N-164

NOTE GEOSTATISTIQUE n° 101

Intégrales et mesures à valeurs dans $\mathcal{K}_0$

Nous avons vu, dans une Note précédente, comment construire une intégrale de Riemann ou de Stieltjes à valeur dans l'espace $\mathcal{K}_0$ des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Je me propose, dans ce qui suit, de transposer la théorie de l'intégration, avec la dualité du point de vue fonctionnel et du point vue de la mesure. Le point de vue de la théorie de la mesure conduit - par une transposition facile des raisonnements classiques - à associer à toute mesure à valeur dans $\mathcal{K}_0$ une fonctionnelle croissante, convexe et semi-additive ($I(f + f') = I(f) \oplus I(f')$ seulement si les ensembles $\{f > 0\}$ et $\{f' > 0\}$ sont disjoints) - seules étant additives les fonctionnelles associées aux mesures à valeurs convexes - Le point de vue fonctionnel, inversement, conduit à associer à toute fonctionnelle croissante convexe et semi-additive une mesure à valeur dans $\mathcal{K}_0$, dont elle est l'intégrale et qui ne prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$ que si la fonctionnelle est elle-même additive. C'est dans l'espoir de caractériser les familles $B(\lambda)$ à 1 paramètre croissante pour l'ordre propre $\succcurlyeq$ dans $\mathcal{K}_0$ que j'ai entrepris cette construction. Mais des difficultés subsistent, du fait que le théorème de Radon-Nikodym ne se généralise pas. En particulier, il n'est pas certain que toute famille $B(\lambda)$ croissante pour $\preccurlyeq$ et admettant une dérivée continue soit l'intégrale R.M. de sa dérivée (ce qui impliquerait qu'elle est obligatoirement dans $C(\mathcal{K}_0)$), bien que cette circonstance soit plausible.

I - Les espaces Φ_k^+, Φ_g^+ et $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(E)$

Soit E un espace L.C.D., à partir duquel on construit l'espace $\Phi_g^+(E)$ des fonctions s.c.i à valeurs dans la demi-droite compacte $\overline{\mathbb{R}}^+$, l'espace $\Phi_k(E)$ des fonctions s.c.s bornées à support compact, et l'espace $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(E)$ des fonctions continues à support compact. On munit Φ_g^+ de la topologie L.C.D. induite par celle de $\mathcal{G}(E \times \overline{\mathbb{R}}^+)$, Φ_k de la topologie L.C.D. induite par $\mathcal{K}(E \times \overline{\mathbb{R}}^+)$ muni de la topologie myope, et $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(E)$ de sa topologie limite inductive habituelle.

Une fonction φ est dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(E)$ si et seulement si elle est à la fois dans Φ_g^+ et dans Φ_k^+. On notera toutefois que φ n'a pas même graphe dans $\mathcal{G}(E \times \overline{\mathbb{R}}^+)$ et dans $\mathcal{K}(E \times \mathbb{R})$: le premier est un ouvert $\overset{o}{C}$ de $E \times \overline{\mathbb{R}}^+$, le second un fermé $\overline{C}$ de $E \times \mathbb{R}$, avec d'ailleurs $\overset{o}{C} = \overset{o}{\overline{C}}$ et $\overline{C} = \overline{\overset{o}{C}}$. La relation $f < f'$ entre fonctions positives signifiera donc toujours : $\forall x \in E$, ou bien $f(x) = 0$ ou bien $f(x) < f'(x)$ strictement. Ainsi, pour $\varphi, \varphi' \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, $\varphi < \varphi'$ signifie que le graphe fermé $\overline{C}$ de φ dans $E \times \mathbb{R}^+$ est contenu dans le graphe $\overset{o}{C}'$ ouvert de φ' dans $E \times \overline{\mathbb{R}}^+$.

Les <u>ouverts</u> de Φ_g sont engendrés par les sous-ensembles de la forme $\{g : g > k\}$, $k \in \Phi_k$ et $\{g \not\leq g_o\}$, $g_o \in \Phi_g$. Ceux de Φ_k, de même, sont engendrés par les $\{k : k < g\}$, $g \in \Phi_g$ et $\{k : k \not\geq k_o\}$, $k_o \in \Phi_k$. On vérifie sans peine que les topologies de Φ_g et Φ_k sont encore engendrés par les :

$$\{g : g > \varphi\} \ , \ \{g : g \not\leq \varphi\} \ , \quad \varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \qquad \text{pour l'espace } \Phi_g$$

$$\{k : k < \varphi\} \ , \ \{k : k \not\geq \varphi\} \ , \quad \varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \qquad \text{pour l'espace } \Phi_k$$

On vérifie aussi que les restrictions à $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ des ensembles de ces quatre types sont des ouverts de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, lesquels, inversement, engendrent à eux tous la topologie de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$. Autrement dit, <u>une suite φ_n converge vers φ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ si et seulement si elle converge vers φ à la fois dans Φ_k et dans Φ_g</u>

En ce qui concerne la convergence monotone, on notera :

$$\varphi_n,\ \varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}\ ,\ \varphi_n \uparrow \varphi \ \text{ ou } \varphi_n \downarrow \varphi \quad \Rightarrow \varphi_n \to \varphi \ \text{ dans } \mathcal{C}_{\mathcal{K}}$$

$$g_n,\ g \in \Phi_g\ ,\ g_n \uparrow g \ \text{ ou } g_n \downarrow g \quad \Rightarrow g_n \to g \ \text{ dans } \Phi_g$$

$$k_n,\ k \in \Phi_k\ ,\ k_n \uparrow k \ \text{ ou } k_n \downarrow k \quad \Rightarrow k_n \to k \ \text{ dans } \Phi_k$$

En ce qui concerne l'addition, on note que :

$$\left.\begin{array}{l}(k,\ k') \to k + k' \\ (\varphi,\ \varphi') \to \varphi + \varphi' \\ (g,\ g') \to g + g'\end{array}\right\} \text{ est une application } \begin{array}{c}\text{s.c.s.} \\ \text{continue} \\ \text{s.c.i.}\end{array} \text{ de } \begin{array}{c}\Phi_k^+ \times \Phi_k^+ \\ \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+ \times \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+ \\ \Phi_g^+ \times \Phi_g^+\end{array} \text{ dans } \begin{array}{c}\Phi_k^+ \\ \mathcal{C}_{\mathcal{K}} \\ \Phi_g^+\end{array}$$

II - <u>Prolongement d'une pseudo-intégrale à valeurs dans $\mathcal{K}_0$</u>

Soit I une application de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(E)$ dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$. Nous dirons que I est <u>positivement homogène</u> si $I(\lambda\varphi) = \lambda I(\varphi)$, $\lambda \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$; <u>croissante</u> si $\varphi \leq \varphi'$ dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ entraine $I(\varphi) \subset I(\varphi')$; <u>sous-additive</u>, <u>sur-additive</u> ou <u>additive</u> selon que l'on a $I(\varphi + \varphi') \subset I(\varphi) \oplus I(\varphi')$, $I(\varphi + \varphi') \supset I(\varphi) \oplus I(\varphi')$ ou $I(\varphi + \varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$; <u>convexe</u>

(concave), si I est positivement homogène et sous additive (sur-additive) ; positivement linéaire, si elle est à la fois convexe et concave.

Toute application positivement homogène vérifie $I(0) = \{0\}$. Comme on a toujours $0 \in I(\varphi)$ ($\mathcal{K}_o$ désignant l'espace des compacts contenant 0), toute application concave (en particulier toute application positivement linéaire) est croissante.

