NOTE GEOSTATISTIQUE N° 87

PROCESSUS A RENOUVELLEMENT MARKOVIEN

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 87

PROCESSUS A RENOUVELLEMENTS MARKOVIENS

Introduction

Après avoir étudié dans la note 86 le cas particulier où le processus ne prend que deux états, nous allons maintenant esquisser la théorie générale des renouvellements markoviens (dans le cas stationnaire).

Rappelons la définition. On se donne un espace Ω d'états, muni d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$, et une probabilité de transition $\pi(\omega, \ell;\ d\omega',\ d\ell')$ sur l'espace produit $\Omega \times R_+$ muni de la σ-algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$, famille des boréliens de R_+). On définit ainsi une chaîne de Markov $(\omega_n,\ L_n)_{n \in N}$ à temps discret, à valeurs dans $\Omega \times R$ - A cette chaîne, nous allons faire correspondre un processus stochastique $\omega(t)$ à temps $t \geqslant o$ continu et à valeurs dans Ω construit de la manière suivante :

~ On choisit un état initial $(\omega_o,\ L_o)$ et une longueur $T_o \leqslant L_o$ (par la suite on probabilisera cet état initial : conditionnellement en $(\omega_o,\ L_o)$, T_o aura une densité uniforme sur le segment $(O,\ L_o)$ et (ω_o, L_o) sera tiré au sort selon une loi $P(d\omega, dl)$ que nous préciserons)-

~ On pose $\omega(t) = \omega_o$ sur l'intervalle (O, T_o), et, $\omega(t) = \omega_n$ sur l'intervalle $(T_o + L_1 + \ldots + L_{n-1},\ T_o + L_1 + \ldots + L_n)$

Autrement dit, on construit $\omega(t)$ en mettant bout à bout des segments de longueur T_o, L_1, L_2, ... et en posant $\omega(t) = \omega_n$ sur le $n^{\text{ième}}$ segment.

Cette définition n'est suffisante que si l'on a presque sûrement $T_o + L_1 + L_2 + \ldots = \infty$. Dans le cas contraire, soit $T_1 = T_o + \sum_1^\infty L_n$ l'instant où se produit l'effet de fuite : on doit compléter la définition, en admettant par exemple que T_1 est l'origine d'un segment (ω, L) choisi, selon une loi donnée, |par exemple $\varpi(d\omega, dl)$| à partir duquel le processus peut se poursuivre jusqu'à un nouvel effet de fuite en $T_1 + T_2$ etc... On notera que les T_1, T_2.. constituent un processus de renouvellement.

Le problème qu'il s'agit d'etudier est le suivant :

1°: est-il possible de choisir la loi initiale de manière à rendre stationnaire le processus $\omega(t)$? [on pourrait, plus généralement, partir d'un état initial quelconque et étudier les propriétés ergodiques de $\omega(t)$, mais nous ne suivrons pas cette voie plus difficile].

2°: dans l'affirmative, reconstituer la loi temporelle, (stationnaire) de $\omega(t)$, à partir de la probabilité de transition Π. Il est clair que le problème n'est soluble que si la probabilité de transition Π vérifie des conditions convenables d'ergodicité. Nous nous limiterons au cas où il existe une probabilité stationnaire ϖ sur $\Omega \times R_+$, c'est-à-dire vérifiant $\varpi\Pi = \varpi$ ou, explicitement

$$(1) \qquad \int_\Omega \int_0^\infty \varpi(d\omega, d\ell)\, \Pi(\omega, \ell; A, B) = \varpi\,(A, B)$$

$(A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B})$

Cette condition n'est pas suffisante. Il faut supposer, de plus, que l'espérance m de la longueur d'un segment (L, ω) est intégrable pour la probabilité $\varpi(dl, d\omega)$. Plus précisément, posons :

$$\varpi\,(d\omega) = \varpi\,(d\omega, R_+)$$

(probabilité à priori de l'état ω pour la loi ϖ), et soit $F_\omega\,(d\ell)$ une (version de) la loi conditionnelle de L en ϖ :

$$\varpi(d\omega,\ d\ell) = \varpi(d\omega)\quad F_\omega\,(d\ell)$$

Nous dirons que $F_\omega(d\ell)$ est la granulométrie (en nombre) de la composante ω, et nous désignerons par $m(\omega)$ l'espérance conditionnelle de L en ω (traversée moyenne, en nombre, de la composante ω) :

$$m(\omega) = \int_0^\infty \ell\, F_\omega\,(d\ell)$$

La condition supplémentaire dont nous avons besoin est :

$$(2) \qquad m = \int_\Omega m(\omega)\, \varpi(d\omega) < \infty$$

Dans les discussions qui suivent, nous supposerons, en général, qu'il n'y a pas effet de fuite, autrement dit que $P(L_1 + L_2 + \ldots < \infty) = o$ quel que soit l'état initial $(\omega_o\ \ell_o)$, donc aussi quelle que soit la loi de probabilité initiale choisie pour cet état. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi.

