N-84

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 90

ESTIMATION SIMULTANEE D'UN VARIOGRAMME ET D'UNE DERIVE

Table des Matières

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 90

ESTIMATION SIMULTANEE D'UN VARIOGRAMME ET D'UNE DERIVE

Cette Note pose des problèmes plutôt qu'elle ne les résoud : il s'agit du biais qui affecte l'estimation d'un variogramme lorsqu'on utilise les mêmes données expérimentales pour estimer à la fois le variogramme lui-même et la dérive linéaire. Il est facile de former l'expression de ce biais, et de vérifier sur des exemples qu'il n'est nullement négligeable. Il est malheureusement beaucoup plus difficile de le corriger. Nous n'aborderons pas ici ce problème de statistique mathématique (recherche de l'estimateur sans biais du variogramme).

1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

$Y(x)$ est une F. A. intrinsèque ($x \in \mathbb{R}^n$) admettant la dérive :

$$\alpha h = \alpha_i \, h^i = E[\ Y(x+h) - Y(x)\ ]$$

et le demi-variogramme :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}\ E[\ \left(Y(x+h) - Y(x) - \alpha h\right)^2\ ]$$

On se propose d'estimer le vecteur α et la fonction $\gamma(h)$ à partir des valeurs numériques d'une réalisation $y(x)$ de $Y(x)$ supposées connues pour $x \in V$: nous raisonnerons dans le cas ou V est un volume dont nous désignerons la mesure par V, l'indicatrice par $k(x)$, et le covariogramme géométrique par $K = k * \check{k}$. Il n'y aura aucune difficulté à transposer les résultats aux cas où V serait remplacé par un ensemble de mesure volumique nulle (courbes, ou ensemble constitué d'un nombre fini de points).

Nous désignerons par :

$$t^i = \frac{1}{V} \int k(x) \, x^i \, dx$$

les coordonnées du centre de gravité de V. Nous supposerons, le plus souvent, $t^i = o$, ce qui revient à placer l'origine en ce centre de gravité. De même, le tenseur d'inertie de V sera noté :

$$T^{ij} = \frac{1}{V} \int k(x) \, x^i \, x^j \, dx$$

Lorsque l'origine est quelconque, $T_o^{ij} = T^{ij} - t^i \, t^j$ est le tenseur d'inertie rapporté au centre de gravité : si ce dernier est pris comme origine des coordonnées, on a $T_o^{ij} = T^{ij}$. Enfin, le tenseur :

$$S = T_o^{-1}$$

de composantes S_{ij} désignera l'inverse de T_o^{ij} .

2 - ESTIMATION DE LA DERIVE PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES

Dans cette première méthode, on cherche le vecteur a et le scalaire b minimisant l'intégrale :

$$I = \int k(x) \; [\; y(x) - ax - b \;]^2 \; dx$$

En annulant les dérivées de I par rapport à b et aux composantes a^i du vecteur a, on obtient le système :

$$\begin{cases} \int k(x) \; [\; y(x) - ax - b \;] dx = o \\ \int x^i \; k(x) \; [\; y(x) - ax - b \;] dx = o \end{cases}$$

La première relation donne :

$$b = \frac{1}{V} \int k(x) \; y(x) \; dx - a_i t^i$$

et la deuxième :

$$a_i T^{ij} = \frac{1}{V} \int x^j \; k(x) \; y(x) \; dx - b \; t^j$$

Désignons par $\bar{y}$ la moyenne dans V de la réalisation y(x) :

$$\bar{y} = \frac{1}{V} \int_V k(x) \; y(x) \; dx$$

Nous trouvons sans peine :

$$b = \bar{y} - a_i t^i$$

puis :

$$a_i T^{ij} = \frac{1}{V} \int x^j \; k(x) \; [y(x) - \bar{y}] \; dx + a_i \; t^i \; t^j$$

c'est-à-dire :

$$a_i T_o^{ij} = \frac{1}{V} \int x^j \; k(x) \; [y(x) - \bar{y}\;] \; dx$$

A partir de maintenant, nous placerons l'origine au centre de gravité, d'où $t^i = o$ et $T_o^{ij} = T^{ij}$, et le système :

$$(1) \qquad \begin{cases} b = \bar{y} \\ a_i T^{ij} = \frac{1}{V} \int x^j \, k(x) \, [y(x) - \bar{y}] \, dx \end{cases}$$

et la solution :

