N-118

NOTE GEOSTATISTIQUE n° 95

L'équation $B \oplus \check{B} = 2\,A$, et les demi-groupes continus dans $\mathcal{K}$

TABLE DES MATIERES

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 95

L'équation $B \oplus \check{B} = 2A$, et les demi-groupes continus dans $\mathcal{K}$

1°/ La topologie myope sur $\mathcal{K}$

Dans ce qui suit, $\mathcal{K}$ désignera la famille des ensembles compacts non vides dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Nous munirons $\mathcal{K}$ de la topologie myope, dont les ouverts sont engendrés par les parties de la forme $\{K \in \mathcal{K},\ K \subset B\}$, B ouvert, et $\{K \in \mathcal{K},\ K \not\subset K_0\}$, $K_0 \in \mathcal{K}$. On sait que cette topologie est localement compacte de type dénombrable, et coïncide avec la topologie définie par la métrique de Hausdorff. Rappelons également le critère de convergence dans $\mathcal{K}$

Critère de convergence. Une suite K_n converge vers K dans $\mathcal{K}$ si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- 1 - les K_n sont contenus dans un compact fixe,

- 2 - Pour tout $x \in K$, on peut trouver une suite $x_n \in K_n$ convergeant vers x dans $\mathbb{R}^n$,

- 3 - Toute suite $x_{n_k} \in K_{n_k}$ a ses valeurs d'adhérence dans K.

Ce critère permet d'établir la continuité de l'addition de Minkowski (déf. : $K \oplus K' = \{k + k',\ k \in K,\ k' \in K\}$ et de l'homothétie (déf. : $\lambda K = \{\lambda k,\ k \in K\}$, λ réel) :

Proposition 1 - L'application $(K,K') \to K \oplus K'$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et l'application $(\lambda, K) \to \lambda K$ de $\mathbb{R} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ sont continues.

Vérifions, par exemple, la continuité de la première application. Soient K_n et K'_n deux suites convergeant dans $\mathcal{K}$ respectivement vers K et K'. D'après la condition 1, les compacts

K_n et K'_n sont contenus dans deux compacts fixes K_o et K'_o , donc les compacts $K_n \oplus K'_n$ sont contenus dans $K_o \oplus K'_o \in \mathcal{K}$, et la suite $K_n \oplus K'_n$ vérifie 1 - Montrons qu'elle vérifie 2 - En effet, soit $x = k + k'$, avec $k \in K$ et $k' \in K'$. Il existe (critère 2-) $k_n \in K_n$ et $k'_n \in K'_n$ avec $k_n \to k$ et $k'_n \to k'$. Donc la suite $k_n + k'_n \in K_n \oplus K'_n$ converge vers $k + k' = x$, et la condition 2 est vérifiée. Enfin, soit $x_{n_k} \in K_{n_k} \oplus K'_{n_k}$ une suite convergeant vers un point x. Pour tout k, on a $x_{n_k} = y_{n_k} + y'_{n_k}$ avec $y_{n_k} \in K_{n_k}$ et $y'_{n_k} \in K'_{n_k}$. Les y'_{n_k}, étant contenus dans le compact fixe $K_o \oplus K'_o$ ont une valeur d'adhérence y'_o, et $y_o = x - y'_o$ est alors valeur d'adhérence pour la suite y_{n_k}. D'après 3 -, on a $y'_o \in K'$ et $y_o \in K$, donc aussi $x = y_o + y'_o \in K \oplus K'$, et la condition 3 est vérifiée : la suite $K_n \oplus K'_n$ converge ver $K \oplus K'$.

Nous désignerons par $C(K)$ l'<u>enveloppe convexe</u> de $K \in \mathcal{K}$ et par $C(\mathcal{K})$ la famille des compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$. $C(\mathcal{K})$ sera toujours muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{K}$.

<u>Proposition 2</u> - <u>L'application $K \to C(K)$ associant à tout compact K son enveloppe convexe $C(K)$ est une application continue de $\mathcal{K}$ sur $C(\mathcal{K})$</u>.