<u>Critère de l'effet de fuite</u> - Considérons la chaîne de Markov (ω_n, L_n) définie par sa probabilité de transition π, et un temps T_λ aléatoire (positif), de loi $e^{-\lambda t}$, indépendant des (ω_n, L_n). Soit (ω_o, ℓ_o) l'état initial de la chaîne. on a :

$$P(L_1 < T_\lambda) = E\,[e^{-\lambda L_1}] = \int_\Omega \int_o^\infty \pi(\omega_o, \ell_o;\, d\omega,\, d\ell_1)\, e^{-\lambda \ell_1}$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$P(L_1 + L_2 + \ldots + L_n < T_\lambda) = E\,[e^{-\lambda(L_1+\ldots+L_n)}] =$$

$$\int_\Omega \int_o^\infty \pi(\omega_o, \ell_o;\, d\omega_1, d\ell_1)\, e^{-\lambda \ell_1} \iint + \ldots \int \pi(\omega_{n-1}, \ell_{n-1}; d\omega_{n-1} d\ell_{n-1})\, e^{-\lambda \ell_{n-1}}$$

Désignons par π_λ le noyau sous-markovien défini par :

$$\pi_\lambda\,(\omega_o, \ell_o;\, d\omega_1, d\ell_1) = e^{-\lambda \ell_1}\, \pi\,(\omega_o \ell_o;\, d\omega_1,\, d\ell_1)$$

Ce qui précède s'écrit :

(3) $$E\,[e^{-\lambda(L_1+\ldots+L_n)} \mid \omega_o, L_o] = \pi_\lambda^{\,n}\, 1$$

Posons $\pi_\lambda^\infty\, 1 = \lim_{n\to\infty} \downarrow \pi_\lambda^{\,n}\, 1$ (c'est une fonction de ω_o, L_o)

et $Z_1 = \sum_{n=1}^{\infty} L_n$ (premier point d'accumulation). En raison de la continuité monotone de l'espérance, on a :

$$E\,(e^{-\lambda Z_1} \mid \omega_o, L_o) = \pi_\lambda^\infty\, 1$$

$\pi_\lambda^\infty\, 1$ est la transformée de Laplace de Z_1. Ainsi $Z_1 = \infty$ p.s lorsque l'état initial est (ω_o, L_o) si et seulement si la fonction $\pi_\lambda^\infty\, 1$ est nulle en (ω_o, L_o). Si $\mu(d\omega_o, d\ell_o)$ est la loi initiale, on a $Z_1 = \infty$ p. s pour μ si et seulement si $\mu\, \pi_\lambda^\infty\, 1 = 0$ -

Conséquence - Considérons l'équation

$$f(\omega,\ell) = g(\omega,\ell) + \int_\Omega \int_0^\infty \pi\ (\omega,\ell;d\omega',d\ell')\ e^{-\lambda\ell'} f(\omega',\ell')$$

c'est-à-dire

(4) $$f = g + \pi_\lambda\ f$$

Toute solution f de cette équation intégrale vérifie aussi la relation

$$f = g + \pi_\lambda\ g + \ldots + \pi_\lambda^n\ g + \pi_\lambda^{n+1}\ f$$

En l'absence d'effet de fuite (c'est-à-dire pour $\pi_\lambda^n\ 1 \downarrow 0$) on a aussi $\pi_\lambda^n\ f \downarrow 0$ pour toute fonction bornée. Autrement dit, toute solution bornée de (4) est de la forme :

(4') $$f = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_\lambda^n\ g$$

Inversement, si cette série converge, elle constitue effectivement une solution de (4) - Autrement dit, en l'absence d'effet de fuite, il existe au plus une solution bornée de (4); cette solution existe, et coïncide avec la série (4') si et seulement si cette série est convergente et bornée.

Cette propriété caractérise l'absence d'effet de fuite. Si, en effet, (4) admet au plus une solution bornée, l'équation sans second membre $f = \pi_\lambda\ f$ n'admet pas de solution bornée non nulle. Mais $\pi_\lambda^\infty\ 1$ est une fonction invariante par π_λ, donc on a $\pi_\lambda^\infty\ 1 = 0$ et il n'y a pas d'effet de fuite.