Nous dirons qu'une application I de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o(R_n^n)$ est une intégrale, si elle est positivement linéaire ; qu'elle est pseudo-intégrale si elle est convexe croissante et si de plus l'application CI de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $C_o(\mathcal{K}_o)$ associant à tout $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ l'enveloppe convexe $CI(\varphi)$ de $I(\varphi)$ est une intégrale. On vérifie immédiatement que toute intégrale est une pseudo-intégrale.

Proposition 1 - Toute application croissante et convexe (en particulier toute pseudo-intégrale) de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(E)$ dans $\mathcal{K}_o(R^n)$ est continue. Toute intégrale, et plus généralement, toute application concave prend ses valeurs dans $C_o(\mathcal{K}_o)$

Soit I une application convexe de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o$, et φ_n une suite convergeant vers φ dans $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$. Les φ_n ont leurs supports dans un compact fixe $K_o \subset E$, et on peut trouver une fonction $\varphi_o \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ avec $\varphi_o(x) = 1$ pour $x \in K_o$. Pour n assez grand, on a donc :

$$\varphi \leq \varphi_n + \varepsilon\, \varphi_o \ , \quad \varphi_n \leq \varphi + \varepsilon\, \varphi_o$$

I étant convexe et croissante, on en déduit

$$I(\varphi) \subset I(\varphi_n + \varepsilon\ \varphi_o) \subset I(\varphi_n) \oplus \varepsilon\ I(\varphi_o),\ I(\varphi_n) \subset I(\varphi) \oplus \varepsilon\ I(\varphi_o)$$

Par suite $I(\varphi_n)$ converge vers $I(\varphi)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Si I est une application concave, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$, on a $\varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$ avec $\varphi_i = \varphi$, d'où $I(\varphi) \supset \frac{1}{n}\ (I(\varphi))^{\oplus n}$, et, pour n infini, $I(\varphi) \supset CI(\varphi)$: l'inclusion inverse étant toujours vraie, $I(\varphi)$ est convexe.

Nous allons maintenant prolonger I sur le compactifié $\overline{\mathcal{K}_o} = \mathcal{K}_o \cup \{\omega\}$, ω désignant le point à l'infini de $\mathcal{K}_o$.

1 - Prolongement sur Φ^+_g

Dans ce qui suit, I désigne une application croissante convexe (donc continue) de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o$, qui ne sera pas, en général, une pseudo-intégrale, sauf mention explicite du contraire.

Pour tout $g \in \Phi^+_g$, on posera :

(1) $$I(g) = \lim\{I(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}},\ \varphi < g\} \ \in \overline{\mathcal{K}_o}$$

La limite est prise au sens de limite dans $\overline{\mathcal{K}_o}$ de la famille filtrante croissante des $I(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$. On sait que cette limite est :

$$(1') \qquad I(g) = \overline{\bigcup_{\varphi < g} I(\varphi)}$$

si ce fermé est dans $\mathcal{K}_o$ - ou, sinon, le point à l'infini ω.

<u>Proposition 2 - I est croissante, convexe et s.c.i. sur Φ_g^+, et vérifie la continuité monotone séquentielle : $g_n \uparrow g$ dans Φ_g^+ entraine $I(g_n) \to I(g)$ dans $\mathcal{K}_o$</u>

On vérifie sans peine que I est croissante. Si $g_n \to g$ dans Φ_g^+, soit $\varphi < g$ (strictement), une fonction de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$. On a $g_n > \varphi$ pour n assez grand, d'où $I(g_n) \supset I(\varphi)$. D'après la définition (1), il en résulte $\underline{\lim}\ I(g_n) \supset I(g)$, et I est s.c.i.

La continuité monotone $g_n \uparrow g$ entraine $g_n \to g$ dans Φ_g^+, d'où $\underline{\lim}\ I(g_n) \supset I(g)$, puisque I est s.c.i. On a aussi $I(g_n) \subset I(g)$ puisque I est croissante, d'où $\overline{\lim}\ I(g_n) \subset I(g)$, et $I(g_n) \to I(g)$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.

Soient g, g' dans Φ_g^+, φ_n et φ'_n deux suites dans $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ avec $\varphi_n \uparrow g$, $\varphi'_n \uparrow g'$. Pour λ,μ réels ≥ 0, on a aussi $(\lambda\ \varphi_n + \mu\ \varphi'_n) \uparrow (\lambda\ \varphi + \mu\ \varphi')$. La continuité monotone et la convexité sur $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ donnent :

$$I(\lambda g + \mu g') = \lim I(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \subset \lim \lambda\ I(\varphi_n) \oplus \mu\ I(\varphi'_n) =$$

$$= \lambda\ I(g) \oplus \mu\ I(g')$$

Corollaire - Si I est une intégrale, son prolongement sur Φ_+^g est positivement linéaire. Si I est une pseudo-intégrale, CI est positivement linéaire sur Φ_g^+.

2 - Prolongement de I sur Φ_k^+

Sur Φ_k^+, définissons la fonction $\overline{I}$ en posant

$$(2) \qquad \overline{I}(k) = \lim \{I(g),\ g \in \Phi_g^+,\ g > k\} = \bigcap_{g>k} I(g) \in \mathcal{K}_0$$

(limite de la famille filtrante $I(g)$, $g > k$, égale dans $\mathcal{K}_0$ à l'intersection de cette famille). Comme tout $k \in \Phi_k^+$ est majorée par un $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$, $\overline{I}$ prend bien ses valeurs dans $\mathcal{K}_0 (\overline{I}\ (k) \neq \omega)$. On vérifie, d'ailleurs, que l'on peut, dans la définition (2), remplacer les $g \in \Phi_g^+$, $g > k$ par les $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$, $\varphi > k$. Plus précisément pour toute suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$, $\varphi_n \downarrow k$ entraine $I(\varphi_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_0$ (en effet, pour $\varepsilon > 0$, soit $g \in \Phi_g^+$ avec $g > k$ et $\overline{I}(k) \subset I(g) \subset \overline{I}(k) \oplus K_\varepsilon$, K_ε désignant la boule de rayon ε : le support de k étant compact, on a $\varphi_n < g$ pour n assez grand, d'où $\overline{I}(k) \subset I(\varphi_n) \subset I(k) \oplus K_\varepsilon$, et $I(\varphi_n) \to \overline{I}(k)$).

Proposition 3 - L'application $\overline{I}$ est convexe, croissante et s.c.s. sur Φ_k^+. La convergence monotone $k_n \downarrow k$ dans Φ_k^+ entraine $\overline{I}(k_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_0$. Pour tout $g \in \Phi_g^+$, on a $I(g) = \lim \{I(k),\ k \in \Phi_k^+,\ k < g\}$. Si I est une intégrale (resp. une pseudo-intégrale), $\overline{I}$ (resp. $\overline{CI} = C\overline{I}$) est positivement linéaire.

On vérifie immédiatement que $\overline{I}$ est croissante. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ avec $\varphi_0 > k$ et $I(k) \subset I(k) \oplus K_\varepsilon$. Pour tout $k' \in \Phi_k^+$ tel que $k' < \varphi_0$, on a aussi $\overline{I}(k') \subset I(\varphi_0) \subset \overline{I}(k) \oplus K_\varepsilon$, donc $\overline{I}$ est s.c.s. sur Φ_k^+. La convergence monotone $k_n \downarrow k$ dans Φ_k^+, entraine $k_n \to k$ et $\overline{\lim}\, \overline{I}(k_n) \subset \overline{I}(k)$, puisque $\overline{I}$ est s.c.s. Mais $\overline{I}$ étant croissante, on a aussi $\underline{\lim}\ \overline{I}(k_n) \supset \overline{I}(k)$, et $\overline{I}(k_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_o$. Pour $g \in \Phi_g^+$, on a $I(g) \supset \lim\ \{\overline{I}(k),\ k < g\}$. Mais $I(g) = \lim\{I(\varphi),\ \varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}},\ \varphi < g\}$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+ \subset \Phi_g^+$ donnent l'inclusion inverse, et l'égalité.

