

NOTE GEOSTATISTIQUE n° 100

L'Intégrale de RIEMANN - MINKOWSKI

Soit $A(\lambda)$ une famille continue à 1 paramètre de compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Je me propose de construire l'intégrale de Riemann-Minkowski $\int_a^b A(\lambda) d\lambda$, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ étant muni de l'addition de Minkowski et de la topologie myope. Par changement de paramètre, on se ramène à la construction de l'ensemble compact :

$$I = \int_0^1 A(\lambda) d\lambda \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$$

Posons d'abord un lemme :

Lemme 1 - Pour tout $A \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$, la suite $\frac{1}{n} A^{\oplus n}$ converge vers l'enveloppe convexe $C(A)$ de A .

Les $\frac{1}{n} A^{\oplus n}$ étant contenus dans le compact fixe $C(A)$, il suffit de vérifier la convergence dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. On a évidemment $\overline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n} \subset C(A)$, et il suffit de montrer $C(A) \supset \underline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n}$.

Soit $x \in C(A)$, et

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i, \quad \sum \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad x_i \in A$$

une représentation de cet élément. Pour tout $n \geq r$, on peut trouver des entiers $N(n, i)$, avec :

$$\sum_{i=1}^r N(n, i) = n, \quad \lim_n \frac{N(n, i)}{n} = \lambda_i$$

En posant $x_n = \sum_i \frac{N(n, i)}{n} x_i$, on a $x_n \in \frac{1}{n} A^{\oplus n}$, et la suite x_n converge vers x , d'où $\underline{\lim} \frac{1}{n} A^{\oplus n} \supset C(A)$.

I - Construction du compact $I = \int_0^1 A(\lambda) d\lambda$

Soit $A(\lambda)$ une famille continue à 1 paramètre dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$. L'image de $[0,1]$ par l'application $\lambda \rightarrow A(\lambda)$ est compacte dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$, de sorte que pour $\lambda \in [0,1]$, les $A(\lambda)$ sont contenus dans compact fixe $K_0 \in \mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$. De plus, la famille $A(\lambda)$ est uniformément continue sur le compact $[0,1]$, de sorte qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer un $\eta(\varepsilon)$ avec

$$(1) \quad |\lambda - \lambda'| \leq \eta(\varepsilon), \quad \lambda, \lambda' \in [0,1] \Rightarrow d(A(\lambda), A(\lambda')) \leq \varepsilon$$

d désignant la distance de Hausdorff dans $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$.

Soit s une subdivision $x_0 = 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = 1$ de l'intervalle $[0,1]$ et $|s| = \sup \{|x_i - x_{i-1}|, i = 1, 2, \dots, n\}$ son module. A tout choix $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de points $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, associons le compact :

$$(2) \quad I_s(\Xi) = \bigoplus_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i)$$

et désignons par $\mathcal{J}_s$ la famille des $I_s(\xi)$ pour tous les choix possibles des ξ_i .

a/ $\mathcal{J}_s$ est compacte dans l'espace L.C.D. $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}^n)$

Comme les $I_s(\Xi)$ sont contenus dans le compact fixe $C(K_0)$, il suffit de montrer que $\mathcal{J}_s$ est fermé dans $\mathcal{K}_0$. Soit donc :

$$\Xi_k = (\xi_1(k), \xi_2(k), \dots, \xi_n(k))$$

une suite de choix possible du vecteur Ξ tels que les $B_k = I_s(\Xi_k)$ convergent vers un compact B . Comme chacun des $\xi_i(k)$ appartient à

un intervalle compact, on peut trouver une suite partielle k_j telle que les Ξ_{k_j} convergent vers un vecteur $\Xi_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0)$ constituant encore un choix possible de Ξ . La continuité de $\oplus$ montre ensuite que les B_{k_j} convergent vers $I_s(\Xi_0)$. On a donc $B = I_s(\Xi_0) \in \mathcal{J}_s$ et $\mathcal{J}_s$ est bien fermée dans $\mathcal{K}_0$.

b/ Pour $|s| \leq \eta(\varepsilon)$, le diamètre de $\mathcal{J}_s$ est $\leq \varepsilon$

Si $|s| \leq \eta(\varepsilon)$, pour deux choix Ξ_1 et Ξ_2 du vecteur Ξ , les relations (1) entraînent pour chaque i

$$A(\xi_i^1) \subset A(\xi_i^2) \oplus B_\varepsilon, \quad A(\xi_i^2) \subset A(\xi_i^1) \oplus B_\varepsilon$$

d'où l'on tire, par exemple :

$$\begin{aligned} I_s(\Xi_1) &= \bigoplus_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i^1) \subset \bigoplus_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) (A(\xi_i^2) \oplus B_\varepsilon) \\ &= B_\varepsilon \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i^2) \right) = I_s(\Xi_2) \oplus B_\varepsilon \end{aligned}$$

et la relation réciproque, d'où résulte bien :

$$d(I_s(\Xi_1), I_s(\Xi_2)) \leq \varepsilon$$

Considérons maintenant l'ensemble S des subdivisions de $[0,1]$, qui est filtrant pour la relation $\vdash$ ($s_1 \vdash s_2$ si s_1 est plus fine que s_2).