En effet, soit K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}$, et K_o un compact fixe contenant les K_n (critère 1). On a $C(K_n) \subset C(K_o)$, et les $C(K_n)$ vérifient le critère 1. Soit $x \in C(K)$. Ce point admet une représentation de la forme :

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k , \; x_i \in K, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

Pour chaque $i = 1, 2, .. , k$, soit $x_n(i) \in K_n$ une suite convergeant vers x_i (critère 2). Les $x_n = \sum_i \lambda_i\, x_n(i)$ appartiennent à $C(K_n)$ et convergent vers x. Par suite, les $C(K_n)$ vérifient la condition 2. Si maintenant E est un demi-plan ouvert contenant K, on a $K_n \subset E$ pour n assez grand, d'après la définition de la topologie myope, donc aussi $C(K_n) \subset E$. Si x est une valeur d'adhérence pour une suite $x_{n_k} \in C(K_{n_k})$, x est donc contenu dans le demi-plan fermé $\overline{E}$. Mais $C(K) = \bigcap_{E \supset K} \overline{E}$, et par suite $x \in C(K)$. La suite $C(K_n)$ vérifie donc aussi la condition 3, et converge vers $C(K)$, ce qui établit la proposition.

<u>Corollaire - La famille $C(\mathcal{K})$ des compacts convexes est fermée dans $\mathcal{K}$</u>

En effet, $K_n \to K$ et $K_n = C(K_n)$ entrainent $K = \lim C(K_n) = C(K)$ d'après la proposition.

En ce qui concerne la soustraction de Minkowski (déf. : $A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$) rappelons que l'application $(K,K') \to K \ominus K'$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{K} \cup \{\emptyset\}$ n'est pas continue, mais vérifie la propriété suivante :

$$(B \oplus K) \ominus \check{K} = B, \quad B \in C(\mathcal{K}),\ K \in \mathcal{K}\ ,\ \check{K} = (-1)K$$

de même, l'<u>homothétie</u> vérifie la propriété :

$$\lambda B \oplus \mu B = (\lambda + \mu)B, \quad B \in C(\mathcal{K}), \quad \lambda,\mu \geqslant 0$$

Ainsi, compte tenu de la Proposition 1, la famille $B_\lambda = \lambda B$ ($B \in C(\mathcal{K})$) constitue, pour $\lambda \geqslant 0$, un <u>demi-groupe continu à un paramètre</u> (déf. : $B_{\lambda+\mu} = B_\lambda \oplus B_\mu$, $\lambda \to \mu \Rightarrow B_\lambda \to B_\mu$ dans $\mathcal{K}$).

2°/ Caractérisation des demi-groupes continus à un paramètre

Nous dirons qu'un compact $A \in \mathcal{K}$ est indéfiniment divisible si, pour tout entier n, il existe un $B_n \in \mathcal{K}$ avec $A = B_n^{\oplus n}$ (la notation $B^{\oplus n}$ représente la somme de Minkowski de n termes égaux à B).

Théorème 1 - Un compact A est indéfiniment divisible si et seulement si il est convexe.

En effet, si A est convexe, on a $A = (\frac{1}{n}A)^{\oplus n}$ d'après la propriété de l'homothétie rappelée à la fin du premier paragraphe.

Inversément, supposons que pour tout n il existe $B_n \in \mathcal{K}$ avec $A = B_n^{\oplus n}$. On a évidemment $nB_n \subset A$. Etant contenue dans le compact A, la suite $n\,B_n$ admet une valeur d'adhérence $B_o \subset A$ dans $\mathcal{K}$. Désignons alors par C_n, C_o, et C_A les enveloppes convexes de B_n, B_o et A.

Montrons $C_A = C_o$. En effet, pour n et k entiers, on a $n\,B_n \subset A = B_k^{\oplus k} \subset k\,C_k$, d'où $n\,C_n \subset k\,C_k$, et l'inclusion inverse étant vraie aussi, l'égalité $n\,C_n = k\,C_k = C_A$. Mais cette égalité passe à la limite d'après la proposition 2, d'où $C_o = C_A$.

Montrons maintenant $C_o \subset A$. Soit $x \in C_o$, et :

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\, x_i, \quad x_i \in B_o, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$$

une représentation de cet élément. Soit aussi $n_k\,B_{n_k}$ une suite partielle convergeant vers la valeur d'adhérence B_o de la suite $n\,B_n$. Pour chaque $i = 1, 2, \ldots, r$, il existe

(critère 2) une suite $y_{n_k}(i) \in n_k B_{n_k}$ convergeant vers x_i.
Choisissons alors des entiers $N(i,k) \geqslant 0$ vérifiant :

$$\sum_i N(i,k) = n_k \ , \quad \lim_k \frac{N(i,k)}{n_k} = \lambda_i$$

et posons :

$$x_k = \frac{1}{n_k} \sum_i N(i,k)\ y_{n_k}(i)$$

On a $x_k \in B_{n_k}^{\oplus n_k} = A$, et cette suite converge vers x. Donc $x \in A$, et $C_o \subset A$.

