



LECONS SUR LE VOLUME, LA SURFACE, ET LE PROBLEME

DES ISOPERIMETRES

Par

H. H A D W I G E R

Traduction abrégée des Chapitres 4, 5 et 6

par G. MATHERON.

---

Note du Traducteur - C'est le 6ème et dernier chapitre du livre de Hadwiger (qui occupe d'ailleurs à lui seul le tiers de l'ouvrage) qui présente le plus d'intérêt pour la morphologie mathématique. Mais il n'est pas possible de lire ce chapitre sans avoir pris connaissance des chapitres 4 et 5, qui contiennent d'ailleurs eux aussi des indications utiles pour la morphologie mathématique. J'ai donc laissé tomber les trois premiers chapitres (consacrés aux polyèdres et à la notion de volume) et traduit (en abrégeant souvent considérablement le texte de Hadwiger) seulement les trois derniers chapitres (à l'exclusion de la dernière section du chapitre VI, consacrés au problème des isopérimètres). J'ai souvent omis de reproduire les démonstrations, tantôt parce qu'elles pouvaient se reconstituer avec facilité, tantôt au contraire parce qu'elles étaient trop longues (donc aussi plus difficiles). Dans tous les cas, j'indique entre crochets les pages du livre de Hadwiger où elles figurent. De temps à autre, j'interpole entre astérisques \*.....\* de brèves comparaisons entre les résultats de Hadwiger et les méthodes de la Morphologie Mathématique.

## TABLE DES MATIERES

### Chapitre IV - ETUDES DE GEOMETRIE ENSEMBLISTE

<u>N° 1 - Caractéristiques linéaires des ensembles de points</u>	1
4-1-1 Largeur, diamètre, épaisseur	1
4-1-2 Les boules inscrite et circonscrite	2
4-1-3 Inégalités simples	3
<u>N° 2 - Les Opérations de Minkowski</u>	5
4-2-1 Addition et soustraction de Minkowski	5
4-2-2 Erosions et Dilatations	8
4-2-3 Ensembles parallèles	8
4-2-4 Familles linéaires, convexes, et concaves	10
<u>N° 3 - L'espace métrique <math>\mathcal{X}_0</math> des compacts non vides</u>	11
4-3-1 Métrique et Convergence	11
4-3-2 Le théorème de compacité	13
4-3-3 Familles continues et semi-continues	14
<u>N° 4 - Le Volume</u>	15
4-4-1 Le théorème de Brunn	15
4-4-2 Sections efficaces	17
4-4-3 Traversées, et théorème de Fubini	19
<u>N° 5 - Les Symétrisations</u>	21
4-5-1 La Symétrisation de STEINER	21
4-5-2 Régularisation par rotation	23
4-5-3 Théorème de la mise en boule	24
4-5-4 Inégalité de BIEBERBACH	26
4-5-5 Rayon volumique et théorème de E. SCHMIDT	26

### Chapitre V - VOLUME, SURFACE ET ISOPERIMETRIE 29

<u>N° 1 - La Surface au sens de Minkowski</u>	29
5-1-1 Surfaces relatives intérieures et extérieures	29

Chapitre V - VOLUME, SURFACE ET ISOPERIMETRIE (Suite)

5-1-2	Aire relative d'un ensemble superficiel	32
5-1-3	La surface usuelle au sens de Minkowski	34
<u>N° 2 - Inégalité des Isopérimètres</u>		36
5-2-1	Théorème de Brunn-Minkowski	36
5-2-2	Théorème des Isopérimètres	37
5-2-6	Propriétés Isopérimétriques de la boule	39

Chapitre VI - LES FIGURES CONVEXES ET LA GEOMETRIE INTEGRALE 40

<u>N° 1 - Les figures convexes, et leurs caractéristiques</u>		40
6-1-1	Les tâches de la Géométrie des Ovoïdes	40
6-1-2	Fonctionnelles sur la classe des Ovoïdes	43
6-1-3	Approximation par des polyèdres	46
6-1-4	Volume et Surface des figures convexes	48
6-1-5	La formule de Cauchy	51
6-1-6	Les fonctionnelles de MINKOWSKI, formules de récurrence de KUBOTA	53
6-1-7	Norme et largeur moyenne	56
6-1-8	Formule de STEINER pour les figures parallèles	59
6-1-9	Cas particulier	61
6-1-10	Caractérisation des fonctionnelles de MINKOWSKI	62
<u>N° 2 - Formules Intégrales</u>		64
6-2-1	Les Intégrales Cinématiques	64
6-2-2	Formules intégrales pour volume et surface	69
6-2-3	Relation intégrale pour deux polyèdres	70
6-2-4	Intégrale de rotation et addition de Minkowski	71
6-2-5	Projections et sections, formules de Cauchy et de Crofton	73
6-2-6	Intégrale de rotation et déformation affine	75
6-2-7	Dérivée affine moyenne	77
<u>N° 3 - Théorèmes Généraux de Géométrie Intégrale</u>		78
6-3-1	L'Anneau Convexe	78

6-3-2	Fonctionnelles Additives	79
6-3-3	La caractéristique d'EULER-POINCARÉ	80
6-3-4	Fonctionnelles de Minkowski sur l'anneau convexe	85
6-3-5	Fonctionnelles associées, théorème général	87
6-3-6	Formules cinématiques de Von BLASCHKE et SANTALO	88
6-3-7	Formulaire cinématique	89
<u>N° 4 - Fonctionnelles Concaves</u>		90
6-4-1	Classes convexes d'ovoïdes, fonctionnelles concaves	90
6-4-2	Racines du volume et de la surface	93
6-4-3	Figures de révolution	94
6-4-4	Familles - Canal concave et convexe	94
6-4-5	Moments des fonctionnelles concaves	102
6-4-6	Moments des traversées et des largeurs	104
6-4-7	Moments planaires	105

C H A P I T R E IV

ETUDES DE GEOMETRIE ENSEMBLISTE

N° 1 - CARACTERISTIQUES LINEAIRES DES ENSEMBLES DE POINTS

4-1-1 Largeur, Diamètre, Epaisseur

Dans cette section, nous considérons uniquement des ensembles bornés non vides de  $\mathbb{R}^k$ .

Soit  $A$  un tel ensemble,  $u$  un vecteur unitaire,  $E_u$  un hyperplan (ne passant pas obligatoirement par l'origine) orthogonal à  $u$ ,  $H(-u)$  celui des deux demi-espaces fermés définis par  $E_u$  qui ne contient pas le vecteur  $u$ . On dit que  $H(-u)$  enveloppe  $A$  si  $A \subset H(-u)$ . Le plus petit des demi-espaces orthogonaux à  $u$  qui enveloppent  $A$  (c.à.d. l'intersection de ces demi-espaces) s'appelle le demi-espace d'appui  $H(A; -u)$  dans la direction  $u$ , le plan  $E(A; u)$  qui limite  $H(A; -u)$  s'appelle plan d'appui de  $A$  dans la direction  $u$ , et la distance  $h(A, u)$  de l'origine à ce plan est la distance d'appui. On appelle largeur  $b(A, u)$  de  $A$  dans la direction  $u$  la distance  $\geq 0$  des deux plans d'appui (orientés)  $E(A, u)$  et  $E(A, -u)$ . On a :

$$(1) \quad b(A, u) = h(A, u) + h(A, -u)$$

La largeur est une fonction continue de la direction  $u$ . Comme la sphère  $S$  de rayon unité est compacte,  $b(A, u)$  atteint ses

bornes supérieure et inférieure. On peut donc, pour tout ensemble borné A, définir deux caractéristiques simples :

le diamètre D :

$$(2) \quad D = D(A) = \sup_{|u|=1} b(A,u)$$

et l'épaisseur :

$$(3) \quad d = d(A) = \inf_{|u|=1} b(A,u)$$

Le diamètre est aussi la borne supérieure de la distance euclidienne de deux points de A :

$$(4) \quad D(A) = \sup\{d(p,q), \quad p \in A, q \in A\}$$

On a évidemment pour toute direction u :

$$(5) \quad d(A) \leq b(A,u) \leq D(A)$$

Epaisseur et diamètre de A sont invariants pour le groupe des déplacements. Ils sont positivement homogènes :

$$(6) \quad d(\lambda A) = |\lambda| d(A) , \quad D(\lambda A) = |\lambda| D(A)$$

Enfin, pour  $A \cap B \neq \emptyset$ , on a :

$$(7) \quad D(A \cup B) \leq D(A) + D(B) \quad ; \quad d(A \cup B) \leq d(A) + d(B)$$

#### 4-1-2 Les Boules Inscrite et Circonscrite

Soient A et B deux ensembles bornés non vides. On

s'interroge sur l'existence d'homothétiques de B contenant A ou contenus dans A.

Ceci conduit à définir deux paramètres : R, borne inférieure des  $\lambda < \infty$  tels que A soit contenu dans (un translaté de)  $\lambda B$ ; r, borne supérieure des  $\lambda > 0$  tels que A contienne un translaté de  $\lambda B$ .

$$(8) \quad R = R(A,B) = \text{Inf} \{ \lambda : A' \subset \lambda B \text{ (} A' \cong A \text{)} \}$$

$$(9) \quad r(A,B) = \text{Sup} \{ \lambda : \lambda B \subset A' \text{ , } A' \cong A \}$$

S'il n'existe pas de tels  $\lambda$ , on pose  $R = \infty$ , ou respectivement  $r = 0$ .

On a la relation évidente

$$(10) \quad r(A,B) \cdot R(B,A) = 1$$

Le cas particulier le plus important est celui où B est la boule fermée de rayon unité.  $R(A) = R(A,B)$  est alors le rayon de la plus petite boule fermée contenant A (boule circonscrite),  $r(A) = r(A,B)$  le rayon de la plus grande boule fermée contenu dans A (boule inscrite). On peut avoir  $r = 0$ , mais on a toujours  $R < \infty$

#### 4-1-3 Inégalités Simples

Soit  $K^0$  une sphère circonscrite à un simplexe régulier de diamètre  $D = 1$  [simplexe : enveloppe convexe dans  $R^k$  de  $k + 1$  points non coplanaires] ; soit de même  $S^0$  un simplexe régulier

circonscrit à une boule de diamètre unité. Le rayon de  $K^0$  est

$$r^0 = \sqrt{\frac{k}{2k+2}}$$

et les arêtes de  $S^0$  ont la longueur :

$$s^0 = \sqrt{\frac{k(k+1)}{2}}$$

Soit alors A un ensemble de diamètre  $D = D(A) = 1$ . On a alors :

$$(13) \quad R(A, K^0) \leq 1$$

et l'égalité si, et seulement si, A est un simplexe régulier.

De même, on a

$$(14) \quad R(A, S^0) + R(A, T^0) \leq 2$$

$T^0$  désignant le symétrique du simplexe  $S^0$  par rapport à l'origine.

L'inégalité (13) signifie que tout ensemble de diamètre 1 est inscriptible dans (une translatée de) la boule  $K^0$ , et vérifie

$$(15) \quad R(A) \leq \sqrt{\frac{k}{2k+2}} \quad (\text{Inégalité de Jung})$$

De même, (14) montre qu'un ensemble A de diamètre 1 est inscriptible dans (une translatée de)  $S^0$  ou dans  $T^0$ . De plus :

$$s \leq \sqrt{\frac{k(k+1)}{2}} \quad (\text{Inégalité de Gale})$$

$s = s(A)$  désignant l'arête du simplexe circonscrit à A.

N° 2 - LES OPERATIONS DE MINKOWSKI

4-2-1 Addition et Soustraction de Minkowski

La somme de Minkowski :  $A \oplus B$  de deux ensembles A et B est l'ensemble C constitué des C de la forme  $C = a + b$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

La différence  $D = A/B$  est l'ensemble des points d qui, pour tout  $b \in B$ , admettent une représentation  $d = a - b$  avec un  $a \in A$ . On peut avoir  $D = \emptyset$

\*La notation utilisée par Hadwiger est  $A \times B$ , je la remplace par  $A \oplus B$  pour éviter toute confusion avec le produit cartésien, et pour rejoindre l'usage de la Morphologie Mathématique. La différence  $A/B$  correspond à  $A \ominus \check{B}$  dans les notations de la Morphologie Mathématique\*

Noter :  $A \oplus \emptyset = \emptyset$  ,  $A \oplus \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$  ,  $A/\emptyset = \mathbb{R}^k$  ,  $A/\mathbb{R}^k = \emptyset$   
et les règles :

$$(21) \quad (A \oplus B)/B \supset A \quad ; \quad (A/B) \oplus B \subset A$$

\*Il s'agit de la fermeture selon B et de l'ouverture selon B \*

$$(22) \quad A/B = (A^c \oplus \check{B})^c \quad , \quad A \oplus B = (A^c/\check{B})^c$$

L'addition de Minkowski est associative et commutative.

La soustraction vérifie :

$$(24) \quad (A/B)/C = A/(B \oplus C)$$

$$(23) \quad (A \oplus B)/C \supset A \oplus (B/C)$$

et, plus généralement :

$$(26) \quad (A \oplus B)/(C \oplus D) \supset (A/C) \oplus (B/D)$$

Ces opérations sont monotones :

$$(27) \quad A \subset C, B \subset D \Rightarrow A \oplus B \subset C \oplus D$$

$$(28) \quad A \subset C, B \supset D \Rightarrow A/B \subset C/D$$

Relativement à la réunion et à l'intersection, on a les règles :

$$(29) \quad (A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$

$$(30) \quad (A \cap B) \oplus C \subset (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$$

$$(31) \quad (A \cup B)/C \subset (A/C) \cup (B/C)$$

$$(32) \quad (A \cap B)/C = (A/C) \cap (B/C)$$

On a l'égalité en (30) si A et B sont fermés, et C et  $A \cup B$  convexes. De même, on a = dans (31) si A, B et C sont fermés, A et B disjoints, C connexe.

Relativement à l'homothétie (dont le centre est en  $O$ ) :

$$(35) \quad \lambda (A \oplus B) = \lambda A \oplus \lambda B$$

$$(36) \quad \lambda (A/B) = \lambda A / \lambda B$$

$$(37) \quad \lambda A \oplus \mu A \supset (\lambda + \mu) A$$

$$(38) \quad \lambda A / \mu A \subset (\lambda - \mu) A \quad (\lambda > \mu > 0, A \text{ fermé})$$

En (37), et en (38) on a l'égalité dès que A est convexe.

En ce qui concerne la distance d'appui h et la largeur b relatives à une direction u donnée :

$$(39) \quad h(A \oplus B, u) = h(A, u) + h(B, u)$$

$$(40) \quad b(A \oplus B, u) = b(A, u) + b(B, u)$$

$$(41) \quad h(\lambda A, u) = \lambda h(A, u) \quad ; \quad b(\lambda A, u) = \lambda b(A, u) \quad (\lambda > 0)$$

Par suite, pour le diamètre et l'épaisseur :

$$(42) \quad D(A \oplus B) \leq D(A) + D(B)$$

$$d(A \oplus B) \geq d(A) + d(B)$$

Pour les rayons R et r des boules circonscrites et inscrites :

$$(43) \quad R(A \oplus B) \leq R(A) + R(B) \quad ; \quad r(A \oplus B) \geq r(A) + r(B)$$

Mentionnons enfin les implications suivantes, relatives à l'appartenance à la classe  $\mathcal{X}$  des compacts (fermés, bornés) ou à la classe  $\Omega$  des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^k$  :

$$(44) \quad A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A \oplus B, A/B \in \mathcal{X}$$

$$(45) \quad A \in \Omega, B \in \Omega \Rightarrow A \oplus B \in \Omega, A/B \in \mathcal{X}$$

$$(46) \quad A \in \mathcal{X}, B \in \Omega \Rightarrow A \oplus B \in \Omega, A/B \in \mathcal{X}$$

$$(47) \quad A \in \Omega, B \in \mathcal{X} \Rightarrow A \oplus B \in \Omega, A/B \in \Omega$$

On voit que la classe  $\mathcal{K}$  des compacts est stable pour les deux opérations, mais non celle des ouverts  $\Omega$ .

En associant l'addition de Minkowski et l'homothétie (de centre 0) on obtient les combinaisons linéaires  $\alpha A \oplus \beta B$  ( $\alpha, \beta \geq 0$ ). Si, de plus,  $\alpha + \beta = 1$ , nous dirons qu'il s'agit d'une combinaison linéaire bornée.

#### 4-2-2 Erosion et Dilatation

\* Je traduis par érodé, selon la terminologie Morphologie Mathématique, le terme allemand "ensemble interne", et par dilaté le terme "ensemble externe" \*

La somme  $A \oplus \rho B$  est le dilaté de A par B selon le module  $\rho$  ; la différence  $A/\rho B$  ( $0 \leq \rho \leq r(A,B)$ ) est l'érodé de A par B selon le module  $\rho$ . ( $r(A,B)$  est défini en (9)).

Pour A et B fixes, les érodés et dilatés de A par B constituent une famille à un paramètre  $C_\sigma$  :  $C_\sigma = A/(-\sigma)B$  pour  $-r(A,B) \leq \sigma \leq 0$ ,  $C_\sigma = A \oplus \sigma B$  ( $0 \leq \sigma < \infty$ )

#### 4-2-3 Ensembles Parallèles

Les érodés et dilatés d'un ensemble A par une boule B présentent un grand intérêt. Ils constituent des ensembles parallèles (internes et externes). Leur utilisation en géométrie ensembliste et en théorie de la Mesure remonte à Cantor et à Minkowski.

Soit  $K$  la boule fermée de rayon unité centrée à l'origine  $O$ .  
 La dilatée  $A \oplus \rho K = A_\rho$  ( $0 \leq \rho < \infty$ ) de  $A$  par  $K$  selon le module  $\rho$  est l'ensemble externe parallèle à  $A$  à la distance  $\rho$  (ensemble des points  $p$  vérifiant  $d(p,q) \leq \rho$  pour un  $q \in A$ ). L'érodé  $A/\rho K$  ( $0 \leq \rho \leq r(A)$ ) de  $A$  par  $K$  pour le module  $\rho$  est le parallèle interne de  $A$  pour la distance  $\rho$ .  $r(A)$  est ici le rayon de la boule inscrite dans  $A$ . Pour  $\rho < -r(A)$ , on pose  $A_\rho = \emptyset$ , et la famille des ensembles parallèles à  $A$  est ainsi définie pour  $-\infty < \rho < +\infty$ .

Si  $A$  est fermé, borné, non vide, : il en est de même des parallèles  $A_\rho$  ( $-r(A) \leq \rho < \infty$ )

Propriétés élémentaires des ensembles parallèles à  $A$ .

$$(49) \quad \rho K \oplus \sigma K = (\rho + \sigma)K \quad ; \quad \rho K / \sigma K = (\rho - \sigma)K \quad (0 \leq \sigma \leq \rho)$$

$$(50) \quad (A_\rho)^c = (A^c)_{-\rho}$$

$$(51) \quad \rho < \sigma \Rightarrow A_\rho \subset A_\sigma \quad ; \quad A \subset B \Rightarrow A_\rho \subset B_\rho$$

$$(52) \quad (A_\rho)_\sigma = A_{\rho+\sigma} \quad ; \quad (A_{-\rho})_{-\sigma} = A_{-\rho-\sigma} \quad (\rho, \sigma \geq 0)$$

$$(53) \quad (A_{-\sigma})_\rho \subset A_{\rho-\sigma} \subset (A_\rho)_{-\sigma} \quad (\rho, \sigma \geq 0)$$

$$(54) \quad A_\rho \oplus B_\sigma = (A \oplus B)_{\rho+\sigma} \quad (\rho, \sigma \geq 0)$$

$$(55) \quad A_\rho \oplus B_\sigma \subset (A \oplus B)_{\rho+\sigma}$$

$$(56) \quad A_\rho / B_\sigma \supset (A / B)_{\rho-\sigma}$$

$$(57) \quad (A \cup B)_\rho = A_\rho \cup B_\rho \quad ; \quad (A \cup B)_{-\rho} \supset A_{-\rho} \cup B_{-\rho} \quad (\rho \geq 0)$$

$$(58) \quad (A \cap B)_\rho \subset A_\rho \cap B_\rho \quad ; \quad (A \cap B)_{-\rho} = A_{-\rho} \cap B_{-\rho} \quad (\rho \geq 0)$$

$$(59) \quad A_\rho = A_{-\rho} \cup (F_r A)_\rho \quad (A \text{ fermé, } \rho \geq 0)$$

$(F_r A$  désigne la frontière de  $A$ )

Démonstration de (59) :  $F_r A \subset A$  entraîne  $A_\rho \supset A_{-\rho} \cup (F_r A)_\rho$ .

Inversement, si  $p \in A_\rho$ , soit  $q \in A$  avec  $d(p, q) \leq \rho$ . Si  $p \notin A_{-\rho}$ , on a  $p \in (A^c)_\rho$  et il existe  $q' \in A^c$  avec  $d(p, q') \leq \rho$ . Le segment  $qq'$  contient un point  $p' \in F_r A$  : comme on a alors  $d(p, p') \leq \rho$ , on doit avoir  $p \in (F_r A)_\rho$ . Ainsi, on a toujours  $p \in A_{-\rho} \cup (F_r A)_\rho$ .

#### 4-2-4 Familles linéaires, convexes, et concaves d'ensembles.

Soit  $A[\zeta]$  une famille d'ensembles à un paramètre  $\zeta$  (défini sur un intervalle borné ou non). Cette famille est convexe si :

$$(60) \quad A[\alpha\xi + \beta\eta] \subset \alpha A[\xi] \oplus \beta A[\eta]$$

concave, si :

$$(61) \quad A[\alpha\xi + \beta\eta] \supset \alpha A[\xi] \oplus \beta A[\eta]$$

linéaire, enfin, si

$$A[\alpha\xi + \beta\eta] = \alpha A(\xi) \oplus \beta A(\eta)$$

Exemples :

1 - La famille  $A[\zeta] = \zeta A$  des homothétiques de A est convexe (et linéaire si l'ensemble A est convexe)

2 - La famille  $A[\zeta] = B \oplus \zeta C$  ( $0 \leq \zeta < \infty$ ) des dilatés de B par C est convexe. Si B et C sont convexes, cette famille est même linéaire.