c/ Montrons que la famille filtrante $\mathcal{J}_s, s \in S$ converge dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}_0)$

Pour tout $s \in S$, et tout choix possible de Ξ , on a $I_s(\Xi) \subset C(K_0)$, donc $\mathcal{J}_s \subset V^{(C(K_0))^c}$, et la famille $\mathcal{J}_s, s \in S$ est

donc contenue dans le compact fixe $V(C(K_0))^C$ de l'espace $\mathcal{K}(K_0)$.

Il suffit donc de montrer que cette famille vérifie le critère de Cauchy pour la distance de Hausdorff δ dans $\mathcal{K}(K_0)$.

Soient s et $s' \in S$ deux subdivisions de $[0,1]$ avec $s \vdash s'$, Ξ et Ξ' deux choix possibles des vecteurs Ξ associés à s et s' . Pour $|s'| \leq \eta(\varepsilon)$ (donc a fortiori aussi $|s| \leq \eta(\varepsilon)$), on vérifie comme en b :

$$I_s(\Xi) \subset I_{s'}(\Xi') \oplus B_\varepsilon, \quad I_{s'}(\Xi') \subset I_s(\Xi) \oplus B_\varepsilon$$

donc, dans K_0 :

$$d(I_s(\Xi), I_{s'}(\Xi')) \leq \varepsilon$$

et par suite aussi, dans $\mathcal{K}(K_0)$:

$$\delta(J_s, J_{s'}) \leq \varepsilon$$

Soient alors $s_0 \in S$ avec $|s_0| \leq \varepsilon$, et s et s' deux subdivisions quelconques plus fines que s_0 . On a :

$$\delta(J_s, J_{s'}) \leq \delta(J_{s_0}, J_s) + \delta(J_{s_0}, J_{s'}) \leq 2\varepsilon$$

et la famille filtrante $J_s, s \in S$ vérifie bien le critère de Cauchy. Comme elle est contenue dans un compact fixe de $\mathcal{K}(K_0)$, elle converge donc vers une limite $J \in \mathcal{K}(K_0)$.

d/ Cette limite $J \in \mathcal{K}(K_0)$ est constituée d'un unique élément $I \in K_0$, que nous noterons :

$$I = \int_0^1 (A(\lambda)) d\lambda$$

Cela résulte aussitôt de b/, puisque le diamètre est une fonction continue pour la topologie myope : le diamètre de $\mathcal{J}$ est nul, et on a donc $\mathcal{J} = \{I\}$ pour un $I \in \mathcal{K}_0$.

e/ A toute subdivision $s \in S$ associons (de manière quelconque) un choix Ξ_s du vecteur Ξ associé. Alors, la famille filtrante $I_s(\Xi_s)$, $s \in S$ converge vers I dans $\mathcal{K}_0$.

En effet, cette famille est contenue dans le compact fixe $C(K_0)$ donc admet une valeur d'adhérence J dans $\mathcal{K}_0$. Mais $I_s(\Xi_s) \in \mathcal{J}_s$, et la famille filtrante $\mathcal{J}_s$, $s \in S$ converge vers $\mathcal{J} = \{I\}$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{K}_0)$. On a donc nécessairement $J \in \mathcal{J}$, c'est-à-dire $J = I$. Par suite, la famille $I_s(\Xi_s)$ converge elle-même vers I .

II - Convexité de l'intégrale R.M.

Ainsi est achevée la construction de l'intégrale de RIEMANN-MINKOWSKI. D'après e/, on peut en particulier écrire :

$$(3) \quad I = \int_0^1 A(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigoplus_{k=1}^n \frac{1}{n} A\left(\frac{k}{n}\right)$$

Plus généralement, l'intégrale sur un intervalle $[a, b]$ s'obtient sous la forme :

$$\int_a^b A(\lambda) d\lambda = \lim_{|s| \rightarrow 0} \bigoplus_i (x_i - x_{i-1}) A(\xi_i)$$

pour des subdivisions $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ de module $|s|$, et des choix quelconques des $\xi_i \in (x_i - x_{i-1})$. En particulier, on a la relation d'additivité :

$$\int_a^b A(\lambda) d\lambda \oplus \int_b^c A(\lambda) d\lambda = \int_a^c A(\lambda) d\lambda \quad (a \leq b \leq c)$$

De même, si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont deux familles continues, on vérifie sans peine :

$$(4) \quad \int_a^b A(\lambda) \oplus B(\lambda) d\lambda = \int_a^b A(\lambda) d\lambda \oplus \int_a^b B(\lambda) d\lambda$$

Théorème. L'intégrale de Riemann-Minkowski prend ses valeurs dans $C(\mathcal{K}_0)$. Plus précisément, pour toute famille $A(\lambda)$ continue dans $\mathcal{K}_0$, on a :

$$\int_a^b A(\lambda) d\lambda = \int_a^b C(A(\lambda)) d\lambda \in C(\mathcal{K}_0) \quad (a \leq b)$$

Posons d'abord un lemme.

