

L'ESPACE VECTORIEL DE MINKOWSKI

1 -	<u>Le cône convexe \mathcal{R}</u>	1
	<u>Proposition 1</u> (caractérisation de \mathcal{R})	2
2 -	<u>L'espace vectoriel topologique $M_c \subset \mathcal{C}(S)$</u>	3
	<u>Lemme 1</u> ($\mathcal{C}_2(S) \subset M$)	4
	<u>Proposition 2</u> (M_c est dense mais non fermé dans $\mathcal{C}(S)$)	8
3 -	<u>Caractérisation de \mathcal{R} par des mesures de Radon</u>	9
	Exemples de mesures $\lambda \in \mathcal{R}^*$ non positives	10
	<u>Proposition 3</u> (fonctionnelles positivement linéaires croissantes et continues sur \mathcal{R})	12
4 -	<u>L'espace M de Minkowski ordonné par le cône convexe \mathcal{R}</u>	13
	<u>Proposition 4</u> (le cône \mathcal{R} n'est pas réticulé pour son ordre propre)	13
5 -	<u>L'espace préhilbertien $M_L \subset L^2(S)$</u>	14
	<u>Proposition 5</u> (coïncidence sur \mathcal{R} des 3 topologies)	16
	<u>Proposition 6</u> (M_L est dense mais non fermé dans $L^2(S)$)	17
6 -	<u>Applications</u>	18
	Norme centrée	19
	Indice de symétrie propre	20
	Indices d'ellipticité et de sphéricité	20
7 -	<u>Caractérisation des convexes aléatoires invariants par érosion</u>	21
	a/ Relation des demi-groupes	21
	b/ Exemple des polyèdres poissoniens	22
	c/ Continuité de $P(B)$ pour la topologie myope	23
	d/ La fonctionnelle $\Psi(B)$ sur $C_0(\mathcal{K})$	24
	<u>Proposition 7</u> (un convexe aléatoire est invariant par érosion si et seulement si c'est un polyèdre poissonien)	25

L'ESPACE VECTORIEL M DE MINKOWSKI

Je me propose, dans ce qui suit, d'identifier l'espace localement compact $C_0(\mathcal{K})$ des convexes compacts de \mathbb{R}^n contenant l'origine 0 à un cône \mathcal{R} convexe à base compacte d'un espace vectoriel topologique : il y a même deux manières de procéder à cette identification, selon que l'on choisit comme espace vectoriel topologique $\mathcal{C}(S)$ (fonctions continues sur la sphère unité S de \mathbb{R}^n muni de la topologie de la convergence uniforme) ou l'espace de Hilbert $L^2(S)$ - Dans une dernière partie, j'utiliserai ces résultats pour démontrer que les seuls ensembles aléatoires convexes conditionnellement invariants par érosion sont les polyèdres poissoniens.

1 - Le Cône convexe \mathcal{R}

A tout compact convexe $A \in C_0(\mathcal{K})$ nous pouvons associer la fonction r_A définie sur la sphère unité S , représentant le rayon vecteur $r_A(\omega)$ de la podaire de A pour chaque direction $\omega \in S$. C'est une fonction continue positive sur S , soit $r_A \in \mathcal{C}_+(S)$. Nous désignerons par \mathcal{R} l'image de $C_0(\mathcal{K})$ dans $\mathcal{C}(S)$ pour cette application $A \rightarrow r_A$. Il est clair que cette application est bijective et constitue un isomorphisme pour $C_0(\mathcal{K})$ muni de l'addition de Minkowski et \mathcal{R} muni de l'addition ordinaire ($A \oplus A'$ a pour image $r_A + r_{A'}$), et aussi pour la multiplication par les scalaires positifs ($\lambda A \rightarrow \lambda r_A$ si $\lambda \geq 0$). \mathcal{R} est donc un cône convexe, comme $C_0(\mathcal{K})$.

D'autre part, $C_0(\mathcal{K})$ est un espace localement compact pour la topologie myope (identique à la topologie engendrée par la métrique de Hausdorff). Cherchons l'image dans \mathcal{R} de cette topologie. Si $d(A, B)$ est la distance de deux compacts A et A' dans $C_0(\mathcal{K})$, on a :

$$d(A, A') \leq \varepsilon \iff A \subset A' \oplus B_\varepsilon \quad \text{et} \quad A' \subset A \oplus B_\varepsilon$$

B_ε désignant la boule de centre 0 et de rayon ε . Mais cela équivaut à :

$$\sup_{\omega \in S} |r_A(\omega) - r_{A'}(\omega)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, la topologie myope sur \mathcal{R} coïncide avec la topologie induite par la topologie de la convergence uniforme sur $\mathcal{C}(S)$. Pour cette topologie, \mathcal{R} est localement compact, et constitue donc un cône convexe fermé à base compacte.

Caractérisation de \mathcal{R} - Nous désignerons par (ω_1, ω_2) l'angle φ de deux directions ω_1 et ω_2 dans \mathbb{R}^n , et par $\cos(\omega_1, \omega_2)_+$ la fonction égale à $\cos\varphi$ si $\cos\varphi \geq 0$ et à 0 si $\cos\varphi \leq 0$.