3 - Si B et C sont convexes, la famille des érodés et dilatés de B par C est concave. Si B et C sont homothétiques, elle est linéaire.

N° 3 - ESPACE METRIQUE  $\mathfrak{K}_0$  DES COMPACTS NON VIDES

4-3-1 Métrieque et Convergence

Nous désignons par  $\mathfrak{K}$  l'ensemble des compacts (fermés bornés) de  $\mathbb{R}^k$ .  $\mathfrak{K}$  est stable pour  $\cup$  finie,  $\cap$  quelconque, et  $\oplus$ . Ses éléments sont des ensembles mesurables au sens de Lebesgue. Dans les constructions qui suivent, il convient d'exclure l'ensemble vide.  $\mathfrak{K}_0$  désignera donc la classe des compacts non vides : nous allons munir  $\mathfrak{K}_0$  d'une métrieque qui en fera un espace localement compact.

Rappelons qu'une application  $d : \mathfrak{K}_0 \times \mathfrak{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est une distance si :

$$1 - d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$2 - d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

$$3 - d(A, B) = d(B, A)$$

$$4 - d(A, B) \geq 0$$

Nous prendrons :

$$(63) \quad d(A, B) = \text{Inf} \{ \rho : \rho \geq 0, A_\rho \supset B, B_\rho \supset A \}$$

On vérifie facilement les axiomes 1 à 4 (p. 51) et on montre :

$$(64) \quad d(A \cup B, C \cup D) \leq \text{Sup} \{ d(A, C), d(B, D) \}$$

$$(65) \quad d(A \oplus B, C \oplus D) \leq d(A, C) + d(B, D)$$

$$(66) \quad d(A_\rho, B_\rho) \leq d(A, B)$$

Convergence : une suite  $A_n \in \mathcal{X}_0$  converge vers  $A \in \mathcal{X}_0$  si  $d(A_n, A) \rightarrow 0$ .

Lemme 1 - Soit  $A_n \supset A_{n+1} \dots$  une suite décroissante dans  $\mathcal{X}_0$  et d'intersection  $A = \bigcap_{n>0} A_n$  non vide. Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$  pour la métrique (63).

[démonstration élémentaire]

Lemme 2 - Soit  $A_n$  une suite de Cauchy dans  $\mathcal{X}_0$  (c.a.d. :  $d(A_n, A_m) \rightarrow 0$  pour  $n, m \rightarrow \infty$ ). Alors; il existe  $A \in \mathcal{X}_0$  tel que  $\lim A_n = A$  :  $\mathcal{X}_0$  est un espace métrique complet.

Démonstration : On pose  $S_n = \bigcup_{v \geq n} A_v$ , et soit  $\bar{S}_n$  la fermeture de  $S_n$ . L'hypothèse du lemme entraîne que les  $\bar{S}_n$  sont bornés. Ils forment une suite décroissante dans  $\mathcal{X}_0$ , donc (lemme 1) cette suite

converge vers  $A = \bigcap_n \bar{S}_n$ . Pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists M$  avec  $\bar{S}_n \subset A_\varepsilon$  pour  $n > M$ , donc  $A_\nu \subset A_\varepsilon$  pour  $\nu > M$ .

D'autre part, on peut trouver  $N$  avec  $(A_\nu)_\varepsilon \supset A_\mu$  pour  $\nu, \mu > N$ , (puisque  $A_n$  est une suite de Cauchy). Donc  $(A_\nu)_\varepsilon \supset S_n$  pour  $\nu, n > N$ , et on peut remplacer  $S_n$  par  $\bar{S}_n$  puisque  $(A_\nu)_\varepsilon$  est fermé. Mais  $\bar{S}_n \supset A$ , donc  $(A_\nu)_\varepsilon \supset A$  pour  $\nu > N$ , ce qui achève de montrer  $A_n \rightarrow A$ .

Pour terminer cette section, voici quelques règles relatives aux rapports entre cette convergence et les opérations ensemblistes : les convergences  $A_n \rightarrow A$  et  $B_n \rightarrow B$  entraînent :

$$(68) \quad A_n \cup B_n \rightarrow A \cup B$$

$$(69) \quad \lim_n A_n \cap B_n = C \Rightarrow C \subset A \cap B$$

$$(70) \quad A_n \oplus B_n \rightarrow A \oplus B$$

Démonstration élémentaire - On notera que  $\cup$  et  $\oplus$  sont des opérations continues, mais non  $\cap$  -

#### 4-3-2 Le théorème de Compacité.

Le théorème suivant exprime que l'espace  $\mathcal{X}_0$  muni de la métrique définie ci-dessus est localement compact.

Théorème 1 - Soit  $\mathcal{a}$  une famille infinie de compacts non vides  $A \in \mathcal{a}$   
contenus dans un même cube  $U$ . -  $(\forall A \in \mathcal{a}, A \subset U)$  - On peut trouver

une suite d'ensembles  $A_n \in \mathcal{A}$  convergeant vers un compact  $A_0 \subset U$  non vide -

[Demonstration page 154 - 155 : analogue à la démonstration du théorème de Helly, et repose sur le procédé de diagonalisation de Cantor]

#### 4-3-3 Familles d'ensembles Continues et Semi-Continues

Soit  $A(\zeta)$  une famille à un paramètre d'ensembles compacts. Nous supposons que les  $A(\zeta)$  sont localement uniformément bornés : pour tout intervalle borné  $I$  de variation du paramètre  $\zeta$ , on peut trouver un cube  $U$  avec  $A(\zeta) \subset U$  pour tout  $\zeta \in I$ . On suppose que  $A(\zeta)$  n'est pas vide pour un  $\zeta$  au moins. Soit  $\xi_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) une suite de valeurs du paramètre  $\zeta$  convergeant vers une limite  $\xi$  et telle que les  $A(\xi_v)$  soient non vides et convergent vers une limite  $A_0$  dans  $\mathcal{A}_0$ .

On dira que la famille est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si pour toute suite  $\xi_v$  de ce type on a :

$$(73) \quad A(\xi_v) \rightarrow A_0 \subset A(\xi)$$

semi-continue inférieurement (s.c.i) si

$$(74) \quad A(\xi_v) \rightarrow A_0 \supset A(\xi)$$

et continue si

$$(75) \quad A(\xi_v) \rightarrow A_0 = A(\xi)$$

Une famille est continue si elle est à la fois s.c.s et s.c.i. Pour une famille continue, toute suite  $A(\xi_\nu)$  est convergente dès que la suite  $\xi_\nu$  est elle-même convergente. Il n'en est pas de même dans le cas d'une famille seulement s.c.s ou s.c.i.

Exemples-

- 1 - La famille  $A(\zeta) = \zeta A$  est continue.
- 2 - La famille  $A(\zeta) = B \oplus \zeta C$  ( $0 \leq \zeta < \infty$ ) est continue.

N° 4 - LE VOLUME

4-4-1 Familles d'ensembles et volumes, Théorème de BRUNN

Il s'agit ici d'examiner les relations entre les constructions de la géométrie ensembliste et la théorie de la mesure. Nous nous limitons à la classe  $\mathfrak{K}$  des compacts (qui sont des ensembles mesurable au sens de Lebesgue).

Soit  $A \in \mathfrak{K}_0$  un compact non vide,  $A_\rho$  ( $0 \leq \rho < \infty$ ) la famille des dilatés de  $A$  par les boules de rayons  $\rho$ ,  $V(A_\rho)$  le volume de  $A_\rho$  : la fonction

$$(77) \quad f(\rho) = V(A_\rho)$$

est continue sur l'intervalle ouvert  $(0, \infty)$ , et continue à droite en  $\rho = 0$ .

[on remarque  $A_{\rho_0} = \bigcap_{\rho > \rho_0} A_\rho$ , et on applique la continuité monotone de l'intégrale de Lebesgue, d'où la continuité à droite en

en tout  $\rho_0 \geq 0$ . On montre ensuite  $\overset{\circ}{A}_{\rho_0} = \bigcup_{\rho < \rho_0} A_\rho$  et  $\overline{\overset{\circ}{A}}_{\rho_0} = A_{\rho_0}$  et on déduit alors des propriétés de la mesure de Lebesgue la relation  $V(\overset{\circ}{A}_{\rho_0}) = V(A_{\rho_0})$ , d'où la continuité à gauche en  $\rho_0 > 0$ ]

En particulier :

$$(78) \quad \lim_{\rho \rightarrow +0} V(A_\rho) = V(A)$$

Si  $A_n$  est une suite convergeant vers  $A$  dans  $\mathfrak{K}_0$ , les  $V(A_n)$  ne convergent pas nécessairement vers  $V(A)$ , mais on a toujours :

$$(79) \quad \overline{\lim} V(A_n) \leq V(A)$$

Démonstration .: Soit  $\rho > 0$ , et  $N$  tel que  $A_n \subset A_\rho$  pour  $n \geq N$ . On a  $\overline{\lim} V(A_n) \leq V(A_\rho)$ , et il suffit d'appliquer (78).

Si  $A(\zeta)$  est une famille s.c.s. à un paramètre, la fonction

$$(80) \quad f(\zeta) = V(A(\zeta))$$

est s.c.s., c'est-à-dire vérifie :

$$\xi \rightarrow \xi_0 \Rightarrow \overline{\lim} f(\xi) \leq f(\xi_0)$$

[démonstration analogue]

### Relations entre le volume et les opérations de Minkowski

Ces relations jouent un rôle capital dans la suite. Pour  $A, B$  compacts non vides ( $\in \mathfrak{K}_0$ ), on a :

$$(82) \quad (V(A \oplus B))^{1/k} \geq (V(A))^{1/k} + (V(B))^{1/k}$$

(k, dimension de l'espace euclidien). Si de plus  $A/B \neq \emptyset$ , on a aussi :

$$(83) \quad (V(A/B))^{1/k} \leq (V(A))^{1/k} - (V(B))^{1/k}$$

[on note que (83) est une conséquence de (82), compte tenu de  $(A/B) \oplus B \subset A$ . La démonstration de (82) occupe les pages 159 à 161].

Soit  $A(\zeta)$  une famille concave au sens de 4-2-4. La relation

$$(86) \quad f(\zeta) = (V(A(\zeta)))^{1/k}$$

définit alors une fonction concave de  $\zeta$ , c'est-à-dire vérifiant :

$$(87) \quad f(\alpha\xi + \beta\eta) \geq \alpha f(\xi) + \beta f(\eta)$$

Ceci s'énonce :

Théorème II (BRUNN) Pour une famille concave (ou linéaire) d'ensembles à 1 paramètre, la racine  $k^{\text{ème}}$  du volume est une fonction concave du paramètre.

#### 4-4-2 Sections Efficaces

Pour  $k \geq 2$ , Soit  $E_i$  un plan à  $i$  dimensions ( $0 < i < k$ ) passant par l'origine, et  $A \in \mathcal{K}_0$  un compact non vide. Par tout point de  $A$ , menons le supplémentaire orthogonal  $E_{k-i}$  de  $E_i$  (plan projetant). L'ensemble des projections  $p = E_i \cap E_{k-i}$  des points de  $A$  est un ensemble  $A^i \subset E^i$ , compact et non vide. Nous appelons

$$(V(A^i))^{1/k}$$

$A^i = A|E_i$  le contour apparent de A dans le plan  $E_i$ . Si  $E_j \subset E_i$  ( $0 < j < i$ ) est un plan contenu dans  $E_i$ , on a manifestement :

$$(88) \quad (A^i)^j = A^j$$

Entre le contour apparent et les opérations de Minkowski, on a les relations évidentes :

$$(89) \quad (\lambda A)^i = \lambda A^i \quad ; \quad (A \oplus B)^i = A^i \oplus B^i$$

Le volume à i dimensions  $V(A^i)$  du contour apparent de A dans  $E_i$  s'appelle section efficace à i dimensions de A dans la direction  $E_{k-i}$  \* littéralement mesure transversale externe à i dimensions\*

On peut se demander s'il est possible de trouver une majoration du volume d'un ensemble à partir de ses sections efficaces. Il résulte d'une inégalité due à Loomis et Whitney que cela est même très facile.

Rapportons l'espace à un système orthonormé  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ . Il y a  $C_k^i$  i-plans de coordonnées (sous-tendus par une combinaison de i vecteurs choisis parmi les vecteurs de base).

Désignons par  $A_v^i$  ( $v = 1, 2, \dots, C_k^i$ ) les contours apparents à i dimensions de A sur ces plans de coordonnées. On a les inégalités :

$$(90) \quad V(A) \leq [ V(A_1^i) \dots V(A_{C_k^i}^i) ]^{\frac{1}{C_k^i}} \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

et l'égalité si et seulement si A est un cube dont les arêtes

sont parallèles aux vecteurs de base.

En particulier, pour  $i = k-1$ , le volume est majoré par la moyenne géométrique des  $k$  sections efficaces à  $k-1$  dimensions relatives à  $k$  directions deux à deux orthogonales

$$(91) \quad V(A) \leq [ V'(A_1^{k-1}) \dots V'(A_k^{k-1}) ]^{\frac{1}{k-1}}$$

[démonstration page 163]

Cas Particulier : Soit  $P$  un polyèdre dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de base,  $F(P)$  la surface de  $P$ . On vérifie facilement :

$$\sum_{v=1}^k V'(P_v^{k-1}) \leq \frac{1}{2} F(P)$$

Comme la moyenne arithmétique majore la moyenne géométrique, cette égalité jointe à (91) donne :

$$(92) \quad V(P) \leq \frac{F(P)}{2k}^{\frac{k}{k-1}}$$

avec égalité si et seulement si  $P$  est un cube. (Inégalité isopérimétrique pour la classe  $\mathcal{P}_k$  des polyèdres d'arêtes parallèles aux axes de coordonnées : le cube réalise le minimum de la surface à volume donné parmi les polyèdres de cette classe)

#### 4-4-3 Traversées, Théorème de Fubini

Soit  $k \geq 2$  et  $0 < i < k$ ,  $A \in \mathcal{A}_0$ ,  $E_i$  un plan à  $i$ -dimensions (ne passant pas nécessairement par l'origine). Le volume à

$i$  dimensions  $V'(A \cap E_i)$  s'appelle traversée à  $i$  dimensions de  $A$  (relative au plan  $E_i$ ). Les  $i$ -plans  $E_i$  orthogonaux à un  $(K-i)$ -plan fixe passant par l'origine  $O$  constituent une famille de  $i$ -plans parallèles.

On en déduit la définition générale d'une opération de symétrisation transformant l'ensemble  $A$  en un ensemble  $\tilde{A} \subset E_{k-i+1}$  symétrique par rapport à  $E_{k-i}$ : Précisons cette définition : on prend  $O \in E_{k-i} \subset E_{k-i+1}$ . Les  $E_i$  constituent la famille des  $i$ -plans orthogonaux à  $E_{k-i}$ . Par tout point  $p$  du contour apparent  $A^{k-i}$  de  $A$  dans  $E_{k-i}$  passe un  $i$ -plan  $E_i$  qui rencontre  $A$ , et en particulier une droite  $E_{k-i+1} \cap E_i$  orthogonale à  $E_{k-i}$ . Sur cette droite, nous portons le segment fermé de centre  $p$  dont la longueur est égale à la traversée  $V'(A \cap E_i)$ .  $\tilde{A}$  est la réunion de ces segments. La classe  $\mathcal{X}_0$  est stable pour cette opération. [démonstration simple p. 164 : on montre que  $\tilde{A}$  est fermé].

Théorème III (Fubini) - Soient  $A$  et  $B$  deux compacts,  $\mathcal{E}_i$  une famille de  $i$ -plans parallèles ( $0 < i < k$ ). Si pour tout  $E_i \in \mathcal{E}_i$  les traversées de  $A$  et  $B$  vérifient :  $V'(A \cap E_i) \leq V'(B \cap E_i)$ , on a  $V(A) \leq V(B)$ .

Corollaire - Si l'on a  $V'(A \cap E_i) = V'(B \cap E_i)$  pour tout  $E_i \in \mathcal{E}_i$ , on a aussi  $V(A) = V(B)$

[démonstration p. 165]

N° 5 - SYMETRISATIONS.

4-5-1 La Symétrisation de STEINER

Soit E un (k-1)-plan passant par l'origine (plan de symétrisation) et G une droite (de symétrisation) appartenant à la famille des droites orthogonales à E. Si p est un point du contour apparent A|E d'un ensemble  $A \in \mathcal{X}_0$ , la droite  $G_p$  (menée par p orthogonalement à E, ou droite projetante) coupe A selon l'ensemble non vide  $A \cap G_p$  de volume (à une dimension)  $V'(A \cap G_p) = s$ . On porte sur  $G_p$  le segment de longueur s centré en p. La réunion de ces segments est un ensemble  $\tilde{A}$  symétrique par rapport à E.

L'application :

$$S : A \rightarrow S(A) = \tilde{A}$$

est la symétrisation de Steiner (cas particulier de 4-4-3). On a  $\tilde{A} \in \mathcal{X}_0$ .

D'après le théorème de Fubini, le volume est invariant par la symétrisation de Steiner :

$$(94) \quad V [S(A)] = V(A)$$

Si A et B sont deux ensembles non disjoints, la règle suivante est applicable :

$$(95) \quad V [S(A) \cap S(B)] = V (A \cap B) + V [S(A \cap \overline{B^c}) \cap S(B \cap \overline{A^c})]$$

( $\overline{B^c}$ ,  $\overline{A^c}$  fermeture des complémentaires de A et de B)

Démonstration de (95) - Pour une droite symétrisante G quelconque,

on a ::

$$\begin{aligned} V' [S(A) \cap S(B) \cap G] &= \text{Inf} \{ V'(A \cap G) , V'(B \cap G) \} = \\ &= V' (A \cap B \cap G) + \text{Inf} \{ V'(A \cap \overline{B^c} \cap G) , V'(B \cap \overline{A^c} \cap G) \} = \\ &= V' (A \cap B \cap G) + V' [S(A \cap \overline{B^c}) \cap S(B \cap \overline{A^c}) \cap G] \end{aligned}$$

et on applique ensuite le théorème de Fubini -

Notons encore les règles simples

$$(96) \quad A \subset B \implies S(A) \subset S(B)$$

$$(97) \quad S(\lambda A) = \lambda S(A) \quad (\lambda > 0)$$

$$(99) \quad S(K) = K \quad (K, \text{boule unité de centre } 0)$$

On en déduit que les rayons r et R des boules inscrites et circonscrites vérifient :

$$(100) \quad r(S(A)) \geq r(A) \quad ; \quad R[S(A)] \leq R(A)$$

En ce qui concerne les opérations de Minkowski, on a les règles particulièrement importantes que voici :

$$(101) \quad S(A \oplus B) \supset S(A) \oplus S(B)$$

$$(102) \quad S(A/B) \subset S(A) / S(B) \quad (A/B \neq \emptyset)$$

En particulier, les ensembles parallèles  $A_\rho$  vérifient

$$(103) \quad S(A_\rho) \supset [S(A)]_\rho \quad (0 \leq \rho < \infty)$$

$$(104) \quad S(A_{-\rho}) \subset [S(A)]_{-\rho} \quad (0 \leq \rho < r)$$

[démonstration p. 167]

L'opération de Steiner n'est pas continue \*mais seulement s.c.s.\* Elle vérifie cependant l'implication :

$$(105) \quad A_n \rightarrow A, \quad S(A_n) \rightarrow \tilde{A} \Rightarrow \tilde{A} \subset S(A)$$

#### 4-5-2 Régularisation par Rotation

Soit  $n > 0$  un entier, et  $\delta_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ )  $n$  rotations autour de l'origine, et  $\lambda_\nu$   $n$  coefficients non négatifs et normés ( $\lambda_\nu \geq 0$ ,  $\sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu = 1$ ). Désignons par  $A^{\delta_\nu}$  le transformé de  $A$  par la rotation  $\delta_\nu$ . L'opération  $T$  de régularisation (relatives aux rotations  $\delta_\nu$  et aux coefficients  $\lambda_\nu$ ) est définie pour  $A \in \mathfrak{E}_0$  par :

$$(106) \quad \tilde{A} = T(A) = \lambda_1 A^{\delta_1} \oplus \dots \oplus \lambda_n A^{\delta_n}$$

Il résulte de (44) que  $\tilde{A} \in \mathfrak{E}_0$ .

Voici quelques propriétés simples de l'opération  $T$ . On déduit d'abord de (82) et de l'invariance du volume pour les rotations :

$$(108) \quad V [T(A)] \geq V(A)$$

Mentionnons les règles simples :

$$(109) \quad A \subset B \implies T(A) \subset T(B)$$

$$(110) \quad T(\lambda A) = \lambda T(A) \quad (\lambda > 0)$$

$$(112) \quad T(K) = K \quad (K, \text{boule unité centrée en } 0)$$

On en déduit :

$$(113) \quad r(T(A)) \geq r(A) \quad ; \quad R(T(A)) \leq R(A)$$

En ce qui concerne les opérations de Minkowski :

$$(114) \quad \begin{cases} T(A \oplus B) = T(A) \oplus T(B) \\ T(A / B) \subset T(A) / T(B) \end{cases}$$

En particulier, pour les ensembles parallèles :

$$(115) \quad T(A_\rho) = (T(A))_\rho \quad (0 \leq \rho < \infty)$$

$$(116) \quad T(A_{-\rho}) \subset (T(A))_{-\rho} \quad (0 \leq \rho < r)$$

Contrairement à la symétrisation, la régularisation par rotation est une opération continue. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \implies T(A_n) \rightarrow T(A) \quad (\text{dans } \mathfrak{E}_0)$$

4-5-3 Théorème de la mise en boule

On peut réitérer les opérations S et T introduites ci-dessus, en faisant varier les éléments qui les définissent : en effectuant successivement les symétrisations  $S^i$  autour de différents plans  $E_i$  passant par l'origine, on obtient une symétrisation multiple  $S^*$ . De même, en effectuant successivement plusieurs régularisations selon différents choix des rotations  $\delta_\nu$  et des coefficients  $\lambda_\nu$ , on obtient une opération  $T^*$  : mais ici, il se trouve que T est encore une régularisation simple par rotation.