Enfin, soient $k, k' \in \Phi_k^+$ et $\varphi_n \downarrow k$, $\varphi'_n \downarrow k'$, $\varphi_n, \varphi'_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$. On a aussi $(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \downarrow (\lambda k + \mu k')$, $\lambda, \mu \geq 0$, d'où :

$$I(\lambda k + \mu k') = \lim\ I(\lambda\varphi_n + \mu\varphi'_n) \supset \lim \lambda I(\varphi_n) \oplus \mu I(\varphi'_n) = \\ = \lambda I(\varphi) \oplus \mu I(\varphi')$$

et l'inclusion inverse si I est concave.

3 - L'espace Φ_o^+ des fonctions pseudo-intégrables

Dans ce qui suit, I désignera une pseudo-intégrale (bien que certaines des propositions ci-dessous subsistent si I est une application croissante convexe). Nous désignerons par I' l'intégrale associée à I, définie par $I'(f) = Ci(f)$, ou enveloppe convexe de I.

Pour toute fonction f (définie sur E, à valeurs dans la demi-droite compacte $\overline{\mathbb{R}}_+$), posons :

$$(3) \quad \begin{cases} \overline{I}(f) = \lim\ \{I(g),\ g \in \Phi_g^+,\ g > f\} \\ \underline{I}(f) = \lim\ \{\overline{I}(k),\ k \in \Phi_k^+,\ k < f\} \end{cases}$$

(Il s'agit des limites dans $\overline{\mathcal{K}}_o$ des familles filtrantes considérées) Nous désignerons par $\overline{\Phi}_o^+$ l'ensemble des fonctions f telles que $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$, et par Φ_o^+ le sous-ensemble de $\overline{\Phi}_o^+$ défini par la condition supplémentaire $\overline{I}(f) \in \mathcal{K}_o$. Nous poserons I $(= \overline{I} = \underline{I})$ sur $\overline{\Phi}_o^+$ et Φ_o^+. D'après la proposition 3, Φ_g^+ est contenu dans $\overline{\Phi}_o^+$. L'inclusion $\Phi_k^+ \subset \Phi_o^+$ n'est pas tout à fait évidente, car l'inégalité $k < f$ est stricte dans la définition 3. Mais, pour $\varepsilon_n \downarrow 0$, la suite $k_n = (1-\varepsilon_n)k$ vérifie $k_n < k$, et $\overline{I}(k_n) \to \overline{I}(k)$ dans $\mathcal{K}_o$, d'où $\Phi_k^+ \subset \Phi_o^+$.

Pour deux fonctions f, f' positives quelconques, on établit sans peine les inclusions :

$$
(3') \quad \begin{cases} \underline{I}(f) \subset \overline{I}(f) \\ \overline{I}(f+f') \subset \overline{I}(f) \oplus \overline{I}(f') \\ \underline{I}'(f+f') \supset \underline{I}'(f) \oplus \underline{I}'(f') \end{cases}
$$

(la seconde inclusion s'applique à I et I', la troisième à I' seulement).

<u>Lemme 1</u> - <u>On a $f \in \Phi_o^+$ si et seulement si on peut trouver une suite $g_n > f$ décroissante dans Φ_g^+ et une suite $k_n < f$ croissante dans Φ_k^+ telles que $I(g_n - k_n)$ converge vers $\{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. On a $f \in \overline{\Phi}_o^+$ et</u> I(f <u>$I(f) = \omega$ si et seulement si on peut trouver une suite $k_n < f$ croissante dans Φ_k^+ telle que $\overline{I}(k_n)$ converge vers ω dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.</u>

Le deuxième énoncé résulte immédiatement des définitions. Soit f une fonction telle que $\overline{I}(f) \neq \omega$. On peut trouver une suite décroissante $g_n > f$ dans Φ_g^+ telle que $I(g_1) \neq \omega$ et une suite $k_n < f$ croissante dans Φ_k^+ avec lim $I(g_n) = \overline{I}(f)$ et lim $I(k_n) = \underline{I}(k)$. La suite $g_n - k_n$, décroissante dans Φ_g^+, vérifie $I(g_n - k_n) \in \mathcal{K}_0$, (puisque $I(g_1) \neq \omega$), et, dans $\mathcal{K}_0$, la suite décroissante $I(g_n-k_n)$ admet une limite A. D'après la seconde inclusion (3'), on a :

$$I(g_n) = I(g_n-k_n+k_n) \subset I(g_n-k_n) \oplus \overline{I}(k_n)$$

et, pour n infini, $\overline{I}(f) \subset A \oplus \underline{I}(f)$

Si $A = \{0\}$, on en déduit $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ et $f \in \Phi_0^+$ - Inversement, supposons $f \in \Phi_0^+$. Les deux dernières inclusions (3') montrent que l'intégrale I' associée à I est additive ($\overline{I}(f+f') = \underline{I}'(f+f') = I'(f) \oplus I'(f')$ pour $f,f' \in \Phi_0^+$), de sorte que l'inclusion ci-dessus est une égalité pour I' : $\overline{I}'(f) = C(A) \oplus \underline{I}'(f)$. Mais $\overline{I}'(f) = \underline{I}'(f)$, puisque $f \in \Phi_0^+$, et par suite $C(A) = \{0\}$, et, à fortiori, $A = \{0\}$.

<u>Proposition 4 - $\overline{\Phi_0^+}$ est stable pour $\curlyvee$, et Φ_0^+ est stable pour $\curlywedge$</u>

Soient f et f' dans Φ_0^+, et $k_n,g_n(k'_n,g'_n)$ des suites dans Φ_k^+ et Φ_g^+ vérifiant relativement à f (à f') les conditions du lemme 1. Il en résulte que :

$$I(g_n+g'_n - k_n-k'_n) \subset I(g_n-k_n) \oplus I'(g'_n - k'_n)$$

converge vers $\{0\}$ dans $\mathcal{K}_0$, donc aussi son enveloppe convexe :

$$I'(g_n + g'_n - k_n - k'_n) = I'(g_n \curlyvee g'_n - k_n \curlyvee k'_n) \oplus I'(g_n \curlywedge g'_n - k_n \curlywedge k'_n)$$

Mais celà n'est possible que si chacune des suites décroissantes $I'(g_n \curlyvee g'_n - k_n \curlyvee k'_n)$ et $I'(g_n \curlywedge g'_n - k_n \curlywedge k'_n)$ converge vers $\{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. A fortiori, on a alors :

$$I(g_n \curlyvee g'_n - k_n \curlyvee k'_n) \to \{0\}, \; I(g_n \curlywedge g'_n - k_n \curlywedge k'_n) \to \{0\}$$

et d'après le lemme, celà entraine $f \in \Phi_o^+$ et $f' \in \Phi_o^+$.

Si une fonction $f \in \overline{\Phi}_o^+$ vérifie $I(f) = \omega$, on peut trouver dans Φ_k^+ une suite croissante $k_n < f$ avec $I(k_n) \to \omega$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$. Pour toute fonction f', l'inégalité $f \curlyvee f' > k_n$ entraine $\underline{I}(f \curlyvee f') = \omega$ donc $f \curlyvee f' \in \overline{\Phi}_o^+$, d'après le lemme 1.

