

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 89

SCHEMA BOOLEEN SEQUENTIEL DE PARTITION ALEATOIRE

TABLE

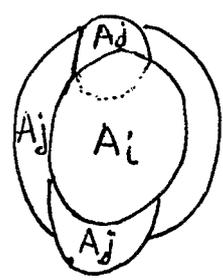
I	-	<u>Définition</u>	1
II	-	<u>Calcul de <math>P(R_B)</math></u>	2
III	-	<u>Exemples</u>	3
		1 - Covariance	3
		2 - Granulométries linéaires	3
		3 - Exercice	5
		4 - Cas où l'on dispose de la vision en relief	5
		a/ Composantes en creux	6
		b/ Composantes en relief	6
		c/ Composantes en écaille	7
		d/ Conséquences	8
IV	-	<u>Les grains entiers</u>	11
V	-	<u>Nombre de Connexité</u>	15

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 89

SCHEMA BOOLEEN SEQUENTIEL DE PARTITION ALEATOIRE

I - DEFINITION  
=====

Soit A un grain aléatoire (p.s. borné),  $\omega(B) = P(B \subset A)$  et  $\chi(B) = P(A \cap B = \emptyset)$  ses moments fonctionnels. Depuis l'origine des temps -  $t_0$  (que nous rejetterons à  $-\infty$ ), nous mettons en place des schémas booléens successifs de densités moyennes  $a$  à  $t$  pour chaque intervalle  $(t, t + dt)$ . Soient  $t_i$  et  $\xi(t_i)$  les instants successifs de mise en place effective d'un grain primaire  $A_i$ , et  $\xi(t_i)$  la position du germe correspondant ( $A_i = A_{\xi(t_i)}$ ). Comme les  $t_i$  forment une suite ordonnée, nous pouvons supposer que



chaque  $A_i$  efface ou cache les portions des  $A_j$  antérieurs ( $t_j < t_i$ ) qu'il recouvre. (exemple simple : vision en perspective d'un demi-espace rempli de sphères).

L'origine des temps étant rejetée à  $-\infty$ , l'espace entier est couvert par les  $A_i$ . Montrons, en effet, qu'un ensemble B donné (borné) est même presque sûrement recouvert par un  $A_i$  (pourvu que  $Mes(A \odot B)$  ait une espérance non nulle).

En effet, la probabilité pour que B soit contenu dans un grain A tombé entre  $t$  et  $t + dt$  est

$$adt \int_{R^n} \omega(B - \xi) d\xi = adt E [Mes(A \odot B)]$$

Ainsi, la probabilité pour que B n'ait pas été couvert par un des grains tombés entre  $-t$  et  $0$  est  $e^{-atE[\text{Mes}(A \ominus \check{B})]}$ . Elle tend bien vers  $0$  pour  $t \rightarrow \infty$ . Les parties visibles des  $A_i$  constituent donc une partition aléatoire.

II - CALCUL DE P (R<sub>B</sub>)

Nous désignons par  $R_B$  l'évènement "l'ensemble B est contenu dans une classe de la partition définie ci-dessus" (on peut noter que les classes de cette partition ne sont pas, en général, toutes connexes, même si le grain primaire est connexe, ou même convexe: on peut alors remplacer la partition précédente par la partition plus fine dont les classes sont les composantes connexes des classes initiales. Si l'ensemble B est connexe, l'évènement  $R_B$  peut être défini indifféremment selon l'une ou l'autre de ces partitions).

Comme B est presque sûrement couvert par un  $A_i$ ,  $R_B$  est somme logique des évènements :  
 "un grain  $A_i$  a couvert B à une époque comprise entre  $-t$  et  $-t + dt$ , et les grains postérieurs à  $-t$  n'ont pas rencontré B" dont la probabilité est

$$a \, dt \, E [\text{Mes}(A \ominus \check{B})] e^{-at} E[\text{Mes}(A \oplus \check{B})]$$

En intégrant de  $0$  à l'infini, on trouve

$$(1) \quad P(R_B) = \frac{E[\text{Mes}(A \ominus \check{B})]}{E[\text{Mes}(A \oplus \check{B})]}$$