Si  $A \in \mathfrak{X}_0$  est un compact non vide, on peut considérer la classe  $\mathfrak{S}$  des symétrisés  $S^*(A)$  et la classe  $\mathfrak{T}$  des régularisés  $T^*(A)$ ,  $S^*(T^*)$  décrivant l'ensemble des symétrisations multiples (des régularisations par rotation). \*En appliquant à ces classes le théorème de compacité, on obtient les deux théorèmes suivants qui expriment que ces opérations conduisent, à la limite, à des boules \* :

Théorème IV - Soit  $A \in \mathfrak{X}_0$ , et  $\mathfrak{S}$  la classe des ensembles déduits de A par symétrisations multiples. On peut extraire de  $\mathfrak{S}$  une suite  $A_n$  convergeant dans  $\mathfrak{X}_0$  vers une boule fermée  $K_0$  admettant même volume que A :  $V(K_0) = V(A)$

Théorème V - Soit  $A \in \mathfrak{X}_0$ , et  $\mathfrak{T}$  la classe des régularisés par rotation déduits de A. On peut extraire de  $\mathfrak{T}$  une suite  $A_n$  convergeant dans  $\mathfrak{X}_0$  vers une boule  $K_0$  vérifiant :  $V(A) \leq V(K_0)$

[démonstration pages 171-173]

4-5-4 L'Inégalité de Bieberbach

Le second théorème de "mise en boule" permet de résoudre certains problèmes d'extremum, et par exemple de retrouver la propriété connue de la boule de posséder le plus grand volume possible à diamètre  $D(A)$  donné.

Cette propriété extrême se déduit de l'inégalité suivante, due à BIEBERBACH :

$$(120) \quad V(A) \leq 2^{-k} \omega_k (D(A))^k$$

avec égalité si et seulement si  $A$  est une boule ( $\omega_k$ , volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^k$ )

[démonstration p. 173-174]

4-5-5 Rayons volumiques, Théorèmes d'Erhard SCHMIDT

On peut donner une forme élégante aux inégalités de Brunn-Minkowski obtenues en 4-4-1, en introduisant la notion de rayon volumique : le rayon volumique  $v(A)$  d'un ensemble  $A \in \mathfrak{X}_0$  est le rayon de la boule admettant même volume que  $A$  :

$$(121) \quad V(A) = \omega_k (v(A))^k$$

Les inégalités (82) et (83) se mettent alors sous la forme :

$$(122) \quad v(A \oplus B) \geq v(A) + v(B) \quad ; \quad v(A/B) \leq v(A) - v(B)$$

On a l'égalité lorsque  $A$  et  $B$  sont des boules

[nouvelle démonstration de (122) à partir des théorèmes de mise en boule, p. 174, 175]

Soit  $K$  la boule unité centrée en  $O$ , et considérons les trois familles d'ensemble :

$$A_\rho = A \oplus \rho K \quad ; \quad A_{-\rho} = A/\rho K \quad ; \quad A^\rho = \rho K/\overset{\vee}{A}$$

( $\overset{\vee}{A}$ , transposé de  $A$  \*en notation M.M.,  $A^\rho = \rho K \ominus A^*$ )

$A_\rho$  : ensemble des points situés à distance  $\leq \rho$  de  $A$

$A_{-\rho}$  : ensemble des points situés à distance  $\geq \rho$  de  $A^c$

$A^\rho$  : points situés à distance  $\leq \rho$  de tout point de  $A$ .

De (122) résultent alors les inégalités de Erhard Schmidt :

$$(123) \quad v(A_\rho) \geq v(A) + \rho \quad ; \quad v(A_{-\rho}) \leq v(A) - \rho \quad ;$$

$$v(A^\rho) \leq \rho - v(A)$$

avec égalité dès que  $A$  est une boule.

Si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles bornés, on pose :

$$(124) \quad D(A,B) = \text{Sup} \{d(a,b), a \in A, b \in B\}$$

$$(125) \quad D'(A,B) = \text{Inf} \{d(a',b), a' \in A^c, b \in B\}$$

(avec manifestement  $D(A,A) = D(A)$ , diamètre de  $A$ , et  $D'(A,A) = 0$ ).

E. Schmidt a établi les inégalités :

$$(126) \quad \begin{aligned} v(A) + v(B) &\leq D(A,B) \\ v(A) - v(B) &\geq D'(A,B) \quad (A \supset B) \end{aligned}$$

avec égalité si A et B sont des boules concentriques. La seconde relation (126) généralise l'inégalité (120) de Bieberbach, que l'on peut écrire :

$$(127) \quad 2 v(A) \leq D(A)$$

[démonstration p. 176)

C H A P I T R E V

VOLUME, SURFACE ET ISOPERIMETRIE

N° 1 - La Surface au sens de Minkowski

5-1-1 - Surface relative intérieure et extérieure

Minkowski a eu l'idée fructueuse de ramener la mesure de la longueur d'une courbe et de l'aire d'une surface à la mesure beaucoup plus simple de volumes de l'espace ; il reprend les ensembles parallèles externes, déjà introduits par Cantor, et définit ces quantités à l'aide de passages à la limite effectués sur le volume de ces parallèles. Ces idées, convenablement systématisées, conduisent à une méthode générale pour la mesure des domaines sous-dimensionnels de l'espace, et apportent une plus grande simplicité conceptuelle qu'aucun autre système. Il se trouve, en particulier, que la mesure des ensembles (courbes, surfaces) de différentes dimensions dans un même espace se détermine selon le même procédé très simple, qui permet de plus une généralisation au cas où la dimension est un nombre réel quelconque non entier. Par contre, ces grandeurs introduites par Minkowski, comparables à des volumes, ne sont pas des mesures : elles sont bien additives, mais non, en général,  $\sigma$ -additives.

Dans ce qui suit, nous exposons la mesure des surfaces au sens de Minkowski. Nous nous limitons au cas des

ensembles de la classe  $\mathcal{K}_0$  (compacts non vides).

Les 4 relations qui suivent s'appliquent pour  $A, B, C \in \mathcal{K}_0$  ;  $V$  est la mesure de Lebesgue,  $\oplus$  et  $/$  désignent les opérations de Minkowski et  $\rho C$  l'homothétie de  $C$  dans l'homothétie de centre  $O$  et de module  $\rho$ . Pour  $\rho \rightarrow 0$ , nous posons :

$$(1) \quad F_+ (A, C) = \underline{\lim} \left( \frac{V(A \oplus \rho C) - V(A)}{\rho} \right)$$

$$(2) \quad F_- (A, C) = \underline{\lim} \left( \frac{V(A) - V(A/\rho C)}{\rho} \right)$$

$$(3) \quad F_+^* (A, C) = \overline{\lim} \frac{V(A \oplus \rho C) - V(A)}{\rho}$$

$$(4) \quad F_-^* (A, C) = \overline{\lim} \frac{V(A) - V(A/\rho C)}{\rho}$$

et nous dirons que ces nombres  $\geq 0$  (pourvu qu'ils soient  $< \infty$ ) sont respectivement les surfaces relatives (de  $A$  par rapport à  $C$ ) inférieure externe, inférieure interne, supérieure externe et supérieure interne. Lorsque les limites ci-dessus n'existent pas, on convient de dire que les surfaces correspondantes sont infinies.

Dans les cas usuels, ces nombres existent tous les quatre et coïncident : dans ce cas, leur valeur commune  $F(A, C)$  s'appelle simplement surface relative de Minkowski (de  $A$  relativement à  $C$ ). Exemples simples, mais importants : si  $K$  est la boule unité, et  $W$  le cube unité, on a :

$$\dots \left( \dots \right)$$

$$(5) \quad F(W,W) = k \quad , \quad F(K,K) = k \omega_k$$

$$(6) \quad F(W,K) = 2k \quad , \quad F(K,W) = k \omega_{k-1}$$

( $\omega_i$ , i-volume de la boule à i dimensions de rayon unité)

Mais il peut arriver qu'aucun de ces 4 nombres n'existent [exemple p. 180], ou que certains existent mais non les autres [exemple p. 181].

Lorsqu'ils existent tous les quatre, on peut se demander s'il existe nécessairement des relations entre ces nombres. Il est manifeste que l'on a :

$$(7) \quad F_{\pm}(A,C) \leq F_{\pm}^*(A,C)$$

Mais l'inégalité peut être stricte [exemple p. 181]. Les relations entre les deux nombres externes ont été bien étudiées, le cas des deux nombres internes reste encore obscur.

#### Propriétés Simples.

Ces nombres sont invariants pour les translations (de A et de C), ils sont  $\geq 0$ , vérifient des relations du type :

$$(10) \quad F(\lambda A, \mu C) = \lambda^{k-1} \mu F(A,C) \quad (\lambda > 0, \mu > 0)$$

Pour deux ensembles disjoints A et B, on a :

$$(11) \quad F_{\pm}(A,C) + F_{\pm}(B,C) \leq F_{\pm}(A \cup B, C) \leq F_{\pm}(A,C) + F_{\pm}^*(B,C)$$

et :

$$(12) \quad F_{\pm}^* (A, C) + F_{\pm}^* (B, C) \geq F_{\pm}^* (A \cup B, C) \geq F_{\pm}^* (A, C) + F_{\pm}^* (B, C)$$

Ces fonctions d'ensembles sont donc définies  $\geq 0$ , invariantes par translation, homogènes (de degré  $k-1$  relativement à  $A$ , et de degré  $1$  relativement à  $C$ ). Enfin, les nombres inférieurs sont suradditifs, les nombres supérieurs sous-additifs

#### 5-1-2 Aire relative d'un ensemble superficiel

Les définitions ci-dessus s'étendent au cas d'un ensemble qui n'est plus "spatial", mais "superficiel". Pour  $A, C \in \mathcal{X}_0$ , posons :

$$(13) \quad f(A, C) = \underline{\lim} \frac{V(A \oplus \rho C)}{2\rho} \quad (\rho \rightarrow +0)$$

$$(14) \quad f^*(A, C) = \overline{\lim} \frac{V(A \oplus \rho C)}{2\rho}$$

Ce sont les mesures superficielles relatives (de  $A$  par rapport à  $C$ ) inférieures et supérieures. Elles peuvent être infinies. Le caractère "superficiel" de  $A$  (par rapport à  $C$ ) se manifeste par le fait que l'un au moins de ces nombres est fini. Une étude plus approfondie conduit à la notion de dimension de Minkowski de  $A$  par rapport à  $C$ . On peut procéder comme suit. Pour  $\rho > 0$ ,  $-\infty < \tau < \infty$ , on introduit les "quotients caractéristiques"

$$q_{\tau} (A, C, \rho) = \frac{1}{\rho^{k-\tau}} V(A \oplus \rho C)$$

et l'on cherche, pour  $\rho \rightarrow 0$ , les deux limites :

$$q_{\tau}(A, C) = \underline{\lim} q_{\tau}(A, C, \rho) ; \quad q_{\tau}^*(A, C) = \overline{\lim} q_{\tau}(A, C, \rho)$$

On pose ensuite :

$$\mu(A, C) = \text{Inf} \{ \tau, q_{\tau}(A, C) = 0 \}, \quad \mu^*(A, C) = \text{Inf} \{ \tau, q_{\tau}^*(A, C) = 0 \}$$

Ces deux nombres existent toujours, vérifient :

$$0 \leq \mu(A, C) \leq \mu^*(A, C) \leq k$$

et s'appellent dimensions inférieure et supérieure de A par rapport à C. Ils peuvent être différents l'un de l'autre. On dira qu'un ensemble A est superficiel (par rapport à C) si  $\mu(A, C) = \mu^*(A, C) = k - 1$ .

Si les nombres (13) et (14) existent, ils vérifient :

$$(15) \quad f(A, C) \leq f^*(A, C)$$

Si l'on a l'égalité, on dira que A admet une mesure superficielle relativement à C, au sens de Minkowski, qui est la valeur commune  $f(A, C) = f^*(A, C)$ .

Il est naturel de se demander quelles relations peuvent exister entre les surfaces relatives d'un ensemble "d'espace" A et la mesure superficielle de sa frontière  $\text{Fr } A = A'$ . Lorsque C est convexe, on a les inégalités :

$$(16) \quad 2 f(A', C) \geq F_+(A, C) + F_-(A, \check{C})$$

$$(17) \quad 2 f^*(A', C) \leq F_+^*(A, C) + F_-^*(A, \check{C})$$

( $\check{C}$ , transposé de  $C$ ) [démonstration p. 183 - 184]

La forme de ces relations suggère que les convexes  $C$  admettant un centre, c'est-à-dire vérifiant  $C = \check{C}$  à une translation près) vont jouer un rôle important : si les 4 nombres (1) à (4) coïncident pour  $A$ , et si  $C$  est un convexe centré et propre\* c'est-à-dire d'intérieur non vide\* il résulte de (15), (16) et (17) que les nombres (13) et (14) coïncident également. Ainsi :

Théorème 1 Si  $A \in \mathcal{E}_0$  admet une surface relative  $F(A, C)$  relativement à un convexe propre centré  $C$ , sa frontière  $F_r A$  admet une mesure superficielle relativement à  $C$ , et l'on a

$$(18) \quad F(A, C) = f(F_r A, C)$$

### 5-1-3 La surface usuelle au sens de Minkowski

Les résultats ci-dessus sont particulièrement significatifs lorsque l'ensemble  $C$  est la boule unité. Les nombres (1) à (4) se déduisent, par passage à la limite, des volumes des ensembles parallèles à  $A$ . Dans ce cas particulier, nous sous-entendrons l'ensemble  $C$ , et nous écrirons (pour  $\rho \rightarrow +0$ ) :

$$(19) \quad F_+(A) = \lim_{\rho} \frac{V(A_\rho) - V(A)}{\rho}$$

$$(20) \quad F_{-}(A) = \underline{\lim} \frac{V(A) - V(A_{-\rho})}{\rho}$$

$$(21) \quad F_{+}^{*}(A) = \overline{\lim} \frac{V(A_{\rho}) - V(A)}{\rho}$$

$$(22) \quad F_{-}^{*}(A) = \overline{\lim} \frac{V(A) - V(A_{-\rho})}{\rho}$$

Lorsque ces limites existent, nous les appelons surfaces (inférieures, externes, etc...) usuelles de Minkowski de l'ensemble A.

De même, les relations (13) et (14) sont remplacées dans ce cas particulier par :

$$(23) \quad f(A) = \underline{\lim} \frac{V(A'_{\rho})}{2 \rho} \quad (\rho \rightarrow + 0)$$

$$(24) \quad f^{*}(A) = \overline{\lim} \frac{V(A'_{\rho})}{2 \rho} \quad (\rho \rightarrow + 0)$$

Lorsque les nombres (19) à (22) coïncident, leur valeur commune  $F(A)$  s'appelle surface usuelle de Minkowski de l'ensemble A. Dans le cas d'un polyèdre,  $F(A)$  existe, et coïncide avec la surface telle qu'on la définit en géométrie élémentaire.

Plus précisément, si  $V_{\rho}$  et  $V_{-\rho}$  sont les volumes des ensembles  $A_{\rho}$ ,  $A_{-\rho}$  parallèles à un polyèdre A, on a :

$$(25) \quad V_{\rho} = V + F \rho + O(\rho)$$

$$(26) \quad V_{-\rho} = V - F \rho + O(\rho)$$

Si le polyèdre  $A$  est convexe,  $V$  son volume,  $F$  sa surface,  $r > 0$  le rayon d'une boule fermée contenue dans  $\overset{\circ}{A}$ , on a les inégalités plus précises (qui seront utilisées par la suite) :

$$(27) \quad V + F \rho < V_{\rho} < V + F \rho + 2^k \left(\frac{1}{r}\right)^2 V \rho^2$$

$$(28) \quad V - F \rho - \frac{k^2}{r^2} V \rho^2 < V_{-\rho} < V - F \rho + \frac{k}{r} F \rho^2$$

On remarque que ces expressions ne font intervenir (abstraction faite de  $r$ ) que le volume et la surface du polyèdre.

[démonstration p. 186 - 187]

## N° 2 - L'INEGALITE DES ISOPERIMETRES

### 5-2-1 Le théorème de Brunn-Minkowski

La notion de surface au sens de Minkowski est un point de départ commode pour l'étude du problème des isopérimètres (relatif à des ensembles fermés quelconques). Le théorème de Brunn-Minkowski va jouer ici un rôle important. Nous allons étudier ce théorème sous sa forme complète, en examinant les conditions dans lesquelles les inégalités (82) deviennent des égalités.

Théorème III (Brunn-Minkowski) Si  $A$  et  $B$  sont deux compacts non vides,

on a :

$$(29) \quad (V(A \oplus B))^{1/k} \geq (V(A))^{1/k} + (V(B))^{1/k}$$

Pour  $V(A), V(B) > 0$ , l'égalité est réalisée si, et seulement si A et B sont convexes et homothétiques.

Dans les mêmes hypothèses, on a encore :

Corollaire A - La soustraction de Minkowski vérifie la relation

$$(30) \quad (V(A/B))^{1/k} \leq (V(A))^{1/k} - (V(B))^{1/k} \quad (A/B \neq \emptyset)$$

On passe de (29) à (30) à l'aide de l'inégalité :

$$(31) \quad V[(A/B) \oplus B] \leq V(A)$$

#### 5-2-2 Le théorème des Isopérimètres

L'étude des relations entre la surface de A relativement à B et les volumes de A et B conduit aux inégalités des isopérimètres. Elles généralisent une inégalité classique célèbre selon laquelle la boule possède, à volume donné, la plus petite surface possible. La classe des ensembles dans laquelle s'effectue la comparaison dépend évidemment du concept de surface que l'on utilise. Dans notre cas, il s'agit de la classe  $\mathfrak{K}_0$  des compacts non vides.

Dans l'inégalité ci-dessous (dont nous donnerons la démonstration dans une autre section), il faut élucider les conditions sous lesquelles l'égalité est réalisée. Pour cela, nous limiterons légèrement la classe d'ensembles sur laquelle nous

travaillons. Introduisons d'abord une notion auxiliaire due à Erhard Schmidt. Soit A un ensemble mesurable au sens de Lebesgue. Un point  $a \in A$  est dit étranger en volume à A si l'on peut trouver une boule K de rayon  $> 0$  et de centre a avec  $V(A \cap K) = 0$ . Sinon, l'on dit que a est lié en volume à A. L'ensemble des points étrangers en volume à A est le voile  $\overset{\cdot\cdot}{A}$  de A. C'est manifestement un sous-ensemble de la frontière  $F_r A$  de A. L'ensemble des points liés en volume à A est l'intérieur volumique  $A^\circ$  de A. Si  $\overset{\cdot\cdot}{A} = \emptyset$ , on dit que A est un ensemble sans voile. Ainsi, la fermeture d'un domaine ouvert est un ensemble sans voile. Il y a des ensembles sans voile dont l'intérieur est vide.

Nous nous contentons ici d'énoncer :

Théorème IV (Théorème des Isopérimètres) Soient A et B des compacts non vides, et  $F_+(A,B)$  la surface inférieure externe de A relativement à B. On a l'inégalité :

$$(32) \quad F_+(A,B) \geq k(V(A))^{\frac{k-1}{k}} (V(B))^{\frac{1}{k}}$$

Si A et B sont sans voiles et de volumes  $> 0$ , l'égalité est réalisée si et seulement si A et B sont convexes et homothétiques.

Corollaire B - La surface inférieure interne  $F_-(A,B)$  de A relativement à B vérifie l'inégalité :

$$(33) \quad F_-(A,B) \geq k(V(A))^{\frac{k-1}{k}} (V(B))^{\frac{1}{k}}$$

D'après (7), ces inégalités sont vraies aussi pour les surfaces supérieures interne et externe. Enfin, (16) montre que la mesure superficielle  $f(A',B)$  de la frontière  $A' = F_r A$  vérifie aussi l'inégalité des isopérimètres :

$$(34) \quad f(A',B) \geq k(V(A))^{\frac{k-1}{k}} (V(B))^{\frac{1}{k}}$$

pourvu que B soit convexe, propre et centré.

3-2-3 à 5-2-5 [Démonstration des Théorèmes III et IV, pages 189 à 195]

5-2-6 Propriétés isopérimétriques de la Boule.

Prenons comme ensemble B la boule unité, afin d'examiner l'inégalité des isopérimètres dans le cas de la surface usuelle, au sens de Minkowski. Elle prend la forme, pour  $A \in \mathcal{X}_0$  :

$$(47) \quad F(A) \geq k (\omega_k)^{\frac{1}{k}} (V(A))^{\frac{k-1}{k}}$$

$\omega_k$  désigne ici le k volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^k$

Si la frontière  $A'$  de A admet une mesure superficielle, on a :

$$(48) \quad f(A') \geq k (\omega_k)^{\frac{1}{k}} (V(A))^{\frac{k-1}{k}}$$

Abstraction faite d'un voile, ces inégalités deviennent des égalités si et seulement si A est une boule.