PROCESSUS DE MARKOV ASSOCIE -

Donnons- nous un état initial (ω_o, ℓ_o) et une valeur y_o du premier segment T_o, et construisons le processus $\omega(x)$ $(x \geqslant o)$ comme ci-dessus. A tout point $x \geqslant o$ associons trois variables aléatoires : $\omega(x)$ lui-même, L_x, longueur du segment $\omega(x)$ auquel x appartient, $Y_x \leqslant L_x$, longueur comprise entre l'extrémité de ce segment et le point x (temps d'attente du prochain changement d'état. Par construction, $(\omega(x), Y_x, L_x)$ $x > o$ est un processus de Markov à temps continu, vérifiant :

$$P\left[\omega(x') = \omega(x),\ L_{x'} = L_x,\ Y_{x'} = Y_x + x - x' \quad \forall\, x' \in (x, x+Y_x) \,\middle|\, \omega_x, Y_x, L_x\right] = 1, \text{ et } P(Y_x \leqslant L_x \mid \omega_o, Y_o, L_o) = 1$$

et admettant une probabilité de transition stationnaire que nous noterons

$$P_h(\omega, y, l;\ A, \Delta, \Delta') = P\big(\omega_{x+h} \in A,\ Y_{x+h} \in \Delta,\ L_{x+h} \in \Delta' \mid \ldots$$
$$\mid \omega_x = \omega,\ Y_x = y,\ L_x = \ell\big)$$

Il suffit de considérer des événements de la forme $A \times \Delta \times \Delta'$ dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}'$, avec $A \in \mathcal{A}$, $\Delta \in \mathcal{B}$, $\Delta' \in \mathcal{B}'$. On peut même se limiter au cas ou $\Delta = (o, a)$ et $\Delta' = (o, b)$ sont des intervalles, avec $a \leqslant b$. Lorsque Δ et Δ' sont de cette forme, nous écrirons :

$$P_h(\omega, y, \ell;\ A, a, b)$$

Proposons-nous les deux tâches suivantes :

1°/ Calculer la probabilité de transition P_h du processus markovien, associé à la chaîne de Markov $(\omega n, ln)$, définie par π -

2°/ Montrer qu'il existe une probabilité (nécessairement unique) $p(d\omega, dy, dl)$ stationnaire pour P_h (vérifiant $pP_h = p$)

Avec cette loi initiale p, la fonction aléatoire (ω_x, Y_x, L_x) sera stationnaire, donc aussi la fonction aléatoire ω_x elle-même. Il sera d'autre part aisé de reconstituer la loi spatiale de (ω_x, Y_x, L_x) et à fortiori celle de ω_x à partir de p et de P_h. Nous supposerons essentiellement que la chaîne (ω_n, L_n) vérifie les conditions (1) et (2) et la condition $\lim_n \pi_\lambda^n 1 = 0$ exprimant qu'il n'y a p.s. pas effet de fuite pour tout état initial (ω_o, ℓ_o) -

CALCUL DE LA PROBABILITE DE TRANSITION P_h

Notons d'abord la relation suivante, qui résulte de la manière même dont nous avons construit le processus associé :

(5) $$P_x(\omega_o, y_o, \ell_o; A, a, b) = P_{x-y_o}(\omega_o, 0, \ell_o; A, a, b) \quad (x \geq y_o)$$

Pour $0 \leq x < y_o$, cette relation est remplacée par

(5') $$P_x(\omega_o, y_o, \ell_o; A, a, b) = 1 \quad (\omega_o \in A,\ x < y_o < a+x,\ \ell_o < b)$$

Nous noterons $1(\omega_o, y_o, \ell_o; A, a, b)$ ou simplement $1(\omega_o, y_o, \ell_o)$ cette dernière fonction.

Il suffit donc de calculer P_x dans le cas $y_o = 0$. Il est équivalent de travailler sur P_x ou sur la <u>résolvante</u> R_λ associée au demi-groupe P_x, qui est le noyau défini par :

(6) $$R_\lambda(\omega_o, y_o, \ell_o; A, a, b) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} P_x(\omega_o, y_o, \ell_o; A, a, b)\, dx$$

Fixons $\omega_o, \ell_o, A, a, b$, et sous-entendons ces variables. Les relations (5) et (5') permettent d'exprimer $R_\lambda(y_o)$ à partir de $R_\lambda(0)$. On a, en effet :

$$R_\lambda(y_o) = \int_0^{y_o} 1(\omega_o, y_o, \ell_o)\ e^{-\lambda x} dx + \int_{y_o}^{\infty} e^{-\lambda x}\ P_{x-y_o}(\omega_o, 0, \ell_o; A, a, b)\ dx$$