Proposition 1 - Toute fonction $r \in \mathcal{R}$ admet une représentation de la forme :

$$(1) \quad r(\omega) = \sup_{i \in I} r_i \cos(\omega, \omega_i)_+ \quad \sup_i r_i < \infty$$

pour une famille $(r_i, \omega_i)_{i \in I}$, $r_i \in \mathbb{R}_+$, $\omega_i \in S$, et un ensemble d'indices I que l'on peut toujours supposer dénombrable - et inversement toute fonction de cette forme est dans \mathcal{R}

En effet, si $A_j, j \in J$ est une famille d'éléments de $C_0(X)$, la fonction $\text{Sup}_{j \in J} r_{A_j}$ représente la podaire de l'enveloppe convexe fermée de la réunion des A_j . Comme $\cos(\omega, \omega_i)_+$ représente la podaire d'un segment unité d'origine 0 et de direction ω_i , toute fonction de la forme (1) est dans \mathcal{R} . Inversement, d'après le théorème de Krein et Millmann, tout convexe compact A est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux, donc r_A admet une représentation de type (1), (r_i, ω_i) désignant les coordonnées polaires de ces points extrémaux. Il suffit d'ailleurs de se limiter à une famille $(r_i, \omega_i), i \in I$ constituant une partie dénombrable dense dans l'ensemble des points extrémaux de A .

Corollaire. Le cône convexe \mathcal{R} est un demi-treillis complet pour Sup

2 - L'espace vectoriel topologique $M_c \subset \mathcal{C}(S)$

Désignons maintenant par M l'espace vectoriel engendré par \mathcal{R} , ou espace vectoriel de Minkowski : M est l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(S)$ de la forme $f = r - r'$ avec r et r' dans \mathcal{R} . C'est donc un sous-espace vectoriel (algébrique) de $\mathcal{C}(S)$. Nous désignerons par M_c l'espace de Minkowski muni de la topologie induite par la convergence uniforme : M_c est donc un sous-espace (topologique) de $\mathcal{C}(S)$. (Nous aurons l'occasion de munir M d'autres topologies). Bien que \mathcal{R} soit fermé dans $\mathcal{C}(S)$, nous allons voir que M_c est dense mais non fermé dans $\mathcal{C}(S)$. Posons d'abord un lemme important, qui nous sera utile par la suite. Nous désignerons par $\mathcal{C}_2(S)$ l'espace des fonctions deux fois continument différentiables sur la sphère unité muni de sa topologie habituelle

(une suite f_n converge vers f dans $\mathcal{C}_2(S)$ si f_n et ses deux premières différentielles convergent uniformément vers f et les différentielles correspondantes).

Lemme 1 - Pour tout $f \in \mathcal{C}_2(S)$, on peut trouver une constante C telle que $r = f + C \in \mathbb{R}$. De plus, la constante $C = C(f)$ peut être choisie de manière à constituer une fonction continue de f pour la topologie de $\mathcal{C}_2(S)$.

Donnons d'abord la démonstration dans le cas élémentaire de l'espace à 2 dimensions. S est ici le cercle unité, et les $\omega \in S$ sont repérés par leur angle polaire $\omega \in [0, 2\pi]$. On vérifie sans peine qu'une fonction $r \in \mathcal{C}_2(S)$ est dans \mathbb{R} si et seulement si elle vérifie :

$$r + r'' \geq 0$$

Si donc f est une fonction de $\mathcal{C}_2(S)$, il suffit de prendre :

$$C = C(f) = - \inf_{\omega \in S} (f(\omega) + f''(\omega))$$

pour avoir $f + C \in \mathbb{R}$. La continuité de $C(f)$ dans $\mathcal{C}_2(S)$ résulte ensuite de :

$$- \inf (f + f'') \leq \sup |f| + \sup |f''|$$

Dans le cas général de l'espace \mathbb{R}^n ($n > 2$), la démonstration reste substantiellement la même, bien que la simplicité en soit masquée par quelques complications d'écritures.

Soit x^i (i et tout indice latin = 1, 2, ... n) les coordonnées contravariantes d'un point de \mathbb{R}^n dans une base e_i dont le tenseur fondamental est $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, et soit u_i les coordonnées covariantes d'un point $\omega \in S$.

Soit maintenant $y^\alpha = y^\alpha(u^i)$ (α et tout indice grec = 1, 2, ... n-1) un système local de coordonnées sur la sphère unité utilisable sur un voisinage d'un point ω_0 : la sphère entière est couverte par un nombre fini de tels voisinages. Soit enfin f une fonction de $\mathcal{C}_2(S)$. Cherchons l'enveloppe dans \mathbb{R}^n du plan d'équation $u_i x^i = f(\omega)$.

Au voisinage de ω_0 , u_i et f sont des fonctions des y^α , et les coordonnées x^i du point de contact s'obtiennent en résolvant le système :

$$(a) \quad \begin{cases} u_i x^i = f \\ x^i \partial_\alpha u_i = \partial_\alpha f \end{cases}$$

Pour résoudre ce système (a), notons que dans \mathbb{R}^n , x^i est de la forme :

$$x^i = f u^i + h^i$$

avec un vecteur h^i vérifiant :

$$(b) \quad \begin{cases} u_i h^i = 0 \\ h^i \partial_\alpha u_i = \partial_\alpha f \end{cases}$$