III - EXEMPLES - 1/ Pour  $B = \{x, x+h\}$ ,  $R_B$  est l'évènement "les deux points  $x$  et  $x+h$  sont dans une même classe".  $P(R_B)$  est donc l'espérance

$$C(h) = E [g(h)] = P(R_B)$$

du covariogramme géométrique  $g(h)$  de la classe du point  $x$ . On posera  $K(h) = E [\text{Mes} (A \cap A_h)]$ , d'où aussi

$$E[\text{Mes}(A \cup A_h)] = 2 K(0) - K(h)$$

La formule (1) donne :

$$C(h) = \frac{K(h)}{2 K(0) - K(h)}$$

2/ Granulométries linéaires- Lorsque  $B$  est le segment d'extrémités  $x$  et  $x+h$ , désignons par  $P(h) = P(R_B)$  la probabilité pour que ce segment soit contenu dans une seule classe (donc dans une même composante connexe de cette classe). Bien qu'il n'y ait aucune difficulté à former l'expression générale, limitons-nous au cas où le grain primaire est connexe. On a alors

$$E [\text{Mes} A \ominus B] = E [\text{Mes} (A \cap A_h)] = K(h)$$

$$E [\text{Mes} A \oplus B] = K(0) - hK'(0)$$

D'où

$$P(h) = \frac{K(h)}{K(0) - hK'(0)}$$

On en déduit la granulométrie (en nombre) induite sur une droite (ayant la direction de  $h$ ). De :

$$P(h) = \int_h^{\infty} \frac{1 - F(h)}{m} dh$$

on déduit, en effet, le nombre spécifique  $v$  :

$$(3) \quad v = \frac{1}{m} = -P'(0) = -\frac{2 K'(0)}{K(0)}$$

puis :

$$1 - F(h) = \frac{P'(h)}{P'(0)} = \frac{K(0)}{2 K'(0)} \left[ \frac{K'(h)}{K(0) - hK'(0)} + \frac{K'(0) K(h)}{[K(0) - hK'(0)]} \right]$$

Remarque : Si  $F_0(h)$  est la granulométrie (en nombre) induite par le grain primaire sur une droite de direction  $h$ , on a :

$$1 - F_0(h) = \frac{K'(h)}{K'(0)}$$

Soit  $m_0 = \int_0^{\infty} [1 - F_0(h)] dh$  la traversée moyenne du grain primaire. On a  $m_0 = -K(0) / K'(0) =$  Volume moyen/surface moyenne du contour apparent, et d'après (3') :

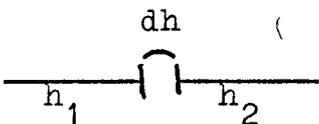
$$m = \frac{1}{2} m_0$$

La traversée moyenne est réduite de moitié relativement à celle du grain primaire.

Pour simplifier les formules ci-dessus, on peut prendre  $K'(0) = -1$ . Cela revient à raisonner directement sur le schéma induit sur la droite de direction  $h$  (et avec les schémas booléens induits par les schémas booléens de densité  $a$  et  $t$ ). On a alors  $K(0) = m_0$ , et :

$$\begin{cases} v = \frac{1}{m} = \frac{2}{K(o)} = \frac{2}{m_0} \\ 1-F(h) = - \frac{K(o)}{2} \left[ \frac{K'(h)}{K(o) + h} - \frac{K(h)}{(K(o) + h)^2} \right] \end{cases}$$

3/ Exercice - Montrer qu'un petit intervalle dh contient



( le point de séparation de deux segments de longueurs supérieures à  $h_1$  et  $h_2$ , et contenus dans deux composantes connexes, avec la probabilité

$$- dh \left[ \frac{K(h_2) K'(h_1)}{[K(o) + h_2]} + \frac{K'(h_2) K(h_1)}{[K(o) + h_1]} \right] \frac{1}{K(o) + h_1 + h_2}$$

En déduire que le schéma induit n'est pas un processus de renouvellement (les longueurs de deux segments successifs ne sont pas indépendantes). On pourrait de même vérifier que le processus induit n'est pas à renouvellements markoviens.