## CHAPITRE VI

### LES FIGURES CONVEXES ET LA GEOMETRIE INTEGRALE

#### N° 1 - LES FIGURES CONVEXES ET LEURS CARACTERISTIQUES

##### 6-1-1 Les tâches de la Géométrie des Ovoïdes.

On appelle ovoïde un ensemble fermé, borné et convexe. Les polyèdres convexes sont des ovoïdes qui jouent un rôle important dans la théorie. On dit qu'un ovoïde  $A$  est propre si son intérieur n'est pas vide, impropre dans le cas contraire: dans ce dernier cas, il est contenu dans un plan  $E : A \subset E$ . Les notions de plan d'appui, d'ensemble d'appui, de demi-espace d'appui, et de distance d'appui se définissent comme dans le cas des polyèdres. Indiquons quelques-uns des résultats de la géométrie élémentaire des corps convexes. Un ovoïde est l'intersection de ses demi-espaces d'appui. Deux ovoïdes  $A$  et  $B$  disjoints se laissent séparer par un plan  $E$ , de sorte que  $A$  tombe à l'intérieur de l'un des demi-espaces définis par  $E$ , et  $B$  à l'intérieur de l'autre. Par un point frontière  $p \in F_r A$  d'un ovoïde  $A$  il passe au moins un plan d'appui. On dit que  $p$  est régulier ou singulier selon que ce plan d'appui est unique ou non. Un ensemble d'appui qui admet un point intérieur (pour la topologie induite dans le plan d'appui correspondant) est une face plane. Si l'origine  $O \in A$ , la distance

d'appui  $h(A, U)$  (de 0 au plan d'appui admettant la normale orientée  $U$ ) est une fonction  $\geq 0$  et continue (fonction d'appui) de la direction  $u$ . Les points  $p$  appartenant à l'ovoïde  $A$  sont caractérisés par le système d'inégalités :

$$(1) \quad \langle p, u \rangle \leq h(A, u) \quad (p \in A, \quad u \in S, \text{ sphère unité})$$

Nous désignerons par  $\mathcal{K}$  la classe des ovoïdes. On a  $\emptyset \in \mathcal{K}$ . On désignera aussi par  $\mathcal{K}'$ , resp.  $\mathcal{K}''$  la classe des ovoïdes propres, resp. impropres. Ils contiennent encore l'ensemble vide  $\emptyset$ . La classe  $\mathcal{K}$  est stable pour les opérations suivantes :  $\cap$ , intersection par un  $i$ -plan, passage au contour apparent dans un  $i$ -plan, soit :

$$(2) \quad A, B \in \mathcal{K} \implies A \cap B \in \mathcal{K}$$

$$(3) \quad A \in \mathcal{K} \implies A \cap E_i, A|E_i \in \mathcal{K}$$

On a encore :

$$(4) \quad A \in \mathcal{K} \implies \lambda A \in \mathcal{K} \quad (\lambda \geq 0)$$

$$(5) \quad A, B \in \mathcal{K} \implies A \oplus B, \quad A / B \in \mathcal{K}$$

Il résulte de (5) que tous les parallèles  $A_\rho$  ( $-r \leq \rho < \infty$ ) d'un ovoïde sont encore des ovoïdes.

[Démonstration élémentaire page 200]

Enfin, si  $S$  et  $T$  désignent la symétrisation et la régularisation par rotation, on a aussi :

$$(6) \quad A \in \mathcal{K} \implies S(A), \quad T(A) \in \mathcal{K}$$

Si une suite  $A_n$  d'ovoïdes converge vers  $A$  dans  $\mathcal{X}_0$ ,  $A$  est encore un ovoïde

$$(7) \quad A_n \in \mathcal{K}, \quad A_n \rightarrow A \implies A \in \mathcal{K}$$

[Démonstration élémentaire]

Le théorème de compacité montre que de toute famille infinie d'ovoïdes contenus dans un même cube, on peut extraire une famille convergeant vers un ovoïde (contenu dans ce cube) : la classe  $\mathcal{K}$  est localement compacte.

Les figures convexes de révolution possèdent un haut degré de symétrie. Les rotations autour d'un axe  $R$  (axe de révolution) les laissent invariantes. La symétrie de révolution d'un ovoïde  $A$  est caractérisée par le fait que tout plan orthogonal à  $R$  coupe  $A$  selon une  $(k-1)$ -boule dont le centre est sur  $R$ .

On désignera par  $\mathcal{R}$  la classe des ovoïdes de révolutions admettant le même axe  $R$  (passant par l'origine).  $\mathcal{R}$  contient  $\emptyset$ . Pour les ovoïdes non vides, on a les règles

$$(8) \quad A \in \mathcal{R} \implies \lambda A \in \mathcal{R} \quad (\lambda \geq 0)$$

$$(9) \quad A, B \in \mathcal{R} \implies A \oplus B, \quad A / B \in \mathcal{R}$$

Un 2-plan contenant l'axe  $R$  coupe un ovoïde  $A \in \mathcal{R}$  selon un ovoïde plan symétrique par rapport à  $R$ . Son contour est la méri-  
dienne de  $A$ . Le plus grand rayon  $a$  du cercle d'intersection de  $A$

par un plan orthogonal à l'axe R est le rayon équatorial. La largeur de A dans une direction orthogonale à R est donc 2 a. La largeur de A dans la direction de l'axe R est la longueur  $\ell$  de A. Les deux nombres  $a(A)$  et  $\ell(A)$  vérifient les relations (40) et (41) de 4-2-1.

#### 6-1-2 Fonctionnelles sur la Classes des Ovoïdes

Soit  $\varphi$  une fonction définie sur la classe  $\mathcal{K}$  des ovoïdes, qui, à tout  $A \in \mathcal{K}$ , fait correspondre un nombre réel  $\varphi(A)$ . Nous adopterons toujours la convention :

$$(10) \quad \varphi(\emptyset) = 0$$

et nous dirons alors que  $\varphi$  est une fonctionnelle sur  $\mathcal{K}$ . Voici quelques propriétés importantes que peuvent vérifier, (ou non) ces fonctionnelles.

- Invariance pour le groupe des déplacements
- Invariance pour les translations
- être définies  $\geq 0$ , strictement définie selon que :

$$(13) \quad \varphi(A) \geq 0 \quad \text{ou} \quad \varphi(A) > 0 \quad \forall A \in \mathcal{K}, A \neq \emptyset$$

- monotonie :

$$(14) \quad A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$$

- Si pour tout cube W il existe une constante C avec :

$$(16) \quad \forall A \in \mathcal{K}, A \subset W \Rightarrow |\varphi(A)| \leq C$$

on dit que  $\varphi$  est bornée.

-  $\varphi$  est homogène de degré  $i$  si :

$$(16) \quad \varphi(\lambda A) = \lambda^i \varphi(A) \quad (\lambda > 0)$$

-  $\varphi$  est continue si :

$$A_n \rightarrow A \implies \varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A)$$

-  $\varphi$  est fortement additive (ou additive) si :

$$(18) \quad A, B, A \cup B \in \mathcal{K} \implies \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cap B) + \varphi(A \cup B)$$

Il est important de distinguer le cas particulier où l'ovoïde  $A \cup B$  est décomposé en  $A$  et  $B$  par un plan (rencontrant  $A \cap B$ ); si l'on a de plus en pareil cas :

$$(19) \quad \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A \cup B) \quad (A \cap B \in \mathcal{K}, A \cap B \in \mathcal{K}''')$$

on dit que  $\varphi$  est simplement additive. Une fonctionnelle simplement additive est une fonctionnelle fortement additive qui s'annule sur la classe  $\mathcal{K}''$  des ovoïdes impropres.

On dit que  $\varphi$  est sous-additive si :

$$(20) \quad \varphi(A) + \varphi(B) \geq \varphi(A \cup B) \quad (A \cup B \in \mathcal{K}, A \cap B \in \mathcal{K}''')$$

et suradditive si :

$$(21) \quad \varphi(A) + \varphi(B) \leq \varphi(A \cup B) \quad (A \cup B \in \mathcal{K}, A \cap B \in \mathcal{K}''')$$

Exemples simples :

$\varphi(A) = V(A)$  (volume) est simplement additive.

$\varphi(A) = b(A, u)$  (largeur dans la direction  $u$ ) est additive.

$\varphi(A) = D(A)$  (diamètre) est sous-additive.

Certaines fonctionnelles ont un rapport étroit avec les combinaisons linéaires normées de Minkowski : si pour tout  $A, B \in \mathcal{K}$  non vides, et tous  $\alpha, \beta \geq 0$  tels que  $\alpha + \beta = 1$  l'une des trois relations suivantes est vérifiée :

$$(22) \quad \varphi(\alpha A \oplus \beta B) \geq \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$$

$$(23) \quad \varphi(\alpha A \oplus \beta B) \leq \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$$

$$(24) \quad \varphi(\alpha A \oplus \beta B) = \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$$

on dit, respectivement, que la fonctionnelle est concave, convexe ou linéaire au sens de Minkowski.

Exemples - Le rayon  $r(A)$  de la sphère inscrite est une fonctionnelle concave, le rayon  $R(A)$  de la sphère circonscrite une fonctionnelle convexe, et la largeur  $b(A, u)$  dans la direction  $u$  une fonctionnelle linéaire.

Ces propriétés ne sont pas indépendantes. Compte tenu de (10), une fonctionnelle monotone est définie  $\geq 0$ , et de plus elle est bornée. On vérifie sans peine qu'une fonctionnelle invariante par translation, monotone et homogène est continue sur la classe  $\mathcal{K}'$  des ovoïdes propres. Mais cela n'est pas toujours vrai sur la classe  $\mathcal{K}$ . Exemple :  $\varphi(A) = 0$  ou  $1$  selon que  $A \in \mathcal{K}''$  ou  $A \in \mathcal{K}'$ .

Nous verrons plus tard que toute fonctionnelle additive, monotone

et invariante par déplacement, est nécessairement continue. On ne peut d'ailleurs pas remplacer l'hypothèse de monotonie par celle  $\varphi$  est bornée :  $\varphi(A) = \sum_v f_v(A')$ , où  $f(A')$  est le  $k-1$  volume d'une face plane de la frontière de  $A$ , et où la sommation est étendue à l'ensemble (dénombrable) de ces faces planes, est bornée, additive et invariante par déplacement, mais non continue.

Lemme 1 — Soit  $\mathcal{K}$  une famille uniformément bornée d'ovoïdes (il existe un cube  $U$  avec  $A \subset U$ ,  $\forall A \in \mathcal{K}$ ). Toute fonctionnelle continue  $\varphi$  est uniformément continue sur  $\mathcal{K}$  :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $A, B \in \mathcal{K}$  et  $d(A, B) < \delta$  entraîne  $|\varphi(A) - \varphi(B)| < \varepsilon$ .

[Démonstration : p. 204, se déduit du théorème de compacité]

### 6-1-3 Approximation par des Polyèdres

On peut approcher une figure convexe par des polyèdres avec une précision aussi bonne que l'on veut, précision mesurée par la distance  $d(A, B)$  définie en 4-3-1. Si nous munissons la classe  $\mathcal{K}$  de cette métrique, le sous-espace  $\mathcal{E}$  des polyèdres ovoïdes est dense dans  $\mathcal{K}$ . Ce fait a une grande signification théorique. Il justifie le procédé connu qui consiste à établir d'abord une propriété dans le cas des polyèdres ovoïdes, et à l'étendre au cas d'un ovoïde quelconque par passage à la limite. C'est en ce sens que l'on parle d'approximation par des polyèdres. La lemme suivant est fondamental.

Théorème I (Premier théorème d'approximation) Soit  $A \in \mathcal{K}$  un ovoïde, et  $\varepsilon > 0$ . On peut trouver deux polyèdres  $P$  et  $Q \in \mathcal{E}$  avec  $P \subset A \subset Q$ ,  $d(A, P) < \varepsilon$  et  $d(A, Q) < \varepsilon$ .

Démonstration: Recouvrons  $A$  à l'aide d'un nombre fini de cubes égaux d'arêtes  $s < \varepsilon/\sqrt{k}$ , dont chacun rencontre  $A$ . Soit  $Q$  l'enveloppe convexe de la réunion de ces cubes. On a manifestement  $A \subset Q$  et  $Q \subset A_s \sqrt{k}$ , d'où  $d(A, Q) < \varepsilon$ .

Recouvrons maintenant  $A$  par un nombre fini de cubes égaux d'arête  $s < 2\varepsilon/\sqrt{k}$  dont les centres appartiennent tous à  $A$ . Soit  $P$  l'enveloppe convexe des centres de ces cubes. On a  $P \subset A$  et aussi  $A \subset P_{\frac{s}{2}} \sqrt{k}$ , d'où  $d(A, P) < \varepsilon$ .

Le théorème suivant est également fort utile :

Théorème II (Second théorème d'approximation) Soit  $A \in \mathcal{K}$  un ovoïde, et  $\lambda > 1$ . Il existe un polyèdre convexe  $P \in \mathcal{E}$  tel que  $P \subset A \subset \lambda P$ , pourvu que l'on choisisse comme origine un point convenable de  $A$ .

Démonstration: Supposons d'abord que l'ovoïde  $A$  soit propre. Prenons comme origine un point  $O \in \overset{\circ}{A}$  intérieur à  $A$ , et soit  $K$  une boule de rayon  $\rho > 0$  centrée en  $O$  et contenue dans  $A$ . Choisissons  $\varepsilon > 0$  plus petit que la distance  $\Delta$  des frontières  $A'$  et  $K'$  de  $A$  et  $K$ , et tel que la condition

$$(a) \quad (\lambda - 1) \rho > \varepsilon$$

soit vérifiée. D'après le théorème I, il existe  $P \in \mathcal{E}$  avec

$$(b) \quad P \subset A \subset P_\varepsilon$$

Comme  $\varepsilon < \Delta$ , on a  $K \subset P$  - Dans l'homothétie  $P \rightarrow \lambda P$ , un plan d'appui dont la distance d'appui est  $p$  est repoussée vers l'extérieur de la quantité  $d = (\lambda - 1) p$ . Comme  $p > \rho$ , (a) montre  $d > \varepsilon$ , et l'on vérifie alors  $P_\varepsilon \subset \lambda P$ . Il résulte ensuite de (b) que l'on a bien  $P \subset A \subset \lambda P$ .-

Si  $A$  est un ovoïde impropre, il existe un plan  $E_i$  de dimension minimale  $i < k$  contenant  $A$ . Considéré comme sous-ensemble de  $E_i$ ,  $A$  est un ovoïde propre, et la construction précédente s'applique.

#### 6-1-4 Volumes et Surface des Figures Convexes

Un ovoïde est mesurable au sens de Lebesgue, puisqu'il est compact, et admet donc un volume. S'il est impropre, ce volume est nul. Mais cela ne permet pas encore de définir sa surface. Nous disposons bien des surfaces usuelles, au sens de Minkowski, introduites en 5-1-3. Mais il faut examiner si ces différents nombres existent et coïncident. Nous le ferons ci-dessous.

En fait, la structure simple des figures convexes permet de construire la notion de volume et de surface de ces figures à l'aide des notions correspondantes de la géométrie élémentaire. La théorie des figures convexes est ainsi largement indépendante de la théorie générale du volume.

On procède de la manière suivante : On part du volume  $I(P)$  et de la surface  $F(P)$  d'un polyèdre convexe  $P$ . Ces fonctionnelles sont monotones sur la classe des polyèdres convexes. On peut donc définir pour tout  $A \in \mathcal{K}$  les quatre nombres :

$$(25) \quad \bar{V}(A) = \text{Inf} \{I(P), P \supset A\}, \quad \underline{V}(A) = \text{Sup} \{I(Q), Q \subset A\}$$

$$(26) \quad \bar{F}(A) = \text{Inf} \{F(P), P \supset A\}, \quad \underline{F}(A) = \text{Sup} \{F(Q), Q \subset A\}$$

$P, Q$  parcourant la classe  $\mathcal{E}$  des polyèdres convexes. La monotonie montre de plus  $I(Q) \leq I(P)$  et  $F(Q) \leq F(P)$ , d'où :

$$(a) \quad \underline{V}(A) \leq \bar{V}(A), \quad \underline{F}(A) \leq \bar{F}(A)$$

Mais prenons  $P = \lambda Q, \lambda > 1$  ; on trouve

$$(b) \quad \bar{V}(A) \leq \lambda^k \underline{V}(A)$$

$$\bar{F}(A) \leq \lambda^{k-1} \underline{F}(A)$$

Le second théorème d'approximation montre que (b) est vérifiée pour tout  $\lambda > 1$ , et, compte tenu de (a), il en résulte :

$$(c) \quad \underline{V}(A) = \bar{V}(A) ; \quad \underline{F}(A) = \bar{F}(A)$$

On désignera par  $V(A)$  et  $F(A)$  ces valeurs, et on dira qu'il s'agit du volume et de la surface de l'ovoïde  $A$ .

Ce procédé permet d'étendre à la classe  $\mathcal{K}$  les propriétés élémentaires vérifiées par les fonctionnelles  $I$  et  $F$  sur la classe  $\mathcal{E}$ . La fonctionnelle  $V(A)$  est invariante pour les

déplacements, définie  $\geq 0$ , monotone, bornée, homogène de degré  $k$ , continue et simplement additive. La fonctionnelle  $F(A)$  est invariante pour les déplacements, définie  $\geq 0$ , monotone, bornée, homogène de degré  $k-1$ , continue et additive.

$V(A)$  coïncide avec la mesure de Lebesgue de  $A$ . Si  $A$  est un ovoïde propre, et  $A_\rho$  ( $-r < \rho < \infty$ ) un ensemble parallèle à  $A$ , interne ou externe, on a pour  $\rho \rightarrow 0$  :

$$(29) \quad V(A_\rho) = V(A) + \rho F(A) + o(\rho)$$

Cela se déduit de la relation (25) de 5-1-3 établie pour les polyèdres ovoïdes et du théorème de l'approximation polyédrique. Les règles (52) et (53) de 4-2-2 donnent ensuite la règle de différentiation :

$$(30) \quad F_\sigma = \frac{d}{d\sigma} V_\sigma \quad (-r < \sigma < \infty)$$

(on a posé  $V_\sigma = V(A_\sigma)$ ,  $F_\sigma = F(A_\sigma)$ ). Pour  $\sigma = 0$ , en particulier, la règle (30) donne :

$$(31) \quad F(A) = F_\pm(A) = F_\pm^*(A)$$

Ainsi, la surface  $F(A)$  d'un ovoïde propre coïncide bien avec la valeur commune des quatre surfaces usuelles au sens de Minkowski (cf. 5-1-3). Le théorème 1 de 5-1-2 montre encore que l'on a :

$$(32) \quad F(A) = f(A') = f^*(A')$$

La surface de la frontière  $A' = F_r A$  de l'ovoïde propre  $A$  est donc mesurable au sens de Minkowski, et la mesure superficielle de  $A'$  coïncide avec  $F(A)$ .

Pour la boule  $K$  de rayon unité, on trouve :

$$(33) \quad V(K) = \omega_k \quad ; \quad F(k) = k \omega_k$$

avec une constante  $\omega_k$  (qui intervient constamment en géométrie intégrale) définie par :

$$(34) \quad \omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})}$$

où  $\Gamma$  est la fonction eulérienne habituelle :

$$(35) \quad \Gamma(1+n) = n! \quad , \quad \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{4^n n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

#### 6-1-5 La Formule de Cauchy.

Cauchy a établi, dans le cas de l'espace usuel, une relation exprimant la surface d'un corps convexe en fonction de l'intégrale de son contour apparent étendue aux directions de l'espace. On a la formule :

$$(36) \quad F(A) = \frac{1}{\omega_{k-1}} \int V'(A, u) du$$

où  $A$  est un ovoïde,  $V'(A, u)$  le  $(k-1)$ -volume du contour apparent de  $A$  dans la direction d'un plan  $E(u)$  passant par l'origine (section efficace dans la direction  $u$ ), enfin  $du$  désigne la densité

de direction, c'est-à-dire l'élément de surface de la sphère unité  $S$ . La section efficace  $V'(A,u)$  est une fonction continue de la direction  $u$ , de sorte que l'intégrale étendue à la sphère unité  $S$  existe au sens de Riemann.

Démonstration de (36) Désignons par  $\Phi(A)$  le second membre de (36).

a/ Soit  $P$  un polyèdre ovoïde. On vérifie sans peine :

$$2 V'(P,u) = \sum_{v=1}^n I'(P_v) |\cos(u_v, u)|$$

(sommation étendue aux  $n$  faces  $P_v$ ,  $v = 1, 2, \dots, n$  de  $P$ ,  $u_v$  normale à  $P_v$  orientée vers l'extérieur,  $I'$ ,  $(k-1)$ -volume élémentaire). On voit que  $V'(P,u)$  est une fonction continue de  $u$ . De  $F(P) = \sum_v I'(P_v)$  et  $\int |\cos(u_v, u)| du = 2 \omega_{k-1}$  résulte ensuite :

$$(a) \quad \Phi(P) = F(P)$$

b/ Soit  $A$  un ovoïde quelconque, et  $P$  un polyèdre tel que  $P \subset A \subset \lambda P$  ( $\lambda > 1$ ). On a  $V'(P,u) \leq V'(A,u) \leq \lambda^{k-1} V'(P,u)$ , de sorte que  $V'(A,u)$  est limite uniforme de fonctions continues de  $u$ , donc est elle-même continue en  $u$ , puisque  $\lambda > 1$  est arbitraire (2<sup>ème</sup> théorème d'approximation). En intégrant cette relation compte tenu de (a), on trouve

$$F(P) \leq \Phi(A) \leq \lambda^{k-1} F(P)$$

Mais on a aussi  $F(P) \leq F(A) \leq \lambda^{k-1} F(P)$ , d'où  $F(A) = \Phi(A)$

6-1-6 Les Fonctionnelles de Minkowski - Formule de Récurrence de Kubota

Le volume et la surface d'un ovoïde sont (à un facteur près) les deux premiers termes d'une échelle de nombres fondamentaux affectés à un ovoïde dans la théorie de Minkowski. Il s'agit des fonctionnelles de Minkowski  $W_i(A)$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ), qui sont, comme nous le verrons, rangées par degré d'homogénéité décroissant. Il y a plusieurs manières de les introduire ; nous utiliserons une formule de Kubota qui permet une récurrence sur le nombre  $k$  des dimensions de l'espace. L'intégrale de Cauchy amorce cette récurrence. Ce procédé de récurrence établit les propriétés principales de ces fonctionnelles en même temps que leur existence.