<u>Proposition 5</u> - <u>Si f et f' sont deux fonctions de Φ_o^+ on a $f + f' \in \Phi_o^+$. Si de plus $f \geq f'$, on a aussi $f - f' \in \Phi_o^+$</u>

Prenons, en effet, des suites g_n, k_n (g'_n, k'_n) vérifiant les conditions du lemme pour f et f'. L'inclusion de sous-additivité :

$$I(g_n + g'_n - k_n - k'_n) \subset I(g_n - k_n) \oplus I(g'_n - k'_n)$$

montre $I(g_n + g'_n - k_n - k'_n) \to \{0\}$, d'où $f + f' \in \Phi_o^+$, d'après le lemme, Si $f - f' \geq 0$, on a aussi :

$$g_n - k'_n > f - f' > (k_n - g'_n)_+$$

et :

$$g_n - k'_n - (k_n - g'_n)_+ \leqslant g_n - k'_n - (k_n - g'_n) = (g_n - k_n) + (g'_n - k'_n)$$

On en déduit (croissance et sous-additivité) :

$$I(g_n - k'_n - (k_n - g'_n)_+) \subset I(g_n - k_n) \oplus I(g'_n - k'_n)$$

Le premier membre converge donc vers $\{0\}$, et, d'après le lemme, $f - f' \in \Phi_o^+$.

<u>Corollaire</u> - <u>Φ_o^+ et $\overline{\Phi_o^+}$ sont stables pour l'addition, et I est croissante et convexe sur $\overline{\Phi_o^+}$</u> .

Pour Φ_o^+, celà découle de la proposition. Si $f \in \overline{\Phi_o^+}$, et $I(f) = \omega$, pour toute fonction positive f', $f+f' \in \overline{\Phi_o^+}$ (prop. 4), et la relation $I(\lambda f + \mu f') = \omega$ montre la convexité.

<u>Proposition 6 $\overline{\Phi_o^+}$ est stable pour l'addition dénombrable. Pour toute f_n dans Φ_o^+, on a $I(\sum_n f_n) = \lim_N I\,(\sum_{n=1}^{N} f_n) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ pour la pseudo-intégrale I, et $I'(\sum f_n) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} I'(f_n)$ pour l'intégrale associée</u>.

Soit f_n une suite dans $\overline{\Phi_o^+}$. Si $I(f_{n_o}) = \omega$ pour un n_o, $f = \sum_n f_n$ vérifie $f \geq f_{n_o}$, d'où $\underline{I}(f) \supset I(f_{n_o})$, et $f \in \overline{\Phi_o^+}$, $I(f) = \omega$. Supposons donc $f_n \in \Phi_o^+$ pour tout n. Soit ε_n une suite de réels > 0 avec $\sum \varepsilon_n = \varepsilon$. D'après le lemme 1 et la prop. 5, on peut trouver $g_n \in \Phi_g^+$ avec $g_n > f_n$, et $k_n \in \Phi_k^+$ avec $k_n < f_n$ tels que :

(a) $$I(g_n - k_n) \subset K_{\varepsilon_n}$$

(boule de rayon ε_n). D'après la proposition 2, $g = \sum g_n$ et $h = \sum k_n$ vérifient :

(b) $$I(g) = \lim_N I\,(\sum^N g_n), \quad I(g-k) = \lim_N I(\sum^N (g_n - k_n))$$

Supposons d'abord $I(g) \neq \omega$. De (a) résulte :

(C) $$I\left(\sum^{N} (g_n - k_n)\right) \subset \bigoplus_{n=1}^{N} I(g_n - k_n) \subset K_\varepsilon$$

et la seconde relation (b) donne $I(g-k) \subset K_\varepsilon$. Il suffit d'appliquer le lemme 1 pour en déduire $f \in \Phi_o^+$.

Mais (c) donne $I(\sum^N g_n) \subset I(\sum^N f_n) \oplus K_\varepsilon$. Enfin (prop. 2), pour N assez grand on a aussi $I(g) \subset I(\sum^N g_n) \oplus K_\varepsilon$, donc :

$$I(f) \subset I(g) \subset I\left(\sum^N f_n\right) \oplus K_{2\varepsilon} \subset \left(\lim_N I\left(\sum^N f_n\right)\right) \oplus K_{2\varepsilon}$$

Par suite $I(f) = \lim_N I(\sum^N f_n)$. L'inégalité $I(f) \subset \bigoplus_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ en résulte aussitôt, par sous-additivité, et devient une égalité pour l'intégrale associée I' qui est additive.

Il reste à examiner le cas où $I(g_n) \neq \omega$ mais $I(g) = \omega$. On a a fortiori $I'(g) = \omega$, et la suite :

$$I'\left(\sum^N g_n\right) = \bigoplus_1^N I'(g_n)$$

converge vers ω (Prop. 2). Comme on déduit de (a) :

$$I'(f_n) \subset I'(g_n) \subset I'(f_n) \oplus K_{\varepsilon n}$$

on a aussi :

$$\bigoplus_1^N I'(g_n) \subset K_\varepsilon \oplus \left(\bigoplus_1^N I'(f_n)\right)$$

Donc $\overset{N}{\underset{1}{\oplus}} I'(f_n) = I'(\overset{N}{\Sigma} f_n)$ converge aussi vers ω, d'où $\underline{I}'(f) = \omega$ et par suite $\underline{I}(f) = \omega$.

<u>Proposition 7 - $\overline{\Phi_o^+}$ est stable pour la convergence monotone $\uparrow$, et $f_n \uparrow f$ dans $\overline{\Phi_o^+}$ entraine $I(f_n) \to I(f)$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.</u>

En effet, posons $h_1 = f_1$, $h_n = f_n - f_{n-1}$, d'où $f_N = \sum_{n=1}^{N} h_n$, $f = \Sigma h_n$. Si $I(f_{n_o}) = \omega$ pour un n_o, $f \geq f_{n_o}$ entraine $\underline{I}(f) = \omega$, et la proposition en résulte. Si $f_n \in \Phi_o^+$ pour tout n, $h_n \in \Phi_o^+$ (prop. 5), et la proposition 6 permet de conclure.

<u>Proposition 8 - Φ_o^+ est stable pour la convergence monotone $\downarrow$, et $f_n \downarrow f$ dans Φ_o^+ entraine $I(f_n) \to I(f)$ dans $\mathcal{K}_o$.</u>

Soit d'abord $f_n \in \Phi_o^+$ avec $f_n \downarrow 0$. On a $f_1 - f_n \in \Phi_o^+$ (prop. 5) et $f_1 - f_n \uparrow f_1$, d'où $I(f_1 - f_n) \to I(f_1)$ dans $\mathcal{K}_o$ (prop. 7). Mais, dans $\mathcal{K}_o$, la suite décroissante $I(f_n)$ admet une limite A, et $I'(f_n)$ converge vers C(A). L'additivité de I' donne alors :

$$I'(f_1) = I'(f_1 - f_n) \oplus I'(f_n)$$

et, en posant à la limite, $I'(f_1) = C(A) \oplus I'(f_1)$, d'où $C(A) = \{0\}$ et, a fortiori, $A = \{0\}$.