$$a_i = S_{ij} \frac{1}{V} \int x^j \, k(x) \, [y(x) - \bar{y}] \, dx$$

Pour faire la théorie de cette estimation, nous devons remplacer la réalisation $y(x)$ par la F. A. $Y(x)$. En général, la moyenne stochastique

$$B = \bar{Y} = \frac{1}{V} \int k(x) \, Y(x) \, dx$$

n'est pas définie, mais celà n'a aucune importance, car b ne joue en réalité aucun rôle, et $Y(x)$, en tant que F. A. intrinsèque, n'est définie qu'à une constante près. Par contre, le vecteur aléatoire

$$(2) \qquad A_i = S_{ij} \frac{1}{V} \int x^j \, k(x) \, [\, Y(x) - \bar{Y} \,] \, dx$$

est parfaitement défini, puisque l'argument de l'intégrale ne dépend que des accroissements de la F. A. $Y(x)$:

$$(2') \qquad A_i = S_{ij} \frac{1}{V^2} \int_V \int_V x^j \, k(x) \, k(x') \, [Y(x) - Y(x')] \, dx \, dx'$$

Il s'agit donc de comparer ce vecteur aléatoire A_i, qui sert d'estimateur à la dérive, avec le vecteur α_i, qui représente la vraie dérive.

2 - a- A est un estimateur sans biais : $E(A) = \alpha$

En effet, on a $E[\,Y(x) - Y(y)\,] = \alpha_u\,(x^u - y^u)$ et :

$$\frac{1}{V^2}\; E\left[\iint x^j\, k(x)\, k(y)\, [Y(x) - Y(y)]\, dx\, dy\right] =$$

$$= \frac{1}{V^2} \iint x^j\, k(x)\, k(y)\, \alpha_u\, (x^u - y^u)\, dx\, dy = \alpha_u\, T^{ju}$$

D'où, en portant dans (2') :

$$E(A_i) = \alpha_u\, S_{ij}\; T^{ju} = \alpha_i$$

2 - b- Variance de l'estimateur A

L'estimation de la dérive relative à un vecteur h est $A_i h^i$: la variance de cette estimation est donc :

$$D^2\,(Ah) = [E\,(A_i\, A_u) - \alpha_i\, \alpha_u\,]\, h^i\, h^u$$

Tout se ramène donc à calculer les composantes du tenseur

$$E\,(A_i\, A_u) - \alpha_i\, \alpha_u$$

des covariances du vecteur A. Partons de (2') :

$$(3) \qquad A_i\, A_u = S_{ij}\, S_{uv}\, \frac{1}{V^4} \int_{V^4} x^j\, y^v\, k(x)\, k(x')\, k(y)\, k(y')$$

$$[\,Y(x) - Y(x')\,]\,[\,Y(y) - Y(y')\,]\, dx\, dx'\, dy\, dy'$$

Or, on a :

$$E\,[Y(x)-Y(x')]\,[Y(y)-Y(y')] = \gamma(x-y') + \gamma(y-x') - \gamma(x-y) -$$

$$- \gamma(x'-y') + \alpha_e \alpha_s\, (x^e - x'^e)\,(y^s - y'^s)$$

En intégrant dans V^4 selon l'algorithme (3), le terme en $\alpha_e\alpha_s$ va donner $\alpha_i\alpha_u = E\ (A_i)\ E\ (A_u)$, tandis que $\gamma(x-y')$, $\gamma(y-x')$ et $\gamma(x'-y')$ donnent 0, puisque l'origine est placée au centre de gravité. Il reste donc :

$$E(A_iA_u) - \alpha_i\alpha_u = -\frac{1}{V^4} S_{ij}S_{uv}\int_{V^4} x^j y^v k(x)k(y)k(x')k(y')\ \gamma(x-y)\ dxdx'dydy'$$

c'est-à-dire simplement :

$$(4) \quad E(A_iA_u) - \alpha_i\alpha_u = -\frac{1}{V^2} S_{ij}S_{uv} \iint x^j y^v k(x)k(y)\ \gamma(x-y)\ dxdy$$

2 - c- Signification de l'estimateur A

Nous verrons plus loin que A n'est pas l'estimateur optimal (de moindre variance) de la dérive α. D'après la manière même dont nous l'avons formé, ce vecteur A réalise le minimum de :

$$E(I) = \int E\left[\ \left(Y(x) - \bar{Y} - Ax\right)^2\ \right] k(x)\ dx$$

parmi les vecteurs aléatoires A appartenant à l'espace de Hilbert engendré par les variables aléatoires $Y(x)-\bar{Y}$, $x \in V$ [l'estimateur de moindre variance sera la projection dans ce même espace de Hilbert du vecteur constant α] . Nous allons voir que A possède une autre signification.

