment tombe dans $(-y, -y-dy)$ avec la probabilité $\frac{dy}{x}$ $(o \leqslant y \leqslant x)$. Son extrémité droite tombe en $x-y \geqslant o$, et on doit avoir $x-y \leqslant h$:

1- Demonstration faite dans une note manuscrite de J.M. Jacod, déc. 1968 ces conditions étant réalisées, l'évènement qui nous intéresse a la probabilité $H_{11}(x;h-x+y)$. D'où l'équation intégrale :

$$C_{01}(h) = \frac{1}{m_1+m_o} \int_o^{\infty} F_o(dx) \int_D H_{11}(x;h-x+y)\, dy$$

avec $D = \{y \leqslant x,\ x-y \leqslant h,\ y \geqslant o\}$

En échangeant l'ordre d'intégration, on trouve :

$$(3) \qquad C_{01}(h) = \frac{1}{m_o+m_1} \int_o^{\infty} dy \int_y^{y+h} F_o(dx) \quad H_{11}(x;y+h-x)$$

<u>Remarque</u> : Contrairement à l'équation (2), la relation (3) n'utilise pas la propriété markovienne de (L_n, E_n), mais seulement la définition des probabilités conditionnelles $H_{11}(x;y)$. Elle est donc <u>valable pour toute fonction aléatoire en tout ou rien.</u> Dans le cas de (2), en désignant par $H_{11}(y,z;x)$ la probabilité pour que $x \in e_1$, sachant que O est l'origine d'un segment e_1 précédé d'un segment e_o de longueur z, lui-même précédé d'un segment e_1 de longueur y, on obtient dans le cas général :

$$(2') \qquad H_{01}(y;x) = \int_o^{x} F_o(y;dz) \quad H_{11}(y,z;x-z)$$

Seule la propriété markovienne permet de remplacer $H_{11}(y,z;x-z)$ par $H_{11}(z;x-z)$. Par contre, introduisons les probabilités conditionnelles du type :

$$H_{01}(x) = \int_o^{\infty} F_1(dy)\ H_{01}(y;x) \qquad (x \geqslant o)$$

(probabilité de $x \in e_o$, sachant que O est l'origine d'un segment e_o, mais sans hypothèse sur la longueur du segment e_1 précédent). Il suffit d'intégrer (2') par rapport à la mesure $F_1(dy)$, pour trouver, compte tenu des propriétés des probabilités conditionnelles :

$$(2'') \qquad H_{o1}(x) = \int_o^x F_o(dz) \; H_{11}(z;x-z)$$

Cette relation (2"), comme la relation (3), est vérifiée même par les processus qui ne sont pas à renouvellements markoviens.

Exercice - Former $C'_{o1}(h)$ en dérivant (3) - Compte tenu de (2"), établir la relation

$$(m_o+m_1)\; C'_{o1}(h) = H_{11}(h) - H_{o1}(h) = H_{11}(h) + H_{oo}(h) - 1$$

Cette relation est valable pour toute fonction aléatoire en tout ou rien. Nous la retrouverons ci-dessous.

Transformées de Laplace - Posons

$$\begin{cases} \Phi_i(y;\lambda) = \int_o^\infty e^{-\lambda x} \; F_i(y;dx) \\ \Phi_i(\lambda) = \int_o^\infty e^{-\lambda x} \, F_i(dx) = \int_o^\infty F_j(dy)\Phi_i(y;\lambda) \quad (j \neq i) \end{cases}$$

et de même

$$\begin{cases} \eta_{ij}(y;\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \; H_{ij}(y;x)\, dx \\ \eta_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty H_{ij}(x)\; e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty F_k(dy)\, \eta_{ij}(y;\lambda) \qquad (k \neq i) \end{cases}$$

Il est commode d'introduire un temps d'arrêt T_λ indépendant du processus et obéissant à la loi exponentielle $e^{-\lambda t}$. L'expression $\eta_{ij}(x;\lambda)$ représente alors l'espérance conditionnelle du temps passé dans l'état e_j avant l'instant d'arrêt T_λ, sachant que O est l'origine d'un segment e_i précédé d'un segment (appartenant à l'état complémentaire) de longueur x -

Considérons, par exemple, $\eta_{01}(y;\lambda)$. Le processus est en e_0 au temps O et entre pour la première fois en e_1 en un temps $\mathcal{Z} \in (z,z+dz)$ avec la probabilité $F_0(y;dz)$, et on a de plus $T_\lambda \geqslant \mathcal{Z}$ avec la probabilité $e^{-\lambda z}$. L'espérance conditionnelle du temps passé dans l'état 1 est alors $\eta_{11}(z;\lambda)$. D'où la relation :

$$\eta_{01}(y;\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \; F_0(y;dz) \quad \eta_{11}(z;\lambda)$$

Compte tenu de $\eta_{00}(y;\lambda) + \eta_{01}(y;\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, il vient :

$$(4) \qquad \begin{cases} \eta_{00}(y;\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty e^{-\lambda z} \; F_0(y;dz)\; \eta_{11}(z;\lambda) \\ \eta_{11}(y;\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty e^{-\lambda z} \; F_1(y;dz)\; \eta_{00}(z;\lambda) \end{cases}$$