La première relation indique que h^i est de la forme :

$$h^i = g^{ij} t^\beta \partial_\beta u_j$$

En substituant dans la seconde relation (b), on obtient :

$$t^\beta g^{ij} \partial_\alpha u_i \partial_\beta u_j = \partial_\alpha f$$

Mais le tenseur métrique de la sphère unité S est justement :

$$\gamma_{\alpha\beta} = g^{ij} \partial_\alpha u_i \partial_\beta u_j$$

Par suite, on a $t^\beta \gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha f$, c'est-à-dire :

$$t^\beta = \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha f$$

et finalement :

$$(c) \quad x^i = f u^i + g^{ij} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta u_j$$

Le graphe de x^i est convexe si et seulement si $u_i \delta x^i \leq 0$ au deuxième ordre en δy pour toute variation des y^α , De $\delta f = \delta(u_i x^i)$, on tire :

$$u_i \delta x^i = \delta f - x_i \delta u^i - \delta x^i \delta u_i =$$

$$dy^\alpha dy^\beta \left(\frac{1}{2} \partial_{\alpha\beta} f - \frac{1}{2} x^i \partial_{\alpha\beta} u_i - \partial_\alpha u_i \partial_\beta x^i \right)$$

Mais en différentiant (a), on a aussi :

$$\partial_{\alpha\beta} f = \partial_\beta x^i \partial_\alpha u_i + x^i \partial_{\alpha\beta} u_i$$

d'où finalement :

$$- u_i \delta x_i = \frac{1}{2} dy^\alpha dy^\beta \partial_\beta x^i \partial_\alpha u_i = \frac{1}{2} dx_i du^i$$

Evaluons donc $dx_i du^i$ en tenant compte des relations :

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i du^i = 0 \\ \nabla_{\alpha\beta} u^i + \gamma_{\alpha\beta} u^i = 0 \end{array} \right.$$

qui expriment : la première que u^i est un vecteur unitaire de \mathbb{R}^n ; la seconde, que S est une sphère de rayon unité (∇ est le symbole habituel de dérivation covariante). Partons de :

$$dx^i = f du^i + u^i df + dh^i$$

Compte tenu de (d), on aura :

$$du_i dx^i = f du_i du^i + du_i dh^i$$

Mais $h^i = t^\beta \partial_\beta u^i$ et :

$$dh^i = dt^\beta \partial_\beta u^i + t^\beta \nabla_{\alpha\beta} u^i dy^\alpha$$

et, compte tenu de (d) :

$$dh^i = dt^\beta \partial_\beta u^i - u^i \gamma_{\alpha\beta} t^\beta dy^\alpha$$

puis :

$$du_i dh^i = dt^\beta du_i \partial_\beta u^i$$

Or $t^\beta = \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha f$, d'où $dt^\beta = \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\delta} f dy^\delta$, et :

$$\begin{aligned} du_i dh^i &= \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\delta} f \partial_\epsilon u_i \partial_\beta u^i dy^\delta dy^\epsilon \\ &= \gamma^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha\delta} f \gamma_{\epsilon\beta} dy^\delta dy^\epsilon = \nabla_{\alpha\delta} f dy^\delta dy^\alpha \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(e) \quad \frac{1}{2} dx^i du_i = \frac{1}{2} dy^\alpha dy^\beta (f \gamma_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} f)$$

Cette relation (e) généralise exactement l'expression $\frac{1}{2}(r + r'')$ obtenue dans le cas à deux dimensions, et le raisonnement se poursuit comme dans ce cas simple : on peut toujours trouver une constante C telle que le tenseur :

$$(f(\omega) + C) \gamma_{\alpha\beta}(\omega) + \nabla_{\alpha\beta} f(\omega)$$

soit défini positif sur S, et la plus petite constante $C = C(f)$ telle que ceci soit réalisé sera une fonction continue de f pour la norme :

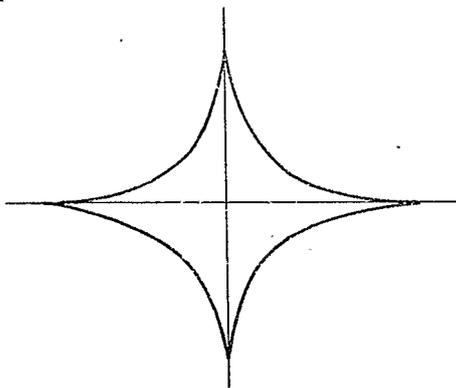
$$\text{Sup} (f(\omega)^2 + \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f + \gamma^{\alpha\alpha'} \gamma^{\beta\beta'} \nabla_{\alpha\beta} f \nabla_{\alpha'\beta'} f)$$

De ce lemme nous allons déduire certains résultats concernant l'espace de Minkowski.

Proposition 2 - L'espace de Minkowski M_c est dense mais non fermé dans $\mathcal{C}(S)$

En effet, d'après le lemme, M_c contient $\mathcal{C}_2(S)$ qui est déjà dense dans $\mathcal{C}(S)$ pour la topologie de la convergence uniforme. Mais l'inclusion $M_c \subset \mathcal{C}(S)$ est stricte, et M_c n'est donc pas fermé dans $\mathcal{C}(S)$. En effet, toute fonction $r \in \mathcal{R}$ possède en tout point sur la sphère S des dérivées directionnelles finies (par exemple, sur le cercle, une dérivée à droite et une dérivée à gauche) et toute $f \in M_c$ possède donc la même propriété : mais $\mathcal{C}(S)$ contient des fonctions qui ne vérifient pas cette propriété,

par exemple, dans le plan, la fonction $r(\omega)$ dont le graphe en coordonnées polaires serait le suivant (dérivées infinies aux points $\omega = k \frac{\pi}{2}$).