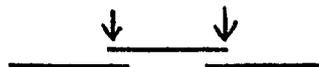
4/ Cas où l'on dispose de la vision en relief -

Dans le schéma induit, distinguons trois sortes de composantes :

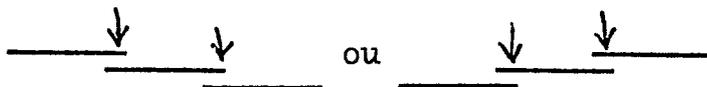
composante en creux



en relief



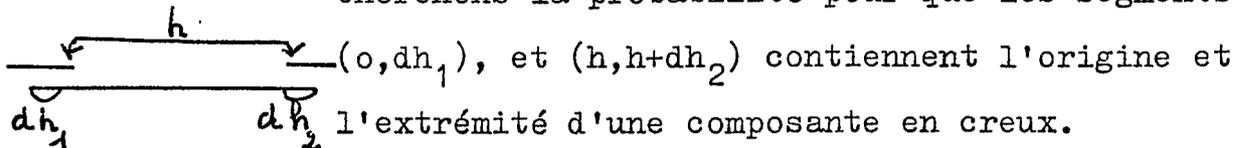
en écaille



et désignons par  $v_c, v_r, v_e, F_c, F_r, F_e$  les nombres spécifiques et les granulométries en nombre de ces différentes composantes -

a/ Composante en creux -

Cherchons la probabilité pour que les segments :



On doit écrire qu'à un certain instant  $-t$  le segment à été recouvert par un grain et n'a plus été rencontré par les grains ultérieurs (probabilité  $a dt K(h) e^{-at(K(o) + h)}$ ) et qu'une extrémité droite et une extrémité gauche sont tombées dans  $(0, dh_1)$  et  $(h, h+dh_2)$  respectivement entre les instants  $-t$  et  $0$  (probabilité  $a^2 t^2 dh_1 dh_2$ ).

La probabilité cherchée est donc :

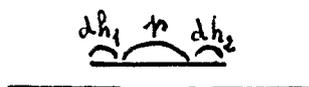
$$a^3 dh_1 dh_2 K(h) \int_0^\infty t^2 e^{-at[K(o)+h]} dt = \frac{2 K(h) dh_1 dh_2}{(K_o + h)^3}$$

En intégrant en  $h$ , on en déduit le nombre spécifique  $v_c$  puis la granulométrie en nombre  $F_c$  :

$$(a) \begin{cases} v_c = 2 \int_0^\infty \frac{K(h) dh}{[K(o) + h]^3} = \frac{1}{K(o)} + \int_0^\infty \frac{K'(h) dh}{[K(o) + h]^2} \\ v_c [1-F_c(h)] = \frac{K(h)}{[K(o) + h]^2} + \int_h^\infty \frac{K'(h)}{[K(o) + h]^2} dh \end{cases}$$

b/ Composante en relief

On écrit qu'à un instant  $t$  s'est mis en place un segment dont les extrémités sont tombées dans  $(0, dh_1)$  et  $(h, h+ dh_1)$  respectivement



(probabilité a d t  $K''(h) dh_1 dh_2$ ) et que ce segment n'a plus été rencontré par les grains ultérieurs ( $e^{-at[K(o)+h]}$ ). D'où la probabilité :

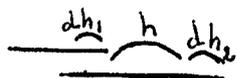
$$dh_1 dh_2 \int_0^{\infty} a K''(h) e^{-at [K(o)+h]} dt = \frac{K''(h) dh_1 dh_2}{K(o) + h}$$

(en réalité, il suffit de remplacer  $K''(dh_2)$  par  $-K'(dh)$  pour s'affranchir de toute hypothèse sur l'existence de  $K''$ ). On en tire

$$(b) \begin{cases} v_r = \int_0^{\infty} \frac{K''(h) dh}{K(o) + h} = \frac{1}{K(o)} + \int_0^{\infty} \frac{K'(h) dh}{[K(o) + h]^2} \\ v_r [1 - F_r(h)] = \frac{-K'(h)}{K(o) + h} + \int_h^{\infty} \frac{K'(h) dh}{[K(o) + h]^2} \end{cases}$$

### c/ Composante en écaille

On a deux cas symétriques (de même probabilité) selon que l'extrémité en relief est à droite ou à gauche. Nous traiterons le cas où elle est à droite, quitte à multiplier par deux la probabilité obtenue -



On écrit qu'en -t l'extrémité droite d'un grain de longueur  $\gg h$  est tombée dans  $(h, h + dh_2)$