2 - d- Autre présentation de l'estimateur A.

A partir de la réalisation $y(x)$, $x \in V$, on peut estimer directement (αh) pour un vecteur h donné en formant la moyenne de $y(x+h) - y(x)$ pour $x \in V \cap V_{-h}$, soit, sous forme stochastique :

$$D(h) = \frac{1}{K(h)} \int k(x)k(x+h) \; [Y(x+h) - Y(x)] \; dx$$

Il est clair que l'on a bien $E\,[D(h)] = \alpha h$. Mais les réalisations de la F.A. D(h) ne sont pas des formes linéaires en h. Pour chaque réalisation d(h), on peut chercher la meilleure représentation de d(h) au sens des moindres carrés, c'est-à-dire, par exemple, la forme a h minimisant l'intégrale :

(5) $$J = \int K(h) \; [d(h) - a\,h]^2 \; dh$$

ce qui conduit au vecteur aléatoire A vérifiant :

(6) $$A_j \int h^j \, h^i \, K(h) \, dh = \int h^i \, K(h) \, D(h) \, dh$$

Or :

$$\int h^j \, h^i \, K(h) \, dh = \iint k(x) \; k(x+h) \; h^j \, h^i \, dx \, dh =$$

$$= \iint k(x) \; k(x+h) \; (h^j + x^j - x^j) \; (h^i + x^i - x^i) \; dx \, dh =$$

$$= 2 \; V^2 \; T^{ij}$$

et de même :

$$\int h^i \, K(h) \, D(h) \, dh = \iint h^i \; k(x) \; k(x+h) \; [Y(x+h) - Y(x)] \; dx \, dh$$

$$= -2 \iint h^i \; k(x) \; k(x+h) \; [Y(x) - \bar{Y}\,] \; dx = 2\,V \int x^i \; k(x) [Y(x) - \bar{Y}\,] \; dx$$

Ainsi le système (6) définit le même vecteur A que la relation

(2) : il est équivalent d'estimer la dérive directement par la méthode des moindres carrés, ou en cherchant la meilleure représentation linéaire de la dérive expérimentale d(h) (au sens du minimum de l'expression (5)). Le détour qui consiste à passer par la dérive expérimentale D(h) n'apporte donc rien de nouveau.

2 - e- Estimateur optimal de la dérive

La méthode des moindres carrés attribue, en général, un poids excessif aux données les plus périphériques. L'estimateur optimal de la dérive doit résulter d'une sorte de krigeage, dont nous allons poser les équations : remarquons tout de suite que l'on ne peut former effectivement ce meilleur estimateur que si l'on connaît dejà le vrai variogramme $\gamma(h)$. Dans les applications, il s'agit toujours d'estimer simultanément α et $\gamma(h)$, et ce qui suit sera donc rarement utilisable.

On suppose donc $\gamma(h)$ connu et α inconnu. Le meilleur estimateur de αh est la projection de ce scalaire dans l'espace de Hilbert engendré par les $Y(x) - \bar{Y}$, $x \in V$. Il s'agit donc de déterminer une fonction $\lambda_i(x)$ et l'estimateur A_i :

$$A_i = \frac{1}{V} \int k(x) \left[Y(x) - \bar{Y} \right] \lambda_i(x) \, dx$$

minimisant l'expression : $E \left[(A_i - \alpha_i)(A_j - \alpha_j) h^i h^j \right]$

La variable aléatoire $h^j\ (A_j-\alpha_j)$ doit être orthogonale à toutes les $Y(x)-\bar{Y}$, $x \in V$. Si l'on désigne par $H(x,y)$ la covariance de la F.A. $Y(x)-\bar{Y}$, soit :

$$E\left[\left(Y(x)-\bar{Y}\right) \left(Y(y)-\bar{Y}\right) \right] = \alpha_u\ \alpha_v\ x^u\ y^v + H(x,y)$$

on voit que $\lambda_i(x)$ est la solution du système d'équations intégrales :

$$\int k(x)\ \lambda_i(x)\ [\ H(x,y) + \alpha_u\ \alpha_v\ x^u\ y^v\ ] = \alpha_i\ \alpha_j\ y^j$$

