NOTE GEOSTATISTIQUE N° 75SCHEMAS ALEATOIRES DE GERMES

1°/ $\mathcal{G}$ -algèbre et topologie sur les espaces $\mathcal{F}^{(n)}(G)$

Soient E un espace localement compact de type dénombrable, $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fermés de E muni de sa topologie compacte $\mathcal{T}(\mathcal{O})$ et de sa $\mathcal{G}$ -algèbre $\mathcal{G}(\mathcal{O})$. Pour tout ouvert $G \in \mathcal{U}$ nous désignerons par $\mathcal{F}^{(n)}(G)$ le sous-espace de $\mathcal{F}(E)$ constitué des fermés $A \in \mathcal{F}$ contenant au plus n points distincts appartenant à G .

PROPOSITION 1 - $\mathcal{F}^{(n)}(G)$ est fermé dans $\mathcal{F}(E)$, donc aussi compact.

En effet, soit A_k une suite de fermés tels que $A_k \cap G$ contiennent au plus n points distincts. Si la suite A_k converge vers A dans $\mathcal{F}(E)$, on a $A \in \mathcal{F}^{(n)}(E)$. En effet, supposons qu'il existe $n+1$ points distincts $x_i \in A \cap G$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$). Soient G_i des ouverts disjoints avec $x_i \in G_i \subset G$. Pour k assez grand, A_k rencontre chacun des G_i et contient donc au moins $n+1$ points distincts, contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE . Si A est l'ensemble aléatoire défini par $\mathcal{F}(E)$, $\mathcal{G}(\mathcal{O})$, les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}$ sont des événements pour $\mathcal{G}(\mathcal{O})$:

- $\mathcal{F}^{(n)}(G) =$ " l'ouvert G contient au plus n point de A "
- $\mathcal{F}^{(\omega)} = \bigcup_{n > 0} \mathcal{F}^{(n)}(G) =$ " L'intersection $A \cap G$ contient un nombre fini de points "

En particulier, si $\mathcal{B}$ désigne une base dénombrable de la topologie de E constituée d'ouverts relativement compacts, l'ensemble $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{F}^{(\omega)}(B)$ c'est à dire : " Pour tout compact $K \subset E$, $A \cap K$ contient un nombre fini de $\mathbb{X}$ points " est un événement de $\mathcal{G}(\mathcal{O})$.

Définition. Nous dirons que $A \in \mathcal{F}$ est un schéma de germes si A est un ensemble dénombrable et sans point d'accumulation. On appellera germe tout point $x \in A$.

PROPOSITION 2 - $A \in \mathcal{F}$ est un schéma de germes si et seulement si $A \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{F}^{(\omega)}(B)$.

En effet, les ouverts relativement compacts $B \in \mathcal{B}$ recouvrent E , et A admet un point d'accumulation si et seulement si il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \cap B$ soit un ensemble infini. D'autre part, si $A \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{F}^{(\omega)}(B)$, A est dénombrable, puisque $\mathcal{B}$ est une base dénombrable.

COROLLAIRE - La proposition : " A est un schéma de germes " définit un événement pour l'ensemble aléatoire $A : \mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$.

Définition. L'ensemble aléatoire A défini par $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V}), P$, est un schéma aléatoire de germes si l'évènement : " A est un schéma de germes " est presque certain.

PROPOSITION 3 - Si A est un schéma aléatoire de germes, le nombre $N(G)$ de germes contenus dans un ouvert G relativement compact est une variable aléatoire pour $\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{V})$. Lorsque B décrit une base de E constituée d'ouverts relativement compacts, les variables aléatoires $N(B)$ engendrent la restriction de la σ -algèbre $\sigma(\mathcal{V})$ à l'ensemble " A est un schéma de germes "

Cela résulte aussitôt de la proposition 2 et du corollaire de la proposition 1, puisque l'évènement " $N(B) = 0$ " qui est $\mathcal{V}^B$ engendré déjà $\sigma(\mathcal{V})$ lorsque B décrit la base de E .