Pour  $k = 1$  (sur la droite euclidienne), un ovoïde est un segment de longueur  $s$ , et nous posons

$$(38) \quad W_0(A) = V(A) = s \quad ; \quad W_1(A) = F(A) = \omega_1 = 2$$

Pour  $k > 1$ , on posera par récurrence :

$$(39) \quad W_0(A) = V(A) \quad ; \quad W_i(A) = \frac{1}{k\omega_{k-1}} \int W'_{i-1}(A, u) \, du \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

$W'_{i-1}(A, u)$  désignant la  $(i-1)^{\text{ème}}$  fonctionnelle du contour apparent de  $A$  dans la direction  $u$  calculée dans le  $(k-1)$ -plan  $E(u)$  dont le vecteur normal est  $u$ . L'intégrale est étendue à la sphère unité  $S$  de  $\mathbb{R}^k$ . Les trois premières et les deux dernières fonctionnelles

de cette échelle présentent un intérêt particulier, et sont liées à des caractéristiques classiques. On a :

$$(40) \quad W_0 = V ; k W_1 = F ; k W_2 = M ; k W_{k-1} = N , W_k = \omega_k$$

$V$  désigne le volume,  $F = F(A)$  la surface,  $M = M(A)$  l'intégrale de la courbure moyenne,  $N = N(A)$  la norme et  $\omega_k$  la constante habituelle.

Pour  $k \leq 3$ , on a les identifications suivantes :

a/  $k = 1$  (A est un segment).  $W_0 = V = N = s$  (longueur)

$$W_1 = F = \omega_1 = 2$$

b/  $k = 2$   $W_0 = V = f$  (volume à deux dimensions),  $2 W_1 = N = \ell$

(périmètre)  $2 W_2 = M = 2\pi$ .

c/  $k = 3$   $W_0 = V$  (volume) -  $3 W_1 = F$  (surface) .  $3 W_2 = M = N$

(intégrale de la courbure moyenne = Norme) -  $W_3 = \frac{4}{3} \pi$

Dans le cas d'ovoïdes dont la frontière est régulière, au sens de la géométrie différentielle, on peut représenter les fonctionnelles  $W_i$  à l'aide d'intégrales de surface faisant intervenir certaines fonctions symétriques simples des  $k-1$  courbures principales. Le nom conventionnel de la fonctionnelle  $M$  rappelle cette circonstance. Nous n'étudierons pas ici ces relations, qui sortent du cadre de la géométrie ensembliste.

Dans le cas de la boule unité, ces fonctionnelles prennent des valeurs très simples. On déduit de (39) :

$$(41) \quad W_i(K) = \omega_k \quad (i = 0, 1, \dots, k)$$

et par suite :

$$(42) \quad N(K) = M(K) = F(K) = k V(K) = k \omega_k$$

Passons maintenant aux propriétés les plus importantes : la fonctionnelle de Minkowski  $W_i$  est invariante pour les déplacements, définie  $\geq 0$ , monotone, bornée, homogène de degré  $k - i$ , continue et additive.  $W_0(A)$  est même simplement additive.

Démonstration - Ces propriétés sont vraies pour  $k = 1$ , d'après la définition (38). Soit  $k > 1$ , et supposons que l'existence et les propriétés des  $W_i$  aient été établies pour les dimensions inférieures à  $k$ . Soit  $A$  un ovoïde dans  $R^k$ . D'après l'hypothèse de récurrence, les  $W'_{i-1}(A, u)$  sont des fonctions continues de la direction  $u$ , car la fonction d'appui  $h(A, u)$  est continue en  $u$ . L'intégrale (39) existe donc au sens de Riemann, et les  $W_i(A)$  sont bien définies. Comme les contours apparents de  $A$  sont uniformément bornés, le lemme sur la continuité uniforme (cf. 6-1-2) et la compacité de la sphère unité  $S$  montrent que les  $W_i(A)$  sont elles-mêmes continues ; il est utile de remarquer que l'on a  $d(A, B) \geq d(A', B')$  si  $A'$  et  $B'$  sont les contours apparents de  $A$  et  $B$  dans une même direction. Les translations laissent invariants les contours apparents, donc aussi les intégrales (39). Une rotation autour de l'origine affecte l'intégrand de (39), mais non l'intégrale elle-même, qui est étendue à la sphère unité, et les  $W_i$  sont invariantes par rotation. Enfin, il résulte de (39) que les

$W_i$  sont définies  $\geq 0$ , monotones, et homogènes de degré  $k - 1$ .

Etant monotones, ces fonctionnelles sont bornées.

Si  $A \cup B$  est convexe,  $A' \cup B'$  est également convexe ( $A'$ ,  $B'$  contours apparents de  $A$  et  $B$ ), et les relations  $(A \cup B)' = A' \cup B'$ ,  $(A \cap B)' = A' \cap B'$  sont vérifiées. L'hypothèse de récurrence donne :

$$W'_{i-1}(A,u) + W'_{i-1}(B,u) = W'_{i-1}(A \cup B,u) + W'_{i-1}(A \cap B,u)$$

et on déduit de (39) que les  $W_i$  sont additives. Enfin  $W_0(A) = V(A)$  est même simplement additive.

#### 6-1-7 Norme, et Largeur Moyenne

La norme  $N(A)$  introduite ci-dessus, et avec elle la  $(k-1)^{\text{ème}}$  fonctionnelle  $W_{k-1}(A)$  sont étroitement liées à une caractéristique très intuitive, qui mesure l'extension linéaire d'un corps, à savoir sa largeur moyenne  $b(A)$ . Pour  $k = 1$ , on pose  $\bar{b}(A) = N(A) = s$ , et pour  $k > 1$ , :

$$(43) \quad \bar{b}(A) = \frac{1}{k\omega_k} \int b(A,u) \, du$$

$\bar{b}(A)$  est donc la valeur moyenne, pour toutes les directions  $u$ , de la largeur  $b(A,u)$  dans la direction  $u$ . Montrons l'identité :

$$(44) \quad N(A) = k \omega_{k-1}(A) = \frac{k \omega_k}{2} \bar{b}(A)$$

Démonstration : Supposons (44) vérifié pour les dimensions  $< k$ .

Soit  $A$  un ovoïde de  $\mathbb{R}^k$  et posons :

$$(a) \quad \Phi(A) = \frac{1}{k \omega_k} \int \bar{b}_u(A') \, du$$

(A', contour apparent de A pour la direction u dans le plan E(u),  $\bar{b}_u(A')$  largeur moyenne de A' dans l'espace E(u) à k-1 dimensions. L'hypothèse de récurrence donne, d'après (44)

$$\bar{b}_u(A') = \frac{2}{(k-1) \omega_{k-1}} \quad N'(A') = \frac{2}{\omega_{k-1}} \quad W'_{k-2}(A, u)$$

Portons dans (a) en tenant compte de (39). Il vient :

$$(b) \quad \Phi(A) = \frac{2}{\omega_k} \quad W_{k-1}(A) = \frac{2}{k \omega_k} \quad N(A)$$

D'un autre côté, la définition (43) donne :

$$\bar{b}_u(A') = \frac{1}{(k-1) \omega_{k-1}} \int b(A', v') \, dv'$$

où v' décrit la sphère unité du (k-1)-plan E(u). Portons dans (a). On obtient une intégrale double :

$$\Phi(A) = \frac{1}{k \omega_k (k-1) \omega_{k-1}} \iint b(A', v') \, dv' \, du$$

Mais  $dv' \, du = dv \, du'$ , v désignant une direction coïncidant avec v' mais variant dans tout l'espace, tandis que u' coïncide avec u mais ne varie que dans le plan E(v) - Avec ce changement de variables, l'intégrand ne dépend plus de u'. Comme  $\int du' = (k-1) \omega_{k-1}$ , il reste :

$$\Phi(A) = \frac{1}{k \omega_k} \int b(A, v) \, dv = \bar{b}(A)$$

ce qui établit (43) et (44) -

La largeur moyenne et la norme, outre les propriétés communes à toutes les  $W_i$ , présentent la particularité d'être des fonctionnelles linéaires au sens de Minkowski :

$$(45) \quad N(\alpha A \oplus \beta B) = \alpha N(A) + \beta N(B) \quad (\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1)$$

La norme est donc, en un sens, la plus simple des fonctionnelles de Minkowski, plus simple que le volume ou la surface. On démontre sans peine (45) en remarquant que  $b(A, u)$  est déjà linéaire. Cette propriété caractérise la norme (à un facteur près) :

Théorème III - Soit  $\varphi(A)$  une fonctionnelle sur  $\mathcal{K}$ , invariante pour les déplacements, continue et linéaire au sens de Minkowski. On a :

$$(46) \quad \varphi(A) = a N(A) + b \quad (A \neq \emptyset)$$

pour deux constantes  $a$  et  $b$ .

Démontrons d'abord le :

Lemme II - Si  $\varphi(A)$  est une fonctionnelle sur  $\mathcal{K}$  linéaire au sens de Minkowski, on a :

$$(47) \quad \varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A) + (1-\lambda) \varphi(Z)$$

$Z$  désignant l'origine des coordonnées -

En effet, posons  $f(\lambda) = \varphi(\lambda A)$ . La règle  $(\alpha \xi + \beta \eta)A = \alpha (\xi A) \oplus \beta (\eta A)$  valable pour les ovoïdes et la linéarité de  $\varphi$  donnent :

$$f(\alpha \xi + \beta \eta) = \alpha f(\xi) + \beta f(\eta)$$

Avec  $\lambda \geq 0$ , prenons :

$$(a) \quad \xi = \lambda, \eta = 0, \alpha = \frac{1}{\lambda}, \beta = \frac{\lambda-1}{\lambda} \quad (\text{si } \lambda \geq 1)$$

$$(b) \quad \xi = \lambda, \eta = 0, \alpha = \lambda, \beta = 1 - \lambda \quad (\text{si } \lambda \leq 1)$$

Dans les deux cas, il vient  $f(\lambda) = \lambda f(1) + (1-\lambda) f(0)$ , c'est-à-dire (47).

Démonstration du théorème III - Comme  $\varphi$  et  $N$  sont invariantes par les régularisations de rotation (cf. 4-5-2), le théorème V de 4-5-3 appliqué à ces fonctionnelles continues montre  $\varphi(A) = \varphi(K_0)$  et  $N(A) = N(K_0)$ ,  $K_0$  désignant la boule de rayon  $r_0$  obtenu en régularisant  $A$ . Compte tenu de (47) et de l'homogénéité de la norme, il en résulte :

$$\varphi(A) = r_0 [\varphi(K) - \varphi(Z)] + \varphi(Z) \quad , \quad N(A) = r_0 N(K)$$

( $K$ , boule unité). En éliminant  $r_0$ , on obtient bien (46)

#### 6-1-8 Formule de STEINER pour les Figures Parallèles

Steiner a montré que le volume du dilaté  $A_\rho$  d'un ovoïde  $A$  par la boule de rayon  $\rho$  est un polynôme en  $\rho$ , dont les coefficients coïncident, (à un facteur près) avec les fonctionnelles de Minkowski. La formule :

$$(48) \quad V(A_\rho) = \sum_{v=0}^k C_k^v W_v(A) \rho^v \quad (0 \leq \rho < \infty)$$

montre que le volume de  $A_\rho$  est la fonction génératrice des fonctionnelles de Minkowski.

Démonstration de (48) - Pour  $k=1$ , (48) est vérifiée puisque dans ce cas  $V(A_\rho) = V(A) + 2\rho$ . Supposons (48) vérifiée pour toutes les dimensions inférieures à  $k$ , et soit  $A$  un ovoïde de  $\mathbb{R}^k$  - De (36) résulte

$$(a) \quad F(A_\sigma) = \frac{1}{\omega_{k-1}} \int V'(A_\sigma, u) du, \quad \sigma > 0$$

Soit  $A'$  la contour apparent de  $A$  dans le plan  $E(u)$ . On vérifie sans peine la règle  $(A_\sigma)' = (A')_\sigma$ . D'après (48) et l'hypothèse de récurrence, on a  $V'(A_\sigma, u) = \sum_0^{k-1} C_{k-1}^\mu W'_\mu(A, u) \sigma^\mu$ . Substituons dans (a), intégrons et appliquons (39). Il vient

$$(b) \quad F(A_\sigma) = \sum_{\mu=0}^{k-1} k C_{k-1}^\mu W_{\mu+1}(A) \sigma^\mu$$

La règle différentielle (30) donne ensuite  $V(A_\rho) = V(A) + \int_0^\rho F(A_\sigma) d\sigma$ .

Il suffit alors d'intégrer (b) pour retrouver (48).

En fait, les fonctionnelles de Minkowski admettent toutes des représentations de ce type, données par la formule générale de STEINER :

$$(49) \quad W_i(A_\rho) = \sum_{v=0}^{k-i} C_{k-i}^v W_{v+i}(A) \rho^v \quad (i = 0, 1, \dots, k)$$

Pour établir (49), on remarque  $A_{\rho+\sigma} = (A_\rho)_\sigma$  et on déduit de (48) l'identité :

$$\sum_{v=0}^k C_k^v W_v(A) (\rho+\sigma)^v = \sum_{v=0}^k C_k^v W_v(A_\rho) \sigma^v$$

Il suffit d'identifier les coefficients de  $\sigma^v$  pour obtenir (49).

#### 6-1-9 Cas particulier

Soit A un ovoïde impropre, avec  $A \subset E$  pour un plan E convenable. En tant qu'ovoïde de l'espace E à k-1 dimensions, A permet de définir les k valeurs  $W'_i(A)$  des k fonctionnelles de Minkowski de l'espace  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Soient  $W_i(A)$  les valeurs en A des k+1 fonctionnelles de  $\mathbb{R}^k$  : on a les relations simples :

$$(50) \quad W_i(A) = \frac{i \omega_i}{k \omega_{i-1}} W'_{i-1}(A) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

Démonstration. Soit  $E_\tau$  un plan parallèle à E situé à la distance  $\tau$  de E. L'intersection  $A_\rho \cap E_\tau$  ( $-\rho \leq \tau \leq \rho$ ) est égale (à une translation près) à l'ensemble  $A \sqrt{\rho^2 - \tau^2}$  parallèle à A dans l'espace E. De (48) on tire le (k-1) volume :

$$V'(A_\rho \cap E_\tau) = \sum_{\mu=0}^{k-1} C_{k-1}^\mu W'_\mu(A) (\rho^2 - \tau^2)^{\frac{\mu}{2}}$$

Mais  $V(A_\rho) = \int_{-\rho}^{\rho} V'(A_\rho \cap E_\tau) d\tau$ . En utilisant la relation

$$\int_{-\rho}^{\rho} (\rho^2 - \tau^2)^{\frac{\mu}{2}} d\tau = \frac{\omega_{\mu+1}}{\omega_{\mu}} \rho^{\mu+1}, \text{ on trouve donc :}$$

$$V(A_{\rho}) = \sum_{v=1}^k C_{k-1}^{v-1} \frac{\omega_v}{\omega_{v-1}} W'_{v-1}(A) \rho^v$$

Il suffit de comparer à (48) pour obtenir (50).

Autres formules - Soient P et Q deux ovoïdes impropres situés dans deux plans (de dimensions p et q, p + q = k) supplémentaires orthogonaux,  $W'_i$  et  $W''_j$  les fonctionnelles relatives à ce p-plan et à ce q-plan. On a :

$$(51) \quad W_i(P \oplus Q) = \frac{\omega_i}{C_k^i} \sum_{v=0}^i \frac{C_p^v C_q^{i-v}}{\omega_v \omega_{i-v}} W'_v(P) W''_{i-v}(Q)$$

En particulier, pour i = 0 et i = 1 :

$$(52) \quad \begin{cases} V(P \oplus Q) = V'(P) V''(Q) \\ F(P \oplus Q) = V'(P) F''(Q) + F'(P) V''(Q) \end{cases}$$

[Démonstration p. 215 - 216]

[Formules diverses relatives au parallélotope, aux cubes sous-dimensionnels, aux corps de révolution etc... pages 216 - 220]

#### 6-1-10 Caractérisation des Fonctionnelles de Minkowski

Désignons par  $\mathcal{K}$  la classe des fonctionnelles définies sur  $\mathcal{K}$ , invariantes par déplacements, additives et continues.  $\mathcal{K}$  est un espace vectoriel, et contient les fonctionnelles de Minkowski.

En fait,  $\mathfrak{M}$  est engendré par les fonctionnelles de Minkowski :

Théorème IV - Toute fonctionnelle  $\varphi \in \mathfrak{M}$  (définie sur  $\mathcal{K}$ , invariante pour les déplacements, additive et continue) est de la forme :

$$(75) \quad \varphi(A) = \sum_{\nu=0}^k C_{\nu} W_{\nu}(A)$$

avec des constantes  $C_{\nu}$  convenables ( $-\infty < C_{\nu} < +\infty$ )

Corollaire I - Si de plus  $\varphi$  est simplement additive, on a

$$(76) \quad \varphi(A) = C V(A) \quad (-\infty < C < +\infty)$$

On notera bien que ces résultats ne s'appliquent qu'aux fonctionnelles définies sur la classe  $\mathcal{K}$  des ovoïdes, et on ne peut pas les étendre sans précaution à des classes plus générales d'ensembles.

On a des résultats analogues en ce qui concerne la classe  $\mathfrak{M}$  des fonctionnelles définies  $\mathcal{K}$ , invariantes pour les déplacements, additives et monotones.  $\mathfrak{M}$  n'est pas un espace vectoriel, mais un cône convexe:

$$a, b \geq 0, \quad \varphi, \Psi \in \mathfrak{M} \Rightarrow a\varphi + b\Psi \in \mathfrak{M}$$

Théorème V - Toute fonctionnelle  $\varphi \in \mathfrak{M}$  (définie sur  $\mathcal{K}$ , invariante pour les déplacements, additive et monotone) est de la forme :

$$(78) \quad \varphi(A) = \sum_{v=0}^k C_v W_v(A) \quad (0 \leq C_v < \infty)$$

Corollaire II - Si de plus  $\varphi$  est simplement additive, on a

$$\varphi(A) = C V(A) \quad (0 \leq C < \infty)$$

[la démonstration de ces théorèmes fondamentaux occupe les pages 222 - 225]

## N° 2 - FORMULES INTEGRALES

### 6-2-1 Intégrales Cinématiques

La géométrie intégrale de Von BLASCHKE étudie des figures mobiles dans l'espace et les intégrales invariantes qu'elles permettent de former. Imaginons une figure (par exemple un ovoïde ou un i-plan) soumise à l'action d'un groupe de déplacements (par exemple, groupe des rotations ou des translations, ou le groupe complet) et une fonction de cette figure mobile dont la valeur dépend de la position qu'elle occupe. On peut construire une intégrale de cette fonction étendue au groupe de déplacements, dont la valeur est alors invariante par les opérations du groupe. Plus précisément : soit  $X$  une figure,  $G$  un groupe de déplacements. L'opération  $\gamma \in G$  transforme  $X$  en  $X^\gamma$ . Soit  $f(X)$  une fonction dépendant de la position de  $X$ . On forme une intégrale de la forme :

$$(80) \quad J(f) = \int f(X^\gamma) dX$$

$dX$  désignant la densité de  $X$  pour le groupe  $G$  ( $G$ -densité), et l'intégration étant étendue au groupe  $G$  entier. La  $G$ -densité

$dX$  est une forme différentielle :

$$(81) \quad dX = \theta(t_1, \dots, t_m) dt_1 \dots dt_m$$

des  $m$  paramètres qui déterminent la position de  $X^\gamma$  parmi la classe des figures déduites de  $X$  par les opérations du groupe  $G$ . Nous nous limitons aux fonctions  $f$  pour lesquelles l'intégrale (80) existe au sens de Riemann. Enfin, nous exigeons une importante propriété d'invariance : Pour deux opérations  $\alpha, \beta \in G$ , l'intégrale cinématique (80) appliquée à la fonction

$$(82) \quad f^* (X^\gamma) = f(X^{\alpha\gamma\beta})$$

déduite de  $f$  doit vérifier la condition

$$(83) \quad J (f^*) = J (f)$$

L'indépendance relative à  $\alpha$  a le sens d'une invariance de choix : au lieu de  $X$ , tout  $X^\alpha$  ( $\alpha \in G$ ) peut servir de point de départ \* dans les notations de Hadwiger,  $\alpha\gamma$  est l'opération de  $G$  obtenue en effectuant d'abord  $\alpha$ , ensuite  $\gamma$  \*. L'indépendance relative à  $\beta$  a le sens d'une invariance pour les opérations de  $G$  ( $G$ -invariance). Ces deux conditions d'invariance déterminent la densité  $dX$  à un facteur près.

Le choix de cette densité confère à l'intégrale (80) quatre propriétés, qui permettent souvent d'obtenir des conclusions substantielles sans expliciter les calculs : l'intégrale est invariante, linéaire, monotone et définie  $\geq 0$ .

$$\left( J(af + bg) = a J(f) + b J(g) \quad , \quad f \geq 0 \Rightarrow J(f) \geq 0 \right)$$

Donnons quelques indications sur les densités qui conviennent dans les cas les plus usuels.

Examinons d'abord les densités qui conviennent à un multivecteur orthonormé. Soit  $1 \leq j \leq i \leq k$  et  $E_i$  un  $i$ -plan passant par l'origine. Un  $j$ -vecteur  $\Omega_{ij} = (u_1, \dots, u_j)$  contenu dans  $E_i$  est constitué de  $j$  vecteurs  $u_\nu \in E_i$  normés et deux à deux orthogonaux. La densité de rotation du 1-vecteur  $\Omega_{i1} = \Omega_i = (u_1)$  est  $d \Omega_i = d u_1$ , densité de direction dans le plan  $E_i$  (cf. 6-1-5) c'est-à-dire l'élément de surface de la sphère unité à  $i-1$  dimensions  $S_i = S \cap E_i$ . Pour  $i = 1$ , on prend  $d \Omega_1 = 1$ .