Ces relations sont équivalentes à (2) (et utilisent la propriété markovienne). En intégrant en y, on en déduit :

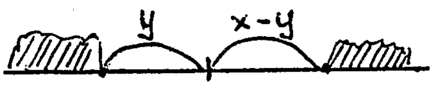
$$(4'')\quad \begin{cases} \eta_{oo}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty e^{-\lambda z}\, F_o(dz)\quad \eta_{11}(z;\lambda) \\ \eta_{11}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \int_0^\infty e^{-\lambda z}\, F_1(dz)\quad \eta_{oo}(z;\lambda) \end{cases}$$

Ces relations (4") - équivalentes à (2") - peuvent s'établir directement. Elles ne font plus intervenir la propriété markovienne, mais seulement la définition des espérances conditionnelles, et sont donc valables <u>pour toute fonction aléatoire en tout ou rien</u>.

<u>Calcul de la covariance</u>. On posera

$$\chi_{o1}(\lambda) = \int_0^\infty C_{o1}(h)e^{-\lambda h}dh$$

$\frac{1}{p_o}\ \chi_{o1}(\lambda)$ est l'espérance conditionnelle du temps passé dans l'état e_1 avant l'instant d'arrêt T_λ lorsqu'on sait que l'origine O tombe dans un segment e_o (sans être une extrémité de ce segment).



Ce segment e_o a une longueur $L \in (x,x+dx)$ avec une probabilité $\frac{x}{m_o}\ F_o(dx)$, et son extrémité gauche tombe entre -y et -y-dy avec la probabilité $\frac{dy}{x}$ $(o \leqslant y \leqslant x)$. L'espérance conditionnelle du temps passé dans e_1 entre o et T_λ est alors $e^{-\lambda(x-y)}\eta_{11}(x;\lambda)$.

On a ainsi :

$$\frac{1}{p_o} \chi_{o1}(\lambda) = \int_o^\infty \frac{x}{m_o} F_o(dx) \int_o^x \frac{dy}{x} e^{-\lambda(x-y)} \eta_{11}(x;\lambda)$$

Compte tenu de $p_o/m_o = 1/(m_o+m_1)$, il vient donc :

$$(5) \qquad \chi_{o1}(\lambda) = \frac{1}{m_o+m_1} \int_o^\infty \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} F_o(dx)\, \eta_{11}(x,\lambda)$$

Cette relation (5) équivaut à (3). Elle est valable pour toute fonction aléatoire en tout ou rien. Nous allons en déduire une relation intéressante (valable également dans le cas général).

Expression de $C_{o1}(h)$ à l'aide des covariances conditionnelles .

La relation (5) se met sous la forme :

$$\chi_{o1}(\lambda) = \frac{1}{m_o+m_1} \left[\frac{1}{\lambda} \eta_{11}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \int_o^\infty e^{-\lambda x} F_o(dx)\, \eta_{11}(x;\lambda) \right]$$

Compte tenu de (4"), l'intégrale qui figure au second membre vaut $\frac{1}{\lambda} - \eta_{oo}(\lambda)$. On a donc :

$$(6) \qquad \chi_{o1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(m_o+m_1)} \left[\eta_{oo}(\lambda) + \eta_{11}(\lambda) - \frac{1}{\lambda} \right]$$

Il suffit d'inverser la transformation de Laplace pour obtenir :

$$(7) \qquad C_{o1}(h) = \frac{1}{m_o+m_1} \int_o^h \left(H_{11}(x)-p_1\right) dx + \frac{1}{m_o+m_1} \int_o^h \left(H_{oo}(x)-p_o\right) dx$$

Cette relation (7), déduite de (5) et de (4"), est vraie pour toute fonction aléatoire en tout ou rien. Elle met en évidence l'intérêt des covariances conditionnelles. La somme $H_{oo} + H_{11}$ est une fonction symétrique dont la donnée équivaut à celle de la covariance :

$$C'_{o1}(h) = \frac{1}{m_o+m_1} \left[H_{oo}(h) + H_{11}(h) - 1 \right]$$

Mais les fonctions H_{oo} et H_{11} ne sont pas elles-mêmes symétriques, et peuvent à ce titre servir d'indice pour déceler le caractère orienté d'un phénomène [$H_{oo}(-h)$ se définit comme $H_{oo}(h)$ après renversement du sens de parcours de la droite réelle. C'est la probabilité conditionnelle pour que $-h \in e_o$ sachant que O est l'extrémité droite d'un segment e_o). En raison de son importance, donnons une démonstration directe de la relation (7).

Démonstration directe de la relation (7).