La deuxième intégrale vaut $e^{-\lambda y_o} R_\lambda(0)$. Calculons la première, en tenant compte de la définition de $1(\omega_o, y_o, \ell_o)$:

$$\int_0^{y_o} e^{-\lambda x}\ 1(\omega_o, y_o, \ell_o)\ dx = 1(\omega_o, \ell_o) \int_{(y_o-a)^+}^{y_o} e^{-\lambda x} dx = \frac{e^{-\lambda(y_o-a)^+} - e^{-\lambda y_o}}{\lambda}\ 1(\omega_o, \ell_o)$$

avec $(y_o-a)^+ = \operatorname{Sup}(0, (y_o-a))$ - On trouve ainsi :

$$\text{(7)} \qquad R_\lambda(y_o) = \begin{cases} e^{-\lambda y_o} R_\lambda(0) + \dfrac{1-e^{-\lambda y_o}}{\lambda}\ 1(\omega_o, \ell_o) & \text{pour } y_o < a \\ e^{-\lambda y_o} R_\lambda(0) + e^{-\lambda y_o}\ \dfrac{e^{\lambda a}-1}{\lambda}\ 1(\omega_o \ell_o) & \text{pour } y_o \geqslant a \end{cases}$$

<u>Calculons donc la résolvante</u> R_λ (<u>0</u>) pour $y_o = 0$. Nous allons, pour celà, former en premier lieu une équation intégrale que doit vérifier $P_x(\omega_o, 0, \ell_o; A, a, b)$. La propriété de Markov donne aussitôt

$$P_x(\omega_o, 0, \ell_o; -) = \int_\Omega \int_0^\infty \pi(\omega_o, \ell_o; d\omega_1, d\ell_1)\ P_x(\omega_1, \ell_1, \ell_1; -)$$

Remplaçons sous le signe d'intégration la fonction P_x par son expression (5) - (5') - Il vient :

$$P_x(\omega_o,0,\ell_o) = \int_\Omega \int_0^x \pi(\omega_o,\ell_o;d\omega,d\ell_1)\, P_{x-\ell_1}(\omega_1,0,\ell_1)$$

$$+ \int_A \int_x^{\mathrm{Inf}[(a+x),b]} \pi(\omega_o,\ell_o;d\omega_1,d\ell_1]$$

pour $x < b$, le premier terme du second membre subsistant seul si $x \geqslant b$.

Multiplions par $e^{-\lambda x}$ et intégrons en x. Au premier membre apparaît la résolvante $R_\lambda(o)$. Au deuxième membre, le premier terme donne

$$\int_\Omega \int_0^\infty \pi(\omega_o,\ell_o;d\omega_1,d\ell_1)\, e^{-\lambda\ell_1}\, R_\lambda(\omega_1,0,\ \ell_1) = \pi_\lambda\, R_\lambda(0)$$

Evaluons le second terme, qui est :

$$\int_0^b e^{-\lambda x}\, dx \int_x^{\mathrm{Inf}\,[(a+x),b]} \pi(\omega_o,\ell_o;A,d\ell_1) =$$

$$\int_0^b \pi(\omega_o,\ell_o;A,d\ l) \int_{(\ell-a)^+}^{\ell} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \int_0^b \frac{e^{-\lambda(\ell-a)^+} - e^{-\lambda\ell}}{\lambda}\, \pi(\omega_o,\ell_o,A,d\ell)$$

Nous avons donc montré que la fonction $R_\lambda(\omega_o,0,\ell_o;A,a,b)$, considérée comme une fonction $R_\lambda(0)$ des deux variables ω_o et ℓ_o vérifie l'équation intégrale du type (4) :

(8) $$R_\lambda\ (0) = g + \pi_\lambda\, R_\lambda(0)$$

avec

(8') $$g(\omega_o,\ell_o) = \int_0^b \frac{e^{-\lambda(\ell-a)^+} - e^{-\lambda\ell}}{\lambda}\, \pi(\omega_o,\ell_o;A,d\ell)$$

Montrons que la fonction [positive] g est bornée. On a, en effet :

$$g(\omega_o,\ell_o) \leqslant \int_o^\infty \frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda} \Pi(a_o,\ \ell_o;A,d\ell) \leqslant \int_\Omega \int_o^\infty \frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda} \pi(\omega_o,\ell_o,d\omega,d\ell)$$

c'est-à-dire :

$$g \leq (I - \pi_\lambda) \frac{1}{\lambda}$$

(I, opérateur unité), avec d'ailleurs l'égalité si $A = \Omega$, $a = b = \infty$, et g est borné, puisque $\pi_\lambda 1 \leqslant 1$. La série à termes positifs $\Sigma\ \pi_\lambda^n\ g$ est alors convergente et bornée. Elle est, en effet, majorée par $\sum_{n=o}^{\infty} \pi_\lambda^n (I - \pi_\lambda) \frac{1}{\lambda}$ et l'on a :