Considérons maintenant une rotation de  $\Omega_{ij}$  dans le plan  $E_i$  ; on peut prendre pour  $u_1$  une direction quelconque de  $E_i$ , tandis que pour  $u_2$  on ne dispose plus que des directions du  $(i-1)$ -plan  $E_{i-1} \subset E_i$  orthogonal à  $u_1$  dans  $E_i$ . De même, pour  $u_3$ , il ne restera que les directions d'un  $(i-2)$ -plan  $E_{i-2}$ , etc... La densité  $d \Omega_{ij}$  qu'il convient d'attribuer au multivecteur  $\Omega_{ij}$  tournant dans le plan  $E_i$  sera donc :

$$d \Omega_{ij} = d \Omega_i \cdot \dots \cdot d \Omega_{i-j+1}$$

produit des densités de directions des vecteurs  $u_1, \dots, u_j$ , compte tenu des conditions d'orthogonalité qui limitent progressivement leurs degrés de liberté.

La densité de  $\Omega_{kk}$  du  $k$ -vecteur s'appelle aussi densité de rotation  $d \Gamma_k$  de l'espace de base. On a :

$$(86) \quad d \Gamma_k = d \Omega_{kk} = d \Omega_1 d \Omega_2 \dots d \Omega_k$$

et l'intégrale étendue à l'espace entier est :

$$(87) \quad C_k = \int d \Gamma_k = \frac{k!}{2} \omega_1 \omega_2 \dots \omega_k$$

Les constantes  $C_k$  interviennent constamment en géométrie intégrale. La relation

$$(88) \quad d \bar{E}_i d \Gamma_i d \Gamma_{k-i} = d \Gamma_k$$

définit la densité de rotation du  $i$ -plan  $E_i$  sur lequel on fait agir le groupe des rotations : partir d'un  $k$ -vecteur  $(u_1, \dots, u_k)$  pour lequel  $(u_1, \dots, u_i)$  est contenu dans  $E_i$  et  $(u_{i+1}, \dots, u_k)$  dans l'orthogonal de  $E_i$ , et désigner par  $d \Gamma_i$  et  $d \Gamma_{k-i}$  les densités de ces multivecteurs. Cette construction montre que deux plans supplémentaires orthogonaux ont la même densité de rotation :

$$(89) \quad d \bar{E}_i = d \bar{E}_{k-i}$$

A l'aide des constantes auxiliaires (d'emploi fréquent en géométrie intégrale) :

$$(90) \quad C_{ik} = C_k^i \frac{\omega_{k-1} \dots \omega_{k-i}}{\omega_1 \dots \omega_i} ; \quad C_{ok} = 1$$

on exprime l'intégrale de rotation de  $E_i$  par :

$$(91) \quad \int d \bar{\bar{E}}_i = \int d \bar{\bar{E}}_{k-i} = \frac{\omega_k}{\omega_{k-i}} C_{ik}$$

La densité  $d P_i$  à  $i$ -dimensions d'un point  $P_i$  mobile dans un  $i$ -plan fixe  $E_i$  est la différentielle du volume dans  $E_i$ : cette remarque simple montre que la densité de translation  $d E_i$  d'un  $i$ -plan  $E_i$  sur lequel on fait agir le groupe des translations se met sous la forme :

$$(92) \quad d \bar{\bar{E}}_i = d P_{k-i}$$

$P_{k-i}$  représente ici le point d'intersection de  $E_i$  avec son supplémentaire orthogonal passant par l'origine. On définit ensuite la densité de déplacement du  $i$ -plan  $E_i$  sur lequel on fait agir le groupe complet des déplacements par la formule

$$(93) \quad d E_i = d \bar{\bar{E}}_i d \bar{\bar{E}}_i$$

Elle apparaît comme le produit des densités de rotation et de translation. Pour  $i = 1$  et  $i = k-1$ , nous parlerons, pour abrégé, de la densité de droite  $d G$  d'une droite mobile  $G$ , et de la densité de plan  $d E$  d'un plan mobile  $E$ .

Considérons maintenant une figure  $A$  quelconque. Si  $dP$  désigne la densité ponctuelle à  $k$  dimensions d'un point  $P$  lié à  $A$ , la densité de translation de  $A$  sera :

$$(94) \quad d \bar{A} = d P$$

Si  $d \Gamma_k$  désigne la densité de rotation d'un k-vecteur passant par l'origine et parallèle à un système orthonormé lié à A, on définira la densité de rotation de A par :

$$(95) \quad d \bar{A} = d \Gamma_k$$

Enfin, la densité de déplacement, ou densité cinématique de A sera :

$$(96) \quad d A = d \bar{A} d \bar{A}$$

C'est, à nouveau, le produit des densités de translation et de rotation.

Avec les densités que nous venons de définir, toutes les intégrales de la forme (80) vérifient, relativement au groupe G correspondant, l'invariance que nous avons exigée en (83).

#### 6-2-2 Formules Intégrales relatives au Volume et à la Surface.

Soit P un polyèdre et  $E_i$  un i-plan ( $0 < i < k$ ) soumis aux groupes des translations. On a la formule :

$$(97) \quad I' (P \cap E_i) d \bar{E}_i = I (P)$$

(I, I', volumes à k et i dimensions respectivement,  $d \bar{E}_i$  densité de translation de  $E_i$ )

[démonstration élémentaire p. 228]

Le principe d'approximation polyédrique montre que cette formule s'étend à la classe  $\mathcal{K}$  des ovoïdes : on retrouve ainsi une méthode connue pour le calcul des volumes.

Soient P et Q deux polyèdres, P restant fixe tandis que Q est soumis au groupe des translations. On a alors la formule simple :

$$(98) \quad \int I(P \cap Q) d\bar{Q} = I(P) I(Q)$$

[démonstration élémentaire p. 229]

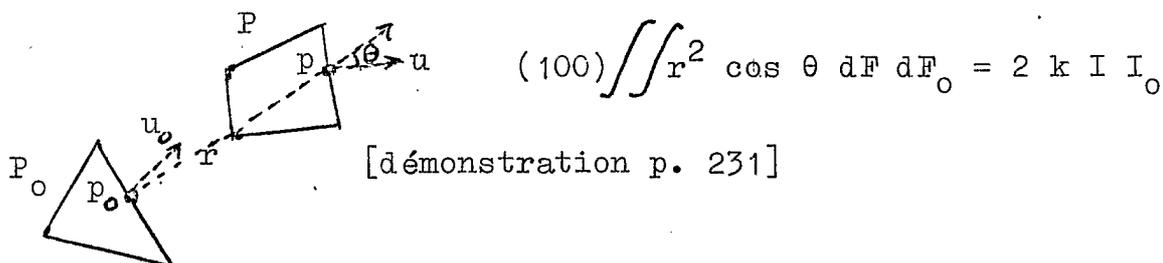
Si P est un polyèdre, G une droite mobile, désignons par  $N(P \cap G)$  le nombre des intervalles fermés disjoints qui constituent l'intersection  $P \cap G$ . On a alors :

$$(99) \quad \frac{2}{\omega_{k-1}} \int N(P \cap G) dG = F(P)$$

[démonstration pages 229 - 230]

### 6-2-3 Relation intégrale pour deux polyèdres

Soient P et  $P_0$  deux polyèdres de volume I et  $I_0$ , et p,  $p_0$  deux points variant sur leurs frontières respectives. Soient  $dF$  et  $dF_0$  les éléments de surface de ces frontières en p et  $p_0$ ,  $\theta$  l'angle des normales orientées u et  $u_0$  des faces de P et  $P_0$  contenant p et  $p_0$  et r la distance des points p et  $p_0$ . On a la relation :



6-2-4 Intégrale de rotation et addition de Minkowski

Soient A et B deux ovoïdes, A restant fixe, et B tournant autour de l'origine. Si l'on désigne par  $d\bar{B}$  la densité de rotation de B, l'addition de Minkowski de A et B vérifie la formule intégrale suivante :

$$(101) \quad \frac{1}{C_k} \int W_i (A \oplus B) \, d\bar{B} = \frac{1}{\omega_k} \sum_{v=0}^{k-i} C_{k-i}^v W_{v+i}(A) W_{k-v}(B)$$

l'intégrale étant étendue à toutes les rotations. La constante  $C_k$  est définie en (87), et le premier membre représente la valeur moyenne de la fonctionnelle  $W_i$  pour la somme  $A \oplus B$  lorsque A et B occupent toutes les positions relatives possibles.

Démonstration - Désignons par  $\Phi(A,B)$  le premier membre de (101). Comme les  $W_i(A \oplus B)$  sont invariants pour les translations de A ou de B, et que l'intégrale est invariante pour les rotations de A ou de B, on voit que  $\Phi(A,B)$  est invariant pour les déplacements affectant indépendamment A et B. Fixons B.  $\varphi(A) = \Phi(A,B)$  est une fonctionnelle sur  $\mathcal{K}$  invariante pour les déplacements. Elle est monotone comme  $W_i$ . Montrons que  $\varphi$  est additive. En effet : soient A' et A" deux ovoïdes tels que  $A' \cup A''$  soit encore

convexe. Les règles (29) et (30) du 4-2-1 donnent :

$$(A' \cup A'') \oplus B = (A' \oplus B) \cup (A'' \oplus B)$$

$$(A' \cap A'') \oplus B = (A' \oplus B) \cap (A'' \oplus B)$$

Comme  $W_i$  est additive, on en déduit :

$$W_i (A' \oplus B) + W_i (A'' \oplus B) = W_i ((A' \cup A'') \oplus B) + W_i ((A' \cap A'') \oplus B)$$

et en intégrant selon (101) il vient :

$$\varphi (A') + \varphi (A'') = \varphi (A' \cup A'') + \varphi (A' \cap A'')$$

Ces trois propriétés permettent d'appliquer le théorème V. On a donc une représentation de  $\varphi$  de la forme

$$\varphi (A) = \sum_{\nu=0}^k a_{\nu} W_{\nu}(A)$$

Comme A et B jouent des rôles symétriques, on doit avoir :

$$\Phi (A, B) = \sum_{\nu} \sum_{\mu} a_{\nu\mu} W_{\nu}(A) W_{\mu}(B)$$

Si l'on remarque que  $W_i (\lambda A \oplus \lambda B) = \lambda^{k-i} W_i (A \oplus B)$ , on voit que l'on a la règle d'homogénéité  $\Phi (\lambda A, \lambda B) = \lambda^{k-i} \Phi (A, B)$ , et que  $\Phi (A, B) = \sum_{\nu} b_{\nu} W_{\nu+i}(A) W_{k-\nu}(B)$ . Si l'on prend  $B = \rho K$  (K boule unité), l'intégrand  $W_i (A \oplus \rho K) = W_i (A_{\rho})$  est constant dans (101). Il suffit alors d'identifier avec la formule (49) des corps parallèles pour trouver  $b_{\nu} = \frac{1}{\omega_k} C_{k-i}^{\nu}$ .

6-2-5 Projections et traversées, Formules de Cauchy et de Crofton.

Nous supposons ici  $k \geq 2$ . Soient  $A$  un ovoïde,  $E_i$  un  $i$ -plan tournant autour de l'origine,  $d\bar{E}_i$  sa densité de rotation. On désigne par  $A|E_i = A^i$  le contour apparent (projection orthogonale) de  $A$  dans  $E_i$ . On a alors la formule des projections :

$$(102) \quad \frac{1}{C_{ik}} \int W'_v (A|E_i) d\bar{E}_i = \frac{\omega_i}{\omega_{k-i}} W_{k+v-i}(A) \quad (0 \leq v \leq i \leq k-1)$$

où  $W'$  désigne la fonctionnelle de Minkowski agissant dans l'espace à  $i$  dimensions ; l'intégration s'étend à toutes les rotations, et  $C_{ik}$  est la constante introduite en (90).

Soit maintenant  $E_i$  un plan se mouvant librement et  $dE_i$  sa densité de déplacement. On a alors la formule des traversées :

$$(103) \quad \frac{1}{C_{ik}} \int W'_v (A \cap E_i) dE_i = \frac{\omega_i \omega_{k-v}}{\omega_{k-i} \omega_{i-v}} W_v(A) \quad (0 \leq v \leq i < k)$$

$W'$  et  $C_{ik}$  ont la même signification que ci-dessus, et l'intégrale est étendue à tous les déplacements.

Démonstration - Désignons par  $\varphi(A)$  et  $\Psi(A)$  les fonctionnelles sur  $\mathcal{K}$  définies par les premiers membres de (102) et de (103). Elles sont manifestement monotones et invariantes par déplacements. Elles sont également additives. En effet, soient  $A$  et  $B$  deux ovoïdes, tels que  $A \cup B$  soit encore convexe. Les contours apparents et les sections vérifient les relations :

$$(A \cup B)^i = A^i \cup B^i, (A \cap B)^i = A_i \cap B_i \text{ et } (A \cup B) \cap E_i = (A \cap E_i) \cup (B \cap E_i), (A \cap B) \cap E_i = (A \cap E_i) \cap (B \cap E_i).$$

Compte tenu de l'additivité de  $W'$ , on en déduit que l'intégrand est additif à  $E_i$  fixé, puisque  $\varphi$  et  $\Psi$  sont additives. Ces trois propriétés permettent d'appliquer (78). On remarque ensuite que  $\varphi$  et  $\Psi$  doivent être homogènes de degré  $i-v$  et  $k-v$ , d'où résulte :

$$(a) \quad \varphi(A) = a W_{k+v-i}^-(A)$$

$$(b) \quad \Psi(A) = b W_v(A)$$

Pour déterminer les constantes  $a$  et  $b$ , on prend  $B = K$  (boule unité). Dans (102), l'intégrand est alors constant et vaut  $\omega_i$ ; d'où, compte tenu de (91),  $\varphi(K) = \omega_k \omega_i / \omega_{k-i}$ . Mais  $\varphi(K) = a \omega_k$ , d'où  $a = \omega_i / \omega_{k-i}$ .

Dans (103), pour  $B = K$ , l'intégrand est  $\omega_i (1-t^2)^{\frac{i-v}{2}}$ ,  $t$  désignant la distance de  $E_i$  à l'origine des coordonnées (qui est aussi le centre de  $K$ ). Laissons fixe la direction de  $E_i$ , et considérons la famille des plans parallèles à  $E_i$ . Désignons par  $P_{k-i} = E_i \cap E_{k-i}$  les points où ces plans parallèles rencontrent leur supplémentaire orthogonale  $E_{k-i}$  (passant par l'origine).  $P_{k-i}$  se trouve sur la frontière d'une boule de rayon  $t$  contenue dans  $E_{k-i}$ . En intégrant par rapport aux translations (densité d' $\bar{E}_i$ ), on trouve donc, compte tenu de (92) :

$$\frac{1}{C_{ik}} (k-i) \omega_{k-i} \omega_i \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{i-v}{2}} t^{k-i-1} dt = \frac{\omega_i \omega_{k-v}}{C_{ik} \omega_{i-v}}$$

Mais, d'après (93),  $d E_i = d \bar{E}_i d \bar{\bar{E}}_i$ , et, pour obtenir  $\Psi(K)$ , il faut encore multiplier par  $d \bar{\bar{E}}_i$  et intégrer sur les rotations. Compte tenu de (91), on obtient  $\Psi(K) = \frac{\omega_{k-v} \omega_i}{\omega_{i-v} \omega_{k-i}}$ . Mais d'autre part  $\Psi(K) = b \omega_k$ , d'où la valeur de  $b$ , et la relation (103).

Dans le cas particulier  $i = k - 1$ , (102) se réduit à la formule de récurrence de KUBOTA (39), car la densité de rotation  $d \bar{E}$  d'un plan est identique à la densité de direction  $d u$  de son vecteur normal. Le cas  $v = 0$  dans (102) est également intéressant : on trouve :

$$(104) \quad W_{k-i}(A) = \frac{\omega_{k-i}}{C_{ik} \omega_i} \int V'(A|E_i) d \bar{\bar{E}}_i \quad (1 \leq i \leq k-1)$$

$V$  désignant le volume à  $i$  dimensions. On voit que la  $(k-i)$ <sup>ème</sup> fonctionnelle s'obtient aussi en intégrant le contour apparent à  $i$  dimensions (section efficace à  $i$  dimensions de l'ovoïde  $A$ , cf. 4-4-2).

#### 6-2-6 Intégrale de rotation et déformation affine

Soit  $\xi$  une transformation affine (non dégénérée) laissant fixe l'origine des coordonnées,  $O$ . Elle transforme la boule unité  $K$  centrée en  $O$  en un ellipsoïde  $K^\xi$  concentrique. Si nous

faisons tourner un convexe A autour de l'origine et lui appliquons, en chacune de ses positions, la transformation  $\xi$ , nous obtenons la formule intégrale :

$$(105) \quad \frac{1}{C_k} \int W_i(A^\xi) d\bar{A} = \frac{1}{\omega_k} W_i(K^\xi) W_i(A)$$

(d  $\bar{A}$  désigne la densité de rotation de A, et l'intégrale est étendue à toutes les rotations). Le premier membre donne la valeur moyenne de la ième fonctionnelle pour le corps déformé  $A^\xi$  (la constante  $C_k$  est celle qui figure en (87)). Cette valeur moyenne est proportionnelle à la valeur de la même fonctionnelle pour le corps initial A : ainsi, la loi simple selon laquelle se modifie le volume de A dans une transformation affine s'applique aussi aux autres caractéristiques de ce corps, à condition de ne considérer que les valeurs moyennes de ces caractéristiques pour toutes les rotations.

Démonstration - Soit  $\varphi(A)$  le premier membre de (105) :  $\varphi$  est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{K}$ , monotone et invariante par déplacement. L'affinité  $\xi$  conserve la convexité et vérifie les règles  $(A \cup B)^\xi = A^\xi \cup B^\xi$  et  $(A \cap B)^\xi = A^\xi \cap B^\xi$ , de sorte que l'intégrand, dans (105) est additif, et il en résulte que la fonctionnelle  $\varphi$  est elle-même additive. D'autre part, la règle  $(\lambda A)^\xi = \lambda A^\xi$  montre que  $\varphi$  est homogène et de degré  $k-i$ . Le théorème V montre alors que  $\varphi$  est de la forme  $\varphi(A) = C W_i(A)$ . Pour  $A = K$ , on trouve  $\varphi(K) = W_i(K^\xi)$ , l'intégrand de (105) étant alors invariant par rotation. Mais  $\varphi(K) = C W_i(K) = C \omega_k$ , d'où  $C = \frac{1}{\omega_k} W_i(K^\xi)$ .

6-2-7 Dérivée affine moyenne.

Soit  $\omega$  un vecteur normé (direction), et  $A(\lambda, \omega)$  le transformé de  $A$  dans l'affinité de direction  $\omega$  et de module  $\lambda$ . [si l'on prend une base orthonormée contenant  $\omega$ , cette affinité consiste à multiplier par  $\lambda$  les composantes de chaque vecteur de l'espace relatives à  $\omega$ , sans modifier les autres composantes]. On a  $A(1, \omega) = A$ . Nous verrons en 6-4-4 (th. XII) que  $W_i(A(\lambda, \omega))$  est une fonction convexe de  $\lambda$ . Si nous posons, pour  $\lambda > 1$  :

$$q_i(A, \lambda, \omega) = \frac{1}{\lambda-1} [W_i(A(\lambda, \omega)) - W_i(A)]$$

cette convexité entraîne l'existence de la limite :

$$(106) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1+0} q_i(A, \lambda, \omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} W_i(A)$$

Nous dirons que cette limite est la dérivée de  $W_i(A)$  dans la direction  $\omega$ , et nous utiliserons le symbole  $\frac{\partial}{\partial \omega} W_i(A)$ .

La moyenne de cette dérivée pour toutes les directions de l'espace est donnée par la formule :

$$(107) \quad \frac{1}{k \omega_k} \int \frac{\partial}{\partial \omega} W_i(A) d\omega = \left(1 - \frac{1}{k}\right) W_i(A)$$

Démonstration - Par un raisonnement analogue à celui que l'on a fait dans la section précédente, on montre d'abord :

$$\frac{1}{k \omega_k} \int q_i(A, \lambda, \omega) d\omega = \frac{W_i [K(\lambda, \omega)] - \omega_k}{\omega_k (\lambda - 1)} W_i(A)$$

$K$  est la boule unité, et  $K(\lambda, \omega)$  un ellipsoïde de révolution dont la méridienne admet les demi-axes 1 et  $\lambda$ . Pour  $\lambda > 1$  fixé,  $q_i(A, \lambda, \omega)$  est une fonction continue de  $\omega$  sur la sphère unité  $S$  qui est compacte, et, pour une direction  $\omega$  fixée, cette fonction décroît vers  $\frac{\partial}{\partial \omega} W_i(A)$  lorsque  $\lambda \rightarrow 1+0$ . On en conclut que cette dérivée est elle-même intégrable sur  $S$ , et que l'on peut permuter le signe  $\int$  et le passage à la limite. Un calcul direct effectué sur l'ellipsoïde montre ensuite que le coefficient de  $W_i(A)$  a pour limite  $1 - \frac{i}{k}$ .

### N° 3 - THEOREMES GENERAUX DE GEOMETRIE INTEGRALE

#### 6-3-1 L'Anneau Convexe

Nous désignerons par  $\mathcal{S}$  la famille des ensembles  $A$  dans l'espace  $\mathbb{R}^k$  qui sont réunion finie d'ovoïdes propres ou impropres, de sorte qu'ils admettent des représentations de la forme :

$$(108) \quad A = \bigcup_{v=1}^n A_v \quad (A_v \in \mathcal{K})$$

En particulier,  $\emptyset \in \mathcal{S}$ . La classe  $\mathcal{S}$  est un anneau d'ensembles :

$$(109) \quad A, B \in \mathcal{S} = A \cup B, A \cap B \in \mathcal{S}$$

$\mathcal{S}$  est d'ailleurs l'anneau engendré par  $\mathcal{K}$ . Nous l'appellerons l'anneau convexe.

Soit  $E_i$  un  $i$ -plan,  $A_i = A \cap E_i$  et  $A^i = A|E_i$  la traversée et le contour apparent de  $A$ . On a l'implication :

$$(110) \quad A \in \mathcal{G} \Rightarrow A_i, A^i \in \mathcal{G}$$

qui montre que  $\mathcal{G}$  est stable pour les opérations de projection et de section par un plan.