Désignons par J_o et J_1 les moments d'ordre 3 d'une F.A. en tout ou rien.

$$\begin{cases} J_o(x,y,z) = P(x \in e_o,\ y \in e_o,\ z \in e_o) \\ J_1(x,y,z) = P(x \in e_1,\ y \in e_1,\ z \in e_1) \end{cases}$$

Calculons $H_{11}(h)$ - C'est la probabilité conditionnelle d'avoir $h \in e_1$ $(h \geqslant o)$ lorsque $O \in e_1$ et $\Delta a \in e_o$ ($\Delta a < O$ très petit) Mais $P(O \in e_1,\ \Delta a \in e_o) = \nu \Delta\, a = \frac{\Delta a}{m_o+m_1}$ (ν nombre spécifique). De

$$H_{11}(h) = \lim_{\substack{\Delta a \to o \\ \Delta a < o}} \frac{J_1\ (a,O,h)}{P(O \in e_1,\ \Delta a \in e_o)}$$

On déduit ainsi :

$$\frac{1}{m_o+m_1} \quad H_{11}(h) = \frac{\partial^-}{\partial a} \quad J_1(a, O, h) \Big|_{a = O}$$

$$\frac{1}{m_o+m_1} \quad H_{oo}(h) = \frac{\partial^-}{\partial a} \quad J_o(a, O, h) \Big|_{a = O}$$

(le symbole ∂^- désignant la dérivée à gauche). Mais d'autre part on a toujours :

$$J_o(x,y,z) + J_1(x,y,z) = 1 - 3\ p_1 + C_{11}(x-y) + C_{11}(y-z) + C_{11}(z-x)$$

Prenons $x = a < o$, $y = o$, $z = h$, dérivons en a et faisons tendre a vers o. On trouve :

$$\frac{1}{m_o+m_1} \left[H_{oo}(h) + H_{11}(h) \right] = \left[\frac{d^-}{da} \quad C_{11}(a) \Big|_{a = o} - C'_{11}(h) \right]$$

$$\text{D'ailleurs} \quad \frac{d^-}{da} \quad C_{11}(a) \Big|_{a = o} = \nu = \frac{1}{m_o+m_1}$$

Par suite, il vient :

$$\frac{1}{m_o+m_1} \left[H_{oo}(h) + H_{11}(h) - 1 \right] = - C'_{11}(h) = C'_{o1}(h)$$

Il ne reste plus qu'à intégrer de O à h pour obtenir (7), compte tenu de $C_{o1}(o) = o$ -

Avant de passer à des applications, indiquons un procédé permettant (théoriquement) de calculer les fonctions $H_{ij}(y;\lambda)$.

Calcul explicite des $H_{ij}(y;\lambda)$

Il est commode de considérer le processus arrêté à l'instant aléatoire T_λ, processus régi par les noyaux sous-markoviens

$N_o(\lambda)$ et $N_1(\lambda)$ qui s'explicitent ainsi :

$$N_o(\lambda;y;dz) = e^{-\lambda z} F_o(y;dz)$$

$$N_1(\lambda;y;dz) = e^{-\lambda z} F_1(y;dz)$$

Les relations (4) s'écrivent :

$$(8) \qquad \begin{cases} \eta_{oo}\ (.\ ;\ \lambda) = \frac{1}{\lambda} - N_o(\lambda)\ \eta_{11}\ (.\ ;\ \lambda) \\ \eta_{11}\ (.\ ;\ \lambda) = \frac{1}{\lambda} - N_1(\lambda)\ \eta_{oo}\ (.\ ;\ \lambda) \end{cases}$$

D'autre part, $N_i(\lambda)\ 1$ est la transformée de Laplace $\Phi_i\ (y;\lambda)$ de $F_i(y;dx)$. On déduit donc de (8) :

$$\eta_{oo}\ (.\ ;\ \lambda) = \frac{1 - \Phi_o(.\ ;\ \lambda)}{\lambda} + N_o(\lambda)\ N_1(\lambda)\ \eta_{oo}(.\ ;\ \lambda)$$

et une relation analogue en η_{11} - Pour abréger les notations, nous supposerons $\lambda > o$ fixé, et nous écrirons N_o, η_{oo} .. pour $N_o(\lambda)$, $\eta_{oo}(\lambda)$ ... La fonction η_{oo} est donc une solution de l 'équation intégrale

$$(9) \qquad \eta_{oo} = \frac{1 - \Phi_o}{\lambda} + N_o\ N_1\ \eta_{oo}$$

Les noyaux sous-markoviens N_o et N_1 vérifient les inégalités :

$$o \leqslant \sum_{n=o}^{p} (N_oN_1)^n\ (I-N_o) \leqslant \sum_{n=o}^{p} (N_oN_1)^n\ (I-N_oN_1) = I-(N_oN_1)^{n+1} \leqslant I$$

Par conséquent, le noyau potentiel $\sum_{n=o}^{\infty} (N_oN_1)^n$ vérifie :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (N_oN_1)^n(I-N_o)\,\frac{1}{\lambda} = \sum_{n=o}^{\infty} (N_oN_1)^n\,\frac{1-\Phi_o}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

($N_o 1 = \Phi_o$ par définition). L'équation (9) et l'équation analogue en η_{11} admettent donc les solutions :

$$(10)\qquad \begin{cases} \eta_{oo} = \frac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} (N_oN_1)^n(I-N_o)\ 1 \\ \eta_{11} = \frac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{n=o}^{\infty} (N_1N_o)^n(I-N_1)\ 1 \end{cases}$$

