



Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (ou, plus généralement d'un groupe localement compact) muni de sa topologie $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ compacte dénombrable, et de sa σ -algèbre de Borel $\sigma(\mathcal{U})$. Le groupe des translations de $\mathbb{R}^n$ se prolonge sur $\mathcal{U}$ en un groupe τ_h , $h \in \mathbb{R}^n$ d'opérateurs définis par $\tau_h G = \{g+h : g \in G\}$ et vérifiant $\tau_a \tau_{a'} = \tau_{a+a'}$, $\tau_0 = I$

Proposition 1. L'application $\tau : (h, G) \rightarrow \tau_h G$ de $\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$ est continue.

Montrons que $h_n \rightarrow h$ dans $\mathbb{R}^n$ et $G_n \rightarrow G$ dans $\mathcal{U}$ entraîne $\tau_{h_n} G_n \rightarrow \tau_h G$ dans $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est compact, on peut trouver une sous-suite $\tau_{h_{n_k}} G_{n_k}$ convergeant vers un $G_0 \in \mathcal{U}$, et il suffit de montrer $G_0 = \tau_h G$

a/ Si $x \notin G_0$, on a $x \notin \tau_h G$. En effet, soit $x_{n_k} \notin \tau_{h_{n_k}} G_{n_k}$ une suite convergeant vers x dans $\mathbb{R}^n$ (critère 1 de la convergence dans $\mathcal{U}$). Comme $x_{n_k} - h_{n_k} \notin G_{n_k}$ et $(x_{n_k} - h_{n_k}) \rightarrow x - h$, on a $x - h \notin G$ (critère 2 de convergence dans $\mathcal{U}$) et $x \notin \tau_h G$

b/ Si $x \notin \tau_h G$, on a $x \notin G_0$. Par hypothèse, on a $x - h \notin G$. Soit (critère 1) $x_{n_k} \rightarrow x$ une suite avec $x_{n_k} - h \notin G_{n_k}$, donc aussi $x_{n_k} - h + h_{n_k} \notin \tau_{h_{n_k}} G_{n_k}$. Du critère 2 de convergence dans $\mathcal{U}$ résulte $x = \lim(x_{n_k} - h + h_{n_k}) \notin G_0$.

Proposition 2. Soit Ω un espace topologique muni de sa σ -algèbre de Borel $\mathcal{B} = \sigma(\Omega)$ et soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Les trois énoncés suivants sont équivalents :

- 1- Pour tout ouvert V de Ω , $P(V) > 0$
- 2- Pour tout $B \in \mathcal{B}$, $P(B) = 1$ entraîne $\bar{B} = \Omega$
- 3- Pour tout $B \in \mathcal{B}$, tel que $P(B) = 1$, toute fonction continue sur B admet un prolongement continu unique sur Ω .

Il est immédiat que 2 et 3 sont équivalents. Si 1 est vrai, et si $P(B) = 1$, l'intérieur de B^c est vide, et $\bar{B} = \Omega$. Si 2 est vrai, le complémentaire V^c d'un ouvert V n'est pas dense dans Ω et vérifie donc $P(V^c) < 1$.

Définition. Soit Ω un espace LCD, $\mathcal{V}$ la famille des ouverts de Ω , $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{V})$ la σ -algèbre de Borel associée, τ_h ($h \in \mathbb{R}^n$) un groupe d'automorphismes de Ω vérifiant $\tau_0 = I$, $\tau_h \tau_{h'} = \tau_{h+h'}$, tel que l'application $\tau: (h, \omega) \rightarrow \tau_h \omega$ de $\mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \Omega$ soit continue, et soit enfin P une probabilité sur Ω invariante pour τ_h , $\forall h \in \mathbb{R}^n$, et telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ τ_h soit ergodique. Nous dirons que $(\Omega, \mathcal{B}, P, \tau_h)$ est un système dynamique continu.

Proposition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P, \tau_h)$ un système dynamique continu, et A la réunion des ouverts $V \in \mathcal{V}$ de Ω tels que $P(V) = 0$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, A est stable pour τ_h , et $P(A) = 0$.