Les relations $C_o \subset A \subset C_A = C_o$ que nous avons établies montrent que l'on a $A = C_A$, ce qui démontre la convexité de A. (Remarque : les B_n par contre, ne sont pas obligatoirement convexes, mais on peut toujours les remplacer par leurs enveloppes convexes C_n qui vérifient $n\ C_n = A$).

<u>Corollaire</u>. <u>Dans ($\mathfrak{K}$), tout demi-groupe continu à un paramètre est formé des homothétiques λB, $\lambda \geqslant 0$, d'un compact convexe $B \in C(\mathfrak{K})$</u>.

On a déjà vu que les λB, pour $B \in C(\mathfrak{K})$, forment un demi-groupe continu. Réciproquement, soit B_λ, $\lambda \geqslant 0$, une famille vérifiant la relation des demi-groupes $B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu}$. Cette relation donne $B_\lambda = (B_{\frac{\lambda}{n}})^{\oplus n}$ donc B_λ est indéfiniment divisible, et les B_λ sont tous convexes, d'après le théorème. Pour n et k entiers, la relation des demi-groupes donne alors :
$B_\lambda = n\ B_{\frac{\lambda}{n}} = \frac{n}{k}\ B_{\frac{k\lambda}{n}}$. Si le demi-groupe est de plus continu, il

en résulte $\mu B_\lambda = B_{\lambda\mu}$ pour tout réel $\mu \geqslant 0$, et, pour $\lambda = 1$, celà donne $B_\mu = \mu B_1$, ce qui démontre le corollaire.

3°/ LE PREORDRE $\succ$ (B EST PLUS SYMETRIQUE QUE B') DANS $C(\mathcal{K})$

Nous dirons que B est plus symétrique que B' dans $C(\mathcal{K})$, et nous poserons $B \succ B'$, s'il existe un $\lambda \in [0,1]$ tel que B soit égal, à une translation près, à $\lambda B' \oplus (1-\lambda) \check{B}'$. Désignons par τ l'équivalence de translation ($B \tau C$ si B est égal à C à une translation près). Ainsi :

$$B \succ B' \Longleftrightarrow B\tau\ (\lambda B' \oplus (1-\lambda)\ \check{B}') \qquad (\lambda \in [0,1])$$

On vérifie sans peine que la relation $\succ$ est reflexive et transitive : c'est un préordre. Nous désignerons par $\equiv$ l'équivalence associée au préordre $\succ$ ($B \equiv B'$ si $B \succ B'$ et $B' \succ B$), et nous dirons que B et B' ont même symétrie si $B \equiv B'$.

PROPOSITION 3 - Deux éléments B et B' ont même symétrie dans $C(\mathcal{K})$ si et seulement si ils sont égaux à une translation et à une transposition près, autrement dit :

$$B \equiv B' \Longleftrightarrow B\ \tau\ B' \quad \text{ou} \quad \check{B}\ \tau\ B'$$

Pour démontrer la proposition, posons d'abord un lemme :

LEMME 1 - Pour $B \in \mathcal{K}$, $B' \in C(\mathcal{K})$ et $\lambda \notin [0,1]$, la relation $B = \lambda B \oplus (1-\lambda) B'$ entraine $\lambda = 1$ ou $B = B'$.

En effet, supposons $\lambda < 1$. Montrons d'abord $B \subset B'$. Soit $\beta \in B$. Formons par récurrence les représentations $\beta = \lambda b_1 + (1-\lambda)b'_1$ et $b_{n-1} = \lambda b_n + (1-\lambda)b'_n$ avec $b_i \in B$ et $b'_i \in B'$. On en déduit $\beta = \lambda^n b_n + \beta'_n$ avec $b_n \in B$ et $\beta'_n = (1-\lambda)b'_1 + (1-\lambda)\lambda b'_2 + \ldots + \lambda^{n-1}(1-\lambda)\, b'_n$.