On ne peut cependant résoudre ce système que si l'on connaît déjà la vraie valeur de la dérive α, d'où nécessité (comme dans le krigeage) d'imposer à priori à la fonction $\lambda_i(x)$ une condition exprimant que l'on a $E(A) = \alpha$, soit :

$$E(A_i) = \frac{1}{V} \int k(x)\ \lambda_i(x)\ x^j\ \alpha_j\ dx = \alpha_i$$

Cette condition fait encore intervenir α. Comme en fait α n'est pas connue, nous devrons écrire qu'elle est vérifiée pour tout vecteur constant α, ce qui conduit à :

$$(7) \qquad \frac{1}{V} \int k(x)\ \lambda_i(x)\ x^j\ dx = \delta_i^{\ j}$$

La condition (7) définit une variété linéaire de l'espace de Hilbert des $Y(x)-\bar{Y}$, $x \in V$. Il reste à exprimer que $h^i\ h^j\ E(A_iA_j)$ est minimum compte tenu de cette condition. Or, cette condition entraîne :

$$E\ (A_iA_j) = \alpha_i\alpha_j + \frac{1}{V^2} \iint \lambda_i(x)\ \lambda_j(y)\ \ H(x,y)\ dx\ dy$$

Il suffit donc d'exprimer que l'intégrale (qui ne dépend plus de α) :

$$h^i\, h^j \iint \lambda_i(x)\ \lambda_j(y)\ H(x,y)\ dx\ dy$$

est minimale compte tenu de (7). On obtient ainsi le système :

$$(7') \qquad \frac{1}{V} \int k(y)\ \lambda_j(y)\ H(x,y)\ dy = \mu_{ij}\ x^j\ k(x) \qquad (x \in V)$$

les conditions (7) permettant de déterminer les multiplicateurs de Lagrange μ_{ij}. La résolution de (7') est facile si V est un ensemble fini. Dans le cas général, on pourrait par exemple développer l'opérateur (auto-adjoint) H en série de fonctions propres. Mais naturellement cette résolution explicite n'est possible que si H - c'est-à-dire γ - est connu à priori.

3 - ESTIMATION DU VARIOGRAMME

On peut utiliser plusieurs estimateurs. Les plus simples (mais non le meilleur possible) se déduisent du variogramme brut et du variogramme des résidus.

3 - 1- La variogramme brut expérimental

La variable aléatoire :

$$G(h) = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{K(h)} \int k(x)\ k(x+h)\ [Y(x+h) - Y(x)]^2\ dx$$

admet l'espérance

$$E\,[G(h)] = \gamma(h) + \frac{1}{2} \quad (\alpha\ h)^2$$

C'est donc un estimateur sans biais du variogramme brut. Mais on ne connaît pas la vraie valeur de $(\alpha\ h)^2$. On peut seulement l'estimer à partir de $(A\ h)^2$ dont l'espérance diffère de $(\alpha\ h)^2$. Ainsi, l'estimateur $G(h) - \frac{1}{2}(A\ h)^2$ est biaisé : on a

$$(8) \qquad E[\ G(h) - \frac{1}{2}(Ah)^2] = \gamma\ (h) - \frac{1}{2} D^2\ (Ah)$$

avec, d'après (4)

$$D^2\ (Ah) = [\ E\ (A_i A_j) - \alpha_i \alpha_j\ ]\ h^i\ h^j$$

$$= - \frac{h^i h^j}{V^2}\ S_{i\ell}\ S_{js} \iint x^\ell\ y^s\ k(x)\ k(y)\ \gamma(x-y)\ dx\ dy$$

3 - 2- Le variogramme expérimental des résidus

Considérons maintenant la variable aléatoire

$$\gamma^*\ (h) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{K(h)} \int k(x)\ k(x+h)\ [\ Y(x+h) - Y(x) - Ah]^2\ dx$$

$$= G(h) - \frac{1}{K(h)}\ A\ h \int k(x)\ k(x+h)\ [Y(x+h)-Y(x)]\ dx + \frac{1}{2}(A\ h)^2$$

et cherchons son espérance. Nous connaissons $E\ [G(h)]$ et $E\ (A\ h)^2$. Evaluons l'espérance de

$$Ah\ [Y(x+h) - Y(x)] = S_{ij} \frac{h^i}{V^2} \iint y^j [Y(x+h) - Y(x)][Y(y) - Y(z)]\ k(y)\ k(z)\ dy\ dz$$