Lemme 2. Si $A(\lambda) = A \in \mathcal{K}_0$ est indépendant de λ , on a :

$$\int_a^b A(\lambda) d\lambda = (b-a) C(A) \quad (a \leq b)$$

En particulier, pour une famille $B(\lambda)$ continue dans $\mathcal{K}_0$ et $A \in \mathcal{K}_0$, on a :

$$(5) \quad \int_a^b A \oplus B(\lambda) d\lambda = (b-a) C(A) \oplus \int_a^b B(\lambda) d\lambda$$

Le premier énoncé est une conséquence immédiate du Lemme 1 et de la relation (3). La relation (5) résulte ensuite de la relation (4).

Soit maintenant $A(\lambda)$ une famille continue dans $\mathcal{K}_0$, et $C(A(\lambda))$ la famille (continue) constituée des enveloppes connexes des $A(\lambda)$. Il faut montrer que l'intégrale I vérifie :

$$I \equiv \int_0^1 A(\lambda) d\lambda = \int_0^1 C(A(\lambda)) d\lambda$$

(il en résultera aussitôt $I \in C(\mathcal{K}_0)$, puisque $C(\mathcal{K}'_0)$ est fermé dans $\mathcal{K}_0$). Posons, pour n entier > 0 , et $0 < k \leq n$:

$$J_k(n) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} A(\lambda) d\lambda$$

d'où résulte :

$$I = \bigoplus_{k=1}^n J_k(n)$$

Soit $\varepsilon > 0$, et $\eta(\varepsilon)$ le module de continuité uniforme figurant en (1). Pour n vérifiant : $\frac{1}{n} \geq \eta(\varepsilon)$, on a :

$$\lambda \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \Rightarrow A(\lambda) \subset A\left(\frac{k}{n}\right) \oplus B_\varepsilon, \quad A\left(\frac{k}{n}\right) \subset A(\lambda) \oplus B_\varepsilon$$

On vérifie sans peine que l'intégrale de Riemann est croissante pour $\subset$. On a donc, pour $\lambda \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, compte tenu du lemme 2 :

$$\begin{cases} J_k(n) \subset \frac{1}{n} C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right) \oplus \frac{1}{n} B_\varepsilon = \frac{1}{n} (B_\varepsilon \oplus C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right)) \\ \frac{1}{n} C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right) \subset \frac{1}{n} B_\varepsilon \oplus J_k(n) \end{cases}$$

Prenons la somme de Minkowski de ces relations. Il vient :

$$\begin{cases} I = \bigoplus_{k=1}^n J_k(n) \subset B_\varepsilon \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^n \frac{1}{n} C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right) \right) \\ \bigoplus_{k=1}^n \frac{1}{n} C\left(A\left(\frac{k}{n}\right)\right) \subset B_\varepsilon \oplus I \end{cases}$$

(B_ε : boule fermée de centre 0 et de rayon ε).

Pour n tendant vers l'infini, on en déduit, d'après (3) :

$$\begin{cases} I \subset B_\varepsilon \oplus \int_0^1 C(A(\lambda)) d\lambda \\ \int_0^1 C(A(\lambda)) d\lambda \subset B_\varepsilon \oplus I \end{cases}$$

Il suffit alors de faire tendre ε vers 0 pour obtenir :

$$I = \int_0^1 C(A(\lambda)) d\lambda$$

Le théorème est démontré.

Proposition 1. Une famille à un paramètre de compacts convexes $A(\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$ est continue si et seulement si les images r_λ des $A(\lambda)$ dans le cône convexe $\mathcal{R}$ vérifient :

a/ $\sup_{\lambda \in [a,b]} \sup_{\omega \in S_n} r_\lambda(\omega) < \infty$ pour tout intervalle fini $[a,b]$

b/ Pour chaque $\omega \in S_n$, l'application $\lambda \rightarrow r_\lambda(\omega)$ est continue.

L'intégrale $I = \int_a^b A(\lambda) d\lambda$ admet alors dans $\mathcal{R}$ l'image r_I définie par :

$$(6) \quad r_I(\omega) = \int_a^b r_\lambda(\omega) d\lambda$$

La condition a/ est nécessaire, car la famille continue $A(\lambda)$, $\lambda \in [a,b]$ est compacte dans $C(\mathcal{K}_0)$, donc contenue dans un compact fixe. La nécessité de b est évidente. Inversement, si a/ et b/ sont vérifiées, soit λ_n une suite convergeant vers λ_0 . De a/ résulte que les $A(\lambda_n)$ sont contenus dans un compact fixe. Soit alors A une valeur d'adhérence dans $\mathcal{K}_0$ de la suite $A(\lambda_n)$, et r_A son image dans $\mathcal{R}$. De b/ résulte $r_A = r_{\lambda_0}$, donc

$A = A(\lambda_0)$ et la suite $A(\lambda_n)$ converge elle-même vers $A(\lambda_0)$.