Cette solution η_{oo} est-elle unique ? Il en est ainsi si, et seulement si l'équation (9) sans second membre n'admet pas d'autre solution bornée que O, autrement dit si $\varphi = N_oN_1\varphi$ et $|\varphi| < b$ entraînent $\varphi = O$ (et de même η_{11} est unique si $\varphi = N_1N_o\ \varphi$ et $|\varphi| < b \Rightarrow \varphi = o$). Cette condition équivaut à

$$(10\text{ bis})\qquad (N_oN_1)^{\infty}1 = \lim_n \downarrow (N_oN_1)^n\ 1 = O$$

Si (10 bis)est vérifiée, en effet, on a $|(N_oN_1^{\infty})\ \varphi\ | \leqslant (N_oN_1)^{\infty}\ b = O$ pour toute fonction φ bornée, et inversement la fonction $\varphi = (N_oN_1)^{\infty}\ 1$ est invariante par N_oN_1.

La condition (10 bis) est encore équivalente à la suivante : il existe une fonction h dont 1 est le potentiel :

$$1 = \sum_{h=o}^{\infty} (N_oN_1)^n\ h$$

et cette fonction h est alors nécessairement égale à :

$$h = (I - N_oN_1)\ 1 = 1 - N_oN_1\ 1$$

Considérons la covariance conditionnelle rectangle dont la transformée de Laplace est $\eta_{o1} = N_o \, \eta_{11}$. On a :

$$\eta_{oo} + \eta_{o1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=o}^{\infty} (N_o N_1)^n (I-N_o) \; 1 + \frac{1}{\lambda} \sum_{n=o}^{\infty} (N_o N_1)^n N_o (I-N_1) \; 1$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=o}^{\infty} (N_o N_1)^n (I-N_o N_1) \; 1 = \frac{1}{\lambda} - (N_o N_1)^{\infty} \frac{1}{\lambda}$$

(η_{oo} et η_{11} désignant les solutions (10)-, donc $\eta_{oo} + \eta_{o1} = \frac{1}{\lambda}$ si, et seulement si $(N_o N_1)^{\infty} \; 1 = o$, c'est-à-dire justement si (10) est l'unique solution du problème. Dans tous les autres cas, on a $\eta_{oo} + \eta_{o1} < \frac{1}{\lambda}$, et les solutions (10) ne peuvent pas convenir. Il suffit d'examiner (10) pour constater que toute solution h_{oo}, h_{11} acceptable vérifie

$$h_{oo} \geqslant \eta_{oo} \qquad\qquad h_{11} \geqslant \eta_{11}$$

En effet, η_{oo}, par exemple, est l'espérance du temps passé dans l'état O avant T_λ et avant le premier point d'accumulation, z_1. Si $z_1 = \infty$ p.s., η_{oo} et η_{11} constituent bien la solution probabiliste (et on a $H_{oo} + H_{o1} = 1$ comme il se doit) du problème. Si $P(z_1 < \infty) > o$, η_{oo} et η_{11} se rapportent au processus arrêté en z_1. On peut prolonger le processus au-delà de z_1, à condition de se donner un nouvel état initial, ou une nouvelle probabilité initiale en z_1, et, par recurrence, en chacun des points d'accumulation successifs. Comme cette nouvelle probabilité initiale peut être choisie arbitrairement, il existe plusieurs solutions h_{oo}, h_{11} admissibles (ce qui explique l'indétermination du système).

Désignons par $A_o\ (y;z)$ la probabilité d'avoir $\mathcal{Z}_1 < z$ lorsque O est l'origine d'un segment e_o précédé d'un segment e_1 de longueur y (et on définit de même $A_1(y|z)$ - Comme $\frac{1}{\lambda} - \eta_{oo} - \eta_1$ $= \frac{1}{\lambda}\ (N_oN_1)^\infty$ est l'espérance du temps passé dans e_o avant T_λ mais après $\mathcal{Z}_1$, c'est-à-dire $\frac{1}{\lambda}\ e^{-\lambda \mathcal{Z}_1}$, on a :

$$\int_o^\infty A_o(y;d'z)\quad e^{-\lambda z} = (N_oN_1)^\infty \quad 1$$

$$\int_o^\infty e^{-\lambda z}\ A_1(y;dz) = (N_1N_o)^\infty \quad 1$$

En particulier $P(\mathcal{Z}_1 < \infty) = \int_o^\infty A_o(y;dz)$ est égale (conditionnellement) à $\lim\limits_{\lambda \to o}\ (N_oN_1)^\infty\ 1$.