2°/ Schémas poissonniens à densité régionalisée.

Pour tout ouvert B relativement compact, nous désignerons par $P_n(B)$ la probabilité d'avoir " $N(B) = n$ ", et par $G_B(s)$ la fonction génératrice de la variable aléatoire $N(B)$:

$$G_B(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(B) s^n$$

Les schémas aléatoires de germes les plus simples que l'on puisse envisager sont les schémas poissonniens définis comme suit : soit $\theta(dx)$ une mesure positive bornée sur tout compact, définie sur E , $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ et appelée densité poissonnienne de germe. Pour tout ouvert $B \in \mathcal{B}$, on prendra :

$$\begin{cases} P_n(B) = \frac{[\theta(B)]^n}{n!} e^{-\theta(B)} \\ G_B(s) = \text{Exp}[-(1-s)\theta(B)] \end{cases}$$

On définit ainsi un schéma de Poisson de densité $\theta(dx)$.

Supposons maintenant que θ soit une mesure aléatoire définie sur $\mathcal{M}, \mathcal{G}(\mathcal{O}), P'$ (et presque sûrement bornée sur tout compact). Pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\theta(B)$ devient une variable aléatoire sur $\mathcal{M}, \mathcal{G}(\mathcal{O})$. On obtient ainsi un schéma dont la densité poissonnienne est une mesure aléatoire. Désignons par $\Phi_B(\lambda)$ la transformée de Laplace de la loi de $\theta(B)$ - ou fonctionnelle caractéristique associée à la densité aléatoire de germe :

$$\Phi_B(\lambda) = E [e^{-\lambda \theta(B)}]$$

Inversement, d'ailleurs, la donnée de $\Phi_B(\lambda)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ détermine la mesure aléatoire θ sur $\mathcal{M}, \mathcal{G}(\mathcal{O}), P'$, puisque les $\theta(B)$ engendrent $\mathcal{G}(\mathcal{O})$ sur $\mathcal{M}$. La fonction caractéristique $G_B(s)$ du schéma aléatoire de germes ainsi défini se déduit directement de $\Phi_B(\lambda)$ par :

$$G_B(s) = \Phi_B(1-s)$$

En particulier, on a :

$$P_0(B) = \frac{G_B(0)}{G_B(1)} = \frac{\Phi_B(1)}{\Phi_B(0)}$$

Si l'on remplace $\theta(dx)$ par une mesure proportionnelle $\theta^1 = \mu \theta$, où μ est une constante positive, les $P(B)$ deviennent des fonctions $P_n(B; \mu)$. On a ainsi la fonction génératrice :

$$G_B(s; \mu) = \Phi_B(\mu(1-s))$$

En particulier, pour $s = 0$, on trouve $P_0(B; \mu) = \Phi_B(\mu)$. Au signe près, il est indifférent de dériver en s ou en μ . On a donc :

$$P_n(B; \mu) = (-1)^n \frac{\mu^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} P_0(B; \mu)$$

Ainsi, le terme $P_0(B; \mu)$ suffit à déterminer tous les $P_n(B; \mu)$, pourvu qu'il soit connu pour la famille des mesures aléatoires proportionnelles $\mu \theta$

Espérance et variance de $N(B)$. Ce sont :

$$\begin{aligned} m(B) &= E[\theta(B)] \\ \sigma^2(B) &= E[\theta(B)^2] + m(B) - (m(B))^2 \end{aligned}$$

30/ Salves de germes.

