NOTE GEOSTASTISTIQUE N° 77

PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ET PSEUDOPERIODICITES

Il convient d'être très prudent lorsque l'on interprète les fluctuations périodiques que l'on observe parfois sur une covariance expérimentale. En particulier, il ne faut pas se hâter de leur attribuer une signification génétique qu'elles ne possèdent pas nécessairement. Des processus de renouvellement de type très simple donnent, en effet, naissance à des effets de ce genre: si, le long d'une droite, on fait se succéder des traversées aléatoires <u>indépendantes</u> que l'on attribue alternativement aux grains et aux pores, on observe des oscillations amorties, pour peu que les courbes granulométriques se resserrent autour de leur mode. Si les distances moyennes entre grains, par exemple, ne diffèrent que peu de leur valeur moyenne, le processus comporte une composante périodique, dont la période est égale à cette valeur moyenne, et qui s'amortit d'autant plus lentement que la granulométrie des pores est moins dispersée. Celà ne signifie en aucune façon que la réalisation de ce processus soit influencée ou prédeterminée par un hypothétique réseau périodique qui lui serait antérieur. Il s'agit toujours, en effet, d'un processus de renouvellement, où, à chaque changément d'état, l'avenir (la partie droite de la figure) est indépendant du passé (de la partie gauche). Nous allons donner un exemple simple et frappant de ce phénomène, et, pour celà, nous exprimerons d'abord la fonction de covariance d'un tel processus en fonction des deux granulométries.

I - Relation entre covariance et granulométries.

Nous désignerons par F_1 et F_0 les fonctions de répartition des granulométries en nombre des traversées des grains et des pores, par m_1 et m_0 les traversées moyennes associées, par $p_1 = m_1/(m_0 + m_1)$ et $p_0 = m_0/(m_0 + m_1)$ les probabilités pour qu'un point appartienne aux grains ou aux pores, par Φ_1 et Φ_0 enfin les transformées de Laplace de $F_1(dx)$ et de $F_0(dx)$. Le processus est dit de renouvellement si les longueurs des traversées successives des grains et des pores sont des variables mutuellement indépendantes (de lois F_1 et F_0 respectivement).

a/ Covariance conditionnelle. Nous désignerons par $H_1(\ell)$ la probabilité pour que le point $x_0 + \ell$ soit dans les grains lorsque l'on sait que le point x_0 lui-même est l'origine d'un grain (sépare un pore à gauche et un grain à droite). Mais cet évènement se réalise de deux façons différentes : ou bien tout le segment $(x_0 + \ell)$ est contenu sans interruption dans les grains, ou bien un premier pore apparu en $x_0 + x$ s'est terminé en $x_0 + x + y \leq \ell$ Ainsi, on a :

$$H_1(\ell) = 1 - F_1(\ell) + \int_0^{\ell} F_1(dx) \int_0^{\ell - x} H_1(\ell - x - y)\, F_0(dy) \tag{I}$$

Passant aux transformées de Laplace, et désignant par $\mathcal{D}_1(\lambda)$ celle de H_1 cette équation de convolution devient :

$$\mathcal{D}_1(\lambda) = \frac{1 - \Phi_1}{\lambda} + \mathcal{D}_1\, \Phi_0\, \Phi_1$$

soit :

$$\mathcal{D}_1(\lambda) = \frac{1 - \Phi_1}{\lambda\,[1 - \Phi_0 \Phi_1]} \tag{2}$$

b/ Covariance $C_0(h)$. Désignons maintenant par $C_0(h)$ la probabilité pour que les points x_0 et $x_0 + h$ soient tous les deux dans les pores. Cet évenement se réalise de deux façons :

– ou bien le segment $(x_0 + h)$ est sans interruption dans les pores, ce qui a lieu avec la probabilité $p_0 P_0(h) = p_0/m_0 \int_h^{\infty} [1 - F_0(x)]\,dx$

ou bien un premier grain apparait en $x_0 + x$, et $x_0 + h$ n'est cependant pas dans les grains. Le changement d'état en $x_0 + x$ établissant l'indépendance entre l'avenir et le passé, la probabilité de cet évènement est :

$$p_0/m_0 [1 - F_0(x)]\,dx\,[1 - H_1(h - x)]$$

D'où l'équation intégrale :

$$C_0(h) = p_0/m_0 \int_h^{\infty} [1 - F_0(x)]\,dx + p_0/m_0 \int_0^{h} [1 - F(x)][1 - H_1(h - x)]\,dx$$

c'est à dire :