En effet, si $V \in \mathcal{V}$ vérifie $P(V) = 0$, on a $P(\tau_h V) = 0$. Comme τ_h est un automorphisme continu, $\tau_h V$ est ouvert et $\tau_h V \subset A$. Donc A est stable pour τ_h . Comme A est réunion dénombrable de V_n vérifiant $P(V_n) = 0$, on a $P(A) = 0$.

Remarque. A étant stable pour tout τ_h , la restriction à $\Omega \cap A^c = \Omega'$ du système dynamique continu $(\Omega, \mathcal{B}, P, \tau_h)$ vérifie les trois énoncés équivalents de la proposition 2. Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des systèmes dynamiques continus vérifiant ces conditions.

Proposition 4. (Continuité en probabilité) Si $(\Omega, \mathcal{B}, P, \tau_h)$ est un système dynamique continu, on a $\lim_{h \rightarrow 0} P(B \Delta \tau_h B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}$

$B \Delta B' = (B \cap B'^c) \cup (B^c \cap B')$ est la différence symétrique. Comme :

$$P(B \Delta \tau_h B) \leq P(B \cap \tau_h B^c) + P(B^c \cap \tau_h B)$$

il suffit de montrer que $P[B \cap (\tau_h B)^c]$ tend vers 0 si $|h|$ tend vers 0, ou encore $P(B \cap \tau_h B) \rightarrow P(B)$

a/ Soit d'abord un ouvert $V \in \mathcal{O}$ de Ω . Posons $B_n = \bigcap_{|h| \leq 1/n} \tau_h V$

On a $B_n \subset V \cap \tau_h V$ dès que $|h| \leq 1/n$, et aussi $V = \bigcup_{n \geq 0} B_n$

En effet, si $\omega \in V$, la continuité de τ entraîne que l'on peut trouver n tel que $|h| \leq 1/n \Rightarrow \tau_h \omega \in V$, d'où $V \subset \bigcup_{n \geq 0} B_n$ et l'égalité. On a donc :

$$P(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} P(V \cap \tau_h V) \leq \lim_{|h| \rightarrow 0} P(V \cap \tau_h V) \leq P(V)$$

ce qui établit la proposition pour $V \in \mathcal{O}$

b/ Si K est un fermé ~~(non compact)~~ on établit la proposition en passant au complémentaire.

c/ Si $B \in \mathcal{B}$, on choisira une suite $K_n \subset B$ de compacts croissants vérifiant $P(B) = \lim_n P(K_n)$. On a :

$$P(B \Delta \tau_h B) \leq P(B \Delta K_n) + P(K_n \Delta \tau_h K_n) + P(\tau_h K_n \Delta \tau_h B)$$

Le premier et le troisième terme du second membre sont égaux, et inférieurs à ε pour $n = n_0$ assez grand. Pour $n = n_0$, le deuxième terme est également majoré par ε pour $|h|$ assez petit (d'après b/). Donc $P(B \Delta \tau_h B)$ tend vers 0 pour $|h| \rightarrow 0$

Passage à l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. L'opérateur U_h qui, à toute fonction mesurable f fait correspondre la fonction $U_h f : \omega \rightarrow f(\tau_{-h} \omega)$ induit dans $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un groupe d'opérateurs unitaires.

Proposition 5. U_h est fortement continu en h : pour tout $f \in L^2$ ~~XXXXX~~ on a :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|U_h f - f\| = 0$$

D'après la proposition 4, cette limite a lieu pour l'indicatrice k d'un ensemble $B \in \mathcal{B}$, et par suite aussi pour toute variable aléatoire étagée $g = \sum_{i=1}^N \lambda_i k_i$. Si g est une variable aléatoire étagée, on a, pour tout $f \in L^2$:

$$\langle U_h f, g \rangle = \langle f, U_{-h} g \rangle$$

et cette expression tend vers $\langle f, g \rangle$ pour $|h| \rightarrow 0$. Comme les variables aléatoires étagées g sont denses dans L^2 , $U_h f$ converge faiblement vers f pour h tendant vers 0, et par suite aussi fortement, puisque $\|U_h f\| = \|f\|$.