B' étant convexe, on a $\beta'_n \in (1-\lambda^n)B'$. Comme B et B' sont compacts, $\lambda^n b_n$ tend vers 0 pour $n \to \infty$, et β'_n converge vers un élément de B'. On a donc $\beta \in B'$, et $B \subset B'$.

Montrons maintenant $B' \subset B$. Soit $b' \in B'$, et β un élément arbitraire de B. On a $\lambda\beta + (1-\lambda)b' \in B$, d'où aussi :

$$\lambda[\lambda\beta + (1-\lambda)\, b'] + (1-\lambda)b' = \lambda^2\beta + (1-\lambda^2)\, b' \in B$$

et par récurrence $\lambda^n\beta + (1-\lambda^n)b' \in B$ pour n entier. Lorsque n tend vers l'infini, $\lambda^n\beta$ tend vers 0, puisque B est compact, et $(1-\lambda^n)\, b'$ converge vers b'. On a donc $b' \in B$, et $B' \subset B$: le lemme est démontré.

Démontrons maintenant la proposition 3. Si $B \equiv B'$, on peut trouver deux nombres λ et μ dans $[0,1]$ avec :

$$B\ \tau(\lambda\, B' \oplus (1-\lambda)\, \check{B}'\,)\ , \qquad B'\ \tau\ (\mu\, B \oplus (1-\mu)\, \check{B}\,)$$

On en déduit :

$$B = (\mu\,\lambda + (1-\mu)(1-\lambda)\,)\, B \oplus (\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda))\, \check{B} \oplus \{h\}$$

pour un $h \in \mathbb{R}^n$. Le lemme montre que l'on a : ou bien $B = \check{B}$ à une translation près, c'est-à-dire $B \,\tau\, \check{B}$, d'où résulte aussitôt $B' \,\tau\, B$; ou bien $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) = 0$: dans ce dernier cas on a soit $\lambda = \mu = 0$, et $B' \,\tau\, \check{B}$, soit $\lambda = \mu = 1$, et $B' \,\tau\, B$.

PROPOSITION 4 - La relation $\succ$ est fermée dans $C(\mathcal{K})$, autrement dit, si deux suites B_n et C_n convergent vers B et C dans $C(\mathcal{K})$ en vérifiant $B_n \succ C_n$ pour tout n, on a $B \succ C$.

En effet, pour tout n il existe alors $\lambda_n \in [0,1]$ et un vecteur h_n tels que $B_n = \lambda_n C_n \oplus (1-\lambda_n) \check{C}_n \oplus \{h_n\}$. D'après la condition 1 de convergence, les B_n et les C_n sont contenus dans un compact fixe K, et l'on peut toujours supposer $K = \check{K}$ et K convexe. Dans ces conditions, on a aussi :

$$\lambda_n C_n \oplus (1-\lambda) \check{C}_n \subset \lambda_n K \oplus (1-\lambda_n) \check{K} = K$$

c'est-à-dire $B_n \oplus \{-h_n\} \subset K$. On en déduit $h_n \in 2K$. On peut donc extraire de $\{h_n\}$ une suite partielle h_{n_k} convergeant vers un élément h de $\mathbb{R}^n$, puis, de la suite λ_{n_k}, extraire une suite partielle convergeant vers $\lambda \in [0,1]$. Il suffit ensuite d'appliquer la Prop. 1 pour obtenir $B = \lambda C \oplus (1-\lambda) \check{C} \oplus \{h\}$, c'est-à-dire $B \succ C$.

PROPOSITION 5 - Tout élément $B \in C(\mathcal{K})$ admet un plus grand majorant pour $\succ$ à savoir son symétrisé $\frac{1}{2} B \oplus \frac{1}{2} \check{B}$. L'ensemble des éléments maximaux pour $\succ$ coïncide avec l'ensemble des éléments symétriques (déf. : A est symétrique si $A \,\tau\, \check{A}$)

$A = \frac{1}{2} B \oplus \frac{1}{2} \check{B}$ est plus symétrique que B par définition. Si $B' \in C(\mathcal{K})$ est un élément plus symétrique que B, on a $B' \tau (\lambda B \oplus (1-\lambda) \check{B})$ pour un $\lambda \in [0,1]$. $B' \oplus \check{B}'$ est équivalent à $\lambda B \oplus (1-\lambda) \check{B} \oplus \lambda \check{B} \oplus (1-\lambda) B = B \oplus \check{B} = 2 A$ d'où $A \succ B'$, et A est bien le plus grand majorant de B. Tout majorant A' d'un éléments A symétrique vérifie donc $A' \succ A$ et $A \succ A'$, c'est-à-dire $A \equiv A'$ et A est maximal pour $\succ$. Inversement, si A est maximal pour $\succ$, il est équivalent à son symétrisé, donc est lui-même symétrique.