(ad t  $K'(h) dh_2$ ), que le segment  $h$  n'a plus été rencontré ( $e^{-at[K(o)+h]}$ ), et qu'entre -t et 0 une extrémité gauche est tombée dans  $(0, dh_1)$  (probabilité a t d  $dh_1$ ). D'où la probabilité cherchée (après multiplication par 2)

$$- 2 \int_0^{\infty} aK'(h) dh_1 dh_2 t e^{-at[K(o)+h]} \frac{d}{dt} = - \frac{2 K'(h) dh_1 dh_2}{[K(o) + h]^2}$$

On en tire :

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_e = - 2 \int_0^{\infty} \frac{K'(h) dh}{[K(o) + h]^2} \\ v_e [1 - F_e(h)] = - 2 \int_h^{\infty} \frac{K'(h)}{[K(o) + h]^2} dh \end{array} \right.$$

On aurait pu aussi déduire directement (c) de (a), (b) et des relations

$$\left\{ \begin{array}{l} v = v_c + v_r + v_e = \frac{2}{K(o)} \\ v(1-F) = v_c(1-F_c) + v_r(1-F_r) + v_e(1-F_e) = - \frac{d}{dh} \frac{K(h)}{h + K(o)} \end{array} \right.$$

#### d/ Conséquences

En comparant (a) et (b), on trouve

$$(d_1) \quad v_c = v_r = \frac{1}{2} (v - v_e)$$

Il y a le même nombre spécifique de composantes en creux et en relief.

En dérivant (c), on trouve aussi :

$$(d_2) \quad v_r d F_r(h) = \frac{1}{K_o+h} d K'(h) = \frac{1}{K_o+h} d F_o(h)$$

Ainsi, la granulométrie en relief est biaisée vis-à-vis de la granulométrie originelle  $F_o$  : les fréquences sont pondérées par un poids en  $1/K(o) + h$ . On tire aussitôt de (d<sub>2</sub>) :

$$(d_3) \quad v_r = \int_0^{\infty} \frac{1}{K(o) + h} d F_o(h) = E_o \left[ \frac{1}{m_o + h} \right]$$

c'est-à-dire le nombre spécifique  $v_r$  en fonction de  $F_o$  et de l'espérance  $m_o = K(o) = \int_0^{\infty} h d F_o(h)$  - En multipliant  $(d_2)$  par  $K_o + h$  avant d'intégrer, on trouve

$$K(o) v_r + v_r m_r = 1 \quad \text{ou} \quad v_r = \frac{1}{m_o + m_r}$$

Mais on a aussi

$$(d_4) \quad v_c m_c + v_e m_e + v_r m_r = \frac{1}{2} K(o) v = 1$$

et d'ailleurs  $v_c = v_r$   $(d_1)$ . Ainsi

$$(d'_4) \quad m_o v_c = m_c v_c + m_e v_e \quad \text{ou} \quad v_c = \frac{m_e v_e}{m_o - m_c}$$

mais de plus  $v_r = \frac{1}{2} (v - v_e)$  et  $K(o) v_r = 1 - \frac{1}{2} K(o) v_e$ . D'où aussi :

$$(d_5) \quad v_r m_r = \frac{1}{2} m_o v_e = v_e / v$$

(si les écailles sont nombreuses, les composantes en relief occupent une grande longueur totale). On trouverait sans peine des relations du même genre pour les moments d'ordre supérieurs.

Inégalités - De  $(d_3)$  déduire  $v_r > \frac{1}{2m_o}$

de  $(d_4)$   $(d'_4)$ ,  $\frac{m_o - m_c}{m_r} = v m_e$ , et en particulier  $m_c \leq m_o$

et  $v_e = \frac{m_o - m_c}{m_e (m_o + m_r)}$

e/ On peut aussi exprimer directement ces granulométries en fonction de  $P(h)$ . On note que  $F_c$  et  $F_e$  admettent des densités, mais pas nécessairement  $F_r$ . Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_c f_c(h) = \frac{2 P(h)}{[h + K(o)]^2} \\ v_e f_e(h) = - \frac{2 P'(h)}{K(o) + h} - \frac{2 P(h)}{[K(o) + h]^2} \\ v_r dF_r(h) = d P'(h) + \frac{2 P'(h)}{K(o) + h} dh \end{array} \right.$$