$$\sum_{n=o}^{N} \pi_\lambda^n (I - \pi_\lambda) \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \pi_\lambda^{N+1} \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Comme il n'y a pas effet de fuite, on a d'ailleurs :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \pi_\lambda^n (I - \pi_\lambda) \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

et l'unique solution bornée de (8) est la fonction :

$$R_\lambda(o) = \sum_{n=o}^{\infty} \pi_\lambda^n\ g$$

On a donc $R_\lambda(o) \leq \frac{1}{\lambda}$, et même $R_\lambda(o) = \frac{1}{\lambda}$ dans le cas particulier $A = \Omega$, $a = b = \infty$ (puisque, dans ce cas, $g = (I - \pi_\lambda)$, : $\lambda R_\lambda(o)$ est un noyau markovien comme il se doit (s'il y avait effet de fuite, $\lambda R_\lambda(o)$ serait seulement sous-markovien, et la solution précédente correspondrait seulement au processus arrêté au premier point d'accumulation).

EXISTENCE DE LA PROBABILITE STATIONNAIRE p

Pour des raisons intuitivement évidentes (remplacement des granulométries en nombre par les granulométries en longueur), la probabilité stationnaire pour P_x ($p\ P_x = p$), si elle existe, doit admettre l'expression

$$(9) \qquad p\ (d\omega,\ dy,\ d\ell) = \frac{1}{\int m(\omega)\ \varpi(d\omega)}\ \varpi(d\omega,\ d\ell)\ dy \quad (o \leqslant y \leqslant \ell)$$

(avec $\varpi = \varpi\ \pi$)

En effet, indépendamment de ω, un point x quelconque doit avoir une probabilité proportionnelle à $\ell\,\varpi(\Omega, d\ \ell)$ de tomber dans un segment de longueur ℓ ; de plus, x occupe alors une position quelconque sur ce segment, ce qui revient à dire que Y est uniformément répartie sur (o, ℓ), d'où un poids de la forme $\ell\,\varpi(d\omega,\ d\ell)\ \frac{dy}{\ell} = \varpi(d\omega,\ d\ell)\ dy \quad (o \leqslant y \leqslant \ell)$

Montrons $p\ P_x = p$ pour tout x, ou, ce qui revient au même, $p\ R_\lambda = p$ pour tout $\lambda > o$. En posant $m = \int m(\omega)\varpi(d\omega)$, il faut donc établir la relation :

$$(10) \qquad \frac{\lambda}{m} \int_\Omega \int_o^\infty \varpi(d\omega, d\ell) \int_o^\ell dy\ R_\lambda\ (\omega, y, \ell;\ A, a, b) = p\ (A, a, b)$$

avec

$$(10') \qquad p(A, a, b) = \int_A \int_o^b \text{Inf}\ (a, \ell)\ \frac{\varpi(d\omega, d\ell)}{m}$$

Pour évaluer le premier membre de (10), partons de (7), soit :

$$R_\lambda(y_o) = e^{-\lambda y_o} R_\lambda(o) + 1(A,b) \frac{e^{-\lambda(y_o-a)^+} - e^{-\lambda y_o}}{\lambda}$$

et intégrons d'abord en y_o : il vient aussitôt :

$$(11) \int_o^{\ell} R_\lambda(y_o)dy_o = \frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda} R_\lambda(o) - \frac{h}{\lambda} + \frac{1(A,b)}{\lambda} \operatorname{Inf}(a,\ell)$$

avec

$$h(\omega,\ell) = 1(A,b) \frac{e^{-\lambda(\ell-a)^+} - e^{-\lambda\ell}}{\lambda}$$

D'après (8') cette fonction h vérifie :

$$(8'') \qquad g = \pi h$$

et la relation (8) peut s'écrire :

$$R_\lambda(o) = g + \pi_\lambda R_\lambda(o) = \pi\,[h + e^{-\lambda\ell} R_\lambda(o)]$$

Ainsi, nous avons :

$$(1 - e^{-\lambda\ell}) R_\lambda(o) - h = (\pi - I)\,[h + e^{-\lambda\ell} R_\lambda(o)]$$

De $\varpi\pi = \varpi$, résulte que l'intégrale de cette expression pour la mesure $\varpi(d\omega,d\ell)$ est nulle. En intégrant (11), il vient donc, compte tenu de (10') :

$$\frac{\lambda}{m}\int_\Omega\int_o^\infty \varpi(d\omega,d\ell)\int_o^{\ell} R_\lambda(y_o)\,dy_o = \frac{1}{m}\int_A\int_o^b \operatorname{Inf}(a,b) = p\,(A,a,b)$$

ce qui achève de démontrer la relation (10)