<u>THEOREME 2 - Tout élément non symétrique $B \in C(\mathcal{K})$ admet pour $\succ$ un plus petit minorant M dans $C(\mathcal{K})$ (unique à une équivalence près). M est minimal pour $\succ$ dans $C(\mathcal{K})$. L'ensemble $\mathcal{C}_B$ des minorants de B constitue une chaine</u> (ensemble totalement préordonné pour $\succ$) <u>fermée dans $C(\mathcal{K})$</u>

Montrons d'abord que l'ensemble $\mathcal{C}_B$ des éléments moins symétriques que B est totalement préordonné. Soient C et $C' \in \mathcal{C}_B$ deux minorants de B. On a donc des équivalences de la forme :

$$B \equiv \lambda' \, C \oplus (1-\lambda') \, \check{C} \, , \quad B \equiv \mu' \, C' \oplus (1-\mu') \, \check{C}', \; \lambda', \mu' \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

Si $A = \frac{1}{2} B \oplus \frac{1}{2} \check{B}$ désigne le symétrisé de B, on en déduit :

$$B \equiv \lambda \, A \oplus (1-\lambda) \, C \equiv \mu \, A \oplus (1-\mu) \, C' \quad (\lambda = 2\lambda' - 1 \text{ et } \mu = 2\mu' - 1 \in [0,1]$$

Supposons, par exemple $\lambda \leq \mu$. Comme A, C et C' sont convexes et compacts, la propriété rappelée à la fin du premier paragraphe entraine :

$$B \ominus \lambda \, \check{A} \equiv (1-\lambda) C \equiv (1-\mu) C' \oplus (\mu - \lambda) \, A$$

Mais $\lambda < 1$, puisque B n'est pas symétrique. On a donc :

$$C \equiv \frac{1-\mu}{1-\lambda} \, C' \oplus \frac{\mu-\lambda}{1-\lambda} \, A = \frac{2-\mu-\lambda}{2(1-\lambda)} \, C' \oplus \frac{\mu-\lambda}{2(1-\lambda)} \, \check{C}'$$

et par suite $C \succ C'$: $\mathcal{C}_B$ est donc une <u>chaine</u>. La proposition 4 montre immédiatement que $\mathcal{C}_B$ est fermé dans $C(\mathcal{K})$.

Il reste à vérifier que B admet un plus petit minorant $M \in \mathcal{C}_B$ (qui sera par le fait même un élément minimal pour $\succ$ dans $C(\mathcal{K})$). Considérons pour celà le sous-ensemble $\mathcal{C}_B^o \subset \mathcal{C}_B$ des éléments $C \in \mathcal{C}_B$ contenant l'origine O : le saturé de $\mathcal{C}_B^o$ pour l'équivalence de translation τ coïncide avec $\mathcal{C}_B$, et il suffit donc de montrer que $\mathcal{C}_B^o$ contient un plus petit élément (unique à une équivalence $\equiv$ près). Les relations :

$$0 \in C \, , \; B = \lambda \, C \oplus (1-\lambda) \, \check{C} \oplus \{h\}, \quad h \in \mathbb{R}^n, \; \lambda \in [0,1]$$

(équivalentes à $C \in \mathcal{C}_B^o$) entrainent $B \oplus \check{B} = C \oplus \check{C} = 2\,A$, et $C \subset 2\,A$.