La classe  $\mathcal{P}$  des polyèdres est un sous-anneau intéressant de  $\mathcal{G}$ . Avec l'anneau convexe  $\mathcal{S}$ , nous avons introduit une classe qui contient des ensembles non convexes et à laquelle nous allons pouvoir étendre les formules et les propositions de la géométrie intégrale sans sortir du cadre méthodologique simple qui a été le nôtre jusqu'à présent.

### 6-3-2 Fonctionnelles additives.

Soit  $\varphi$  une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{S}$ , associant à tout  $A \in \mathcal{S}$  un nombre réel  $\varphi(A)$  et respectant la convention :

$$(111) \quad \varphi(\emptyset) = 0$$

On dit que la fonctionnelle  $\varphi$  est additive, si l'on a :

$$(112) \quad \varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

pour tout  $A, B \in \mathcal{S}$ . On dit que  $\varphi$  est simplement additive si l'on a  $\varphi(A) = 0$  pour tout  $A$  appartenant à la classe  $\mathcal{S}''$  des ensembles impropres de  $\mathcal{S}$ , de sorte que l'on a :

$$(113) \quad A \cap B \in \mathcal{S}'' \Rightarrow \varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

Une fonctionnelle  $\varphi$  définie sur  $\mathcal{S}$  est, par là même, définie sur  $\mathcal{K}$ . Nous dirons que  $\varphi$  vérifie conditionnellement une propriété lorsqu'elle vérifie cette propriété sur la classe  $\mathcal{K}$  des ovoïdes : on parlera de continuité conditionnelle, de monotonie conditionnelle etc... Ainsi, les fonctionnelles  $V(A)$  et  $F(A)$  sont conditionnellement continues, monotones, définies  $\geq 0$  et bornées : la restriction apportée par l'adverbe conditionnellement est essentielle dans le cas de la surface  $F(A)$ .

### 6-3-3 La Caractéristique d'EULER - POINCARÉ

Nous nous proposons dans cette section d'établir l'existence d'une fonctionnelle additive  $\chi(A)$  définie sur l'anneau convexe  $\mathcal{S}$  qui soit conditionnellement constante, c'est-à-dire vérifie pour tout ovoïde non vide :

$$(116) \quad A \in \mathcal{K}, A \neq \emptyset \Rightarrow \chi(A) = 1$$

L'additivité de  $\chi$  permet de calculer facilement la valeur  $\chi(A)$  pour une figure  $A \in \mathcal{S}$  pour lequel on dispose d'une représentation de la forme (108). En itérant la relation (112), on trouve en effet :

$$(117) \quad \chi(A) = \sum_1 \varepsilon(A_{V_1}) - \sum_2 \varepsilon(A_{V_1} \cap A_{V_2}) + \dots$$

$\varepsilon$  désignant l'indicatrice définie par :

$$\varepsilon(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$$

et la sommation  $\sum_i$  étant étendue à toutes les combinaisons  $v_1, v_2, \dots, v_i$  de  $i$  indices choisis parmi les  $n$  indices  $1, \dots, n$  qui figurent dans la représentation (108).

Mais une figure  $A \in \mathcal{S}$  admet plusieurs représentations sous forme de réunion finie d'ovoïdes. Si nous démontrons l'existence de la fonctionnelle  $\chi$ , nous aurons par là même établi que la valeur calculée en (117) ne dépend pas du choix de cette représentation. Comme les termes qui figurent au deuxième membre de (117) ne prennent que les valeurs 0 et 1, on voit que la fonctionnelle  $\chi(A)$  ne pourra prendre que des valeurs entières, positives ou négatives. Ces valeurs sont univoquement déterminées par (108) et (118), de sorte qu'il existe au plus une fonctionnelle  $\chi$  possédant les propriétés souhaitées. On voit facilement que cette fonctionnelle doit posséder une propriété d'invariance de type topo-combinatoire, plus riche que la simple invariance pour le groupe des déplacements. En effet, si  $A, B \in \mathcal{S}$  admettent les représentations:

$$A = \bigcup_{v=1}^m A_v, \quad B = \bigcup_{v=1}^m B_v$$

avec des ovoïdes  $A_v, B_v$  indexées par les mêmes indices  $v = 1, 2, \dots, m$  et tels que les conditions

$$\varepsilon(A_{v_1} \cap \dots \cap A_{v_i}) = \varepsilon(B_{v_1} \cap \dots \cap B_{v_i})$$

soient vérifiées pour toutes les combinaisons possibles  $(v_1, \dots, v_i)$  d'indices, nous dirons que  $A$  et  $B$  sont équivalents au sens combinatoire et nous écrirons  $A \sim B$ . La formule (117) montre immédiatement

que l'on doit avoir :

$$(119) \quad A \sim B \Rightarrow \chi(A) = \chi(B)$$

En particulier,  $\chi$  doit être invariante pour les déplacements.

Démonstration de l'existence de  $\chi$  - Soit d'abord  $k = 1$ . Un ensemble  $A \neq \emptyset$  de l'anneau convexe est constitué de  $N = N(A)$  segments fermés disjoints. Posons  $\chi(A) = N(A)$  et  $\chi(\emptyset) = 0$ .

On vérifie sans peine que cette fonctionnelle possède les propriétés voulues.

Soit maintenant  $k > 1$ . Raisonnons par récurrence, en supposant que l'existence de la fonctionnelle  $\chi$  ait été établie pour toutes les dimensions  $< k$ . Soit  $G$  une droite passant par l'origine  $O$ . Considérons la famille à un paramètre des plans  $E_x$  orthogonaux à  $G$ , le paramètre continu  $x$  désignant la distance du plan  $E_x$  à l'origine  $O$ . Pour un  $A \in \mathcal{S}$ , on a  $A \cap E_x \in \mathcal{S}'$ ,  $\mathcal{S}'$  désignant l'anneau convexe défini sur l'espace à  $k-1$  dimensions. Par hypothèse,  $\chi'(A \cap E_x)$  est défini, l'accent indiquant que cette fonctionnelle se rapporte à l'espace à  $k-1$  dimensions.  $A$  étant fixé et  $x$  variable, introduisons la fonction auxiliaire :

$$(a) \quad h(x) = \chi'(A \cap E_x) - \chi'(A \cap E_{x+0})$$

où  $\chi'(A \cap E_{x+0})$  représente la limite à droite de  $\chi'(A \cap E_y)$  pour  $y \rightarrow x$ ,  $y > x$ .

On remarque que, si  $A$  admet la représentation (108), on a

$$\chi'(A \cap E_x) = \sum_1 \varepsilon(A_{v1} \cap E_x) - \sum_2 \varepsilon(A_{v1} \cap A_{v2} \cap E_x) + \dots$$

comme il résulte de (117). Ainsi  $\chi'(A \cap E_x)$  est une fonction étagée à  $2^n - 1$  valeurs distinctes au plus, de sorte que la limite à droite ci-dessus existe toujours. Il en résulte aussi que la fonction auxiliaire  $h(x)$  ne diffère de 0 qu'en un nombre fini de points  $x$ . Nous pouvons donc poser :

$$(b) \quad \chi(A) = \sum_x h(x)$$

la sommation, étendue de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ne portant en réalité que sur un nombre fini de valeurs non nulles.

(b) définit manifestement une fonctionnelle sur  $\mathcal{S}^*$  dans la terminologie Morphologie Mathématique, la fonctionnelle ainsi définie est dans le cas de l'espace à 2 dimensions,  $k=2$  :

$$\chi(A) = N_1(u) - N_0(-u)$$

$N_1(u)$  et  $N_0(-u)$  désignant les nombres de convexité de  $A$  et de son complémentaire  $A^c$  relatifs, respectivement, à la direction  $u$  de la droite orientée  $G$  et à la direction opposée  $-u^*$

Montrons que cette fonctionnelle est additive et conditionnellement constante. En effet : pour  $A, B \in \mathcal{S}$ , l'hypothèse de récurrence entraîne la relation :

$$\chi'(A \cap E_x) + \chi'(B \cap E_x) = \chi'[(A \cap E_x) \cup (B \cap E_x)] + \chi'[(A \cap E_x) \cap (B \cap E_x)]$$

Mais on a :

$$(A \cap E_x) \cup (B \cap E_x) = (A \cup B) \cap E_x$$

$$(A \cap E_x) \cap (B \cap E_x) = (A \cap B) \cap E_x$$

et, de plus, la relation d'additivité pour  $\chi'$  passe à la limite.

On en déduit la relation :

$$h(A, x) + h(B, x) = h(A \cup B, x) + h(A \cap B, x)$$

En sommant sur  $x$ , on obtient la relation d'additivité :

$$(c) \quad \chi(A) + \chi(B) = \chi(A \cup B) + \chi(A \cap B)$$

Si maintenant  $A$  est un ovoïde, la projection orthogonale de  $A$  sur la droite  $G$  est un intervalle fermé  $(a, b)$ , et l'hypothèse de récurrence donne :

$$\chi'(A \cap E_x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x < a \text{ ou } x > b \end{cases}$$

et par suite :

$$h(A, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq b \\ 1 & \text{si } x = b \end{cases}$$

et (b) montre alors  $\chi(A) = 1$ . Enfin  $\chi(\emptyset) = 0$ . Ainsi, la fonctionnelle que la relation (b) définit par récurrence est additive et conditionnellement constante, ce qui achève de démontrer le théorème d'existence.

Cette fonctionnelle  $\chi$  est identique à la caractéristique d'Euler-Poincaré, invariant topologique bien connu que l'on peut

introduire directement sur l'anneau convexe à partir de raisonnements topologiques appropriés: Comme cet invariant est lui aussi additif et conditionnellement constant, il coïncide avec  $\chi$ .

6-3-4 Les Fonctionnelles de Minkowski sur l'anneau convexe.

Nous allons maintenant étendre à l'anneau convexe  $\mathcal{S}$  les fonctionnelles de Minkowski, qui n'ont été définies jusqu'ici que sur la classe  $\mathcal{K}$  des ovoïdes, et les fonctionnelles ainsi prolongées seront encore additives sur  $\mathcal{S}$ . Pour  $A \in \mathcal{S}$ , nous poserons :

$$(120) \quad W_i(A) = \frac{1}{C_{ik}} \int \chi(A \cap E_i) d E_i \quad (i = 0, 1, \dots, k-1)$$

$\chi$  désignant la caractéristique d'Euler-Poincaré,  $C_{ik}$  la constante définie en (90),  $E_i$  un  $i$ -plan mobile et  $d E_i$  sa densité cinématique.

Il est facile de voir, à partir de (108) et (117) que cette intégrale existe effectivement; en tant que fonction de  $E_i$ , l'intégrand est la somme d'un nombre fini de fonctions se rapportant à des ovoïdes. Nous compléterons la définition (120) en posant :

$$(121) \quad W_k(A) = \omega_k \chi(A)$$

de sorte que les  $k+1$  fonctionnelles de Minkowski sont maintenant définies sur  $\mathcal{S}$ . On vérifie qu'il s'agit bien du prolongement

des fonctionnelles définies sur  $\mathcal{K}$  en prenant  $A \in \mathcal{K}$  dans (120) et (121) : pour  $A \in \mathcal{K}$ , on a, en effet :

$$\chi(A \cap E_i) = \frac{1}{\omega_i} W_i'(A \cap E_i) = 1$$

l'accent indiquant que  $W_i'$  est la fonctionnelle définie dans l'espace à  $i$  dimensions. La formule (103) de Crofton montre ensuite que l'intégrale (120) coïncide bien avec  $W_i(A)$ . Pour (121), la vérification est immédiate.

\*Il résulte de (120) que l'on peut reconstituer toutes les  $W_i$  à partir d'observations faites dans des plans à  $k-1$  dimensions, sauf  $W_k(A)$ , c'est-à-dire  $\chi(A)$  elle-même\*

Dans le cas particulier des polyèdres, (120) coïncide avec l'intégrale de volume (97) pour  $i = 0$ , et avec l'intégrale de surface de FAVARD (99) pour  $i = 1$ .

La fonctionnelle de Minkowski  $W_i(A)$  définie sur  $\mathcal{S}$  est invariante pour les déplacements, homogène de degré  $k-i$ , conditionnellement définie  $\geq 0$ , conditionnellement monotone, conditionnellement bornée et conditionnellement continue. De plus, elle est additive, et même simplement additive pour  $i = 0$ . Les théorèmes fondamentaux IV et V s'étendent aux fonctionnelles invariantes pour les déplacements, additives et conditionnellement continues ou, respectivement, conditionnellement monotones : en effet,  $\varphi$  étant également définie sur  $\mathcal{K}$  admet sur  $\mathcal{K}$  une représentation du type (75)

ou (78), et la propriété d'additivité des fonctionnelles de Minkowski montre que cette représentation s'étend à  $\mathcal{S}$ .

6-3-5 Fonctionnelles associées, et théorème général.

Soit  $\varphi$  une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{S}$ , additive et conditionnellement continue (mais non nécessairement invariante pour les déplacements). Posons :

$$(122) \quad \varphi_i(A) = \frac{1}{C_{ik}} \int \varphi(A \cap E_i) d E_i \quad (i = 0, 1, \dots, k-1)$$

$$(123) \quad \varphi_k(A) = \omega_k \varphi(A)$$

avec les constantes  $C_{ik}$  définies en (90). Nous associons ainsi à  $\varphi$  une échelle de  $k+1$  fonctionnelles. D'après la continuité conditionnelle de  $\varphi$ , l'intégrand dans (122) est une fonction continue du plan mobile  $E_i$  lorsque  $A$  est un ovoïde, pourvu que nous nous limitons à ceux des plans  $E_i$  qui rencontrent  $A$ . Par suite l'intégrale existe sûrement pour  $A \in \mathcal{K}$ . Pour  $A \in \mathcal{S}$ , l'additivité permet de mettre l'intégrand sous la forme d'une somme finie de fonctions continues de  $E_i$ , et l'intégrale existe toujours.

Ces nouvelles fonctionnelles sont donc définies sur l'anneau convexe  $\mathcal{S}$ , et, comme on le vérifie facilement, elles sont encore additives et conditionnellement continues. On les appelle fonctionnelles associées à  $\varphi$ . Leur importance résulte du théorème suivant :

Théorème VI (théorème général de la géométrie intégrale). Soit  $\varphi$  une fonctionnelle définie sur l'anneau convexe  $\mathcal{S}$ , additive et conditionnellement continue, soient  $\varphi_\nu$  les fonctionnelles associées à  $\varphi$  et A et B deux ensembles de  $\mathcal{S}$ . On a :

$$(124) \quad \frac{1}{C_k} \int \varphi(A \cap B) \, d B = \frac{1}{\omega_k} \sum_{\nu=0}^k C_k^\nu \varphi_\nu(A) W_{k-\nu}(B)$$

Dans cette formule intégrale, A est fixe, B mobile,  $d B$  est la densité cinématique de B,  $C_k$  la constante (87), et l'intégration est étendue à tous les déplacements de B.

[démonstration pages 242 - 243]

#### 6-3-6 Les formules cinématiques de von BLASCHKE et SANTALO

Considérons la fonctionnelle  $\chi(A)$ , définie sur  $\mathcal{S}$  additive, conditionnellement continue et conditionnellement constante, et comparons (122), (123) avec (120) et (121). On voit que les fonctionnelles associées à  $\chi$  sont précisément les fonctionnelles de Minkowski  $W_i(A)$ . On obtient donc, comme cas particulier du théorème général (124), les formules suivantes qui relient la caractéristique d'Euler-Poincaré et les fonctionnelles de Minkowski, et que l'on appelle formules cinématiques de von Blaschke et Santalo :

$$(126) \quad \frac{1}{C_k} \int \chi(A \cap B) \, d B = \frac{1}{\omega_k} \sum_{\nu=0}^k C_k^\nu W_\nu(A) W_{k-\nu}(B)$$

On retrouve les formules de STEINER comme cas particulier. En effet, si l'on pose  $B = \rho K$  ( $K$ , boule, unité),  $dB = d\bar{B} d\bar{\bar{B}}$ , et si l'on intègre d'abord sur les rotations de  $B$  (centrée en  $O$ ), on fait disparaître le facteur  $1/C_k$  placé devant le signe  $\int$ . En intégrant ensuite sur les translations de la boule  $B$ , on fait apparaître le volume du parallèle externe  $A_\rho$ . A droite, on a  $W_{k-\nu}(B) = \omega_k \rho^\nu$ , et l'on voit apparaître le polynôme de Steiner (cf. (48)).

### 6-3-7 Le Formulaire Cinématique.

Partant de la fonctionnelle  $\varphi(A) = W_\mu(A)$  définie sur  $\mathcal{S}$  additive et conditionnellement continue, nous obtenons  $\mu + 1$  ( $0 \leq \mu \leq k$ ) fonctionnelles associées non triviales :

$$(127) \quad \varphi_i(A) = \frac{\mu! i! \omega_\mu \omega_i \omega_{2k-\mu-i}}{(\mu+i-k)! k! \omega_{k-\mu} \omega_{k-i} \omega_{\mu+i-k}} W_{\mu+i-k}(A) \quad (k-\mu \leq i \leq k)$$

et les  $k-\mu$  fonctionnelles restantes sont identiquement nulles :

$$(128) \quad \varphi_i(A) = 0 \quad (0 \leq i \leq k - \mu)$$

Pour démontrer ce résultat à partir de (120) ou (121), on établit d'abord (par application itérée de la relation (50)), la formule auxiliaire :

$$(129) \quad W_\mu(A \cap E_i) = \frac{\mu! i! \omega_\mu}{(\mu+i-k)! k! \omega_{\mu+i-k}} W_{\mu+i-k}''(A \cap E_i)$$

ou  $W''$  est la fonctionnelle de l'espace à  $i$  dimensions. On utilise ensuite la formule de Crofton (103), et on obtient (127), ou (128) dans le cas  $A \in \mathcal{K}$ . On étend ensuite le résultat à  $\mathcal{S}$  par additivité.

Si maintenant nous appliquons le théorème général VI aux fonctionnelles de Minkowski, les résultats ci-dessus permettent d'établir le formulaire complet suivant :

$$(130) \quad \frac{1}{C_k} \int W_\mu(A \cap B) \, d B = \frac{1}{\omega_k} \sum_{\nu=k-\mu}^k C_{\nu\mu} W_{\mu+\nu-k}(A) W_{k-\nu}(B)$$

avec les constantes auxiliaires :

$$(131) \quad C_{\nu\mu} = C_\mu^{k-\nu} \frac{\omega_\nu \omega_\mu \omega_{2k-\nu-\mu}}{\omega_{k-\nu} \omega_{k-\mu} \omega_{\nu+\mu-k}}$$

Pour  $\mu = k$ , on retrouve la formule cinématique (126). Pour  $\mu = 0$  on retrouve la relation (98) déjà établie dans le cas du polyèdre.

#### N° 4 - FONCTIONNELLES CONCAVES SUR $\mathcal{K}$ .

##### 6-4-1 Classe convexes d'ovoïdes, fonctionnelles concaves

Une classe  $\mathcal{K}^0 \subset \mathcal{K}$  est convexe si elle contient toutes les combinaisons linéaires normées de Minkowski de deux ovoïdes  $A$  et  $B$  dès que  $A, B \in \mathcal{K}^0$  :

$$(132) \quad A, B \in \mathcal{K}^0, \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha A \oplus \beta B \in \mathcal{K}^0$$

- Exemples - I - la classe des pavés d'arêtes parallèles aux vecteurs de base.
- II - la classe des polyèdres ovoïdes.
- III - la classe des ovoïdes de révolution admettant le même axe de révolution.
- IV - la classe des ovoïdes contenus dans un même convexe.
- V - la classe des ovoïdes qui rencontrent un convexe donné.
- VI - la classe des ovoïdes qui contiennent un ensemble donné.
- sont des classe convexes.

Une fonctionnelle  $\varphi$  définie sur une classe convexe  $\mathcal{K}_0$  est concave au sens de Minkowski si :

$$(135) \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \varphi(\alpha A \oplus \beta B) \geq \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$$

Le fait que cette propriété n'est vérifiée que sur  $\mathcal{K}^0$ , et non nécessairement sur  $\mathcal{K}$  tout entier, peut jouer un rôle essentiel. On montre, par exemple, qu'une fonctionnelle définie  $\geq 0$  et concave définie sur une classe convexe  $\mathcal{K}^0$  stable pour les translations est nécessairement invariante par translation. Ainsi une fonctionnelle définie  $\geq 0$  et concave qui n'est pas invariante par translation ne peut pas être définie sur  $\mathcal{K}$  toute entière, et la restriction à un sous-ensemble de  $\mathcal{K}$  est ici dans la nature des choses.

Il y a des rapports étroits entre cette notion de fonctionnelle concave et la notion usuelle de fonction concave d'une variable réelle. Donnons un exemple simple. Soit P un ensemble

convexe, et considérons les points  $p \in P$  comme des ovoïdes impropres :  $P$  est une classe convexe, car ici  $\alpha p \oplus \beta q = \alpha p + \beta q$ . Une fonctionnelle définie sur la classe  $P$  s'identifie à une fonction de point définie sur l'ensemble  $P$ . Cette fonctionnelle est concave au sens de Minkowski si et seulement si la fonction qui lui correspond est concave au sens usuel.

Si  $C(\lambda)$  est une famille concave (cf. 4-2-4) à un paramètre d'ovoïdes contenus dans une classe convexe  $\mathcal{K}^0$ , et si  $\varphi$  est une fonctionnelle monotone et concave définie sur  $\mathcal{K}^0$ , la fonction

$$(137) \quad f(\lambda) = \varphi[C(\lambda)]$$

est une fonction concave, au sens usuel, du paramètre  $\lambda$ .