RECONSTITUTION DE LA LOI SPATIALE

Connaissant le demi-groupe P_x et la probabilité stationnaire p, on reconstitue sans peine la loi spatiale (invariante par translation) de $(\omega_x, L_x Y_x)$, et par suite aussi celle de (ω_x) qui en est un cas particulier. Soient $x_o \leqslant x_1 \leqslant \dots \leqslant x_n$ n+1 points rangés par ordre croissant, et $h_k = h_k - h_{k-1} \geqslant o$ $(k = 1,2\dots n)$, et $B_o, B_1, \dots B_n$ n évènements de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$. Posons :

$$P_{B,h} = P_h I_B$$

où le noyau I_B est l'opérateur de multiplication par l'indicatrice 1_B de B. Explicitement :

$$P_{B,h} \varphi = \int_B P_h(\omega,y,\ell;\ d\omega',dy',d\ell')\ \varphi\ (\omega',y',\ell')$$

pour les fonctions φ mesurables définies sur $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ - Posons de même $p_B = pI_B$. On a alors (avec $e_k = (\omega_k, x_k, L_k)$

$$P\ (e_o \in B_o,\ e_1 \in B_1, \dots e_n \in B_n) = p_{B_o}\ P_{B_1,h_1}\ P_{B_2,h_2}, \dots P_{B_n,h_n}\ 1$$

En particulier, si les B_k sont de la forme :

$$B_k = A_k \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\times$$

on obtient la loi spatiale $P(\omega_{x_o} \in A_o, \dots \omega_{x_n} \in A_n)$ de la fonction aléatoire stationnaire (ω_x) -

Examinons les cas particuliers où il y a un seul ou deux points d'appui. Pour un seul point d'appui, on a $P(e \in B) = p(B)$ par définition. Pour ω_x, on trouve :

$$p(A) = P(\omega_x \in A) = \frac{1}{m} \int_A \int_0^\infty \varpi(d\omega, d\ell) \int_0^\ell dy$$

soit, explicitement :

$$(12) \qquad p(A) = \frac{\int_A m(\omega)\ \varpi(d\omega)}{\int_\Omega m(\omega)\ \varpi(d\omega)}$$

(on rappelle les définitions : la granulométrie conditionnelle en nombre $F_\omega(d\ell)$ et la mesure-nombre spécifique $\varpi(d\omega)$ sont données par $\varpi(d\omega, d\ell) = \varpi(d\omega)\ F_\omega(d\ell)$, $\varpi(d\omega) = \varpi(d\omega, R_+)$. On pose ensuite (traversée moyenne en nombre de l'état ω) :

$$m(\omega) = \int_0^\infty \ell\ F_\omega(d\ell)$$

La Covariance - Pour $A \in \mathfrak{A}$ et $A' \in \mathfrak{A}$, posons :

$$C_{A,A'}(h) = P\ (\omega_x \in A,\ \omega_{x+h} \in A')$$

(pour h fixé, $C_{A,A'}(h)$ définit une mesure sur $\Omega \times \Omega$) - On trouve

$$(13) \quad C_{A\ A'}(h) = \int_A \int_0^\ell \frac{\varpi(d\omega, d\ell)}{m} \int_0^\ell \frac{dy}{\ell} \int_{A'} \int_0^\infty \int_0^\infty P_h(\omega, y, \ell; d\omega', dy', d\ell')$$

et la transformée de Laplace $\chi_{A,A'}$ (2) de $C_{A,A'}(h)$ est :

$$(13\ \text{bis}) \quad \chi_{A,A'}(\lambda) = \int_A \int_0^\infty \frac{\ell\varpi(d\omega, d\ell)}{m} \int_0^\ell \frac{dy}{\ell} \iiint_{A'} R_\lambda(\omega, y, \ell; d\omega', dy', d\ell')$$

Il est commode d'introduire la probabilité conditionnelle :

$$C_{A'}(\omega_o,y_o,\ell_o;\ h) = P(\omega_{x+h} \in A' |\ \omega_o,y_o,\ell_o)$$

dont l'expression se déduit aussitôt de (13), ainsi que sa transformée de Laplace (en h) $\chi_{A'}$, donnée par :

$$\chi_{A'}\ (\omega_o,y_o,\ell_o;\ \lambda) = \int_{A'}\int_o^\infty\int_o^\infty R_\lambda\ (\omega_o,y_o,\ell_o;\ d\omega',dy',d\ell')$$

(ou $R_\lambda\ (\omega_o,y_o,\ell_o;\ A',a,b)$ avec $a = b \doteq \infty$ selon les notations du paragraphe précédent.)