Mais dire que tout $C \in \mathcal{C}_B^o$ est contenu dans le compact fixe $\supseteq A$ signifie que $\mathcal{C}_B^o$ est relativement compact pour la topologie myope. L'ensemble $\mathcal{C}_B^o$ filtrant pour $\succ$ admet donc dans $C(\mathcal{K})$ une valeur d'adhérence M. Pour tout $C \in \mathcal{C}_B^o$, on peut alors trouver une suite C_n dans $\mathcal{C}_B^o$ vérifiant $C \succ C_n$ et convergeant vers M dans $C(\mathcal{K})$. La Prop. 4 donne ensuite $C \succ M$, ce qui entraine $M \in \mathcal{C}_B^o$, et montre que M est le plus petit minorant de B dans $\mathcal{C}_B^o$ (donc aussi dans le saturé de $\mathcal{C}_B^o$ pour $\equiv$, qui est $\mathcal{C}_B$).

<u>COROLLAIRE - Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des éléments de $C(\mathcal{K})$ minimaux pour $\succ$. Tout $B \in C(\mathcal{K})$ non symétrique admet une représentation nécessairement unique (à une équivalence près) de la forme</u> :

$$B \equiv \lambda\, M \oplus (1-\lambda)\, \check{M}, \quad M \in \mathcal{M} \quad , \quad \lambda \in [0,1], \quad \lambda \neq \frac{1}{2}$$

<u>où M est le plus petit minorant de B. Un élément symétrique $A \in C(\mathcal{K})$ admet toujours au moins une représentation de cette forme, mais cette représentation n'est plus nécessairement unique</u> (sauf si $A \equiv M$ est lui-même minimal, et dans ce cas, $\lambda = \frac{1}{2}$)

Pour tout élément minimal $M \in \mathcal{M}$, appelons <u>diamètre</u> $(M, \check{M})$ de $C(\mathcal{K})$ le saturé pour $\equiv$ de l'enveloppe convexe (au sens de Minkowski) de $\{M, \check{M}\}$ dans $C(\mathcal{K})$, c'est-à-dire la famille :

$$(M, \check{M}) = \{B_\lambda \equiv \lambda\, M \oplus (1-\lambda)\, \check{M},\ \lambda \in [0,\ 1]\} \qquad (M \in \mathcal{M})$$

En particulier, si $M \in \mathcal{M}$ est symétrique, $(M \,\tau\, \check{M})$, le diamètre $(M, \check{M})$ se réduit à la classe modulo τ de l'élément symétrique M. La proposition suivante présente sous une autre forme les résultats précédents :

PROPOSITION 6 - L'espace $C(\mathcal{K})$ est réunion de ses diamètres $(M, \check{M})$, $M \in \mathcal{M}$ - Tout diamètre est fermé, convexe au sens de Minkowski, totalement préordonné pour $\succ$ et contient un plus petit élément (M lui-même) et un plus grand élément (le symétrisé $\frac{1}{2} M \oplus \frac{1}{2} \check{M}$) uniques à une équivalence $\equiv$ près. Enfin, si deux diamètres sont distincts, leur intersection est vide ou réduite à la classe modulo $\equiv$ d'un unique élément nécessairement symétrique.

4°/ L'EQUATION $B \oplus \check{B} = 2\ A$

Cette équation n'admet évidemment de solutions que si $A = \check{A}$, ce que nous supposerons toujours : A lui-même est alors une solution, ainsi que ses translatés. D'après le paragraphe précédent, l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des solutions est composé des éléments B moins symétrique que A (vérifiant $A \succ B$). On vérifie sans peine que $\mathcal{C}_A$ est stable pour les translations et les transpositions (saturé pour $\equiv$), convexe au sens de Minkowski, et fermé dans $C(\mathcal{K})$. D'après la Proposition 6, on voit que l'ensemble $\mathcal{C}_A$ des solutions est la réunion des diamètres $(M, \check{M})$ passant par A, et que toute solution non symétrique (c'est-à-dire non équivalente à A) appartient à un et à un seul de ces diamètres. En général, il existe plusieurs, et même une infinité de diamètres distincts passant par A : l'ensemble des solutions n'est pas totalement préordonné, et contient en général une infinité d'éléments minimaux $M \in \mathcal{M}$ minorant A. Vérifions le dans le cas de l'espace euclidien à deux dimensions.

Cas de l'espace à deux dimensions.