On a : (en laissant tomber les termes en α, qui s'éliminent de l'expression finale)

$$E\,[Y(x+h)-Y(x)]\,[Y(y)-Y(z)] = \gamma(x+h-z) + \gamma(x-y) - \gamma(x+h-y) - \gamma(x-z)$$

les termes d'où y est absent vont donner 0, et il reste :

$$E\,[Ah\big(Y(x+h)-Y(x)\big)] = \frac{1}{V}\, S_{ij}h^i \int y^j k(y)\,[\gamma(x-y) - \gamma(x+h-y)]\,dy$$

Multiplions par $k(x)\,k(x+h)$ et intégrons en x, de manière à avoir le 2ème terme de $E\,[\gamma^*(h)]$. On remarque :

$$\iint y^j k(y)\,k(x)\,k(x+h)\,\gamma(x+h-y)\,dx\,dy = \iint y^j k(y)\,k(x)\,k(x-h)\,\gamma(x-y)\,dx\,dy$$

d'où :

$$V\,\frac{1}{K(h)}\iint k(x)\,k(x+h)\,k(y)\,y^j\,[\gamma(x-y) - \gamma(x+h-y)]\,dx\,dy$$

$$= V\,\frac{1}{K(h)}\iint k(x)\,k(y)\,[k(x+h) - k(x-h)]\,y^j\,\gamma(x-y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{VK(h)}\iint k(y)\,k(y+u)[k(y+h+u) - k(y-h+u)]\,y^j\,\gamma(u)\,dy\,du$$

$$= \int L^j\,(h,\,u)\,\gamma(u)\,du$$

avec :

$$(9)\quad L^j\,(h,u) = V\,\frac{1}{K(h)}\int y^j\,k(y)\,k(y+u)[k(y+h+u)-k(y-h+u)]\,dy$$

Il vient ainsi :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} E\,[\gamma^*(h)] &= \gamma(h) - S_{ij}\,h^i \int L^j\,(h,u)\,\gamma(u)\,du \\ &\quad - \frac{1}{2}\,\frac{h^i h^j}{V^2}\,S_{i\ell}\,S_{js}\iint x^\ell\,y^s\,\gamma(x-y)\,k(x)\,k(y)\,dx\,dy \end{aligned} \right.$$

Ainsi l'estimateur γ^* est biaisé. Le biais comporte 2 termes.

Le premier est une forme linéaire en h^i mais dont les coefficients dépendent de h par l'intermédiaire de l'opérateur $L^j(h,u)$. Le deuxième est la forme quadratique $\frac{1}{2} D^2(Ah)$, qui figure ici avec le signe +. Compte tenu de (8), on a ainsi :

$$\frac{1}{2} E\left[G(h) + \gamma^*(h) - (Ah)^2\right] = \gamma(h) - \frac{1}{2} S_{ij}\, h^i \int L^j(h,u)\gamma(u)\, du$$

Mais ce dernier biais ne s'élimine pas de manière simple.

4 - EXEMPLE

A titre d'exemple; et pour dégager des ordres de grandeur, nous allons traiter le cas d'un Wiener-Lévy sur un segment de longueur L. Nous supposons :

$$\begin{cases} E\left[Y(x+h) - Y(x)\right] = \alpha\, h \\ D^2\left[Y(x+h) - Y(x)\right] = 2\,\gamma(h) = \varpi\, h \end{cases}$$

Nous allons voir que la méthode des moindres carrés ne conduit effectivement pas au meilleur estimateur de α. Celui-ci, dans le cas traité ici, s'obtient facilement par la méthode du maximum de vraisemblance.

4 - 1- Méthode du maximum de vraisemblance.

Soit $h = L/_n$, et supposons connues $Y(o) = o$, $Y(h) = Y_1$, $Y(nh) = Y_n$. Les n variables $Y_1, .. Y_n$ ont une loi de densité :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\, \varpi\, h}} \; e^{-\frac{(y_i - y_{i-1} - \alpha h)^2}{2\, \varpi\, h}}$$