Il est alors immédiat que l'image dans $\mathcal{R}$ de l'intégrale I est donnée par (6).

Remarque 1. Plus généralement, si μ est une mesure à support compact sur la droite réelle, on peut associer à toute famille continue $A(\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$ l'intégrale :

$$I = \int A(\lambda) \mu(d\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$$

définie par son image dans $\mathcal{R}$:

$$r_I(\omega) = \int r_\lambda(\omega) \mu(d\lambda)$$

(il suffit de prendre une suite de mesure μ_n à supports finis convergeant étroitement vers μ pour s'assurer que r_I est bien dans $\mathcal{R}$).

Remarque 2. L'intérêt de l'intégrale de Riemann-Minkowski est lié au problème suivant, qui se pose lors de la définition des granulo-métries : caractériser les familles $B(\lambda)$ à un paramètre $\lambda \geq 0$ dans $\mathcal{K}_0$ telles que $\lambda \geq \mu$ entraîne que $B(\lambda)$ est ouvert selon $B(\mu)$

$$(7) \quad B(\lambda) = (B(\lambda) \ominus B(\mu)) \oplus B(\mu)$$

c'est-à-dire $B(\lambda)$ croissante pour λ ($A \succcurlyeq B$ si $A_B = A$)

Si $A(\lambda)$ est une famille continue dans $\mathcal{K}_0$, et $C \in \mathcal{K}_0$ un compact quelconque, la famille :

$$(8) \quad B(\lambda) = C \oplus \int_0^\lambda A(\lambda) d\lambda \quad (\lambda \geq 0)$$

vérifie, pour $\lambda \geq \mu$:

$$(8') \quad B(\lambda) = B(\mu) \oplus \int_{\mu}^{\lambda} A(\lambda) \, d\lambda$$

donc, vérifie la condition (7). $B(\lambda)$ n'est pas forcément convexe (à cause de la constante arbitraire $C \in C(\mathcal{K}_0)$).

Mais cette constante C ne jouant pas un rôle essentiel on peut prendre $C = \{0\}$, et la famille $B(\lambda)$ est alors dans $C(\mathcal{K}_0)$. Elle est évidemment continue en λ , d'après la proposition ci-dessus. Elle est même dérivable en λ , comme on le déduit de (6).

En sens inverse, on peut se poser la question suivante : à quelle condition une famille $B(\lambda)$ croissante pour λ dans $\mathcal{K}_0$ est-elle de la forme (8), et, en particulier, est-elle convexe à une constante près $C \in \mathcal{K}_0$?.

Si $B(\lambda)$ est de la forme (8), pour $\lambda \geq \mu$, on a, d'après (8) et le théorème :

$$B_{\lambda} \ominus \check{B}_{\mu} = \int_{\mu}^{\lambda} C(A(\lambda)) \, d\lambda \in C(\mathcal{K}_0)$$

Il en résulte, d'après ce qui précède, que les dérivées à droite et à gauche :

$$\frac{d^+}{d\lambda} B(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} (B_{\lambda+\varepsilon} \ominus \check{B}_{\lambda})$$

$$\frac{d^-}{d\lambda} B(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\varepsilon} (B_{\lambda} \ominus \check{B}_{\lambda-\varepsilon})$$

existent et coïncident. Nous désignerons par $\frac{d}{d\lambda} B_{\lambda}$ leur valeur commune, ici égale à $C(A(\lambda))$:

$$\frac{d}{d\lambda} B_{\lambda} = C(A(\lambda)) \in C(\mathcal{K}_0)$$

Cette dérivée est de plus continue en λ .

Ces conditions sont évidemment nécessaires pour qu'une famille $B(\lambda)$ possédant la propriété (7) soit de la forme (8). Il reste à voir qu'elles sont suffisantes : cela découlera immédiatement de la proposition 2 ci-dessous.

III - Mesure sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $C(\mathcal{K}_0)$

Considérons d'abord les applications positivement linéaires de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathcal{K}_0)$ (espace des ovoïdes contenant l'origine) identifié à $\mathcal{R}$. A toute fonction positive à support compact $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R})$ est ainsi associé une fonction $r(f) \in \mathcal{R}$, et, pour tout ω sur la sphère unité S , le nombre $r_{\omega}(f)$. A ω fixé, la fonctionnelle $r_{\omega}(f)$ est positivement linéaire et continue. Il existe donc une mesure positive sur $\mathbb{R}$, soit $r_{\omega}(d\lambda)$ avec :

$$(9) \quad r_{\omega}(f) = \int r_{\omega}(d\lambda) f(\lambda)$$

et cette mesure possède la propriété : $(\omega \rightarrow r_{\omega}(f)) \in \mathcal{R}$,
 $\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R})$. En désignant par $A(f)$ l'ovoïde associé à cette application $\omega \rightarrow r_{\omega}(f)$, on peut écrire (9) sous la forme :

$$(9') \quad A(f) = \int A(d\lambda) f(\lambda)$$

et définir ainsi une mesure $A(d\lambda)$ à valeur dans $C_0(\mathcal{K}_0)$: on note que toute application positivement linéaire de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R})$ dans $C_0(\mathcal{K}_0)$ est nécessairement de cette forme.