3 - Caractérisation de \mathcal{R} à l'aide de mesures de Radon

Désignons par \mathcal{M} le dual de $\mathcal{C}(S)$, c'est-à-dire l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathcal{C}(S)$, et par \mathcal{R}^* l'ensemble des mesures $\lambda \in \mathcal{M}$ telles que :

$$\forall r \in \mathcal{R}, \int_S \lambda(d\omega) r(\omega) \geq 0$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, le cône convexe fermé \mathcal{R} coïncide avec l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent. On voit donc, inversement, qu'une fonction $r \in \mathcal{C}(S)$ est dans \mathcal{R} si et seulement si elle vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathcal{R}^*, \int_S \lambda(d\omega) r(\omega) \geq 0$$

Toute mesure positive est dans \mathcal{R}^* , soit $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{R}^*$. Mais \mathcal{R}^* contient nécessairement des mesures non positives (sinon, \mathcal{R} lui-même coïnciderait avec l'espace $\mathcal{C}_+(S)$ des fonctions positives sur S , ce qui contredirait la proposition 2). Il est facile de donner des exemples :

Exemple de mesures $\lambda \in \mathcal{R}^*$ non positives - Soit λ^+ une mesure positive, et δ_{ω_0} la mesure de Dirac placée en $\omega_0 \in S$. Considérons la mesure (non positive)

$$(2) \quad \lambda = a \lambda^+ - \delta_{\omega_0}$$

Pour avoir $\lambda \in \mathcal{R}^*$, il faut et il suffit de vérifier :

$$(2') \quad a \int_S \lambda^+ (d\omega) r(\omega) \geq r(\omega_0)$$

pour toute fonction r de la forme (1), (prop. 1). Mais :

$$\int_S \lambda^+ (d\omega) \sup_i r_i \cos(\omega, \omega_i)_+ \geq \sup_i r_i \int_S \lambda^+ (d\omega) \cos(\omega, \omega_i)_+$$

et d'autre part :

$$r(\omega_0) = \sup_i r_i \cos(\omega_0, \omega_i)_+$$

Donc, on aura $\lambda \in \mathcal{R}^*$ si et seulement si pour tout $\omega_i \in S$:

$$a \int_S \lambda^+ (d\omega) \cos(\omega, \omega_i)_+ \geq \cos(\omega_0, \omega_i)_+$$

donc, en désignant par $\frac{1}{2} S(\omega_0)$ la demi-sphère d'axe ω_0 , si et seulement si :

$$(2'') \quad a \geq \sup_{\omega_i \in \frac{1}{2} S(\omega_0)} \frac{\cos(\omega_0, \omega_i)}{\int_S \lambda^+ (d\omega) \cos(\omega, \omega_i)_+}$$

Ayant choisi un a vérifiant (2''), l'inégalité (2') sera vérifiée pour tout convexe compact et prendra une signification isopérimétrique.

En particulier, prenons pour λ^+ ($d\omega$) la mesure $d\omega$ sur S .
On a ici

$$\int_{S_n} \cos(\omega, \omega_i)_+ d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi^{n-2} \int_{S_{n-1}} d\omega_{n-1} = \omega_{n-1}$$

(ω_{n-1} : volume de la boule unité de \mathbb{R}^{n-1}), et (2'') est vérifiée pour :

$$a \geq \frac{1}{\omega_{n-1}}$$

L'inégalité (2') donne alors pour tout $\omega_0 \in S$:

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S r(\omega) d\omega \geq r(\omega_0)$$

Mais la norme $N(A)$ de $A \in C_0(\mathcal{X})$ est :

$$N(A) = \int_S r(\omega) d\omega$$

D'où l'inégalité isopérimétrique :

$$(2''') \quad N(A) \geq \omega_{n-1} r_A(\omega_0)$$

Exercice : Montrer que l'égalité est réalisée dans (2''') si et seulement si A est un segment d'origine O et de direction ω_0 .

A toute mesure $\lambda \in \mathcal{R}^*$ correspond une fonctionnelle positivement linéaire (positivement homogène et additive) et continue sur \mathcal{R} , mais la réciproque n'est pas évidente.

D'après Meyer (Probabilités et potentiel, page 273) on peut seulement dire que toute fonctionnelle positivement linéaire et continue sur \mathcal{R} est limite uniforme sur un compact de \mathcal{R} (par exemple la boule unité de \mathcal{R}) de fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{C}(S)$ représentables par des mesures continues. Mais cette limite ne se prolonge pas nécessairement sur $\mathcal{C}(S)$. Contentons nous d'un résultat plus faible, qui concerne les fonctionnelles croissantes et nous sera utile plus tard.

Proposition 3 - Toute fonctionnelle positivement linéaire croissante et continue sur \mathcal{R} admet sur $\mathcal{C}(S)$ un prolongement continu unique de la forme $\int_S \lambda(d\omega) f(\omega)$ pour une mesure positive λ sur S .