Les estimateurs p de ϖ et a de α doivent réaliser le maximum de cette expression, ou de son logarithme, qui est

$$- \frac{n}{2} \log p \quad \sum_i \frac{(y_i - y_{i-1} - a\ h)^2}{2\ p\ h}$$

D'où :

$$\frac{n}{2p} \quad - \quad \frac{1}{2p^2 h} \quad \sum_i \frac{(y_i - y_{i-1} - a\ h)^2}{2p^2\ h} \quad = o$$

$$n\ a\ h \quad - \quad \sum_i \ (y_i - y_{i-1}) \quad = o$$

D'où les estimateurs :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{L} \quad \sum (y_i - y_{i-1}) \quad = \quad \dfrac{Y(L) - Y(o)}{L} \\[2ex] p = \dfrac{1}{L} \quad \sum (y_i - y_{i-1} - a\ h)^2 \end{cases}$$

qui sont les estimateurs gaussiens habituels (on pouvait s'y attendre, puisque justement les $Y_i - Y_{i-1}$ sont des variables de Gauss indépendantes). On notera, en particulier,,que l'estimation de la dérive correspond simplement à la droite joignant le premier et le dernier point expérimental. On vérifie :

$$\begin{cases} E\ (a) = \alpha \\[1ex] E\ (p) = \dfrac{(n-1)\ h}{L} \ \varpi \end{cases}$$

Il suffit, comme dans le cas classique, de remplacer p par $\frac{n}{n-1}$ p pour éliminer le biais - La variance sur a, enfin, est :

$$D^2\ (a) = \frac{\varpi}{L}$$

(on notera qu'elle ne dépend pas du nombre n des échantillons, mais seulement de la longueur L du segment).

4 - 2- Méthode des Moindres Carrés

Pour limiter les calculs, traitons seulement le cas où les Y(x) sont connues en tout $x \in [0, L]$ (il n'y aurait aucune difficulté à traiter de même le cas discret). A est ici un scalaire, ainsi que $T = \frac{L^2}{12}$ et $S = \frac{12}{L^2}$. La formule (2) donne

$$A = \frac{12}{L^3} \int_0^L x \left(Y(x) - \bar{Y}\right) dx$$

On a bien E (A) = α, et la formule (4) donne :

$$D^2\ (A) = - \frac{144}{L^6} \int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} x\ y\ \frac{\varpi}{2}\ (x-y)\ dx\ dy = \frac{6}{5}\ \frac{\varpi}{L}$$

On constate que cette variance $\frac{6}{5}\ \frac{\varpi}{L}$ est effectivement supérieure à celle que donne le maximum de vraisemblance ($\frac{\varpi}{L}$). On obtient donc bien, pour un Wiener-Lévy, la meilleure estimation de la dérive en joignant purement et simplement le premier et le dernier points expérimentaux. La méthode des moindres carrés, malgré son apparence plus savante, donne un moins bon résultat.

4 - 3- Estimation du variogramme

Si l'on part du variogramme brut $G(h)$, on trouve

$$E\left[G(h) - \frac{1}{2}(Ah)^2 \right] = \frac{\varpi}{2}\left[h - \frac{6}{5}\frac{h^2}{L} \right]$$

d'après la valeur ci-dessus de $D^2(A)$. On a un biais parabolique, et une valeur négative en $h = L$.

Partons maintenant du variogramme des résidus. Nous connaissons le premier et le troisième terme de (10) : $\frac{\varpi}{2} h$ et $\frac{3}{5}\varpi \frac{h^2}{L}$. Evaluons le 2ème terme, qui est :

$$-\frac{\varpi}{2}\frac{12}{L^3} h \frac{1}{L-h}\int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} z\,dz \int_{-L/2}^{\frac{L}{2}-h}\left(|x-z| - |x+h-z| \right) dx$$

$$= \varpi \frac{12}{L^3}\frac{h}{L-h}\int_{-\frac{L}{2}}^{L/2} z\,dz \int_{h-\frac{L}{2}}^{L/2} |y-z|\,dy = \varpi\frac{h^2}{L^3}(h^2-hL-L^2)$$

D'où finalement

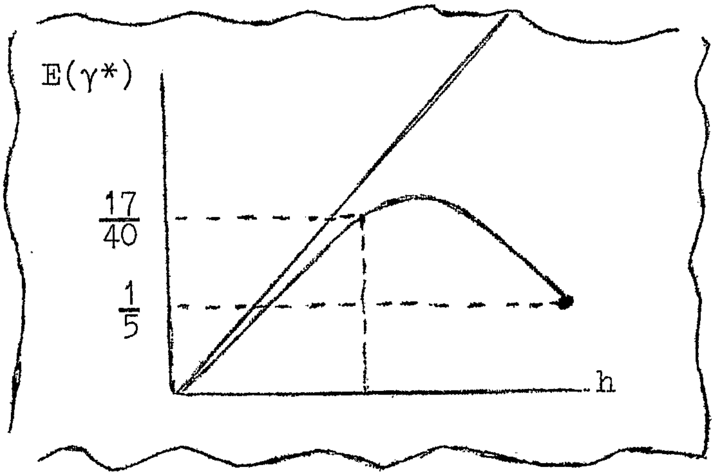
$$E\left(\gamma^*(h)\right) = \frac{\varpi}{2}\left[h + \frac{6}{5}\frac{h^2}{L} + 2\frac{h^2}{L^3}(h^2-hL-L^2) \right]$$

soit

$$E\left[\gamma^*(h)\right] = \frac{\varpi}{2}\left[h - \frac{4}{5}\frac{h^2}{L} + 2\frac{h^3(h-L)}{L^3} \right]$$