Enfin, en introduisant la granulométrie originelle  $1-F_o(h) = K'(h)$  et la granulométrie  $F$  ( $vF = v_c F_c + v_r F_r + v_e F_e$ ), on trouve

$$v (1-F) = \frac{1 - F_o}{h + K(o)} + \frac{K}{[h + K(o)]^2}$$

et on en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_c [1-F_c] = v(1-F) - \frac{1 - F_o}{h + K(o)} - \frac{1}{2} v_e (1-F_e) \\ v_r [1-F_r] = \frac{1 - F_o}{h + K(o)} - \frac{1}{2} v_e (1-F_e) \end{array} \right.$$

cette dernière relation permet de reconstituer sans peine la granulométrie originelle [avec  $m_o = K(o) = \int_0^{\infty} h dF_o(h) = 2 \int_0^{\infty} h dF(h)$ ]

$$(e_1) \quad 1 - F_o(h) = (h + m_o) \left[ v_r (1-F_r(h)) + \frac{1}{2} v_e (1-F_e(h)) \right]$$

On peut aussi partir de la relation

$$K(h) = (m_o + h) P(h)$$

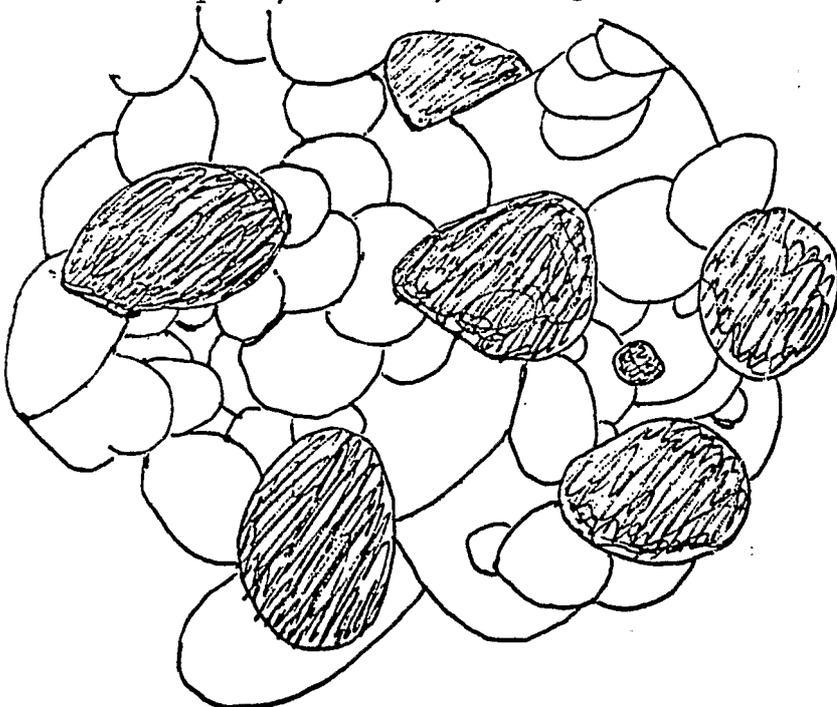
qui donne

$$(e_2) \quad 1 - F_0(h) = K'(h) = -P(h) - (m_0 + h) P'(h)$$

(la comparaison des résultats obtenus expérimentalement par  $(e_1)$  et  $(e_2)$  doit constituer un test de la valeur des hypothèses faites sur le schéma).

#### IV - LES GRAINS ENTIERS

Supposons que la partition aléatoire définie ci-dessus soit réalisée dans l'espace à deux dimensions  $\mathbb{R}^2$  à partir d'un grain primaire A convexe. Nous désignerons par S et  $2\mathcal{L}$  la surface et le périmètre de A, et par  $F_0[ds, d(2\mathcal{L})]$  la loi de ces deux variables aléatoires. Supposons de plus que l'observateur dispose de la vision en relief, et soit capable par suite de décider si une classe donnée de la partition aléatoire correspond, ou non, à un grain primaire  $A_i$  entier (et en relief). Ces



grains primaires intacts constituent les composantes connexes (et convexes) d'un ensemble aléatoire  $E_r$ , égal à leur réunion. Cherchons le nombre et les caractéristiques de ces grains primaires en relief. La probabilité pour qu'un grain primaire A germe en  $d\xi$  entre les temps  $-t$  et  $-t + dt$  et admette

une surface  $S$  et un périmètre  $2\mathcal{L}$  est  $\text{adtd}\xi F_0(dS, d2\mathcal{L})$ . Ce grain primaire est disjoint des grains primaires qui lui sont postérieurs avec la probabilité  $e^{-at(K_0+S - K'_0\mathcal{L})}$