Soit $\Psi(r)$ une fonctionnelle positivement linéaire, croissante et continue sur \mathcal{R} . D'après le lemme 1, nous pouvons la prolonger sur $\mathcal{C}_2(S)$ en posant :

$$\Psi(f) = \Psi(f + C_f) - C_f \Psi(1)$$

où C_f est la constante (continue en f dans $\mathcal{C}_2(S)$) introduite dans le lemme. Nous obtenons ainsi une fonctionnelle positivement linéaire sur $\mathcal{C}_2(S)$, d'ailleurs positive, puisque Ψ est croissante sur \mathcal{R} . ($f + C_f \in \mathcal{R}$ et $C_f \in \mathcal{R} \implies \Psi(f) \geq 0$ si $f \geq 0$, donc croissante). Elle est d'ailleurs linéaire (car $0 = \Psi(f - f) = \Psi(f) + \Psi(-f)$). Enfin elle est continue sur $\mathcal{C}_2(S)$, d'après le lemme, à cause de la continuité de C_f . Il s'agit donc d'une distribution positive sur $\mathcal{C}_2(S)$. Mais on sait que toute distribution positive se prolonge d'une manière unique par une mesure positive sur $\mathcal{C}(S)$.

4 - L'espace M de Minkowski ordonné par le cône convexe \mathcal{R}

Munissons M de la relation d'ordre \succ définie par :

$$f \succ f' \quad \text{si} \quad f - f' \in \mathcal{R}$$

Entre éléments $r_A, r_{A'} \in \mathcal{R}$ associés aux compacts A, A' de $C_0(\mathcal{K})$ cette relation signifie :

$$A \succ A' \quad \text{si} \quad \exists B \in C_0(\mathcal{K}) : A = A' \oplus B$$

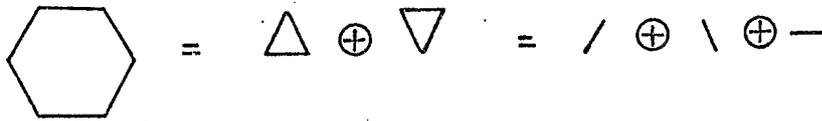
(autrement dit $A \succ A'$ si A est ouvert selon le compact A')

Il est important de savoir si $C_0(\mathcal{K})$ est ou non un treillis pour cet ordre \succ , autrement dit si deux éléments quelconques A et A' admettent un plus petit majorant $C = A \vee A'$. Si cette propriété était vraie, elle signifierait que tout compact ouvert à la fois selon A et selon A' est ouvert selon $C = A \vee A'$. En fait, il n'en est rien, et :

Proposition 4 - Le cône \mathcal{R} n'est pas réticulé pour son ordre propre \succ

On peut le voir en utilisant deux théorèmes de Choquet (Meyer loc-cit., T. 25, page 282, et T.29, page 285) - D'après le premier théorème, tout élément $r \in \mathcal{R}$ du cône convexe \mathcal{R} à base compacte K (K est par exemple l'intersection de \mathcal{R} et de l'hyperplan de $\mathcal{C}(S)$ défini par $\text{Sup}_{\omega \in S} |f(\omega)| = 1$) admet une représentation

comme barycentre d'une mesure portée par les points extrémaux de K . D'après le deuxième théorème, cette représentation est unique si et seulement si le cône convexe \mathcal{R} est réticulé pour son ordre propre. Or, il est facile de donner des exemples de compacts admettant deux décompositions distinctes à l'aide d'éléments extrémaux. Ainsi, l'hexagone régulier est somme de deux triangles équilatéraux et aussi de trois segments séparés par des angles de 60° .



Le théorème de Choquet montre donc que le cône \mathcal{R} n'est pas réticulé pour son ordre propre \mathcal{L} .

5 - L'espace préhilbertien $M_L \subset L^2(S)$

Au lieu de munir M de la topologie de la convergence uniforme, nous pouvons le considérer comme un sous-espace d'un espace $L^p(S)$, et le munir de la topologie correspondante. Pour simplifier nous nous limiterons ici au cas $p = 2$ (bien des propriétés que nous énoncerons se généraliseraient au cas de p quelconque), et nous désignerons par M_L l'espace de Minkowski M muni de la topologie induite par celle de l'espace de Hilbert $L^2(S)$, qui est définie à partir du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(\omega) g(\omega) d\omega$$

La restriction au cône convexe \mathcal{R} de cette topologie permet de définir le produit scalaire de deux ensembles convexes compacts A et B par la formule :

$$\langle A, B \rangle = \int_S r_A(\omega) r_B(\omega) d\omega$$

De même, M et \mathcal{R} pourront être munis de la topologie induite par la topologie faible de $L^2(S)$ - que nous appellerons encore topologie faible sur M ou sur \mathcal{R} .

Les deux lemmes suivants nous aiderons à caractériser ces topologies.

Lemme 2 - L'intersection du cône convexe \mathcal{R} et de la boule unité de l'espace de Hilbert $L^2(S)$ est bornée pour la topologie de la convergence uniforme

En effet, soient $A \in C_0(\mathcal{X})$, r_A son image dans \mathcal{R} et :

$$\rho = \sup_{\omega \in S} r_A(\omega)$$

Soit ω_0 un point de S avec $\rho = r_A(\omega_0)$: le point de coordonnées polaires (ρ, ω_0) est extrême pour A , et on a :

$$r_A(\omega) \geq \rho \cos(\omega, \omega_0)_+$$

Par suite, la norme $\|A\|$ de r_A dans $L^2(S)$ vérifie :

$$\|A\|^2 \geq \rho^2 \int_{\frac{1}{2}S} \cos(\omega, \omega_0)^2 d\omega = C_n \rho^2$$

avec une constante C_n qui dépend uniquement du nombre n des dimensions de l'espace euclidien \mathbb{R}^n : explicitement :

$$C_n = \frac{1}{2} \int_{S_n} \cos(\omega, \omega_0)^2 d\omega_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^{n-2} \varphi d\varphi \int_{S_{n-1}} d\omega_{n-1} = \frac{\omega_n}{2}$$

Ainsi, la relation $\|A\| \leq 1$ entraîne $\rho \leq \sqrt{\frac{2}{\omega_n}}$, d'où le lemme.