En $h = L$, $E\left(\gamma^*(L)\right) = \frac{\varpi}{2}\frac{L}{5}$ (au lieu de $\frac{\varpi}{2} L$)

En $h = \frac{L}{2}$, $E\left(\gamma^*(L)\right) = \frac{\varpi}{2}\frac{17}{40} L$ (au lieu de $\frac{\varpi}{2}\frac{L}{2}$)



5 - VARIANCE DES RESIDUS

La variance expérimentale des résidus :

$$S^2 = \frac{1}{V} \int k(x) \; [Y(x) - Ax - \bar{Y}\;]^2 \; dx$$

est numériquement égale à :

$$S^2 = \frac{1}{V} \int k(x) \; [Y(x) - \bar{Y}\;]^2 \; dx - \frac{1}{V} \int k(x) \; (Ax)^2 \; dx$$

$$= \frac{1}{V} \int k(x) \; [Y(x) - \bar{Y}\;]^2 \; dx - T^{ij} \; A_i \; A_j$$

puisque A est construit par la méthode des moindres carrés.

On en déduit aussitôt

$$E(S^2) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x-y) \; dx \; dy + \frac{1}{V^2} \; S_{ij} \iint k(x) \; k(y) x^i y^j \gamma(x-y) dx \; dy$$

Le biais $\frac{1}{V^2} \iint k(x) \; k(y) \; S_{ij} \; x^i x^j \; \gamma(x-y) \; dx \; dy$ est nécessairement négatif (il vaut $- T^{ij} \; E\;[\;(A_i-\alpha_i)\;(A_j-\alpha_j)\;]$ et T^{ij} est défini positif).

6 - KRIGEAGE EN PRESENCE D'UNE DERIVE

Nous traiterons le cas où $\gamma(h)$ est connu, mais non la dérive. Pour estimer $Y(z)$ à partir des valeurs de $Y(x)$, $x \in V$ on formera un estimateur $Y^*(z)$ de la forme

$$Y^*(z) = \bar{Y} + \int_V \lambda(z, x) [Y(x) - \bar{Y}] dx$$

en imposant au noyau $\lambda(z, x)$ les conditions :

$$(11) \qquad \int_V \lambda(z, x) x^i dx = z^i$$

(origine au centre de gravité) qui expriment que l'on a :

$$E [Y^*(z) - \bar{Y}] = \alpha_i z^i = E [Y(z) - \bar{Y}]$$

et la condition de minimiser la forme quadratique :

$$H(z,z) - 2\int_V \lambda(z,x) H(z,x) dx + \int_V \int_V \lambda(z,x) \lambda(z,y) H(x,y) dx dy$$

On a posé

$$H(x,y) = E [(Y(x) - \bar{Y}) (Y(y) - \bar{Y})] - (\alpha x) (\alpha y) =$$

$$= \frac{1}{V} \int_V \gamma(x-y') dy' + \frac{1}{V} \int_V \gamma(y-x') dx' - \gamma(x-y) - \frac{1}{V^2} \int_V \int_V \gamma(x'-y') dx' dy'$$

D'où le système :

$$(12) \quad \begin{cases} \int_V \lambda(z,y) H(x,y) dy = H(z,x) + \mu_i x^i & (x \in V) \\ \int_V \lambda(z,x) x^i dx = z^i \end{cases}$$