Soit maintenant $f_n \downarrow f$, $f_n \in \Phi_o^+$. On a encore $f_1 - f_n \in \Phi_o^+$ (prop. 5), et $f_1 - f_n \uparrow f_1 - f$ entraine (Prop. 7) $f_1 - f \in \Phi_o^+$ et $I(f_1 - f_n) \to I(f_1 - f)$. Mais la prop. 5 montre $f = f_1 - (f_1 - f) \in \Phi_o^+$, donc aussi $f_n - f$. Comme $f_n - f$ tend vers 0, on a, d'après la première partie, $I(f_n - f) \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. Par suite $I(f_n) \subset I(f) \oplus I(f_n - f)$

vérifie $\overline{\lim}\ I(f_n) \subset I(f)$, d'où $I(f_n) \to I(f)$, puisque $f_n > f$.

Plus généralement :

Lemme de Fatou-Lebesgue - Soit f_n une suite dans Φ_0^+ majorée par une fonction $g \in \Phi_0^+$ fixe. On a :

$$I(\lim_n \sup f_n) \supset \overline{\lim}\ I(f_n)$$

$$I(\lim \inf f_n) \subset \underline{\lim}\ I(f_n)$$

En particulier, si une suite $f_n \in \Phi_0^+$ majorée par un $g \in \Phi_0^+$ fixe converge ponctuellement vers une fonction f, on a $f \in \Phi_0^+$ et $I(f_n) \to I(f$ dans $\mathcal{K}_0$

On a $g \geq \operatorname*{Sup}_{m\geq n} f_m$, d'où $\sup_{m\geq n} f_m \in \Phi_0^+$ (prop. 2), et $I(\lim_n \sup f_n) = \lim_n I(\sup_{m\geq n} f_m)$ (Prop. 8). Comme $I(f_n) \subset I(\sup_{m\geq n} f_m)$, la première inclusion en résulte. De même, $g \geq \operatorname*{Inf}_{m\geq n} f_m$ donne $\operatorname*{Inf}_{m\geq n} f_m \in \Phi_0^+$ (Prop. 8) et $I(\lim_n \operatorname{Inf} f_n) = \lim_n I(\operatorname*{Inf}_{m\geq n} f_m)$ (Prop. 7). De $I(f_n) \supset I(\operatorname*{Inf}_{m\geq n} f_m)$ résulte la seconde inclusion.

Lemme 3 - Pour $f \in \Phi_0^+$ et a réel ≥ 0, on a $f \wedge a \in \Phi_0^+$

En effet, soit K_n une suite croissante de compacts recouvrant E. On a $1_{K_n} \in \Phi_k^+ \subset \Phi_0^+$, puis $f \wedge (a\ 1\ K_n) \in \Phi_0^+$ (Prop. 4). Comme $(f \wedge a\ 1_{K_n}) \uparrow (f \wedge a)$, la prop. 7 donne $(f \wedge a) \in \Phi_0^+$.

<u>Proposition 9</u> - <u>Pour $f \in \Phi_o^+$, on a $1_{\{f > b\}} \in \Phi_o^+$ et de même $1_{\{a \geq f > b\}} \in \Phi_o^+$ pour $a \geq b > 0$.</u>

Pour $a > b \geq 0$, posons $r_a = \frac{f \wedge a - f \wedge b}{a - b}$. D'après le lemme 3 et la proposition 5, on a $r_a \in \Phi_o^+$ si, $f \in \Phi_o^+$. Pour $a \downarrow b$ on a $r_a \uparrow 1_{\{f > b\}}$, d'où $1_{\{f > b\}} \in \overline{\Phi_o^+}$ (Prop. 7) et même $1_{\{f > b\}} \in \Phi_o^+$ si $b > 0$. Pour $a \geq b > 0$, $1_{\{f > b\}} - 1_{\{f > 0\}} = 1_{\{a \geq f > b\}} \in \Phi_o^+$, d'après la Proposition 5.

<u>Corollaire</u> - <u>Pour toute $f \in \overline{\Phi_o^+}$, les fonctions</u> :

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k+1}{2^n} \geq f > \frac{k}{2^n}\}}$$

<u>vérifient $r_n \uparrow f$, $I(r_n) \to I(f)$ dans $\mathcal{H}_o$, et l'intégrale I' vérifie</u> :

$$I'(f) = \lim_n \bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} I'\left(1_{\{\frac{k+1}{2^n} \geq f > \frac{k}{2^n}\}}\right)$$

4 - <u>Pseudo-Intégrales semi-additives, ou $\mathcal{H}_o$-Intégrales</u>

Nous dirons qu'une pseudo-intégrale est <u>semi-additive</u> si elle vérifie $I(\varphi + \varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$ pour $\varphi, \varphi' \in \mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ <u>à supports disjoints</u>. Si $\varphi\, \varphi' = 0$, les supports de φ et φ' ne sont pas forcément disjoints, mais $\varphi_n = (\varphi - \varepsilon_n)_+$ et $\varphi'_n = (\varphi' - \varepsilon_n)_+$ $(\varepsilon_n \downarrow 0)$ sont à supports disjoints, donc $I(\varphi_n + \varphi'_n) = I(\varphi_n) \oplus I(\varphi'_n)$. De $\varphi_n \uparrow \varphi$ et $\varphi'_n \uparrow \varphi$ résulte ensuite $I(\varphi + \varphi') = I(\varphi) \oplus I(\varphi')$. Plus généralement :

<u>Proposition 10</u> - <u>Si I est une pseudo-intégrale semi-additive, on a $I(f + f') = I(f) \oplus I(f')$ pour $f, f' \in \overline{\Phi}_o^+$ dès que les ensembles</u> $\{f > 0\}$ et $\{f' > 0\}$ <u>sont disjoints</u>.

La proposition est vraie sur $\mathcal{C}_K^+$, et on vérifie immédiatement qu'elle subsiste sur Φ_g^+ et Φ_k^+. Pour $f \in \overline{\Phi}_o^+$ telle que $I(f) = \omega$, la proposition est encore vraie (par définition $\omega \oplus K = \omega$ dans $\overline{\mathcal{K}}_o$) Supposons donc f et $f' \in \Phi_o^+$, et soient $k_n < f$, $k'_n < f'$ deux suites croissantes telles que $I(k_n) \to I(f)$ et $I(k'_n) \to f'$ dans $\mathcal{K}_o$.

Si $\{f > 0\} \cap \{f' > 0\} = \emptyset$, a fortiori $k_n\, k'_n = 0$ et $I(k_n + k'_n) = I(k_n) \oplus I(k'_n)$. Pour n infini, on en déduit :

$$I(f + f') \supset \lim I(k_n + k'_n) = I(f) \oplus I(f')$$

L'inclusion inverse étant vérifiée, puisque I est convexe, on a l'égalité.

<u>Corollaire</u> - <u>Si la pseudo intégrale I est semi-additive, pour toute fonction $f \in \Phi_o^+$, on a</u> :

$$I(f) = \lim_n \overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} \frac{k}{2^n}\, I\left(1_{\{\frac{k+1}{2^n} \geq f > \frac{k}{2^n}\}}\right)$$

En effet, considérons les fonctions r_n introduites dans le corollaire de la proposition 9. Les propositions 6 et 10 donnent :

$$I(r_n) = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} \frac{k}{2^n}\, I\left(1_{\{\frac{k+1}{2^n} \geq f > \frac{k}{2^n}\}}\right)$$

et il suffit d'appliquer le corollaire de la proposition 9.

A partir de maintenant, nous ne considérerons plus que des pseudo-intégrales semi-additives, que nous appellerons intégrales à valeurs dans $\mathcal{K}_o$, ou $\underline{\mathcal{K}_o\text{-intégrales}}$, pour les distinguer des intégrales proprement dites, ou $C(\mathcal{K}_o)$-intégrales, qui prennent leurs valeurs dans $C(\mathcal{K}_o)$.