Lemme 3 - Deux éléments A et B de $C_0(X)$, distincts de $\{0\}$, vérifient $\langle A, B \rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si A et B sont deux segments d'origine 0 et de directions opposées.

En effet, si le point de coordonnées polaires (ρ, ω_0) , $\rho \neq 0$ est dans A, on a $r_A(\omega) \geq \rho \cos(\omega, \omega_0)_+$, et r_A est strictement positif sur la demi-sphère ouverte d'axe ω_0 .

Proposition 5 - La topologie induite sur le cône convexe \mathcal{R} par la topologie faible (ou forte) de $L^2(S)$ coïncide avec la topologie myope

En effet, la topologie myope, c'est-à-dire la topologie de la convergence uniforme est plus fine que les topologies forte ou faible de $L^2(S)$. Inversement, soit r_n une suite d'éléments de \mathcal{R} convergeant faiblement vers $f \in L^2(S)$. La suite r_n est bornée en norme dans $L^2(S)$, donc (lemme 2) bornée pour la topologie myope. \mathcal{R} étant localement compact pour cette topologie, on peut trouver une suite partielle r_{n_k} convergeant uniformément vers une limite $r \in \mathcal{R}$, mais cela implique que la suite r_n elle-même converge fortement (et, à fortiori, faiblement) vers cette limite $r \in \mathcal{R}$, et démontre l'équivalence sur \mathcal{R} des trois topologies.

Corollaire 1 - L'intersection de \mathcal{R} et de la boule unité de $L^2(S)$ est compacte pour les 3 topologies.

En effet, cette intersection est bornée dans \mathcal{R} pour la topologie myope, d'après le lemme 2, donc compacte pour les 3 topologies d'après la proposition.

Corollaire 2 - Soit $A \in C_0(X)$, et Π_A la variété linéaire de $L^2(S)$ définie par $\langle f, r_A \rangle = \|A\|^2$. L'intersection $\mathcal{R} \cap \Pi_A$ est compacte dès que A est distinct de $\{0\}$ ou d'un segment de droite d'origine 0. En particulier, le cône convexe fermé \mathcal{R} admet des bases compactes dans $L^2(S)$

En effet, supposons qu'il existe une suite B_n dans $C_0(X)$ avec

$$\langle A, B_n \rangle = \|A\|^2 \text{ et } \|B_n\| \rightarrow \infty$$

La suite $\frac{B_n}{\|B_n\|}$ est relativement compacte dans \mathcal{R} (corollaire 1) et admet dans \mathcal{R} une valeur d'adhérence B . La relation $\langle A, \frac{B_n}{\|B_n\|} \rangle = \frac{\|A\|^2}{\|B_n\|}$ entraîne alors $\langle A, B \rangle = 0$.

Mais cela est impossible, d'après le lemme 3, si A n'est pas un segment d'origine 0.

Proposition 6 - L'espace $M_{\mathcal{R}}$ est dense mais non fermé dans l'espace de Hilbert $L_2(S)$

Cela résulte immédiatement des inclusions $\mathcal{C}_2(S) \subset M \subset \mathcal{C}(S)$ du fait que $\mathcal{C}_2(S)$ est dense dans $L^2(S)$, et de $\mathcal{C}(S) \subset L^2(S)$ strictement.

Cette structure hilbertienne sur \mathcal{R} permet d'établir facilement des théorèmes d'existence, et de définir des indices à signification morphologique.

6 - Applications

La norme $\|A\|^2 = \int_S r_A(\omega) d\omega$ sur $C_0(\mathcal{K})$ est invariante

par rotation, mais non par translation. Si h est un vecteur de \mathbb{R}^n de module $|h|$ et de direction ω_h , le translaté $A \oplus \{h\}$ a pour image dans $\mathcal{R} : r_A(\omega) + |h| \cos(\omega, \omega_h)$. Si $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ sont les directions des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n d'une base orthonormée de \mathbb{R}^n , tout vecteur h est de la forme :

$$h = \sum h_i e_i$$

avec $h_i = |h| \cos(\omega_i, \omega_h)$, et par suite :

$$|h| \cos(\omega, \omega_h) = \sum_i h_i \cos(\omega, \omega_i) = |h| \sum_i \cos(\omega, \omega_i) \cos(\omega_i, \omega_h)$$

Ainsi, les fonctions $|h| \cos(\omega, \omega_h)$ forment un sous-espace de M de dimension n , pour lequel les n fonctions $\cos(\omega, \omega_i)$ constituent une base. Compte tenue de :

$$\int_S \cos^2(\omega, \omega_0) d\omega = \omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

on voit même que les $\frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \cos(\omega, \omega_i)$ forment une base orthonormée

de ce sous-espace $M_\tau \subset M$ associé aux translations. En effet, pour tout vecteur h de \mathbb{R}^n , on a :

$$\omega_n |h|^2 = |h|^2 \int_S \cos(\omega, \omega_h)^2 d\omega = \sum_{i,j} h_i h_j \int_S \cos(\omega, \omega_i) \cos(\omega, \omega_j) d\omega$$