Ainsi, le nombre spécifique  $v_r$  des grains en relief est

$$v_r = \int F_0(dS, d2\mathcal{L}) a \int_0^\infty e^{-at(K_0+S - K'_0\mathcal{L})} dt$$

Soit :

$$(4) \quad v_r = \frac{\int F_0(dS, d2\mathcal{L})}{K_0 + S - K'_0\mathcal{L}}$$

[avec  $E(S) = K_0$ ,  $E(\mathcal{L}) = -\pi K'_0$ ] - Désignant ensuite par  $F_r(dS, d2\mathcal{L})$  la loi de la surface et du périmètre, on a :

$$(4') \quad v_r F_r(dS, d2\mathcal{L}) = \frac{F_0(dS, d2\mathcal{L})}{K_0 + S - K'_0\mathcal{L}}$$

On voit ainsi le biais qui affecte les fréquences de la surface et du périmètre des grains intacts vis-à-vis de leurs fréquences originelles. Multipliant (4') par  $K_0 + S - K'_0\mathcal{L}$  avant d'intégrer, on trouve aussi :

$$(4'') \quad v_r [E_0(S) + E_r(S) + \frac{1}{\pi} E_0(\mathcal{L}) E_r(\mathcal{L})] = 1$$

( $E_0$  et  $E_r$  désignant les intégrales selon  $F_0$  et  $F_r$ )

Exemple Si les grains primaires sont des cercles et  $F_0(dr)$  leur granulométrie en nombre, le nombre spécifique  $v_r$  et la

granulométrie en nombre  $F_r$  des cercles intacts sont :

$$(5) \quad \begin{cases} v_r = \int_0^{\infty} \frac{F_0(dr)}{\pi(m_2 + 2m_1r + r^2)} \\ v_r F_r(dr) = \frac{F_0(dr)}{\pi(m_2 + 2m_1r + r^2)} \\ (m_n = \int_0^{\infty} r^n F_0(dr) ) \end{cases}$$

Désignons par  $m'_n = \int_0^{\infty} r^n F_r(dr)$  les moments de la loi  $F_r$ . En multipliant la seconde relation (5) par  $r^n (m_2 + 2m_1r + r^2)$  avant d'intégrer, on trouve :

$$(5') \quad v_r (m'_n m_2 + 2m_1 m'_{n+1} + m'_{n+2}) = m_n / \pi$$

Inversement, si l'on a mesuré le nombre spécifique  $v_r$  et la granulométrie en nombre  $F_r$  des cercles en relief, on peut reconstituer la granulométrie originelle  $F_0$ , qui est :

$$(6) \quad F_0(dr) = \pi v_r (m_2 + 2m_1r + r^2) F_r(dr)$$

les moments (inconnus)  $m_1$  et  $m_2$  de la loi  $F_0$  étant déterminés par (5') pour  $n = 0$  et  $n = 1$  :

$$(6') \quad \begin{cases} \pi v_r (m_2 + 2m_1 m'_1 + m'_2) = 1 \\ \pi v_r (m_2 m'_1 + 2m_1 m'_2 + m'_3) = m_1 \end{cases}$$

Les équations (5') pour  $n > 1$  doivent alors être vérifiées, et ceci fournit un test pour la validité du schéma. En pratique, si l'on se limite au calcul des 4 premiers moments de la loi

expérimentale  $F_r(dr)$ , on devra vérifier que la condition supplémentaire suivante est satisfaite :

$$(6'') \quad \prod v_r (m_2 m'_2 + 2m_1 m'_3 + m'_4) = m_2$$

Probabilité pour que B soit contenu dans un (même) grain en relief

Soit  $\omega(B; S, 2\mathcal{L})$  la probabilité d'avoir  $B \subset A$  lorsque A est un grain primaire, germé en O, dont la surface est S et le périmètre  $2\mathcal{L}$ . Alors la probabilité pour qu'un grain A germe en  $\xi$  en un temps  $(-t, -t + dt)$ , ait une surface S et un périmètre  $2\mathcal{L}$  et ne soit pas rencontré par les grains postérieurs est :

$$adt d\xi \omega(B_{-\xi}; S, 2\mathcal{L}) F_0(dS, d2\mathcal{L}) e^{-at(K_0 + S - K'_0 \mathcal{L})}$$