(3) $$C_o(h) = p_o - p_o/m(1 - F) * H_1$$

Si G_o désigne la transformée de $C_o(h)$, ceci donne $G_o = p/\lambda - \frac{h_o}{m_o}\frac{1-\Phi_o}{\lambda} D_1$
et, compte tenu de (2) :

(4) $$G_o(\lambda) = \frac{h_o}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{h_o}{m_o}\frac{(1-\Phi_o)(1-\Phi_1)}{1-\Phi_o\Phi_1}$$

2º Exemple.

On obtient des exemples interessants en prenant pour Φ_o et Φ_1 des lois gamma. Si les deux lois sont exponentielles, on retombe sur un processus markovien à covariance exponentielle. Lorsque α_o et α_1 augmentent, les histogrammes de F_o et F_1 se resserrent autour de leurs modes, et notre processus engendre~~XX~~, en dehors de toute prédétermination, des fluctuations périodiques qui s'amortissent d'autant moins vite que α_o et α_1 seront plus grands.

On peut effectuer un calcul explicite et instructif dans le cas $\alpha_o = \alpha_1 = 2$ (les lois F_o et F_1 ont la même densité $b^2 x e^{-bx}$, $p_o = p_1 = 1/2$, $m_o = m_1 = 2/b$)
On a ici $\Phi_o = \Phi_1 = b^2/(\lambda + b)^2$, et l'on tire de (4) :

$$G_o = \frac{1}{2\lambda} - \frac{b}{4\lambda^2}\frac{(b+\lambda)^2 - b^2}{(b+\lambda)^2 + b^2}$$

Au lieu de $C_o(h)$, il convient de considérer la covariance sensu stricto $C_o(h) - p_o^2$ qui s'annule à l'infini. Elle admet la transformée :
$G_o(\lambda) - p_o^2/\lambda = 1/4\lambda\left[1 - b(\lambda + 2b)/(\lambda^2 + 2\lambda b + 2b^2)\right]$, c'est à dire :

$$G_o(\lambda) - p_o^2/\lambda = \frac{1}{4}\frac{\lambda + b}{(\lambda+b)^2 + b^2}$$

On reconnait la transformée de Laplace de la sinusoïde amortie $e^{-bx}\cos bx$.
Ainsi, la covariance de ce processus de renouvellement pur est =

$$C_o(h) - p_o^2 = 1/4\, e^{-bh}\cos bh$$

On formera sans peine d'autres exemples : ainsi, on peut prendre une exponentielle pour $1 - F_o$, et des grains de longueurs constante a , soit $\Phi_1 = e^{-\lambda a}$

La covariance se présente comme la somme des fonctions de répartition de lois gamma d'ordre 0,1, 2 ..., la loi d'ordre n étant translatée de na vers la droite : d'où naissance de fluctuations de période a. Ces oscillations de période a s'introduisent ici du seul fait que les grains ont tous la même longueur a .

3º La portée.

La relation (4) permet d'établir facilement la formule donnant la portée en fonction des granulométries, dans le cas d'un processus de renouvellement. On a, en effet, :

$$a = \frac{2}{p_0 p_1} \int_0^{\infty} [C_0(h) - p_0^2]^2 \, dh = 2 \lim_{\lambda \to 0} \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{m_1 + m_0}{\lambda^2 m_1 m_0} \frac{(1-\phi_0)(1-\phi_1)}{1 - \phi_0 \phi_1} \right]$$

En introduisant des developpements du type :

$$\Phi_0(\lambda) = 1 - \lambda m_0 + \frac{1}{2} \lambda^2 (m_0^2 + \sigma_0^2)$$

on obtient sans peine :

$$a = p_1 \frac{\sigma_0^2}{m_0} + p_0 \frac{\sigma_1^2}{m_1} \cancel{- \frac{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}{m_0 + m_1}}$$