D'où :

$$\langle \cos(\omega, \omega_i), \cos(\omega, \omega_j) \rangle = \omega_n \delta_{ij}$$

Tout élément $f \in M$ se décompose donc de manière unique sous la forme :

$$f = f_\tau + f_0$$

avec $f_\tau \in M_\tau$ et $f_0 \in M_\tau^\perp$, orthogonal de M_τ : l'élément f_0 est le translaté de f de norme minimale. Le rapport entre $\|f\|^2$ et $\|f_0\|^2$ est le même qu'entre le moment d'ordre deux $E(X^2)$ d'une V.A. et la variance $D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, avec ici :

$$\|f_0\|^2 = \|f\|^2 - \|f_\tau\|^2$$

Nous pouvons dire que M_τ^\perp est l'espace des éléments centrés de M , et la norme $\|f_0\|^2$ de la projection dans M_τ^\perp d'un $f \in M$ est la norme centrée (minimale sur l'ensemble des translatés de f) de cet élément.

Comme les $\frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \cos(\omega, \omega_i)$ forment une base orthonormée de M_τ , il n'y a aucune difficulté pour déterminer la projection f_τ de f dans M_τ (c'est-à-dire la translation minimisant la norme) : on a

$$\left| \begin{array}{l} f_\tau(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \sum_{i=1}^n h_i \cos(\omega, \omega_i) \\ h_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_n}} \int_S f(\omega) \cos(\omega, \omega_i) d\omega \end{array} \right.$$

En particulier :

$$||f_{\tau}||^2 = \sum h_i^2 = \frac{1}{\omega_n} \sum_1 (\langle f, \cos(\omega, \omega_i) \rangle)^2$$

Indice de symétrie propre :

De même, considérons dans $L^2(S)$ les deux sous-espaces orthogonaux E_0 et E_1 constitués respectivement des fonctions paires et des fonctions impaires, et soit π_0 et π_1 leurs projecteurs :

$$\pi_0 f = \frac{f + \check{f}}{2}, \quad \pi_1 f = \frac{f - \check{f}}{2}$$

Pour $r_A \in \mathcal{R}$ associée à $A \in C_0(\mathcal{X})$, on trouve :

$$\pi_0 r_A = \frac{1}{2} (r_A + r_A^{\check{v}}), \quad \pi_1 r_A = \frac{1}{2} (r_A - r_A^{\check{v}})$$

Ainsi, la projection de $A \in C_0(\mathcal{X})$ dans le sous-espace des éléments symétriques de M est le symétrisé $\frac{1}{2} A \oplus \check{A} \in C_0(\mathcal{X})$.

On peut donc définir l'indice de symétrie propre de $A \in C_0(\mathcal{X})$ comme le cosinus de l'angle φ de A et de son symétrisé :

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{||A \oplus \check{A}||}{||A||}$$

Indice d'ellipticité et de sphéricité. On peut de même considérer le sous-espace ζ de E_0 , constitué des ellipsoïdes centrés en O , et l'axe \mathcal{B} des boules centrées à l'origine, qui est un sous-espace unidimensionnel de ζ .

A tout $A \in C_0(\mathcal{X})$ correspond donc :

- Sa projection $A_0 = \frac{1}{2} A \oplus \check{A}$ dans E_0

- sa projection A_ζ dans ζ , qui est aussi celle de A_0 , c'est-à-dire l'ellipsoïde le plus proche en norme de A ou A_0 .
- sa projection A_β sur l'axe des boules, qui est la boule la plus proche de A , de A_0 ou de A_ζ .

Les décompositions :

$$||A||^2 = ||r_A - r_{A_0}||^2 + ||A_0||^2$$

$$||A_0||^2 = ||r_{A_0} - r_{A_\zeta}||^2 + ||A_\zeta||^2$$

$$||A_\zeta||^2 = ||r_{A_\zeta} - r_{A_\beta}||^2 + ||A_\beta||^2$$

permettent ensuite de définir des indices naturels pour la symétrie propre, l'ellipticité et la sphéricité.

7 - Caractérisation des convexes aléatoires invariants par érosion

A titre d'application de ce qui précède, montrons que les seuls ensembles aléatoires p.s. continus en 0 et conditionnellement invariants par érosion sont les polyèdres poissonniens.

a/ Relation des demi-groupes

Soit A un ensemble aléatoire de \mathbb{R}^n fermé et p.s. convexe, que nous supposons de plus p.s. continu en 0 ($P(0 \in A) = P(0 \in \overset{\circ}{A})$). Nous allons étudier A conditionnellement sous l'hypothèse $0 \in A$, et nous désignerons par P (au lieu de P_0) les probabilités correspondantes. La continuité p.s. se traduit donc par la relation :

$$(3) \quad P(0 \in \overset{\circ}{A}) = 1$$

La loi de probabilité de l'ensemble aléatoire A p.s. convexe et contenant le point 0 est entièrement définie par la famille des :

$$P(B \subset A) = P(B), \quad B \in C_0(\mathcal{K})$$

Nous dirons que A est conditionnellement invariant pour les érosions si, $\forall B' \in C_0(\mathcal{K})$, la loi conditionnelle de l'érodé $A \ominus B'$ prise sous l'hypothèse $A \ominus B \neq \emptyset$ est identique à la loi initiale. Il en est ainsi si et seulement si pour tous B et $B' \in C_0(\mathcal{K})$:

$$P(B \oplus B' \subset A \mid A \ominus B' = \emptyset) = P(B)$$

autrement dit si les P(B) vérifient sur $C_0(\mathcal{K})$ la relation des demi-groupes

$$(4) \quad P(B \oplus B') = P(B) P(B')$$

b/ Exemple des polyèdres poissoniens

Soit $\lambda(d\omega)$ une mesure positive sur la sphère unité S de \mathbb{R}^n . Sur chaque demi-droite de direction ω implantons des points poissoniens de densité $\lambda(d\omega)$, et menons par ces points les hyperplans perpendiculaires à la direction ω . La probabilité pour qu'un $B \in C_0(\mathcal{K})$ ne soit rencontré par aucun de ces hyperplans est :

$$(5) \quad P(B) = e^{-\int_S r_B(\omega) \lambda(d\omega)}$$

Cette relation (5) caractérise le polyèdre poissonien le plus général. Si $\lambda(d\omega) = \lambda d\omega$ est la mesure invariante par rotation sur S, on obtient des polyèdres poissoniens isotropes. Si la mesure λ est symétrique ($\lambda = \check{\lambda}$) on obtient des polyèdres poissoniens (conditionnellement) invariants par translation : ils correspondent à une partition stationnaire de \mathbb{R}^n en polyèdres poissoniens. En désignant par $D_B(\omega) = r_B(\omega) + r_B(-\omega)$ le diamètre

de B dans la direction ω , ces polyèdres stationnaires admettent la loi :

$$P(B) = e^{-\frac{1}{2} \int_S \lambda(d\omega) D_B(\omega)} \quad (\lambda = \lambda^y)$$

Ces polyèdres ne sont pas isotropes en général. Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , si la mesure λ est concentrée sur les points $k \frac{\pi}{2}$, on obtient un rectangle poissonien dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

c/ Continuité de P(B) pour la topologie myope

Montrons que la condition (3) de continuité p.s. et la relation (4) des demi-groupes entraînent que P(B) est continue sur $C_0(\mathcal{K})$ pour la topologie myope. En effet, soit K_n une suite convergeant vers K dans $C_0(\mathcal{K})$ et B_ε la boule fermée de centre 0 et de rayon ε .

- Pour n assez grand, on a $K_n \subset K \oplus B_\varepsilon$ et (4) entraîne :

$$P(K_n) \geq P(K \oplus B_\varepsilon) = P(K) P(B_\varepsilon)$$

d'où :

$$\underline{\lim} P(K_n) \geq P(K) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \uparrow P(B_\varepsilon)$$

Mais, d'après (3), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \uparrow P(B_\varepsilon) = 1$, d'où :

$$\underline{\lim} P(K_n) \geq P(K)$$

- Mais, de même, pour n assez grand, $K \subset K_n \oplus B_\varepsilon$ entraîne

$$P(K) \geq P(K_n \oplus B_\varepsilon) = P(K_n) P(B_\varepsilon)$$

d'où cette fois :

$$\overline{\lim} P(K_n) \leq F(K)$$

Par suite $P(K_n)$ converge vers $P(K)$, ce qui établit la proposition .

d/ La fonctionnelle $\Psi(B)$ sur $C_0(\mathcal{X})$

Posons :

$$(6) \quad \Psi(B) = - \log P(B) \quad (B \in C_0(\mathcal{X}))$$

Si l'ensemble aléatoire A vérifie les conditions (3) et (4), la fonctionnelle positive et non décroissante Ψ est additive (relation des demi-groupes) et continue sur $C_0(\mathcal{X})$ (d'après c/) pourvu seulement que $P(B)$ ne puisse pas s'annuler sur $C_0(\mathcal{X})$. Montrons donc $P(B) \geq 0$. Considérons pour cela le demi-groupe continu à un paramètre λB dans $C_0(\mathcal{X})$ ($\lambda \geq 0$) - $P(\lambda B)$ est une fonction continue de λ , d'après c/, et la relation des demi-groupes :

$$P((\lambda + \mu) B) = P(\lambda B) P(\mu B)$$

donne alors :

$$(7) \quad P(\lambda B) = (P(B))^\lambda$$

Or, pour $\lambda = 0$, la condition (3) donne $P(0B) = P(0 \in A) = 1$

Par suite, nécessairement, $P(B) > 0$ pour tout $B \in C_0(\mathcal{X})$.

La relation (7) montre que la V.A. :

$$\Lambda = \text{Sup}\{\lambda : \lambda B \subset A\}$$

obéit à la loi exponentielle $e^{-\lambda\Psi(B)}$. Elle montre de plus que la fonctionnelle Ψ est positivement homogène sur $C_0(\mathcal{X})$.

$$\Psi(\lambda B) = \lambda\Psi(B) \quad (\lambda \geq 0)$$

Ainsi, la fonctionnelle Ψ est positivement linéaire, non décroissante et continue sur $C_0(\mathcal{X})$. D'après la proposition 3 elle admet donc une représentation de la forme :

$$\Psi(B) = \int_S r_B(\omega) \lambda(d\omega)$$

pour une mesure positive λ (unique) sur la sphère unité S . Il suffit de comparer avec la relation (S), caractéristique des polyèdres poissoniens, pour en déduire la proposition que nous avons en vue :

Proposition 7 : Un convexe aléatoire fermé p.s. continu en 0 est conditionnellement invariant pour les érosions si et seulement si c'est un polyèdre poissonien.