Dans le plan, un ensemble convexe compact B est caractérisé, à une translation près, par la mesure $s(d\alpha)$ dont l'intégrale donne l'abscisse curviligne $s(\alpha)$ des points de la frontière de B en fonction de la direction α de la normale positive. La mesure $s(d\alpha)$

doit être positive et vérifier la condition :

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} e^{i\alpha} \, s(d\alpha) = 0$$

qui exprime que le contour de B est fermé. Inversement, à toute mesure positive $s(d\alpha)$ sur le cercle unité vérifiant la condition (1) correspond un et un seul élément $B \in C(\mathfrak{K})$ à une translation près. On peut donc identifier l'espace quotient $C(\mathfrak{K})/\tau$ à l'espace des mesures positives sur le cercle unité vérifiant la condition (1), et, en particulier, munir $C(\mathfrak{K})/\tau$ de la topologie vague, qui est compacte (puisque, le cercle unité étant compact, la condition (1) définit un sous-espace compact de l'espace des mesures à support sur le cercle unité). De même, on voit que le sous-espace de $C(\mathfrak{K})/\tau$ constitué des mesures s admettant un périmètre $2\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} s(d\alpha)$ donné est vaguement compact.

Si s est une mesure discrète concentrée en n points, B est un polygone convexe à n côtés. Il en résulte, en particulier, que l'ensemble des polygones convexes est vaguement dense dans $C(\mathfrak{K})/\tau$. Si, au contraire, la mesure s est absolument continue, sa densité $R(\alpha)$ est le rayon de courbure.

On vérifie sans peine que l'addition de Minkowski et l'homothétie ont pour images l'addition ordinaire des mesures $s(d\alpha)$ et la multiplication par un scalaire (positif) : si s et s' sont les mesures associées à B et à $B' \in C(\mathfrak{K})/\tau$, et λ un réel positif, les mesures associées à $B \oplus B'$ et à λB sont $s + s'$ et λs. En particulier, l'addition de Minkowski et l'homothétie sont des opérations vaguement continues.

Les deux fonctionnelles de Minkowski, (l'aire S et le périmètre $2\mathcal{L}$) s'expriment en fonction de la mesure s associée à

$B \in C(\mathcal{K})/\tau$: on trouve :

$$S(B) = \int_0^{2\pi} \sin\alpha \; s(d\alpha) \int_0^{\alpha} \sin\beta \; s(d\beta) = \int_0^{2\pi} \cos\alpha \; s(d\alpha) \int_0^{\alpha} \cos\beta \; s(d\beta).$$

$$2\mathcal{L}(B) = \int_0^{2\pi} s(d\alpha)$$

(les deux expressions de $S(B)$ sont compatibles à cause de la condition (1)). La fonctionnelle $2\mathcal{L}$ est linéaire et vaguement continue. S est quadratique, et on vérifie (en raisonnant sur la mesure produit $s(d\alpha) \otimes s(d\beta)$ portée par l'espace compact $[0,2\pi]^2$) que S est, elle aussi, vaguement continue.

<u>Le préordre</u> $\succ$: la relation $B \succ C$ se traduit par :

(2) $$s_B(d\alpha) = \lambda \; s_c(d\alpha) + (1-\lambda) \; s_c(\pi+d\alpha) \; . \; (\lambda \in [0,1])$$

(On en déduit aussitôt que deux éléments comparables ont le même périmètre). Inversement, cherchons à quelles conditions un $B \in C(\mathcal{K})$ donné, défini par sa mesure s_B, admet un minorant C, défini par sa mesure s_c. Adjoignons à (2) l'équation relative au transposé B, qui est :

(2') $$s_B(\pi+d\alpha) = \lambda \; s_c(\pi+d\alpha) + (1-\lambda) \; s_c(d\alpha)$$

De (2) et (2') résulte alors :

(3) $$(2\lambda-1) \; s_c(d\alpha) = \lambda \; s_B(d\alpha) - (1-\lambda) \; s_B(\pi+d\alpha)$$

On peut toujours supposer $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ (quitte à remplacer B ou C par son transposé). Distinguons deux cas :

<u>a/ B n'est pas symétrique</u>. ($s_B(d\alpha) \neq s_B(\pi+d\alpha)$). Pour $\lambda > \frac{1}{2}$ la formule (3) détermine la mesure s_c : s_c vérifie la condition (1) en même temps que s_B, et il existe effectivement un minorant $C \prec B$ associé à s_c pourvu seulement que la mesure s_c soit positive, c'est-à-dire que l'on ait pour tout $\alpha \in [0,2\pi]$:

$$s_B(d_\alpha) \geqslant \frac{1-\lambda}{\lambda} s_B(\pi+d\alpha)$$

On retrouve ainsi le fait que les minorants de B constituent une chaine et l'existence du plus petit minorant.