CALCUL DE LA PORTEE A . La portée A est définie par

$$(11) \qquad A = \frac{2}{p_o p_1} \int_o^{\infty} [C_{11}(h) - p_1^2]\, dh = - \frac{2}{p_o p_1} \int_o^{\infty} [C_{o1}(h) - p_o p_1]\, dh$$

Nous admettrons l'existence de développements limités du type :

$$\begin{cases} \eta_{oo}(y;\lambda) = \dfrac{p_o}{\lambda} + a_o(y) + \lambda\, b_o(y) + \ldots \\ \eta_{11}(y;\lambda) = \dfrac{p_1}{\lambda} + a_1(y) + \lambda\, b_1(y) + \ldots \end{cases}$$

La relation (6) donne alors

$$\chi_{o1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(m_o+m_1)} \quad [a_o + a_1 + \lambda\, (b_o+b_1) + \ldots]$$

avec

$$\begin{cases} a_o = E_1[a_o(y)] = \displaystyle\int_o^{\infty} F_1(dy)\; a_o(y) \\ a_1 = E_o[a_1(y)] = \displaystyle\int_o^{\infty} F_o(dy)\; a_1(y) \\ b_o = E_1[b_o(y)] \\ b_1 = E_o[b_1(y)] \end{cases}$$

D'après (11), d'autre part, la portée A est :

$$A = \frac{2}{p_o p_1} \lim_{\lambda \to o} \, [\chi_{o1}(\lambda) - \frac{p_o p_1}{\lambda}]$$

On en déduit d'abord :

$$a_o + a_1 = p_o p_1 \; (m_o+m_1) = \frac{m_o m_1}{m_1+m_o}$$

puis

$$(12) \qquad A = \frac{2}{p_o p_1} \quad \frac{b_o+b_1}{m_o+m_1}$$

Le problème consiste donc à évaluer la somme b_o+b_1. Celle-ci s'exprime, comme nous allons le voir, à l'aide des fonctions $a_o(y)$ et $a_1(y)$, définies ci-dessus :

$$a_o(y) = \lim_{\lambda\to o} \left(H_{oo}(y;\lambda) - \frac{p_o}{\lambda}\right)$$

$$a_1(y) = \lim_{\lambda\to o} \left(H_{11}(y;\lambda) - \frac{p_1}{\lambda}\right)$$

Ces deux fonctions (à un facteur près) ont la signification de portées conditionnelles. On a, en effet :

$$\begin{cases} a_o(y) = \int_o^\infty [H_{oo}(y;x) - p_o]\, dx \\ a_1(y) = \int_o^\infty [H_{11}(y;x) - p_1]\, dx \end{cases}$$

EQUATIONS INTEGRALES DES PORTEES CONDITIONNELLES.

Il suffit de remplacer η_{oo} et η_{11} par leurs développements en λ dans (4) et d'identifier les termes constants et les termes en λ pour obtenir :

$$(13)\quad \begin{cases} a_o(y) = p_1\int_o^\infty z\, F_o(y;dz) - \int_o^\infty a_1(z)\, F_o(y;dz) \\ b_o(y) = -\frac{1}{2}p_1\int_o^\infty z^2\, F_o(y;dz) + \int_o^\infty za_1(z)F_o(y;dz) - \int_o^\infty b_1(z)F_o(y;dz) \end{cases}$$

et des équations analogues pour a_1 et b_1 - Si l'on pose

$$m_o(y) = E_o(z|y) = \int_o^\infty z\, F_o(y;dz)$$

on voit que les fonctions $a_o(y)$ et $a_1(y)$ vérifient le système :

$$(14) \qquad \begin{cases} a_o(y) = p_1 m_o(y) - \int_o^\infty a_1(z)\; F_o(y;dz) \\ a_1(y) = p_o m_1(y) - \int_o^\infty a_o(z)\; F_1(y;dz) \end{cases}$$

Dans le langage des espérances conditionnelles, ceci s'écrit :

$$\begin{cases} a_o(y) = p_1 E_o(\mathit{z}|y) - E_o[a_1(\mathit{z})|y] \\ a_1(y) = p_o E_1(\mathit{z}|y) - E_1[a_o(\mathit{z})|y] \end{cases}$$

Prenant l'espérance E_1 de la première relation et l'espérance E_o de la seconde, on trouve :

$$a_o + a_1 = p_1 m_o = p_o m_1 = \frac{m_o m_1}{m_o + m_1}$$

(relation déjà obtenue ci-dessus)

<u>EXPRESSION DE LA PORTEE A</u>. La deuxième relation (13), de son côté, s'écrit :

$$b_o(y) = -\frac{1}{2}\, p_1\; E_o(\mathit{z}^2|y) + E_o[\mathit{z} a_1(\mathit{z})|y] - E_o[b_1(\mathit{z})|y]$$

Il suffit de prendre l'espérance à priori E_1 des deux membres de cette relation pour trouver :

$$b_o + b_1 = E_o[\mathit{z} a_1(\mathit{z})] - \frac{1}{2}\; p_1\; E_o(\mathit{z}^2)$$

$$= E_1[\mathit{z} a_o(\mathit{z})] - \frac{1}{2}\, p_o\; E_1(\mathit{z}^2)$$

D'où, selon (12)

$$(15) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{p_o} \displaystyle\int_o^\infty z^2 F_o(dz) - 2\left(\frac{1}{m_o} + \frac{1}{m_1}\right) \int_o^\infty z\; a_1(z) F_o(dz) \\ \;\;\; = \dfrac{1}{p_1} \displaystyle\int_o^\infty z^2 F_1(dz) - 2\left(\frac{1}{m_o} + \frac{1}{m_1}\right) \int_o^\infty z\; a_o(z)\; F_1(dz) \end{cases}$$