Comme deuxième exemple simple d'ensemble aléatoire presque sûrement dénombrable et sans point d'accumulation, on peut citer, dans l'espace R^n , le schéma booléen suivant ; la densité poissonnienne de germe de grains primaires est une constante θ . Le grain primaire germé à l'origine est constitué, avec une probabilité α_n , de n points $x_1, \dots, x_n \in X$. Chacun de ces n points est implanté indépendamment des autres selon une loi de densité $f(x)$. Soit alors B un ensemble mesurable. Soit un grain primaire A'_ξ germé en ξ et constitué de n points. Le nombre aléatoire $\text{Card}(A'_\xi \cap B)$ obéit à la loi binomiale $n, p(\xi)$, avec :

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \int f(x) k_B(x + \xi) dx \\ &= \int f(x - \xi) k_B(x) dx = \binom{n}{k} \alpha_k \end{aligned}$$

et possède la fonction génératrice conditionnelle $[sp(\xi) + q(\xi)]^n$

Soit $A(s) = \sum \alpha_n s^n$ la fonction génératrice du nombre n des grains. Si l'on suppose seulement qu'un grain primaire a germé en ξ , la fonction génératrice conditionnelle du nombre des points de ce grain tombant dans B est :

$$\sum \alpha_n [sp(\xi) + q(\xi)]^n = A[sp(\xi) + q(\xi)]$$

Enfin, comme le schéma est booléen, on obtient la loi a priori :

$$\log G_B(s) = -\theta \int (1 - A[sp(\xi) + q(\xi)]) d\xi$$

En développant ~~XXX~~ en s cette expression, on voit que le nombre total des points contenus dans B est une somme de multiplets poissonniens indépendants.

Explicitons. :

$$\begin{aligned} \log G_B(s) &= -\theta \int [1 - A(sp+q)] d\xi \\ &= -\theta \int \left[1 - \sum_n \alpha_n \sum_{k=0}^n C_n^k sp^k q^{n-k} \right] d\xi \\ &= -\theta \int \sum_{k=1}^{\infty} (1-sp^k) sp^k \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k q^{n-k} \alpha_n d\xi \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre $N(k,n)$ des grains primaires constitués de n points dont k tombent dans B est une variable de Poisson de paramètre : $\theta \alpha_n C_n^k \int sp^k q^{n-k} d\xi$.

pourquoi? } Cas particuliers. Si $\alpha_n = \frac{\alpha^n}{n!} e^{-\alpha}$, autrement dit si le nombre des points constituant le grain primaire est poissonnien, le schéma obtenu est équivalent au schéma poissonnien à densité aléatoire $\sum f(x - x_i)$, où les x_i sont eux-mêmes implantés selon une loi poissonnienne de λ densité constante $\alpha\theta$.

Comme autre exemple élémentaire, considérons le cas où les grains primaires sont des doublets : $\alpha_2 = 1$, ou $A(s) = s^2$. On trouve :

$$\begin{aligned} \log G_B(s) &= -\theta \int [1 - (ps + q)^2] d\xi \\ &= -\theta(1-s^2) \int r^2(\xi) d\xi - 2\theta(1-s) \int r(\xi) [1-r(\xi)] d\xi \end{aligned}$$

où A est l'ensemble de tous les points du schéma,

Ainsi, l'intersection $A \cap B$ contient d'une part des doublets poissonniens (grains primaires contenus dans B), dont le nombre est un Poisson de paramètre :

$$\nu_2 = \theta \int r^2(\xi) d\xi$$

de l'autre des singulets (grains primaires ayant seulement un point dans B), dont le nombre est un Poisson de paramètre :

$$\nu_1 = 2\theta \int r(\xi) [1-r(\xi)] d\xi$$

On vérifie sans peine :

$$\int p(\xi) d\xi = \text{Mes } B$$

$$\int p^2(\xi) d\xi = \int K(h) g(h) dh$$

(K , covariogramme géométrique associé à B , $g = f \star f^{\vee}$). On remarque que $g(h)$ est la densité de probabilité du vecteur joignant les deux points constituant un grain primaire. Ainsi, $\int p^2(\xi) d\xi$ est l'espérance de la mesure de l'intersection $B \cap B_h$ de B et de son translaté B_h dans une translation aléatoire h égale à la différence des deux points d'un grain primaire.