En intégrant en t et en  $\xi$ , on en déduit la probabilité  $Pr(B)$  pour que B soit contenu dans un seul grain en relief (si B n'est pas connexe,  $P_r(B)$  n'est pas égal à la probabilité pour que B soit contenu dans la réunion des grains en relief).

$$(7) \quad P_r(B) = \int_{\mathbb{R}^2} d\xi \int \frac{\omega(B_{-\xi}; S, 2\mathcal{L}) F_0(dS, d2\mathcal{L})}{K_0 + S - K'_0 \mathcal{L}}$$

Cette relation conduit, en particulier, à la granulométrie linéaire des grains en relief (que l'on distinguera soigneusement de la granulométrie des traversées en relief        du paragraphe précédent : une traversée en relief ne relève pas nécessairement d'un grain intact).

Exemple - lorsque les grains primaires sont des cercles  $C_r$  dont le rayon r (aléatoire) est soumis à la loi  $F_0(dr)$ , on a :

$$P_r(B) = \int_0^\infty \frac{\text{Mes}(C_r \ominus B)}{\pi(m_2 + 2rm_1 + r^2)} F_0(dr) = \int_0^\infty \text{Mes}(C_r \ominus B) F_r(dr)$$

Désignons par  $g(h)$  le covariogramme du cercle de rayon unité, et prenons pour  $B$  le segment d'extrémité  $x$  et  $x + h$ . On a

$$\text{Mes}(C_r \ominus B) = r^2 g\left(\frac{h}{r}\right), \text{ et}$$

$$P_r(h) = \int_0^\infty r^2 g\left(\frac{h}{r}\right) F_r(dr)$$

d'où la granulométrie linéaire.

#### V - NOMBRE DE CONNEXITE

Nous évaluerons ce nombre à partir de la formule (7),

Note 88 - Si le grain primaire  $A$  est convexe, on a, au second ordre:

$$\text{Mes}(A \oplus \square) = S + a D_1 + b D_2 + ab$$

( $S$ , surface de  $A$ ,  $D_1$  et  $D_2$  variations diamétrales dans les directions de  $a$  et de  $b$ ).

Si  $A$ , de plus, est sans point anguleux on a aussi, au second ordre

$$\text{Mes}(A \ominus \square) = S - a D_1 - b D_2 + ab$$

(cette relation est fautive si  $A$  admet des points anguleux).

Si  $K(h) = K(x,y)$  ( $x$  et  $y$  composantes du vecteur  $h$ ), on a

$E(D_1) = K'_x(o)$  et  $E(D_2) = -K'_y(o)$ . D'où, d'après (1), la probabilité  $T(a,b)$  d'avoir  $\square$  dans une même composante :

$$\begin{aligned} T(a, b) &= \frac{E(S) - a K'_x(o) - b K'_y(o) + ab}{E(S) + a K'_x(o) + b K'_y(o) + ab} \\ &= 1 - 2 \frac{a K'_x(o) + b K'_y(o)}{K(o)} + 2 \left( \frac{a K'_x(o) + b K'_y(o)}{K(o)} \right)^2 \end{aligned}$$

D'après la formule (7), on trouve donc :

$$v = 4 \frac{K'_x(o) K'_y(o)}{[K(o)]^2}$$

En particulier, si  $K(h)$  est isotrope ( $K(h) = K(r)$ ,  $r = |h|$ ) :

$$(8) \quad v = 4 \left( \frac{K'_o}{K(o)} \right)^2 = \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{E(2\mathcal{L})}{E(S)} \right)^2 = \frac{4}{m_o^2} = \frac{1}{m^2}$$

( $m_o = -K(o)/K'_o$  est la traversée moyenne, en nombre, du grain primaire) et  $m$  celle des composantes de la partition.