La solution $\lambda(z,y)$ de ce système résoud directement le problème. du krigeage en présence de dérive, sans nécessiter l'estimation préalable de la dérive elle-même. Mais cette simplification n'est qu'apparente, et le système (12) contient implicitementune estimation de la dérive. Pour le voir, considérons le noyau $\lambda_o(z,x)$ vérifiant :

$$\int_V \lambda_o(z,y)\, H(x,y)\, dy = H(z,x) \qquad (x \in V)$$

Ce noyau $\lambda_o(z,y)$ réalise le krigeage du point z en l'absence de dérive (et pour le même γ). En effet, s'il n'y a pas de dérive, la condition (11) est superflue et les multiplicateurs μ_i disparaissent. Posons alors :

$$\lambda(z,y) = \lambda_o(z,y) + \lambda_1(z,y)$$

Ce noyau correctif λ_1, qui contient l'effet de la dérive, doit vérifier :

$$(13) \quad \begin{cases} \int_V \lambda_1(z,y)\, H(x,y)\, dy = \mu_i\, x^i & (x \in V) \\ \int_V \lambda_1(z,y)\, y^i\, dy = z^i - \int_V \lambda_o(z,y)\, y^i\, dy \end{cases}$$

Comparons avec (7') : Si M^{ij} est l'inverse du tenseur μ_{ij} de (7'), on voit que la fonction

$$B(z,y) = \frac{1}{V}\, \mu_i\, M^{ij}\, \lambda_j(y)$$

vérifie la première relation (13). Or $\lambda_j(y)$, solution de (7') conduit à l'estimateur optimal de la dérive et ne dépend pas de z. Pour déterminer $\mu_i = \mu_i(z)$, il suffit d'utiliser la seconde relation (13), soit :

$$\frac{1}{V} \mu_i(z) M^{ij} \int_V \lambda_j(y) y^\ell dy = z^\ell - \int_V \lambda_o(z,y) y^\ell dy$$

Mais la condition (7) donne :

$$\frac{1}{V} \int_V \lambda_j(y) y^\ell dy = \delta_j^\ell$$

Par suite

$$\mu_i(z) M^{i\ell} = z^\ell - \int_V \lambda_o(z,y) y^\ell dy$$

ou

$$\mu_i(z) = \mu_{i\ell} z^\ell - \mu_{i\ell} \int_V \lambda_o(z,y) y^\ell dy$$

D'où finalement l'expression de λ_1 en fonction de λ_o et des λ_j :

(14) $$\lambda_1(z,x) = \frac{1}{V} [z^j - \int_V \lambda_o(z,y) y^j dy] \lambda_j (x)$$

Revenons à notre estimateur $Y^*(z)$, avec

$$\lambda(z,x) = \lambda_o(z,x) + \lambda_1(z, x)$$

On trouve :

$$Y^* (z) - \bar{Y} = \int_V \lambda_o(z,x) [Y(x) - \bar{Y}] dx +$$

$$[z^j - \int_V \lambda_o(z,y) y^j dy] \frac{1}{V} \int_V \lambda_j(x) [Y(x) - \bar{Y}] dx$$

Or l'estimateur optimal de la dérive est le vecteur :

$$A_j = \frac{1}{V} \int_V \lambda_j(x) \; [Y(x) - \bar{Y}] \; dx$$

Ainsi, notre estimateur $Y^*(z)$ vérifie :

$$(15) \qquad Y^*(z) = \bar{Y} + A_j z^j + \int_V \lambda_o(z,y) \; [Y(y) - \bar{Y} - A_j \; y^j] \; dy$$

Cette relation exprime exactement que l'on obtient le krigeage optimal en appliquant les équations du krigeage en l'absence de dérive aux variables

$$Y(z) - \bar{Y} - A_j \; z^j \quad \text{et} \quad Y(x) - \bar{Y} - A_j \; x^j$$

c'est-à-dire à la F.A. $Y(x)$ corrigée de la dérive estimée $A\,x$. Celà signifie, en particulier, que l'on a <u>le droit de prolonger ce meilleur estimateur $A\,x$ de la dérive à l'extérieur du domaine V et de kriger les résidus</u> (à l'aide du $\gamma(h)$ supposé connu) <u>comme s'il n'y avait pas de dérive</u>.

Ce résultat ne subsiste pas si A n'est pas le meilleur estimateur de la dérive, solution de (7'), et en particulier il ne s'applique pas lorsque l'on estime la dérive par une méthode de moindre carré.

Dans les applications, si V est constitué d'un nombre fini de point (et si l'on connaît à priori <u>à un facteur près</u> la forme du vrai $\gamma(h)$, par exemple si l'on sait que $\gamma(h) = \frac{1}{2} \varpi |h|$ est linéaire - il n'est pas nécessaire, en effet, de connaître le facteur ϖ qui n'intervient pas dans les relations (12)) - il sera bien préférable de résoudre directement le système (12), sans passer par l'intermédiaire d'une dérive : la solution $\lambda(z,x)$ de ce système résoud directement le problème de l'interpolation.