Soit maintenant $f \rightarrow A(f)$ une application positivement linéaire de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R})$ dans $C(\mathcal{K}_0)$: l'ovoïde $A(f)$ ne contient plus nécessairement l'origine. Parmi les translatés de $A(f)$ qui contiennent l'origine, soit $A_0(f)$ celui dont l'image dans $\mathcal{R}$ minimise la norme dans $L^2(S)$. On vérifie sans peine que l'application $A \rightarrow A_0$ est continue dans $C(\mathcal{K}_0)$. Ainsi $A(f)$ est de la forme :

$$A(f) = A_0(f) \oplus \{h(f)\}$$

avec $A_0(f) = \int A_0(d\lambda) f(\lambda)$ pour une mesure $A_0(d\lambda)$ à valeurs dans $C_0(\mathcal{K}_0)$. Le point $h(f)$ représente la translation $A_0(f) \rightarrow A(f)$. On vérifie sans peine que $h(f)$ est une fonction positivement linéaire et continue de f : il existe donc une mesure (vectorielle) $h = (h_1, \dots, h_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que : $h(f) = \int h(d\lambda) f(\lambda)$.

Finalement, la forme générale de la fonctionnelle $A(f)$ est :

$$(9'') \quad A(f) = \int A_0(d\lambda) f(\lambda) \oplus \left\{ \int h(d\lambda) f(\lambda) \right\}$$

ce que l'on peut écrire symboliquement :

$$A(f) = \int A(d\lambda) f(\lambda) , \quad A(d\lambda) = A_0(d\lambda) \oplus \{h(d\lambda)\}$$

Passons maintenant à la caractérisation des familles $B(\lambda)$ vérifiant la propriété (7).

Proposition 2. Soit $B(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ une famille à un paramètre dans $C(\mathcal{K}_0)$. $B(\lambda)$ est ouvert selon $B(\mu)$ pour tous λ, μ vérifiant $\lambda \geq \mu \geq 0$ si et seulement si on a $B(\lambda) = B(0) \oplus \int_0^{\lambda} A(dx)$ à une translation près pour une mesure $A(dx)$ à valeurs dans $C_0(\mathcal{K}_0)$.

Il est clair, tout d'abord, que la propriété de l'énoncé est invariante par translation. On peut donc supposer $0 \in B(\lambda)$. L'additivité de l'intégrale montre qu'une famille de la forme :

$$(10) \quad B(\lambda) = B(0) \oplus \int_{+0}^{+\lambda} A(dx)$$

vérifie la propriété. Inversement, soit $B(\lambda)$ une famille vérifiant cette propriété dans $C_0(\mathcal{H}_0)$, et $r(\lambda)$ l'image dans $\mathcal{R}$ de $B(\lambda)$.

Pour $\lambda \geq \mu$, $r(\lambda) - r(\mu)$ est dans $\mathcal{R}$, donc, en particulier $r(\lambda) \geq r(\mu)$. Pour tout $\omega \in S$, la fonction numérique $r(\lambda, \omega)$ est non décroissante, et il existe une mesure $r_\omega(d\lambda)$ telle que :

$$(10') \quad r(\lambda, \omega) = r(0, \omega) + \int_{+0}^{+\lambda} r_\omega(d\lambda)$$

De plus, pour tout intervalle I , la fonction $\omega \rightarrow r_\omega(I)$ est dans $\mathcal{R}$. On en déduit que pour $f \in \mathcal{C}_K^+(\mathbb{R})$, la fonction $\omega \rightarrow r_\omega(f)$ est encore dans $\mathcal{R}$, de sorte que $r_\omega(d\lambda)$ est l'image d'une mesure $A(d\lambda)$ à valeurs dans $C_0(\mathcal{H}_0)$ d'où résulte la représentation (10).

Corollaire 1 - Pour qu'une famille $B(\lambda)$ possédant dans $C_0(\mathcal{H}_0)$ la propriété ci-dessus soit à une constante près l'intégrale de Riemann-Minkowski d'une famille $A(\lambda)$ continue, il faut et il suffit qu'elle admette en tout λ une dérivée continue, nécessairement égale à $A(\lambda)$.

Corollaire 2 - Dans $\mathcal{H}_0$, tout demi-groupe B_λ à un paramètre $\lambda \geq 0$, tel que $0 \in B_\lambda$ pour tout λ est constitué des homothétiques λB pour un $B \in C_0(\mathcal{H}_0)$.