Proposition 6. Si μ est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^n$, il existe un opérateur continu : $f \rightarrow f_\mu$ sur L^2 tel que l'on ait $\langle f_\mu, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle U_h f, g \rangle \mu(dh)$ pour tout $g \in L^2$. On écrira $f_\mu = \int_{\mathbb{R}^n} U_h f \mu(dh)$

On remarque que $\langle U_h f, g \rangle$ est une fonction continue de h (prop.5) majorée en valeur absolue par $\|f\| \|g\|$. Si g_n est une suite convergeant faiblement vers g (donc bornée en norme), le théorème de Lebesgue montre que $\int \langle U_h f, g_n \rangle \mu(dh)$ converge vers $\int \langle U_h f, g \rangle \mu(dh)$, ce qui établit l'existence de l'élément f_μ . Enfin, on a :

$$\|f_\mu\|^2 = \int \langle U_h f, f_\mu \rangle \mu(dh) = \iint \langle U_{h'} f, U_h f \rangle \mu(dh) \mu(dh') \leq \|f\|^2 \left[\int \mu(dh) \right]^2$$

Proposition 7. Si une suite μ_n de mesures bornées converge vaguement vers une mesure μ (c'est à dire $\mu_n(\varphi) \rightarrow \mu(\varphi)$ pour toute fonction continue φ à support compact dans $\mathbb{R}^n$) et si de plus $\lim \int \mu_n(dh) = \int \mu(dh)$ ~~XXX~~ f_{μ_n} converge fortement vers f_μ dans L^2 .

La condition $\lim \int \mu_n = \int \mu$ entraîne que $\mu_n(\varphi) \rightarrow \mu(\varphi)$ pour toute fonction φ continue bornée. Ainsi, pour tout $g \in L^2$, $\int \langle U_h f, g \rangle \mu_n(dh)$ converge vers $\int \langle U_h f, g \rangle \mu(dh)$, et f_{μ_n} converge faiblement vers f_μ . Mais $\mu_n \times \check{\mu}_n$ converge vaguement vers $\mu \times \check{\mu}$ et :

$$\|f_{\mu_n}\|^2 = \int \langle U_\xi f, f \rangle \mu_n \times \check{\mu}_n(d\xi)$$

converge vers $\|f_\mu\|^2$, et, par suite, f_{μ_n} converge fortement vers f_μ .

Régularisées. Soit f_φ l'élément associé à la mesure $\varphi(h) dh$, avec $\varphi \in \mathcal{D}$ soit : $f_\varphi = \int U_h f \varphi(h) dh$ On a :

(on le vérifie à partir de $\langle U_\xi f_\varphi, g \rangle = \langle f_\varphi, U_{-\xi} g \rangle$)

D'après la proposition 7, les f_φ pour $\varphi \in \mathcal{D}$ forment un sous-espace dense de L^2 .
On le voit en prenant une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}$ de somme unité convergeant vaguement vers la mesure de Dirac.

Application gradient. L'application $f \rightarrow \left(\frac{U_{h_i} f - f}{h_i} \right)$ de L^2 dans $(L^2)^n$ converge fortement vers un élément $\partial f \in (L^2)^n$ lorsque f appartient à un certain sous-espace L^2_0 de L^2 . L'application partielle ∂_i est un opérateur auto-adjoint (au signe près) : $\langle \partial_i f, g \rangle = - \langle f, \partial_i g \rangle$.
Si f et g sont dans le domaine de ∂_i . L'application gradient $\partial : L^2 \rightarrow (L^2)^n$ a pour adjointe, au signe près, l'application divergence $\text{div} : (L^2)^n \rightarrow L^2$ définie par $\text{div}(f_i) = \sum_i \partial_i f_i$.

Proposition 8. Pour $\varphi \in \mathcal{D}$ et $f \in L^2$, f_φ et toutes ses dérivées partielles $\partial_{i_1} \partial_{i_2} \dots \partial_{i_k} f_\varphi$ sont dans L^2_0 .