III - <u>Mesures sur E à valeurs dans $\overline{\mathcal{K}_o}$</u>

Soit I une $\mathcal{K}_o$-intégrale sur un espace L.C.D. E, et $\overline{\Phi_o^+}$ l'espace fonctionnel sur lequel I se prolonge. D'après ce qui précède, $\overline{\Phi_o^+}$ contient les fonctions boréliennes sur E, et, en particulier, les indicatrices des boréliens de E. Désignons par $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ l'ensemble des boréliens. En posant $I(B) = I(1_B)$ pour $B \in \mathcal{B}$, on voit que I applique $\mathcal{B}$ dans $\overline{\mathcal{K}_o}$. Cette fonction d'ensemble est <u>croissante</u>, vérifie $I(\emptyset) = \{0\}$, possède la <u>continuité monotone séquentielle</u> : $B_n \uparrow B$ entraine $I(B_n) \to I(B)$; $B_n \downarrow B$ avec $I(B_{n_o}) \neq \omega$ pour n_o entraine $I(B_n) \to I(B)$. D'après la proposition 10, I est additive sur $\mathcal{B}$, donc aussi <u>σ-additive</u>. Enfin, $I(K) \neq \omega$ pour $K \in \mathcal{K}(E)$.

Le corollaire de la proposition 10 montre que I(f) doit pouvoir se mettre sous la forme $\int_E f(x)I(dx)$, ce symbole ayant le sens usuel de limite d'intégrales de fonctions étagées.

En sens inverse, si E est un espace quelconque muni d'un σ-algèbre $\mathcal{B}$, nous dirons qu'une application $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{K}_o$ est une <u>mesure (finie) à valeurs dans $\mathcal{K}_o$</u> si elle vérifie les 3 axiomes :

1 - $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \subset B' \Rightarrow \mu(B) \subset \mu(B')$ (croissance)

2 - $B, B' \in \mathcal{B}$, $B \cap B' = \emptyset \Rightarrow \mu(B \cup B') = \mu(B) \oplus \mu(B')$ (additivité)

3 - $B_n \in \mathcal{B}$, $B_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(B_n) \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$.

On note que $\mu(B)$ est toujours un <u>compact contenu dans le compact fixe $\mu(E)$, d'où résulte en particulier que l'espace image $\mu(\mathcal{B})$ est compact dans $\mathcal{K}_o$</u>. Des trois axiomes résultent les propriétés

$$I(\emptyset) = \{0\}$$

$$B_n \uparrow B, \text{ ou } B_n \downarrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B) \text{ dans } \mathcal{K}_o$$

ainsi que la <u>σ-additivité</u> : $\mu(\bigcup_n B_n) = \bigoplus_n \mu(B_n)$ pour des B_n disjoints.

Montrons, par exemple, la propriété de continuité monotone. Soit $B_n \uparrow B$ dans $\mathcal{B}$, donc $(B \setminus B_n) \downarrow \emptyset$. L'axiome 3 donne $\mu(B \setminus B_n) \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}_o$. De $\mu(B) = \mu(B_n) \oplus \mu(B \setminus B_n)$ (axiome 2) et du fait que la suite $\mu(B_n)$ croissante dans $\mathcal{K}_o$ converge vers la limite $A = \overline{\bigcup \mu(B_n)} \in \mathcal{K}_o$ (puisque tous ces compacts sont contenus dans le compact fixe $\mu(E)$), résulte alors $\mu(B) = A$. De même, si $B_n \downarrow B$ dans $\mathcal{B}$, $(B_n \setminus B) \downarrow \emptyset$ et $\mu(B_n \setminus B) \downarrow \{0\}$, d'où $\mu(B_n) = \mu(B) \oplus \mu(B_n \setminus B) \downarrow \mu(B)$ dans $\mathcal{K}_o$.

De même, une application μ de $\mathcal{B}$ dans le compactifié $\overline{\mathcal{K}_o} = \mathcal{K}_o \cup \{\omega\}$ sera une <u>mesure σ-finie</u> sur E s'il existe dans $\mathcal{B}$ une suite croissante E_n avec $E = \bigcup E_n$ telle que $\mu(E_n) \in \mathcal{K}_o$, $\mu(B \cap E_n) \uparrow \mu(B)$ dans $\overline{\mathcal{K}_o}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ et que la restriction μ_n de μ à chaque E_n vérifie les trois axiomes ci-dessus.

Une mesure μ σ-finie est croissante, σ-additive, et vérifie $B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B)$ dans $\mathcal{K}_o$ pour toute suite B_n dans $\mathcal{B}$. Montrons, par exemple, la continuité monotone.

Pour $B_n \uparrow B$, on a dans $\mathcal{K}_o$:

$$\mu(B) = \lim_m \mu(B \cap E_m) = \overline{\bigcup_m \mu(B \cap E_m)}$$

$$\mu(B_n) = \lim_m \mu(B_n \cap E_m) = \overline{\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m)}$$

puisqu'il s'agit de suites croissantes dans $\mathcal{K}_o$, et de même :

$$\lim \mu(B_n) = \overline{\bigcup_n \mu(B_n)} = \overline{\bigcup_n \overline{\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m)}} =$$

$$= \overline{\bigcup_n (\bigcup_m \mu(B_n \cap E_m))} = \overline{\bigcup_m \bigcup_n (\mu(B_n \cap E_m))} =$$

$$= \overline{\bigcup_m \overline{\bigcup_n (\mu(B_n \cap E_m))}} = \overline{\bigcup_m \mu(B \cap E_m)} = \mu(B)$$

La σ-additivité se déduit alors de l'additivité simple, qui se démontre elle-même sans peine.

Par contre, la continuité monotone $B_n \downarrow B \Rightarrow \mu(B_n) \to \mu(B)$ dans $\overline{\mathcal{K}_o}$ n'est assurée, au départ, que si les B_n, au-delà d'un certain rang, restent contenues dans un E_m fixe.

Enfin, nous dirons qu'une mesure μ σ-finie sur un espace L.C.D. E muni de sa σ-algèbre borélienne est <u>régulière</u> s'il existe une $\mathcal{K}_o$-intégrale I telle que $\mu(B) = I(1_B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Celà implique, en particulier, que $\mu(K)$ soit fini pour tout compact $K \in \mathcal{K}(E)$, et aussi que les restrictions de μ à $\mathcal{G}(E)$ et à $\mathcal{K}(E)$ soient respectivement s.c.i. et s.c.s. (nous verrons que les conditions sont remplies automatiquement dès que μ est finie pour tout compact).

<u>Remarque</u> - Toute mesure μ à valeurs dans $\mathcal{K}_o$ est <u>croissante pour l'ordre propre</u> $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{K}_o$ ($A \succcurlyeq B$ si $A_B = A$). En effet, pour $B' \subset B$ dans $\mathcal{B}$, on a $\mu(B) = \mu(B') \oplus \mu(B \cap B'^c)$, donc $\mu(B') \preccurlyeq \mu(B)$: tel est la raison de la présente étude, dont l'objectif initial était de caractériser les familles à 1 paramètre B_λ croissant pour $\preccurlyeq$ dans $\mathcal{K}_o$.