En effet, d'après le théorème sur les compacts indéfiniment divisibles, les B_λ sont convexes. On a donc $B_\lambda \in C_0(\mathcal{H}_0)$.

L'image r_λ de B_λ dans $\mathcal{R}$ vérifie $r_{\lambda+\mu} = r_\lambda + r_\mu$:
 s'agissant de fonction ≥ 0 , r_λ est nécessairement de la forme
 $r_\lambda = \lambda r$ pour un $r \in \mathcal{R}$.

Remarque : On note qu'il n'est pas nécessaire de supposer la continuité du demi-groupe ; ou, si l'on préfère, que tout demi-groupe dans $C_0(\mathcal{K}_0)$ est continu. Mais le résultat ne s'étend pas à $C(\mathcal{K}_0)$. On sait, en effet, qu'il existe des fonctions $h(\lambda) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ (non mesurables) vérifiant $h(\lambda+\mu) = h(\lambda) + h(\mu)$ sans être de la forme λh pour un $h \in \mathbb{R}^n$: pour $B \in C(\mathcal{K}_0)$, la famille :

$$(11) \quad B(\lambda) = \lambda B \oplus \{h(\lambda)\}$$

constitue alors un demi-groupe non continu dans $C(\mathcal{K}_0)$

Corollaire 3 - Tout demi-groupe non continu dans $C(\mathcal{K}_0)$ est de la forme (11). Autrement dit, tout demi-groupe dans $C(\mathcal{K}_0)$ est de la forme λB , $B \in C(\mathcal{K})$ à une translation près.

En effet, soit B_λ un tel demi-groupe, et, parmi les translatés de B_λ qui contiennent 0, soit C_λ l'élément dont l'image dans $\mathcal{R}$ minimise la norme dans $L^2(S)$. On a $C_\lambda = B_\lambda \oplus \{h'_\lambda\}$, d'où

$$C_{\lambda+\mu} = B_{\lambda+\mu} \oplus \{h'_{\lambda+\mu}\} = C_\lambda \oplus C_\mu \oplus \{h'_{\lambda+\mu} - h'_\lambda - h'_\mu\}$$

Mais les éléments de norme minimale dans $\mathcal{R}$ forment un cône convexe dans $L^2(S)$, de sorte que $C_\lambda \oplus C_\mu$ est lui-même de norme minimale. On a donc $C_{\lambda+\mu} = C_\lambda \oplus C_\mu$ et $h'_{\lambda+\mu} = h'_\lambda + h'_\mu$. Comme C_λ est dans $C_0(\mathcal{K}_0)$, le corollaire 2 donne $C_\lambda = \lambda C$ pour un $C \in C_0(\mathcal{K}_0)$ et, avec $h_\lambda = -h'_\lambda$, d'où :

$$B_\lambda = \lambda C \oplus \{h_\lambda\}$$

avec une translation h_λ vérifiant $h(\lambda + \mu) = h(\lambda) + h(\mu)$

Nous avons ainsi caractérisé les familles $B(\lambda)$ vérifiant (7) dans $C(\mathcal{K}_0)$.

Nous allons voir, maintenant, que toute famille $B(\lambda)$ dans $\mathcal{K}_0$ vérifiant cette propriété admet une enveloppe convexe $C(B(\lambda))$ vérifiant encore (7).

Lemme 3 - Pour $A, B \in \mathcal{K}_0$, on a $C(A \ominus \check{B}) \subset C(A) \ominus C(\check{B})$. Si A est ouvert selon B ($A_B = A$), on a :

$$(12) \quad C(A \ominus \check{B}) \simeq C(A) \ominus C(\check{B}), \quad A_B = (C(A) \ominus C(\check{B})) \oplus C(B)$$

En effet, $(A \ominus \check{B}) \oplus B \subset A$ donne $C(A \ominus \check{B}) \oplus C(B) \subset C(A)$, puis $C(A \ominus \check{B}) \subset C(A) \ominus C(B)$. Ces inclusions deviennent des égalités si $A_B = A$.

Proposition 3 - Si une famille à un paramètre B_λ dans $\mathcal{K}_0$ est croissante pour le préordre $\succ$ ($A \succ B$ si $A_B = B$), les enveloppes convexes $C(B_\lambda)$ constituent une famille croissante pour $\succ$, et admettent à une translation près une représentation de la forme :

$$C(B_\lambda) = C_0 \oplus \int_{+0}^{+\lambda} A(dx) \quad (\lambda \geq 0)$$

pour une mesure A à valeur dans $C_0(\mathcal{K}_0)$.

En effet, d'après le lemme, $(B_\lambda \ominus \check{B}_\mu) \oplus B_\mu = B_\lambda$ entraîne

$$(C(B_\lambda) \ominus C(\check{B}_\mu)) \oplus C(B_\mu) = C(B_\lambda)$$

et il suffit d'appliquer la proposition 2.