En effet, on a : $\frac{U_{h_i} - I}{h_i} f_\varphi = \int U_z f \frac{\varphi(z - h_i) - \varphi(z)}{h_i} dz$
et il suffit d'appliquer la prop. 7.

Corollaire. L^2_0 est dense dans L^2 , et l'application gradient est fermée.

En effet, les f_φ , $\varphi \in \mathcal{D}$ sont denses dans L^2 . Comme ∂ et son adjoint ∂^* admettent des domaines denses, ∂ est une application fermée, et chacun des opérateurs ∂_i est fermé.

Proposition 9. Soit un système dynamique continu $(\Omega, \mathcal{B}, P, \tau_t)$. La relation $\partial_i f = 0$ entraîne $f = \text{constante}$ pour $f \in L^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

En effet, posons $L_g(h) = \langle U_h f, g \rangle$, $g \in L^2$. On a :

$$\frac{L_g(h+h_i) - L_g(h)}{h_i} = \langle U_h \frac{U_{h_i} - I}{h_i} f, g \rangle \rightarrow 0$$

Par suite $L_g(h)$ ne dépend pas de la coordonnée h_i . On a alors $U_{h_i} f = f$ et, par ergodicité, $f = \text{constante}$.

Remarque. Il suffit qu'une seule des n dérivées partielles $\partial_i f$ soit nulle pour que f se réduise à une constante, les $n-1$ autres dérivées étant alors nécessairement nulles également.

Un élément $f \in L^2$ peut être dérivable, c'est à dire appartenir au domaine L^2_Δ de l'application gradient, sans qu'il existe pour autant dans la classe définie par f une fonction $f(\omega)$ continue pour la topologie de Ω . En particulier, les fonctions continues sont bornées si l'espace Ω est compact, par exemple si Ω est l'espace $\mathcal{U}$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$, tandis que les fonctions de la classe $f \in L^2_\Delta$ n'ont pas de raison a priori d'être p.s. bornées.

Proposition 10. Si $B \in \mathcal{B}$ et $P(B) = 0$, l'ensemble des $h \in \mathbb{R}^n$ tels que $\tau_h \omega \in B$ a une mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$ pour presque tout $\omega \in \Omega$.

En effet, τ est mesurable, puisque continu, et la fonction $X(\omega, h) = 1$, si $\tau_h \omega \in B$, $= 0$ si $\tau_h \omega \notin B$ est mesurable sur $\mathbb{R}^n \times \Omega$. L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} X(\omega, h) dh P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} P(B) dh = 0$$

est nulle, et, d'après Fubini, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} X(\omega, h) dh$ est p.s. nulle.

Réalisation d'une fonction aléatoire f . Pour toute fonction mesurable $f(\omega)$ sur $(\Omega, \mathcal{B})$ on posera $f(\omega, x) = U_x f(\omega) = f(\tau_x \omega)$. Cette fonction $f(\omega, x)$ est mesurable sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Elle est continue sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ si $f(\omega)$ est continue sur Ω . De même, elle est scs (sci) sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ dès que $f(\omega)$ est scs (sci) sur Ω . En particulier, pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega, x)$ est alors scs (sci) sur $\mathbb{R}^n$. Cela résulte de la continuité de τ .

En particulier, si $f(\omega)$ est l'indicatrice d'un fermé (d'un ouvert) (d'un ensemble mesurable) de Ω , $f(\omega, x)$ est pour tout $\omega \in \Omega$ (et non pas simplement p.s.) l'indicatrice d'un fermé (d'un ouvert) (d'un ensemble borélien) de $\mathbb{R}^n$. Pour toute mesure bornée μ sur $\mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(\omega, x) \mu(dx)$ est une variable aléatoire d'espérance $E(f) \int \mu(dx)$.

Si $f \in L^2$, il correspond à cet élément de L^2 une fonction $f(\omega)$ définie presque partout sur Ω , et pour presque tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega, x)$ est définie presque partout dans $\mathbb{R}^n$ pour la mesure de Lebesgue (prop. 9). $f(\omega, x)$ est continue en moyenne quadratique, d'après la continuité forte de l'opérateur U_t , et elle est dérivable en moyenne quadratique si $f \in L^2_0$.