IV - <u>Construction de l'Intégrale associée à une mesure à valeur dans $\mathcal{K}_o$.</u>

Soit μ une mesure <u>finie</u> sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$ à valeurs dans $\mathcal{K}_o$, et $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées positives sur E (de la forme $f = \sum x_i 1_{B_i}$, $x_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{B}$ partition de E). Pour $f \in \mathcal{E}_+$, définissons $\mu(f)$:

$$\mu(f) = \int f(x)\, \mu(dx) = \bigoplus_i x_i\, \mu(B_i)$$

Si f' est une autre fonction étagée, de la forme $f' = \sum x'_j \, 1_{B'_j}$, on a $f + f' = \sum_{i,j} (x_i + x'_j) \, 1_{B_i \cap B'_j}$ et :

$$\mu(f + f') = \bigoplus_{i,j} (x_i + x'_j) \, \mu(B_i \cap B'_j)$$

La relation $(\lambda + \mu) K \subset \lambda K \oplus \mu K$ $(K \in \mathcal{K}_o)$ montre :

$$\mu(f + f') \subset \mu(f) \oplus \mu(f')$$

Mais, si $f f' = 0$, on met $f + f'$ sous la forme $\sum_i x_i \, 1_{B_i} + \sum_j x'_j \, 1_{B_j}$ avec $B_i \cap B_j = \emptyset$ dès que $x_i \, x_j \neq 0$, d'où :

$$\mu(f + f') = (\bigoplus_i x_i \, \mu(B_i)) \oplus (\bigoplus_j x'_j \, \mu(B_j)) = \mu(f) \oplus \mu(f')$$

Ainsi μ est convexe, croissante et semi-additive sur $\mathcal{E}_+$

A la mesure μ, associons la mesure μ' à valeur dans $C(\mathcal{K}_o)$, en posant $\mu'(B) = C(\mu(B))$, $B \in \mathcal{B}$. Sur $\mathcal{E}_+$, on a $\mu'(f) = C(\mu(f))$ et l'égalité $\lambda K \oplus \mu K = (\lambda + \mu)K$, valable pour $K \in C(\mathcal{K}_o)$, montre que la fonctionnelle μ' est positivement linéaire sur $\mathcal{E}_+$.

En reprenant le raisonnement classique (par exemple, in Neveu, proposition II-3-1), on montre que $\mu(f)$ est l'unique fonctionnelle convexe, croissante et semi-additive sur $\mathcal{E}_+$ vérifiant $\mu(1_A) = \mu(A)$ pour $A \in \mathcal{B}$, et que de plus μ jouit de la propriété de continuité monotone séquentielle : $f_n \uparrow f$ ou $f_n \downarrow f$ dans $\mathcal{E}^+$ entraine $\mu(f_n) \to \mu(f)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Puis (en suivant par exemple Neveu, Prop. II-3-2) on étend μ à l'espace $\mathcal{J}_+$ (stable pour $\uparrow$) des limites supérieures

$f = \lim \uparrow f_n$ des suites croissantes dans $\mathcal{E}^+$. On pose pour celà :
$\mu(f) = \lim \mu(f_n)$ dans $\overline{\mathcal{K}_o}$ (cette limite existe, puisqu'il s'agit d'une suite croissante) ; on vérifie que $\mu(f)$ ne dépend pas du choix de la suite $f_n \uparrow f$, et que l'application $\mu : \mathcal{J}_+ \to \overline{\mathcal{K}_o}$ ainsi définie est croissante, convexe (positivement linéaire, si μ prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}_o)$) et vérifie la continuité monotone pour $\uparrow$: $f_n \uparrow f$ dans $\mathcal{J}_+$ entraine $\mu(f_n) \to \mu(f)$ dans $\mathcal{K}_o$. Enfin, le <u>lemme de Fatou</u> reste valable. Si une suite f_n dans $\mathcal{J}_+$ est majorée par un $g \in \mathcal{J}_+$ tel que $\mu(g) \neq \omega$, on a :

$$\begin{cases} \mu\,(\lim \operatorname{Suf} f_n) \supset \overline{\lim}\, \mu(f_n) \\ \\ \mu\,(\lim \operatorname{Inf} f_n) \subset \underline{\lim}\, \mu(f_n) \end{cases}$$

En particulier, si la suite $f_n \in \mathcal{J}_+$ est majorée par un $g \in \mathcal{J}_+$ avec $I(g) \neq \omega$ et converge ponctuellement vers f, on a $f \in \mathcal{J}_+$ et $\mu(f_n) \to \mu(f)$ dans $\mathcal{K}_o$.

Supposons maintenant que E soit L.C.D. et muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}$. Soit E_n une suite croissante de compacts couvrant E et μ une mesure σ-finie pour les E_n, à valeur dans $\mathcal{K}_o$. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$, le support de φ est contenu dans un E_n, et $\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\,\mu$ est dans $\mathcal{K}_o$. Cette intégrale définit une application croissante et convexe de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o$ (donc continue, d'après prop. 1) d'ailleurs semi-additive, comme on le vérifie immédiatement. Il s'agit donc d'une $\mathcal{K}_o$-intégrale I, et on a $\mu(\varphi) = I(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$. Cette $\mathcal{K}_o$-intégrale se prolonge ensuite sur $\Phi^+_o \supset \mathcal{J}_+$, et nous noterons encore I ce prolongement (qui prend ses valeurs dans le compactifié $\overline{\mathcal{K}_o}$). Il reste à montrer que I coïncide avec μ sur $\mathfrak{J}_+$, et, en particulier, que l'on a $\mu(B) = I(1_B)$ pour $B \in \mathcal{B}$.

Pour celà, supposons d'abord la mesure μ finie ($\mu(E)$ compact). Pour tout $g \in \Phi_g^+$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ avec $\varphi_n \uparrow g$. I et μ vérifiant la continuité monotone $\uparrow$, on en déduit $\mu(g) = I(g)$, et I et μ coïncident sur Φ_g^+. Pour $k \in \Phi_k^+$, on peut trouver $\varphi_n \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$ avec $\varphi_n \downarrow k$, et la continuité monotone $\downarrow$ montre que I et μ coïncident encore sur Φ_k^+. Soit, maintenant, $f \in \Phi_o^+$. Par définition, on peut trouver une suite k_n croissante dans Φ_k^+ et une suite g_n décroissante dans Φ_g^+ avec $k_n < f < g_n$ et $\lim I(k_n) = I(f) = \lim I(g_n)$ dans $\mathcal{K}_o$. Mais les suites k_n et g_n ont des limites dans $\mathfrak{J}^+$, soient $k_n \uparrow f_o$, $g_n \downarrow f'_o$, d'où $f_o, f'_o \in \mathfrak{J}^+$ et $f_o \leq f \leq f'_o$. Par continuité monotone, il en résulte :

$$\mu(f_o) = I(f_o) = I(f) = I(f'_o) = \mu(f'_o)$$

En particulier, si $f \in \mathfrak{J}_+$, on a $\mu(f) = I(f)$, et μ coïncide avec I sur $\mathfrak{J}_+$.

Si μ est seulement σ-finie et finie sur les compacts, on vérifie que le résultat subsiste, par continuité monotone, en prenant les restrictions de I et de μ à une suite croissante de compacts couvrant E. Finalement :

<u>Proposition 11</u> - <u>Si E est un espace L.C.D. muni de sa σ-algèbre borélienne $\mathcal{B}$, toute mesure μ σ-finie sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathcal{K}_o$ telle que $\mu(K) \in \mathcal{K}_o$ pour tout compact $K \subset E$ est associée de manière unique à une $\mathcal{K}_o$-Intégrale I vérifiant $\mu(B) = I(1_B)$ pour $B \in \mathcal{B}$,</u>

et réciproquement. Il y a donc identité entre l'ensemble des intégrales des mesures μ de ce type, et l'ensemble des pseudo-intégrales semi-additives $I : \mathcal{C}_K \to \mathcal{K}_o$. Le prolongement de I coïncide sur $\mathcal{J}_+$ avec l'intégrale de la mesure μ associée, et pour tout $f \in \Phi_o^+$, on peut trouver f_o, f'_o dans $\mathcal{J}_+$ avec $f_o \leqslant f \leqslant f'_o$ et $\mu(f_o) = I(f) = \mu(f'_o)$. Enfin I est positivement linéaire (donc à valeurs convexes) si et seulement si la mesure μ associée est elle-même à valeurs convexes.