Le calcul de la portée se ramène donc à celui des fonctions a_o et a_1 - Donnons quelques exemples -

Exemples 1 - Processus à régression linéaire. Supposons que les noyaux F_o et F_1 vérifient les conditions :

$$(16)\qquad \begin{cases} m_o(y) = \int_o^{\infty} zF_o(y;dz) = \alpha_o y + \mu_o \\ m_1(y) = \int_o^{\infty} zF_1(y;dz) = \alpha_1 y + \mu_1 \end{cases}$$

avec des constantes α_o, α_1 comprises entre 0 et 1. Ces conditions impliquent pour les espérances à priori m_o et m_1 :

$$\begin{cases} m_o = \alpha_o m_1 + \mu_o \\ m_1 = \alpha_1 m_o + \mu_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m_o = \dfrac{\mu_o + \alpha_o \mu_1}{1 - \alpha_o \alpha_1} \\ m_1 = \dfrac{\mu_1 + \alpha_1 \mu_o}{1 - \alpha_o \alpha_1} \end{cases}$$

On cherche pour (14) une solution de la forme :

$$(17)\qquad a_o(y) = A_o y + B_o \quad , \quad a_1(y) = A_1 y + B_1$$

En substituant dans (14), compte tenu de (16) et en identifiant les termes en y, on obtient :

$$A_o = \frac{p_1 \alpha_o - p_o \alpha_o \alpha_1}{1 - \alpha_o \alpha_1} \quad , \quad A_1 = \frac{p_o \alpha_1 - p_1 \alpha_1 \alpha_o}{1 - \alpha_1 \alpha_o}$$

En ce qui concerne les termes constants, on obtient deux relations équivalentes à la relation unique :

$$B_1 + B_o = \frac{A_o}{\alpha_o}\,\mu_o = \frac{A_1}{\alpha_1}\,\mu_1 = \frac{\mu_1 \mu_o}{\mu_1(1+\alpha_o) + \mu_o(1+\alpha_1)}$$

(il est évident qu'il y a indétermination, car si $a_o(y)$ et $a_1(y)$ sont une solution de (14), il en est de même de $a_o(y) + C$ et $a_1(y) - C$ pour toute constante C).

Nous allons lever cette indétermination par un procédé indirect. D'après (15) et les relations (16), (17), la portée A admet les deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} A = \dfrac{1}{p_o} \; E_o(\not{z}^2) - 2A_1 \dfrac{m_o m_1}{m_o+m_1} \; E_o(\not{z}^2) - 2p_1 B_1 \\[2ex] A = \dfrac{1}{p_1} \; E_1(\not{z}^2) - 2A_o \dfrac{m_o m_1}{m_o+m_1} \; E_1(\not{z}^2) - 2p_o B_o \end{cases}$$

Il suffit d'égaler ces deux expressions de A pour obtenir la relation supplémentaire permettant le calcul de B_o et B_1. Tous calculs faits, on trouve :

$$(18) \qquad A = \frac{p_1(1+\alpha_o\alpha_1) - 2\alpha_1 p_o}{1 - \alpha_1\alpha_o} \; \frac{\sigma_o^2}{m_o} + \frac{p_o(1+\alpha_o\alpha_1) - 2\alpha_o p_1}{1 - \alpha_1\alpha_o} \; \frac{\sigma_1^2}{m_1}$$

(σ_o^2 et σ_1^2 variances associées aux lois à priori $F_o(dz)$ et $F_1(dz)$.

Le cas $\alpha_o = \alpha_1 = o$ conduit à la formule :

$$(18') \qquad A = p_1 \frac{\sigma_o^2}{m_o} + p_o \frac{\sigma_1^2}{m_1}$$

applicable, en particulier, aux processus de renouvellement à deux états (avec indépendance des longueurs des passées successives). Pour $\alpha_o > o$, $\alpha_1 > 1$, la formule (18) donne une valeur de A plus petite que l'expression (18') : il y a, en effet, corrélation positive entre les longueurs d'un grain et d'un pore qui se suivent, d'où un effet compensateur réduisant la variance de l'intégrale de la fonction aléatoire. Donnons quelques exemples de processus à régression linéaire, auxquels les résultats précédents sont applicables.

a) <u>Processus du type d'Ambarzoumian</u>. La longueur L_1 d'un grain se déduit de la longueur L_o du pore qui le précède par la relation

$$L_1 = L_o \mathcal{Z}_1 + Y_1$$

avec des variables aléatoires positives indépendantes l'une de l'autre et de L_o, dont les lois sont données une fois pour toutes (les mêmes pour tous les grains), $\mathcal{Z}_1$ vérifiant de plus la condition $E(\mathcal{Z}_1) < 1$. De même la longueur L_o d'un pore se déduit de la longueur L_1 du grain précédent par

$$L_o = L_1 \mathcal{Z}_o + Y_o$$

avec des définitions analogues.