<u>b/ B est symétrique</u>. Pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$, la seule solution possible de (3) est $s_c = s_B$. Mais, pour $\lambda = \frac{1}{2}$, le premier membre de (3) s'annule, et s_c n'est plus déterminée. Examinons donc directement à quelles conditions l'équation (2), qui s'écrit ici :

$$(2'') \qquad s_B(d\alpha) = \frac{1}{2}\left(s_c(d\alpha) + s_c(\pi+d\alpha)\right)$$

admet des solutions acceptables. B étant symétrique, on à $s_B(d\alpha) = s_B(\pi+d\alpha)$, et, d'après (2"), la mesure s_c est obligatoirement de la forme :

$$(3') \qquad s_c(d\alpha) = s_B(d\alpha) + \eta(d\alpha)$$

avec une mesure η vérifiant :

$$(4) \qquad \eta(\pi+d\alpha) = -\eta(d\alpha)$$

Inversement, pour une mesure η donnée, la mesure s_c définie par (3') convient si et seulement si elle est positive et vérifie (1) : on aura donc autant de minorants de B que l'on pourra trouver de mesures η vérifiant (4) et les deux conditions :

$$(4') \qquad \int_0^{\pi} e^{i\alpha}\, \eta(d\alpha) = 0$$

$$(4'') \qquad |\eta| \leqslant s_B$$

Par exemple, supposons que B admette un rayon de courbure $R_B(\alpha)$, c'est-à-dire $s_B(d\alpha) = R_B(\alpha)\, d\alpha$, et supposons aussi qu'il existe $b > 0$ avec $b < \text{Inf}\{R_B(\alpha),\ \alpha \in [0,2\pi]\}$. D'après (4''), la mesure η admet nécessairement une densité $\eta(\alpha)$ avec $|\eta(\alpha)| \leqq R_B(\alpha)$. Si l'on prend alors :

$$\eta(\alpha) = b \sin(2k+1)\alpha, \quad \text{ou } \eta(\alpha) = b\cos(2k+1)\alpha$$

(k entier positif), la mesure $\eta(\alpha)\, d\alpha$ vérifie (4), (4') et (4''), et l'ensemble convexe C défini par son rayon de courbure :

$$R_C(d\alpha) = R_B(\alpha) + b\cos(2k+1)\alpha \qquad (\text{ou } +b \sin(2k+1)\alpha)$$

vérifiera bien $C \oplus \check{C} = 2\, B$. Comme les différentes solutions correspondant à k =1, 2, ... sont linéairement indépendantes, les ensembles C ainsi obtenus ne seront pas comparables entre eux : il existe donc effectivement une infinité de diamètres de $C(\mathcal{K})$ passant par un élément symétrique B.

<u>Exemple : les minorants du disque unité</u>.

Si B est le disque de rayon unité, défini par son rayon de courbure constant $R_B(\alpha) = 1$, les solutions C de $C \oplus \check{C} = 2\, B$ correspondant à des mesures $\eta(\alpha)\, d\alpha$ dont les densités $\eta(\alpha)$ sont de la forme :

$$\eta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2k+1)\alpha + b_k \sin(2k+1)\alpha]$$

vérifiant donc (4') et (4), et sont de plus soumises à la condition (4") ; qui s'écrit ici :

$$|\eta(\alpha)| \leqslant 1$$

Il est facile de construire effectivement cet ensemble C en coordonnées cartésiennes : il suffit de résoudre les équations :

$$\frac{dx}{d\alpha} = - [1 + \eta(\alpha)] \sin \alpha \quad , \quad \frac{dy}{d\alpha} = [1 + \eta(\alpha)] \cos \alpha$$

Par exemple, en prenant $\eta(\alpha) = a \cos 3\alpha$, $|a| \leqslant 1$, on obtient un minorant particulier du disque, dont le contour a pour équations :

$$x(\alpha) = \cos \alpha + \frac{a}{4} \cos 2 \alpha (1 - \cos 2 \alpha)$$

$$y(\alpha) = \sin \alpha + \frac{a}{4} \sin 2 \alpha (1 + \cos 2 \alpha)$$

et qui présente l'allure suivante :