Corollaire - Si une famille B_λ croissante pour λ dans $\mathcal{K}_0$ et vérifiant $0 \in B_\lambda$ admet en tout $\lambda \geq 0$ une dérivée à droite égale à $\{0\}$, elle se réduit à un compact B_0 indépendant de λ .

La propriété est vraie dans $C_0(\mathcal{K}_0)$, d'après la proposition 2, corollaire 1. Dans $\mathcal{K}_0$, d'après le lemme 3, on a pour $\lambda \geq \mu$:

$$B_\lambda \ominus \check{B}_\mu \subset C(B_\lambda) \ominus C(\check{B}_\mu)$$

Mais (le passage à l'enveloppe convexe étant continu) $C(B_\lambda)$ admet la dérivée à droite $C\{0\} = \{0\}$, d'où $C(B_\lambda) = C^{\text{ste}}$ d'après la proposition 3, et $C(B_\lambda) \ominus C(\check{B}_\mu) = \{0\}$. On a donc $B_\lambda \ominus \check{B}_\mu = \{0\}$, et :

$$B_\lambda = (B_\lambda \ominus \check{B}_\mu) \oplus B_\mu = B_\mu = B_0$$

Il resterait à étendre la proposition 2 et son corollaire 1 à l'espace $\mathcal{K}_0$ lui-même. Si une famille B_λ dans $\mathcal{K}_0$ admet une dérivée continue $A(\lambda)$, on vérifie assez facilement l'inclusion $B_\lambda \subset B_0 \oplus \int_0^\lambda A(\lambda) d\lambda$. Pour montrer que l'on a l'égalité, il faudrait établir que les $\frac{B_{\lambda+h} \ominus \check{B}_\lambda}{h}$ convergent uniformément vers $A(\lambda)$ sur tout intervalle borné. Si cette propriété est vraie, toute famille B_λ à dérivée continue sera l'intégrale R.M. de sa dérivée, et sera donc convexe à un compact constant près. Je laisserai provisoirement cette question de côté.

IV - L'intégrale de Stieltjes - Minkowski

Pour montrer qu'il existe dans $\mathcal{K}_0$ des familles B_λ croissantes ne se laissant pas ramener à des familles convexes, nous allons en construire effectivement à partir d'une

intégrale S.M.

Soit $A(\lambda)$ une famille continue à 1 paramètre et $F(\lambda)$ une fonction non décroissante de λ . En remplaçant les $x_i - x_{i-1}$, qui figurent dans la construction de l'intégrale de Riemann, par les $F(x_i) - F(x_{i-1})$, on s'aperçoit sans peine que les raisonnements faits ci-dessus restent valables, et l'on obtient ainsi l'intégrale de Stieltjes-Minkowski :

$$(12) \quad \int_a^b A(\lambda) \cdot dF(\lambda) = \lim_{|s| \rightarrow 0} \bigoplus_i (F(x_i) - F(x_{i-1})) A(\xi_i)$$

Mais le lemme 2 ne subsiste plus, en général, et le Théorème n'est plus valable : l'intégrale de Stieltjes-Minkowski ne prend plus ses valeurs dans $C(\mathcal{H}_0)$.

La famille $B(\lambda) = \int_{+0}^{+\lambda} A(\lambda) dF(\lambda)$ est croissante pour λ

$$B(\lambda) = B(\mu) \oplus \int_{+\mu}^{+\lambda} A(x) dF(x) \quad (\lambda \geq \mu)$$

(c'est-à-dire $B(\lambda)$ ouvert selon $B(\mu)$), et les $B(\lambda)$ cette fois ne sont plus nécessairement convexes.

Par l'intermédiaire de l'intégrale de Stieltjes, on peut associer à toute famille $A(\lambda)$ continue à support compact (c'est-à-dire $A(\lambda) = \{0\}$ dès que λ n'appartient pas à un intervalle $[a, b]$ donné) son intégrale selon une mesure positive μ donnée : on

prendra $F(x) = \int_a^x \mu(dy)$ pour $x \geq a$, et on posera :

$$(12') \quad \int A(\lambda) \mu(d\lambda) = \int_{-a}^{+b} A(\lambda) F(d\lambda)$$

Mais des anomalies vont apparaître. Par exemple, si une suite μ_n de mesures converge vaguement vers une mesure μ , les intégrales $\int A(\lambda) \mu_n(d\lambda)$ ne convergeront pas obligatoirement vers $\int A(\lambda) \mu(d\lambda)$.