Ambarzoumian a introduit des processus dans lesquels les lois à priori F_o et F_1 de L_o et L_1 sont des lois gamma de paramètres α_o et α_1 respectivement, $\mathcal{Z}_1$ une variable beta de paramètre (β_1, γ_1) avec $\beta_1 + \gamma_1 = \alpha_o$, Y_1 une variable gamma de paramètre $\alpha_1 - \beta_1$, etc... (on peut aussi jouer sur les paramètres d'échelle de L_o et L_1).

b) Schémas multiplicatifs à interruption . Dans cette variante, on prend $L_1 = L_o \mathcal{Z}_1$ avec une probabilité $1 - \varpi_1$ et $L_1 = Y_1$ avec la probabilité ϖ_1, et de même $L_o = L_1 \mathcal{Z}_o$ ou Y_o avec les probabilités $1 - \varpi_o$ et ϖ_o : ϖ_1 (ϖ_o) est à chaque changement d'état la probabilité pour que le processus, autrement purement multiplicatif, reparte à o. (Il n'est pas nécessaire de supposer $E(\mathcal{Z}_o) < 1$, $E(\mathcal{Z}_1) < 1$).

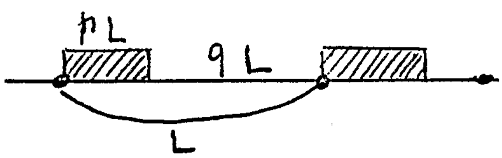
Si ϕ_o, ϕ_1 et Ψ_1 sont les transformées de Laplace des lois (à priori) de L_o, L_1, Y_1, et $\Pi_1(dz)$ la loi de $\mathcal{Z}_1$, on a respectivement, dans les exemples a) et b) :

$$\text{(a)} \qquad \Phi_1(\lambda) = \Psi_1(\lambda) \int_0^\infty \Phi_o(\lambda z)\, \Pi_1(dz)$$

$$\text{(b)} \qquad \Phi_1(\lambda) = \varpi_1 \Psi_1(\lambda) + (1 - \varpi_1) \int_0^\infty \Phi_o(\lambda z)\, \Pi_1(dz)$$

Exemples 2 - Schémas de migration.

a) Traitons d'abord l'exemple élémentaire suivant :



On implante des germes selon un schéma de Poisson de densité θ. Chaque segment L est divisé en deux segments, l'un de longueur pL situé à gauche est attribué aux grains, l'autre de longueur qL est attribué aux pores. (on vérifie sans peine qu'il s'agit bien d'un processus de renouvellement markovien, de même que dans les variantes b et c ci-dessous).

Calculons $H_{11}(x)$ - O étant un germe, on a $x \in e_1$ si $L \geqslant \frac{x}{p}$, ou bien si un autre germe est tombé entre O et x, x appartenant alors à un autre grain. D'où

$$H_{11}(x) = e^{-\theta\frac{x}{p}} + \theta \int_0^x e^{-\theta y} H_{11}(x-y)\, dy$$

$$\eta_{11}(\lambda) = \frac{1}{\lambda+\frac{\theta}{p}} + \frac{\theta}{\lambda+\theta} \eta_{11}(\lambda)$$

$$\eta_{11}(\lambda) = \frac{p}{\lambda} + \frac{q}{\lambda+\theta/p}$$

et finalement

$$H_{11}(x) = p + q\, e^{-\theta/_p x}$$

Calculons $H_{oo}(x)$ - Avec $O \in e_o$, on a $x \in e_o$ de deux façons : ou bien x appartient au même pore que O (donc le segment L auquel appartient ce pore a une longueur $L \geqslant \frac{x}{q}$) - ou bien ce pore se termine en un point $y < x$. D'où :

$$H_{oo}(x) = e^{-\theta\frac{x}{q}} + \int_0^x \frac{\theta}{q}\, e^{-\frac{\theta y}{q}} [1 - H_{11}(x-y)]\, dy$$

Un calcul direct donne :

$$H_{oo}(x) = q + \frac{p^2}{p-q}\, e^{-\frac{\theta}{q}x} + \frac{pq}{q-p}\, e^{-\frac{\theta}{p}x}$$

Il suffit ensuite d'intégrer

$$H_{oo}(x) + H_{11}(x) - 1 = \frac{p^2}{p-q}\, e^{-\frac{\theta}{q}x} + \frac{q^2}{q-p}\, e^{-\frac{\theta}{p}x}$$

et d'appliquer (7) avec $\theta = 1/(m_o+m_1)$ pour trouver :

$$C_{o1}(h) = pq - \frac{p^2q}{p-q} e^{-\frac{\theta}{q}h} - \frac{q^2p}{q-p} e^{-\frac{\theta}{p}h}$$

Alors que la covariance $C_{o1}(h)$ est symétrique en p et q, les fonctions H_{oo} et H_{11} ont des expressions bien différentes, et cette absence de symétrie met en évidence la structure orientée du schéma (si les grains correspondent à l'élément migrant, la migration se fait vers la gauche, jusqu'au germe le plus proche).

b) Nous supposons toujours que le coefficient de partage p est constant, mais les germes forment un processus de renouvellement quelconque : les segments L successifs sont indépendants, et obéissent à une même loi F dont la transformée de Laplace est Φ -

Les mêmes raisonnements que ci-dessus donnent :