Nous appellerons covariance conditionnelle $H_{A'}$ la fonction obtenue en faisant $y_o = 0$ dans $C_{A'}$:

$$H_{A'}\ (\omega_o,\ell_o;\ h) = C_{A'}\ (\omega_o,0,\ \ell_o;\ h)$$

C'est la probabilité conditionnelle d'avoir $\omega_{x+h} \in A'$ lorsque x est l'extrémité droite d'un segment ω_o de longueur ℓ_o. Soit $\eta_{A'}$ la transformée de Laplace (en h) de $H_{A'}$ - On a :

$$\eta_{A'}\ (\omega_o,\ell_o;\ \lambda) = R_\lambda\ (\omega_o,0,\ \ell_o;\ A',\ \infty,\ \infty)$$

D'après (8) et (8'), $\eta_{A'}$ est l'unique solution bornée de l'équation intégrale :

$$(14) \qquad \eta_{A'} = \pi_\lambda\ \eta_{A'} + \pi\ \left(1_{A'}\ \frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda}\right)$$

($1_{A'}$ désignant l'indicatrice de A'), soit :

$$(14\ \text{bis}) \qquad \eta_{A'} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_\lambda^n\ \pi\ \left(1_{A'}\ \frac{1-e^{-\lambda\ell}}{\lambda}\right)$$

La relation (7) (avec $A = A'$, $a = b = \infty$) permet de déduire $\chi_{A'}$ de $\eta_{A'}$, soit

$$(14\ \text{ter}) \qquad \chi_{A'}\ (\omega_o, y_o, \ell_o;\ \lambda) = e^{-\lambda y_o}\ \eta_{A'}\ (\omega_o, \ell_o;\ \lambda) + 1_{A'}\ \frac{1-e^{-\lambda y_o}}{\lambda}$$

Intégrons en y de O à ℓ_o:

$$\int_o^{\ell_o} \chi_{A'}\ dy = \frac{1-e^{-\lambda \ell_o}}{\lambda}\ \eta_{A'} - 1_{A'}\ \frac{1-e^{-\lambda \ell_o}}{\lambda^2} + \ell_o\ \frac{1_{A'}}{\lambda}$$

Selon un calcul déjà fait, on trouve :

$$\int_o^{\ell_o} \chi_{A'}\ dy = \frac{1}{\lambda}\ (\pi - I)\ [e^{-\lambda l}\ \eta_{A'} + 1_{A'}\ \frac{1-e^{-\lambda \ell}}{\lambda}] + \frac{\ell_o}{\lambda}\ 1_{A'}$$

Selon (13) bis, on obtient $\chi_{A,A'}\ (\lambda)$ en intégrant cette expression selon la mesure $\frac{1}{m}\ 1_A(\omega)\ \varpi(d\omega, d\ell) = \frac{1}{m}\ \varpi_A = \frac{1}{m}\ (\varpi - \varpi_{A^c})$.
Comme $\varpi\ (\pi - I) = 0$, et $\frac{1}{m}\varpi\ (1_A\ 1_{A'}\ell) = p\ (A \cap A')$, il vient :

$$\chi_{A,A'}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\ p\ (A \cap A') - \frac{1}{\lambda}\ \varpi_{A^c}\ (\pi - I)[e^{-\lambda \ell}\eta_{A'} + 1_{A'}\frac{1-e^{-\lambda \ell}}{\lambda}]$$

<u>Cycles et temps d'atteinte</u>

Si $A \in \mathcal{a}$ est un évènement dans Ω,, la fonction $1_A(\omega_x)$ (= O si $\omega_x \in A^c$ et 1 si $\omega_x \in A$) est une fonction aléatoire en tout ou rien, stationnaire (mais non markovienne). Nous avons déterminé ci-dessus sa covariance. Proposons-nous de déterminer ses granulométries en nombre (par exemple).

Nous poserons $\pi_A = \pi I_A$ et $\pi_{\lambda, A} = \pi_\lambda I_A$ - Ces noyaux admettent des interprétations probabilistes simples.

$\pi_A(B) = \pi(A \cap B)$ est la probabilité (conditionnelle) pour que l'état (ω_1, L_1) succédant à (ω_o, L_o) vérifie $\omega_1 \in A$ et $(\omega_1, L_1) \in B$. De même, $\pi_{\lambda,A}(B) = \pi_\lambda(A \cap B)$ est la transformée de Laplace $E(e^{-\lambda Z})$ de la variable Z égale à L_1 ou à l'infini selon que $\omega_1 \in A$ et $(\omega, L_1) \in B$ ou non.