Corollaire - Toute mesure μ σ-finie sur $(E,\mathcal{B})$ finie pour tout compact possède la propriété d'approximation :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \qquad \mu(B) = \lim_{K \subset B} \{\mu(K),\ K \in \mathcal{K}(E)\}$$

(Il s'agit de la limite dans $\bar{\mathcal{K}}_o$ de la famille filtrante croissante des $\mu(K)$, $K \subset B$). En effet, soit A cette limite dans $\bar{\mathcal{K}}_o$. On a $A \subset \mu(B)$. Soit I la $\mathcal{K}_o$-Intégrale associée à μ, et k_n une suite croissante dans Φ_k^+ avec $k_n < 1_B$ et $\lim I(k_n) = I(1_B) = \mu(B)$. Soit $f_o = \lim\uparrow k_n \in \mathcal{J}_+$ la limite des k_n. On a aussi $\mu(B) = I(f_o) = \mu(f_o)$. Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ une suite de réels > 0, et K_n les compacts de E définis par :

$$K_n = \{k_n \geqslant \varepsilon_n\}$$

La suite croissante 1_{K_n} admet une limite f'_o dans $\mathcal{J}_+$. Mais 1_{K_n} majore 1_B, donc aussi f_o, sur K_n ; on a donc $1_B \geqslant f'_o \geqslant f_o$, d'où $\mu(B) = I(f'_o)$. Mais $I(f'_o) = \lim \mu(K_n)$ dans $\bar{\mathcal{K}}_o$, donc $\mu(B) \subset A$, et l'égalité $\mu(B) = A$ en résulte.

V - Familles à 1 paramètre croissantes pour $\succcurlyeq$ dans $\mathcal{K}_0$

Soit $B(\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$ une famille croissante pour $\succcurlyeq$ dans $\mathcal{K}_0$, c'est-à-dire vérifiant $(B(\lambda) \ominus \check{B}(\mu)) \oplus B(\lambda)$ pour $\lambda \geqslant \mu$. On a vu (Note Gst n° 100) que la régularisée à droite $B^+(\lambda)$ d'une telle famille est représentable à l'aide d'une intégrale S.M. :

$$B^+(\lambda) = B(0) \oplus \int_{+0}^{+\lambda} d\, B(x)$$

A toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}(\mathbb{R}^+)$ continue à support compact sur la demi-droite enclidienne, on peut de même associer l'intégrale S.M. :

$$I(\varphi) = \varphi(0)\ B(0) \oplus \int_{+0}^{\infty} \varphi(x)\ d\ B(x)$$

On vérifie que cette fonctionnelle est croissante, convexe et semi-additive. C'est donc une $\mathcal{K}_0$-intégrale. Désignons encore par B la mesure à valeur dans $\mathcal{K}_0$ associée à I, mesure qui comporte l'atome B(0) en x = 0. On a par conséquent :

$$I(\varphi) = \int \varphi(x)\ B(dx) = B(\varphi)$$

et de même :

$$B^+(\lambda) = \int 1_{[o,\lambda]}\ B(dx) = B([o,\lambda])$$

$$B^+(\lambda) \ominus \check{B}^+_\mu \qquad = \int 1_{[\mu,\lambda]}\ B(dx) \qquad (\mu \leqslant \lambda)$$

Les enveloppes convexes des $B^+(\lambda)$, soient $C(\lambda) = C(B^+(\lambda))$, forment dans $C(\mathcal{K}_o)$ une famille croissante pour $\preccurlyeq$, et la mesure C associée (à valeurs convexes) est la mesure définie par $C(A) = C(B^+(A))$, $A \in \mathcal{B}$, dont l'intégrale est positivement linéaire et convexe.

Il existe effectivement des mesures à valeurs non convexes. Par exemple, $B \in \mathcal{K}_o$ désignant un compact non convexe, prenons $x \in E$ et posons :

$$I_x(\varphi) = \varphi(x)\ B \qquad (\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}(E))$$

Plus généralement, soit x_i, $i \in I$ un ensemble fini ou dénombrable et sans point d'accumulation dans E, et B_i, $i \in I$ des compacts de $\mathcal{K}_o$. Posons :

$$\text{(a)} \qquad I(\varphi) = \bigoplus_{i \in I} \varphi(x_i) B_i \qquad (\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}})$$

Cette fonctionnelle I est croissante, convexe et semi-additive. C'est une $\mathcal{K}_o$-intégrale, à valeurs non convexes si les B_i ne sont pas convexes.

Enfin, on peut munir l'ensemble $\mathcal{M}(E, \mathcal{K}_o)$ des mesures sur E à valeurs dans $\mathcal{K}_o$ de la <u>topologie vague</u>, qui est la topologie la moins fine rendant continue l'application $\mu \to (\varphi \to \mathcal{K}_o)$ de $\mathcal{M}$ dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}_o)$ des applications continues de $\mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{K}_o$. Une suite $\mu_n \in \mathcal{M}$ converge vaguement vers la mesure $\mu \in \mathcal{M}$ si $\mu_n(\varphi)$ converge vers $\mu(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^+_{\mathcal{K}}$.

D'ailleurs, si la suite $\mu_n(\varphi)$ est convergente pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+$, posons $\mu(\varphi) = \lim \mu_n(\varphi)$: μ est nécessairement une mesure, car on vérifie immédiatement que μ est croissante, convexe et semi-additive (donc continue, d'après Prop. 1).

Si μ_n converge vaguement vers μ, on a :

$$\mu(g) \subset \underline{\lim}\ \mu_n(g) \qquad (g \in \Phi_g^+)$$

$$\mu(k) \supset \overline{\lim}\ \mu_n(k) \qquad (k \in \Phi_k^+)$$

et ces conditions nécessaires sont manifestement aussi suffisantes.

En prenant les limites vagues de suites de mesures discrètes du type (a), on pourra obtenir des mesures à valeurs non convexes de structure plus compliquée.

A chaque mesure sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathcal{K}_0$ correspond la famille à un paramètre croissante pour $\leqslant$ définie par :

$$B(\lambda) = \int_0^{+\lambda} \mu(dx)$$

On a vu qu'il est possible ainsi de construire des familles $B(\lambda)$ non convexes, par exemple en prenant pour μ une mesure discrète. Mais, dans ce cas, la famille $B(\lambda)$ n'est pas continue. On voit ainsi se poser deux questions :

- Toute famille $B(\lambda)$ croissante pour $\leqslant$ et <u>continue</u> est-elle dans $C(\mathcal{K}_0)$?

- Dans la négative, toute famille $B(\lambda)$ croissante et dérivable est-elle dans $C(\mathcal{K}_0)$, et, en particulier, coïncide-t-elle avec l'intégrale R.M. de sa dérivée ?

La difficulté de ces problèmes provient, en partie, du fait que le théorème de Radon-Nikodym ne se généralise pas aux mesures à valeurs dans $\mathcal{K}_0$. On le voit déjà en notant que si μ' est l'enveloppe convexe de μ, $\mu'(B) \subset K_\varepsilon$ entraine $\mu(B) \subset K_\varepsilon$, sans que pourtant $\mu(dx)$ puisse se mettre sous la forme $f(x)\ \mu'(dx)$.