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} H_{11}(x) = 1 - F(\frac{x}{p}) + \int_0^x H_{11}(x-y)\, F(dy) \\ H_{oo}(x) = 1 - F(\frac{x}{q}) + \int_0^x \frac{1}{q}\, F(\frac{dy}{q})\, [\, 1 - H_{11}(x-y)\,] \end{cases}$$

Appliquons la transformation de Laplace à la 1ere équation (b). Il vient :

$$\eta_{11}(\lambda) = \frac{1-\ \Phi(\lambda p)}{\lambda} + \eta_{11}(\lambda)\, \Phi(\lambda)$$

soit :

$$\eta_{11}(\lambda) = \frac{1 - \Phi(\lambda p)}{\lambda (1 - \Phi(\lambda))}$$

La seconde équation b) donne ensuite :

$$\eta_{oo}(\lambda) = \frac{1 - \Phi(\lambda q)}{\lambda} + \Phi(\lambda q) \left[\frac{1}{\lambda} - \eta_{11}(\lambda) \right]$$

D'où

$$\eta_{oo}(\lambda) = \frac{1 - \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda q) + \Phi(\lambda p)\, \Phi(\lambda q)}{\lambda \left[1 - \Phi(\lambda) \right]}$$

Il suffit d'appliquer (6) pour obtenir la transformée χ_{o1} de la covariance C_{o1} :

$$\chi_{o1}(\lambda) = \frac{\left[1 - \Phi(\lambda p)\right] \left[1 - \Phi(\lambda q) \right]}{m\, \lambda^2 \left[1 - \Phi(\lambda) \right]}$$

On vérifiera sans peine que la <u>portée est nulle</u> :

$$A = \lim_{\lambda \to o} \frac{2}{pq} \left[\frac{pq}{\lambda} - \chi_{o1}(\lambda) \right] = o$$

c) Nous supposons toujours que les germes forment un processus de renouvellement de loi F, mais le coefficient de partage (p constant dans l'exemple b)) est cette fois une variable aléatoire Z, indépendante de la longueur L du segment, dont la loi $\Pi(dz)$ est concentrée sur (o,1) -

Les relations b) sont remplacées par :

$$(c) \quad \begin{cases} H_{11}(x) = 1 - \displaystyle\int_o^1 F\left(\frac{x}{z}\right) \Pi(dz) + \int_o^x H_{11}(x-y)\, F(dy) \\ H_{oo}(x) = 1 - \displaystyle\int_o^1 F\left(\frac{x}{1-z}\right) \Pi(dz) + \int_o^1 \Pi(dz) \int_o^x \frac{1}{1-z}\, F\left(\frac{dy}{1-z}\right) \left[1 - H_{11}(x-y)\right] \end{cases}$$

Passons aux transformées de Laplace. Il vient :

$$\eta_{11}(\lambda) = \frac{1 - \int_0^1 \Phi(\lambda z)\ \Pi(dz)}{\lambda\ [1 - \Phi(\lambda)]}$$

$$\eta_{oo}(\lambda) = \frac{1 - \int_0^1 \Phi[\lambda(1-z)]\,\Pi(dz)}{\lambda} + [\tfrac{1}{\lambda} - \eta_{11}(\lambda)] \int_0^1 \Phi[\lambda(1-z)]\,\Pi(dz)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \eta_{11}(\lambda) = \dfrac{1 - E\ [\Phi(\lambda Z)]}{\lambda\ [1 - \Phi(\lambda)]} \\[2ex] \eta_{oo}(\lambda) = \dfrac{1 - \Phi(\lambda) - E\ [\Phi(\lambda(1-z))] + E\ [\Phi(\lambda Z)]\ E\ [\Phi(\lambda(1-Z))]}{\lambda\ [1 - \Phi(\lambda)\ ]} \end{cases}$$

et finalement :

$$\chi_{o1}(\lambda) = \frac{\Big(1 - E\ [\Phi(\lambda Z)]\Big)\ \Big(1 - E\ [\Phi(\lambda(1-Z)]\Big)}{m\lambda^2\ [\ 1 - \Phi(\lambda)]}$$

(l'espérance E se rapporte à la loi $\Pi(dz)$ du coefficient de partage Z). On a $E(Z) = p$, $E(1-Z) = q$, et le développement

$$1 - \Phi(\lambda x) = \lambda\ m\ x - \frac{1}{2}\ \lambda^2\ m_2\ x^2$$

(m et m_2 moments $E(L)$ et $E(L^2)$ de la loi F) donne :

$$\chi_{o1}(\lambda) = \frac{pq}{\lambda} + \frac{1}{2}\ pq\ \frac{m_2}{m}\ \left[1 - \frac{E(Z^2)}{p} - \frac{E[(1-Z)^2]}{q}\right] + \ldots$$

$$= \frac{pq}{\lambda} - \frac{1}{2}\ \frac{m_2}{m}\ \ D^2(Z)$$

D'où l'expression de la portée :

$$A = \frac{1}{pq} \quad \frac{E(L^2)}{E(L)} \quad D^2(\xi)$$

<u>Remarque</u> : La variance $D^2(\xi)$ du coefficient de partage est inférieure ou égale à pq, et la portée A est donc au plus égale à $E(L^2) / E(L)$