De même $\pi_A^n \ \pi_{A^c}$ et $\pi_{\lambda,A}^n \ \pi_{A^c}$ admettent les interprétations suivantes :

$\pi_A^n \ \pi_{A^c}$ (B) est la probabilité (conditionnelle en ω_o, L_o) d'avoir $\omega_1 \in A, \dots \omega_n \in A$ et $(\omega_{n+1}, L_{n+1}) \in A^c \cap B$ (atteindre pour la première fois un état de A^c à la n~ itération, avec de plus $(\omega_{n+1}, L_{n+1}) \in B$). De même, $\pi_{\lambda,A}^n \ \pi_{A^c}$ (B) est l'espérance conditionnelle de $E(e^{-\lambda Z})$, avec $Z = L_1 + .. + L_n$ ou ∞ selon que cet évènement se produit ou non.

Considérons la chaîne (ω_n, L_n) conditionnellement pour un état initial ω_o, ℓ_o, et considérons la variable

$$Z = \ell_o + L_1 + \dots + L_N$$

N désignant le premier indice n avec $\omega_{N+1} \in A_c$ (ou $Z = \infty$ s'il n'en existe pas). Posons

$$\Phi_A(\omega_o, \ell_o; \lambda) = E\,(e^{-\lambda Z}; \omega_o, \ell_o)$$

Cette fonction Φ_A vérifie manifestement l'équation intégrale :

(15) $$\Phi_A = e^{-\lambda \ell_o} \pi_A \Phi_A + e^{-\lambda \ell_o} \pi_{A^c} \ 1$$

dont la solution (que l'on peut aussi former directement) est :

(15')
$$\Phi_A = e^{-\lambda \ell_o} \sum_{n=o}^{\infty} \pi^n_{\lambda,A} \pi_{A^c} 1$$

Supposons $\omega_o \in A$ et que cet état soit précédé d'un état $\omega \in A^c$ (évènement de probabilité $\varpi_{A^c} \pi_A 1$). Sous cette hypothèse, l'espérance conditionnelle de $E(e^{-\lambda Z})$ $(Z = L_o + L_1 +\ldots+ L_N)$ est la transformée de Laplace de la granulométrie en nombre de la composante A. Elle est donnée par :

$$\frac{\varpi_{A^c} \pi_A \Phi_A}{\varpi_{A^c} \pi_A 1} = \frac{1}{\varpi_{A^c} \pi_A 1} \varpi_{A^c} \sum_{n=1}^{\infty} \pi^n_{\lambda A} \pi_{A^c} 1$$

Pour $\lambda = o$, (15') donne :

$$\Phi_A (o) = \sum_{n=o}^{\infty} \pi^n_A \pi_{A^c} 1$$

(probabilité de passer au moins une fois par A^c en partant de ω_o, L_o) - Comme $\pi_{A^c} 1 = 1 - \pi_A 1$, on a toujours

$$\Phi_A (o) = 1 - \lim_{n \to o} \pi^n_A 1$$

Nous supposerons que l'évènement A vérifie $\pi^n_A 1 \to o$ pour $n \to \infty$, c'est-à-dire $\Phi_A (o) = 1$ pour tout état initial (ω_o, ℓ_o)

Désignons par

$$\mu_A(\omega_o, \ell_o) = E(Z | \omega_o, l_o) = \lim_{\lambda \downarrow o} \frac{d}{d\lambda} \Phi_A(\lambda)$$

l'espérance (finie ou non) de la variable dont la tranformée est $\Phi_A(\lambda)$. On déduit de (15) :

(15") $$\mu_A(\omega_o, \ell_o) = \ell_o + \pi_A \mu_A$$

Intégrons selon $\varpi(d\omega_\Omega, d\ell_o)$. Il vient :

$$\varpi \mu_A = \int \varpi(d\omega)\, m(\omega) + \varpi_A \mu_A$$

D'où la relation :

(16) $$\varpi_{A^c} \mu_A = \int \varpi(d\omega)\, m(\omega)$$

L'espérance m(A) associée à la granulométrie (en nombre) de la composante A, de son côté, est :

$$m(A) = \frac{\varpi_{A^c} \pi_A \mu_A}{\varpi_{A^c} \pi_A 1}$$

Mais on a, d'après (15")et (16)

$$\varpi_{A^c} (\pi_A \mu_A) = \varpi_{A^c} (\mu_A - \ell_o) = \int_A \varpi(d\omega)\, m(\omega)$$

d'où le résultat :

(17) $$m(A) = \frac{1}{\varpi_{A^c} \pi_A 1} \int_A \varpi(d\omega)\, m(\omega)$$

Comme $\varpi_{A^c} \pi_A 1 = \varpi_A \pi_{A^c} 1$, il suffit de comparer à (12) pour obtenir

(18) $$p(A) = \frac{m(A)}{m(A) + m(A^c)}$$