Pour le voir, supposons que les μ_n soient des régularisées de leur limite vague μ , et admettent des densités $f_n(\lambda)$ continues. On montre alors :

$$I_n = \int A(\lambda) \mu_n(d\lambda) = \int f_n(\lambda) A(\lambda) d\lambda$$

(la seconde intégrale étant prise au sens de Riemann). Comme la famille $f_n(\lambda) A(\lambda)$ est continue, le théorème montre que I_n est convexe :

$$I_n = \int f_n(\lambda) C(A(\lambda)) d\lambda \in C(\mathcal{K}_0)$$

L'image de I_n dans $\mathcal{R}$ est alors l'intégrale de l'image r_λ de $C(A(\lambda))$:

$$r_{I_n}(\omega) = \int f_n(\lambda) r_\lambda(\omega) d\lambda$$

et la convergence vague de $f_n(\lambda) d\lambda$ vers μ montre que I_n admet une limite J d'image :

$$r_J(\omega) = \int r_\lambda(\omega) \mu(d\lambda) \in \mathcal{R}$$

Autrement dit :

$$J = \int C(A(\lambda)) \mu(d\lambda) \in C(\mathcal{K}_0)$$

La continuité de l'application $A \rightarrow C(A)$ permet ensuite de vérifier :

$$J = C \left(\int A(\lambda) \mu(d\lambda) \right)$$

Il suit de là que c'est sur $C(\mathcal{K}_0)$, plutôt que sur $\mathcal{K}_0$ lui-même, que la théorie générale de l'intégration conduira à des résultats intéressants.

Par contre, la fonctionnelle positivement linéaire définie par :

$$(13) \quad I(A) = \int A(\lambda) \mu(d\lambda)$$

est continue dans le sens précis suivant : Si une suite $A_n(\lambda)$ de familles continues à 1 paramètre vérifie les deux conditions suivantes :

- les $A_n(\lambda)$ ont leurs supports dans un intervalle fixe $[a, b]$, c'est-à-dire $A_n(\lambda) = \{0\}$ pour tout n dès que $\lambda \notin [a, b]$
- les $A_n(\lambda)$ convergent vers A dans $\mathcal{K}_0$ uniformément en λ alors, on a $I(A_n) \rightarrow I(A)$ dans $\mathcal{K}_0$, comme on le vérifie sans difficulté à partir des définitions (12) et (12').

On voit ici se poser deux problèmes relatifs à $\mathcal{K}_0$:

- 1/ - Comment caractériser la topologie (plus forte que la topologie vague) la moins fine sur l'espace $\mathcal{M}^+$ des mesures positives sur la droite réelle telle que l'application :

$$\mu \rightarrow \int A(\lambda) \mu(d\lambda)$$

de $\mathcal{H}^+$ dans $\mathcal{K}_0$ soit continue pour toute famille $A(\lambda) \in \mathcal{K}_0$ continue à support compact ?

- 2/ - L'ensemble des fonctionnelles $I(A)$ positivement linéaires (au sens de Minkowski et continues dans le sens ci-dessus) coïncide-t-il avec l'ensemble des fonctionnelles de la forme (10) ?

Nous n'étudierons pas ici ces questions. Ayant établi l'existence effective des familles B_λ croissantes non convexes dans $\mathcal{K}_0$, montrons que l'on peut associer à chacune d'elle une mesure à valeur dans $\mathcal{K}_0$. À toute fonction positive continue à support compact dans $\mathbb{R}$, soit $f \in \mathcal{C}_\mathcal{K}^+(\mathbb{R})$, associons l'intégrale S.M. :

$$(14) \quad I(f) = \int f(x) \, dB(x) = \lim_{|s| \rightarrow 0} \bigoplus_i f(\xi_i) (B_{x_i} \ominus B_{x_{i-1}})$$

dont on établit l'existence en reprenant les raisonnements utilisés pour construire l'intégrale R.M. On montre également sans difficulté que l'intégrale $I(f)$ est une fonctionnelle positivement linéaire et continue sur $\mathcal{C}_\mathcal{K}^+(\mathbb{R})$ (si les f_n convergent uniformément vers f en conservant leurs supports dans un compact fixe, on a $I(f_n) \rightarrow I(f)$ dans $\mathcal{K}_0$).

On note de plus $I(0) = \{0\}$, d'où résulte aussitôt que $I(f)$ est croissante pour l'inclusion $\subset (f \geq g \Rightarrow I(f) \supset I(g))$. Si l'on désigne par B_λ^+ la régularisée à droite ($B_\lambda^+ = \lim_{\lambda \rightarrow +0} B_\lambda$) la famille B_λ^+ se représente comme intégrale de cette mesure B :

$$B_\lambda^+ = B_0 \oplus \int_{+0}^{+\lambda} dB(x)$$

Inversement, on peut se demander si toute fonctionnelle positivement linéaire, continue et croissante pour $\subset$ appliquant

$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^+(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{K}_0$ admet une représentation de la forme (14) pour une famille B_λ croissante pour λ . S'il en est ainsi, nous aurons identifié ces fonctionnelles avec les mesures dB à valeur dans $\mathcal{K}_0$, et, en particulier, caractérisé complètement les familles B_λ (ou plutôt leurs régularisées B_λ^+). Ceci va nous conduire à construire la théorie de l'intégrale à valeur dans $\mathcal{K}_0$.