On a souvent à examiner si une fonctionnelle de la forme

$$\varphi(A) = [\Phi(A)]^{\frac{1}{p}}$$

est concave,  $\Phi$  désignant une fonctionnelle homogène de degré  $p$  ( $\varphi$  est donc linéaire au sens usuel). On peut alors utiliser le critère suivant :

Critère I - Une fonctionnelle  $\varphi$  strictement positive, linéaire au sens usuel et définie sur une classe convexe  $\mathcal{K}^0$  stable pour les homothéties (de centre 0) est concave au sens de Minkowski si et seulement si il existe  $p > 0$  tel que la fonctionnelle-puissance  $\Phi(A) = (\varphi(A))^p$  vérifie :

$$(138) \quad \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1, \Phi(A) = \Phi(B) = 1 \Rightarrow \Phi(\alpha A \oplus \beta B) \geq 1$$

[démonstration p. 246]

#### 6-4-2 Racines du Volume et de la Surface

Dans ce qui suit, on se limite à la classe  $\mathcal{K}'$  des ovoïdes propres.

Théorème VII - Si  $V(A)$  et  $F(A)$  désignent le volume et la surface de l'ovoïde propre  $A \in \mathcal{K}'$ , les deux fonctionnelles définies sur  $\mathcal{K}'$  par :

$$(139) \quad \varphi(A) = (V(A))^{\frac{1}{k}}$$

$$(140) \quad \Psi(A) = (F(A))^{\frac{1}{k-1}}$$

sont concaves au sens de Minkowski.

Ces deux fonctionnelles sont, de plus, invariantes pour les déplacements, définies  $> 0$ , linéaires au sens usuel (homogènes de degré 1), monotones, continues et bornées.

[démonstration pages 247 - 249]

Plus généralement, on montre que :

$$(142) \quad \varphi(A) = (W_i(A))^{\frac{1}{k-i}} \quad (0 \leq i \leq k-1)$$

est une fonctionnelle concave.

6-4-3 Figures de Révolution

Soit  $\mathcal{R}^0$  la classe des ovoïdes propres de révolution admettant un même axe R passant par l'origine. Le rayon équatorial a de  $A \in \mathcal{R}^0$  est toujours positif.  $\mathcal{R}^0$  est une classe convexe stable pour les homothéties de centre 0 et les translations parallèles à R. Le haut degré de symétrie de ces ovoïdes permet de construire des fonctionnelles concaves très simples.

Théorème VIII - Si  $A \in \mathcal{R}^0$  est un ovoïde propre de révolution, a son rayon équatorial, et  $W_i$  la  $i^{\text{ème}}$  fonctionnelle de Minkowski, la formule :

$$(143) \quad \varphi(A) = \left(\frac{1}{a}\right)^{k-i-1} W_i(A) \quad (k \geq 1, 0 \leq i \leq k-1)$$

est une fonctionnelle concave sur  $\mathcal{R}^0$ .

[démonstration p. 249]

Théorème IX - La racine d'ordre  $k-i$  de la fonctionnelle de Minkowski  $W_i(A)$  est une fonctionnelle concave définie sur  $\mathcal{R}^0$  :

$$(144) \quad \Psi(A) = \left(W_i(A)\right)^{\frac{1}{k-i}} \quad (k \geq 1, 0 \leq i \leq k-1)$$

6-4-4 Familles - Canal concaves et convexes

On a vu l'importance de la notion de contour apparent dans la géométrie intégrale. Il est donc naturel de considérer la famille des ovoïdes admettant le même contour apparent dans un plan

$E^0$  fixe donné. Ces ovoïdes constituent une classe convexe  $\mathcal{K}^0$ . Comme les ovoïdes de  $\mathcal{K}^0$  sont tous inscrits dans un même cylindre convexe  $T$  (canal), nous dirons que  $\mathcal{K}^0$  est une classe-canal. Nous supposons que le plan  $E^0$  qui porte le contour apparent commun (ou base)  $T_0 = T \cap E^0$  contient l'origine  $O$ . La droite  $G^0$  menée par  $O$  orthogonalement à  $E^0$  est l'axe du canal. Toute droite parallèle à  $G^0$  et contenue dans le canal  $T$  est une droite-canal. Soit  $w$  la direction de l'axe-canal orienté. L'ensemble des points de la frontière d'un ovoïde  $A \in \mathcal{K}^0$  qui n'admettent comme plans d'appui que des plans  $E(u)$  vérifiant  $(u, w) > 0$  (respectivement  $(u, w) < 0$ ) constitue la surface frontière supérieure (respectivement inférieure) de  $A$ .

On établit facilement les faits géométriques suivants :

I - Si  $E_i$  est un  $i$ -plan mené par une droite-canal  $G$ , les intersections  $A \cap E_i$ ,  $A \in \mathcal{K}^0$  constituent dans  $E_i$  une classe-canal à  $i$  dimensions dont le canal est  $T \cap E_i$ .

II - Si un plan  $E$  n'est pas orthogonal à l'axe  $G^0$ , les contours apparents  $A|E$ ,  $A \in \mathcal{K}^0$  constituent une classe-canal à  $k-1$  dimensions dont le canal est  $T|E$ .

Nous appellerons famille-canal une famille à un paramètre  $\lambda$  (définie sur un intervalle de la droite réelle) d'ensembles  $A(\lambda)$  appartenant à une classe-canal  $\mathcal{K}^0$ . Une famille-canal est concave ou convexe selon que l'une ou l'autre des relations :

$$(146) \quad A(\alpha \xi + \beta \eta) \supset \alpha A(\xi) \oplus \beta A(\eta)$$

$$(147) \quad A(\alpha \xi + \beta \eta) \subset \alpha A(\xi) \oplus \beta A(\eta)$$

est vérifiée pour  $\alpha, \beta \geq 0$  et  $\alpha + \beta = 1$ , et tous  $\xi, \eta$  appartenant à l'intervalle de variation du paramètre sur lequel la famille est définie. Si une famille est à la fois convexe et concave, on dit qu'elle est linéaire. On dit qu'une famille-canal  $A(\lambda)$  est complètement concave (resp. complètement convexe) si pour tout  $i$ -plan  $E_i$  ( $i = 1, 2, \dots$  ou  $k$ ) passant par une droite-canal  $G$  la famille-canal  $A_i(\lambda) = A(\lambda) \cap E_i$  est concave (resp. convexe). Une famille-canal à la fois complètement concave et complètement convexe est complètement linéaire.

En réalité, pour qu'une famille-canal  $A(\lambda)$  soit complètement concave, il suffit qu'elle soit convexe ; pour qu'elle soit complètement convexe, il suffit que, pour toute droite-canal  $G$ , la famille  $A(\lambda) \cap G$  soit convexe. Ainsi, une famille linéaire est complètement concave, mais non nécessairement complètement linéaire.

[démonstration simple p. 252]

Ces propriétés se conservent par projection :

Lemme III - Soit  $A(\lambda)$  une famille-canal à  $k > 1$  dimensions complètement concave (resp. complètement convexe), et soit  $A'(\lambda)$  la famille des contours apparents  $A(\lambda)|E$  dans un plan fixe  $E$ . Alors  $A'(\lambda)$  est une famille-canal à  $(k-1)$  dimensions complètement concave (resp. complètement convexe).

[démonstration p. 253]

Soit  $\mathcal{K}^0$  une classe canal, et  $A \in \mathcal{K}^0$ . On appelle allongement de A un ensemble de la forme  $\tilde{A} = A \oplus \sigma S$  ( $\sigma \geq 0$ ) où S est un segment unité porté par l'axe-canal  $G^0$ . On a évidemment  $\tilde{A} \in \mathcal{K}^0$ . L'opération inverse, ramenant de  $\tilde{A}$  à A, s'appelle un raccourcissement. On dit que deux ovoïdes  $A, B \in \mathcal{K}^0$  sont équivalents pour les allongements si l'on peut trouver  $\rho$  et  $\sigma \geq 0$  tels que  $A \oplus \rho S$  et  $B \oplus \sigma S$  soient égaux à une translation près. Une famille-canal de la forme

$$(148) \quad A(\lambda) = A \oplus \lambda a S \quad (a \geq 0)$$

est une famille d'allongement : tous les ovoïdes qu'elle contient sont équivalents pour les allongements. On vérifie immédiatement qu'une telle famille est complètement linéaire. La réciproque est vraie :

Lemme IV - Une famille-canal est complètement linéaire si et seulement si elle constitue une famille d'allongement.

[démonstration page 254]

Voici encore des critères qui nous seront utiles :

Lemme V - Pour que deux ovoïdes A et B d'une classe-canal soient équivalents par allongement, il faut et il suffit que  $A \cap E$  et  $B \cap E$  soient équivalents par allongement pour tout plan E passant par une droite-canal.

Lemme VI - Deux ovoïdes  $A$  et  $B$  d'une classe-canal sont équivalents pour l'équivalence d'allongements si et seulement si les contours apparents  $A|E$  et  $B|E$  le sont pour tout plan  $E$  parallèle à l'axe canal  $G^0$ .

Lemme VII - Une famille-canal est une famille d'allongement si et seulement si pour tout plan  $E$  parallèle à l'axe canal la famille des contours apparents dans  $E$  (resp. la famille des sections par  $E$ ) des ovoïdes de cette famille-canal constitue une famille d'allongement.

[démonstration pages 255 et 256]

Théorème X - Si  $A(\lambda)$  est une famille-canal complètement concave (resp. complètement convexe, complètement linéaire) la fonctionnelle de Minkowski  $W_i[A(\lambda)]$  constitue une fonction concave (resp. convexe, linéaire) du paramètre  $\lambda$ .

Corollaire I - Soit  $k \geq 2$ , et  $A(\lambda)$  une famille-canal complètement concave. La fonctionnelle de Minkowski  $W_i[A(\lambda)]$  ( $0 \leq i \leq k-2$ ) constitue une fonction linéaire du paramètre  $\lambda$  si et seulement si  $A(\lambda)$  est une famille d'allongement.

Corollaire II - Soit  $k \geq 2$ , et  $A(\lambda)$  une famille-canal complètement convexe. La  $i^{\text{ème}}$  fonctionnelle de Minkowski  $W_i[A(\lambda)]$  ( $1 \leq i \leq k-1$ ) constitue une fonction linéaire du paramètre  $\lambda$  si et seulement si  $A(\lambda)$  est une famille d'allongement.

[démonstration p. 256 - 258]

Dans une famille d'allongement du type (148), les fonctionnelles de Minkowski constituent des fonctions linéaires de  $\lambda$ .  
 Cela se voit directement : le volume d'un parallèle est :

$$V_p(A \oplus \lambda a S) = V(A_p) + \lambda a V'(A'_p)$$

et la formule (48) de Steiner donne :

$$(149) \quad W_i(A \oplus \lambda a S) = W_i(A) + \frac{\lambda a}{k} (k-i) W_i^1(A)$$

$A'$  désigne le contour apparent de  $A$  dans la direction  $W$  du canal, et  $V'$  et  $W_i^1$  sont le volume et la fonctionnelle de l'espace à  $k-1$  dimensions.

Voici quelques applications.

I - Soient  $A$  et  $B$  deux ovoïdes admettant le même contour apparent  $A' = A|E = B'|E$  dans un plan  $E = E(W)$ .  $A$  et  $B$  appartiennent à la classe-canal dont le canal admet la base  $T = A' = B'$  et l'axe la direction  $W$ . - Toute droite-canal  $G$  rencontre  $A$  et  $B$ .

Les relations :

$$(150) \quad C(\lambda) = (1-\lambda) A \oplus \lambda B$$

et

$$(151) \quad D(\lambda) = \bigcup_{G \subset T} ((1-\lambda)(G \cap A) \oplus \lambda (G \cap B))$$

définissent pour  $0 \leq \lambda \leq 1$  deux familles à un paramètre. On vérifie facilement que  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$  sont des ovoïdes. Ces deux

familles d'ovoïdes reliant continument A et B :  $C(0) = D(0) = A$  et  $C(1) = D(1) = B$ . De plus, ce sont des familles-canal. On vérifie immédiatement à partir des définitions que  $C(\lambda)$  est complètement concave et  $D(\lambda)$  complètement convexe. D'après le théorème X, on a donc :

$$(152) \quad W_i(C(\lambda)) \geq (1-\lambda) W_i(A) + \lambda W_i(B)$$

$$(153) \quad W_i(D(\lambda)) \leq (1-\lambda) W_i(A) + \lambda W_i(B)$$

Dans (152), on a toujours l'égalité pour  $i = k-1$  et  $i = k$  ; pour  $i = 0, 1, \dots, k-2$ , on a l'égalité si et seulement si A et B sont équivalents par allongements (corollaire I) - Dans (153), l'égalité a toujours lieu pour  $i = 0$  et  $i = k$  ; elle a lieu pour  $i = 1, 2, \dots, k-1$  si et seulement si A et B sont équivalents par allongements (cf corollaire II) -

On a un cas particulier intéressant lorsque  $B = \tilde{A}$  est le symétrique de A par rapport à un plan E. On pose alors :

$$(154) \quad \bar{A}(\lambda) = (1-\lambda) A \oplus \lambda \tilde{A}$$

$$(155) \quad \bar{\bar{A}}(\lambda) = \bigcup_{G \subset T} ((1-\lambda)(G \cap A) \oplus \lambda (G \cap \tilde{A}))$$

et on obtient deux familles d'ovoïdes qui relient continument A à son image symétrique  $\tilde{A}$ . Le passage de A à l'ovoïde  $\bar{A} = \bar{A}(\frac{1}{2})$  symétrique par rapport à E est une symétrisation de BLASCHKE ;

le passage de  $A$  à  $\bar{A} = \bar{A}(\frac{1}{2})$ , également symétrique par rapport à  $E$ , redonne la symétrisation de STEINER. Les relations (154) et (155) réalisent une interpolation continue de la symétrisation de BLASCHKE et de celle de Steiner : la première famille d'interpolation est complètement concave ; la seconde, complètement convexe. D'après le théorème X, les fonctionnelles de Minkowski deviennent des fonctions du paramètre  $\lambda$  concaves dans le cas de la famille de BLASCHKE, convexes dans le cas de la famille de Steiner.

Pour  $\lambda = \frac{1}{2}$ , (152) et (153) donnent :

$$(156) \quad W_i(\bar{A}) \geq W_i(A) \quad (0 \leq i \leq k)$$

$$(157) \quad W_i(\tilde{A}) \leq W_i(A) \quad (0 \leq i \leq k)$$

ce qui s'énonce :

Théorème XI - La symétrisation de BLASCHKE ne diminue pas les fonctionnelles de Minkowski ; celle de Steiner ne les augmente pas.-

Cherchons à quelles conditions les fonctionnelles restent constantes dans ces symétrisations : ce sont les mêmes conditions que celles qui entraînent l'égalité en (152) et (153). Ainsi,  $A$  doit être équivalent à  $\tilde{A}$  par allongement. Cela n'est possible que si  $A$  et  $\tilde{A}$  sont égaux à une translation près, c'est-à-dire si  $A$  admet un plan de symétrie parallèle à  $E$ . On peut donc énoncer :

Corollaire III - Si A n'a pas de plan de symétrie parallèle à E, la symétrisation de Blaschke augmente les fonctionnelles  $W_i$  pour  $i = a, \dots, k-2$ , et les laissent invariantes pour  $i = k-1$  et  $i = k$ .

Corollaire IV - Si A n'admet pas de plan de symétrie parallèle à E, la symétrisation de Steiner diminue les fonctionnelles  $W_i(A)$  pour  $i = 1, \dots, k-1$  et les laissent invariantes pour  $i = 0$  et  $i = k$  -

6-4-5 Moments des fonctionnelles concaves

Nous allons donner deux théorèmes généraux qui montrent que l'on obtient encore des fonctionnelles concaves à partir de certaines intégrales cinématiques portant sur la puissance  $p^{\text{ème}}$  d'une fonctionnelle concave.

I - Soit d'abord  $\mathcal{K}^0$  une classe convexe d'ovoïdes propres, stable pour les translations, et  $\mathcal{E}_i$  une famille complète de  $i$ -plans parallèles. Les intersections  $A \cap E_i$  et leurs sous-ensembles qui sont des ovoïdes propres dans  $E_i$ , forment, pour  $A \in \mathcal{K}^0$  et  $E_i \in \mathcal{E}_i$  une nouvelle classe convexe  $\mathcal{K}_i^0$  stable pour les translations [vérification immédiate]

Théorème XIII - Soit  $\varphi$  une fonctionnelle concave, linéaire au sens usuel, strictement positive et monotone, définie sur la classe convexe  $\mathcal{K}_i^0$ , et  $p > 0$ . Si l'on pose :

$$(160) \quad \Psi(A) = \left( \int [\varphi(A \cap E_i)]^p d \bar{E}_i \right)^{\frac{1}{p+k-i}}$$

où  $\bar{E}_i$  désigne la densité de translation des  $i$ -plans  $E_i \in \mathcal{S}_i$ ,  
 et où l'intégration est étendue aux  $E_i \in \mathcal{S}_i$  tels que  $A \cap E_i \in \mathcal{K}_i^0$ ,  
 $\Psi$  est une fonctionnelle strictement positive, monotone, concave,  
 linéaire au sens usuel, définie sur la classe convexe  $\mathcal{K}^0$ .

[démonstration p. 262 - 264]

Cas Particulier : Soit  $\mathcal{K}^0$  la classe de tous les ovoïdes propres,  
 $i = 1$  et  $\mathcal{S}_1$  la famille des droites parallèles à une direction  
 donnée.  $\mathcal{K}_1^0$  est alors la classe de segments  $S$  de longueur  $s > 0$   
 situés sur la droite de  $\mathcal{S}_1$ . Avec  $\varphi(S) = s$  et  $p = 1$ , on obtient :

$$(161) \quad \Psi(A) = (V(A))^{\frac{1}{k}}$$

et on retrouve le théorème de Brunn-Minkowski.

II - Soit encore  $\mathcal{K}^0$  une classe convexe d'ovoïdes propres stables  
 pour les homothéties de centre 0 et  $\mathcal{E}_i$  la famille des  $i$ -plans  
 passant par l'origine. Les contours apparents  $A|E_i$ ,  $A \in \mathcal{K}^0$   
 forment pour chaque  $E_i \in \mathcal{E}_i$  fixé une classe convexe  $\mathcal{K}^{\hat{\delta}}(E_i)$   
 d'ovoïdes propres dans  $E_i$ , et cette classe est stable pour les  
 homothéties de centre 0 -

Théorème XIV - Soit  $\varphi$  une fonctionnelle strictement positive, linéaire  
 au sens usuel et continue, définie sur la réunion  $\mathcal{K}_i^0$  des  $\mathcal{K}^0(E_i)$   
 et concave sur chaque  $\mathcal{K}^0(E_i)$ , et soit  $p \geq -1$  (mais  $p \neq 0$ ). Si

l'on pose :

$$(162) \quad \Psi(A) = \left\{ \int [\varphi(A|E_i)]^{-p} d\bar{E}_i \right\}^{-\frac{1}{p}}$$

d  $\bar{E}_i$  désignant la densité de rotation de  $E_i \in \mathcal{E}_i$ , et l'intégrale étant étendue à  $\mathcal{E}_i$ ,  $\Psi$  est une fonctionnelle strictement positive, linéaire au sens usuel, concave et continue définie sur la classe convexe  $\mathcal{K}^0$ .

[démonstration p. 264-265]

Cas particulier : Soit  $\mathcal{K}^0$  la classe de tous les ovoïdes propres,  $i = 1$  et  $\mathcal{E}_1$  l'ensemble des droites passant par l'origine.  $\mathcal{K}_1^0$  est alors la classe des segments  $S$  de longueur  $s > 0$  portés par les droites  $G \in \mathcal{E}_1$ . Posons  $\varphi(S) = s$  et  $p = -1$ . On obtient, par analogie avec (43) et (104) :

$$(163) \quad \Psi(A) = N(A)$$

Ainsi la norme est une fonctionnelle concave. En fait, elle est même linéaire au sens de Minkowski.

#### 6-4-6 Moments des traversées et des largeurs

Soit  $A \in \mathcal{K}'$  un ovoïde propre,  $\mathcal{S}$  la famille des droites  $G$  parallèles à une direction donnée,  $s$  la longueur de la traversée  $A \cap G$ . L'intégrale étendue aux droites  $G \in \mathcal{S}$  :

$$(164) \quad S_p(A) = \int (s(A \cap G))^p d\bar{G} \quad (0 < p < \infty)$$

est le moment d'ordre  $p$  des traversées de  $A$ . - \* je traduis par

moment des traversées le terme Sehnen-potenz-integral, intégrale des puissances des traversées\* - On peut montrer à partir du théorème XIII que :

$$(165) \quad \sigma_p(A) = \left( S_p(A) \right)^{\frac{1}{p+k-1}} \quad (0 < p < \infty)$$

est une fonctionnelle concave au sens de Minkowski. -

Soit maintenant  $b(A,u)$  la largeur, dans la direction  $u$ , d'un ovoïde propre  $A \in \mathcal{K}$ . L'intégrale étendue à toutes les directions :

$$(166) \quad T_q(A) = \int (b(A,u))^q d u \quad (-\infty < q < \infty)$$

est le moment d'ordre  $q$  de la largeur de  $A$  (Breiten-potenz-integral). Comme  $b(A|u)$  est la longueur du contour apparent de  $A$  sur la droite de direction  $u$  passant par l'origine, le théorème XIV permet de montrer que :

$$\tau_q(A) = \left( T_q(A) \right)^{\frac{1}{q}} \quad (-\infty < q \leq 1, q \neq 0)$$

est une fonctionnelle concave au sens de Minkowski.

#### 6-4-7 Moments Planaires

Soit  $\mathcal{K}^0$  la classe des ovoïdes propres  $A$  intérieurs à un demi-espace  $H = H(u)$  limité par un plan  $E$  passant par l'origine  $O$ .  $\mathcal{K}^0$  est stable pour les homothéties de centre  $O$ . Soit  $r(P)$  la distance au plan  $E$  d'un point  $P \in H$ . Pour  $A \in \mathcal{K}^0$ ,

l'intégrale étendue à tous les points  $P \in A$  :

$$(168) \quad M_p(A) = \int (r(P))^p dP \quad (0 \leq p < \infty)$$

est le moment planaire d'ordre  $p$  de  $A$ . Le théorème XIII permet de montrer que :

$$(169) \quad \mu_p(A) = \left( M_p(A) \right)^{\frac{1}{p+k}}$$

est une fonctionnelle définie sur  $\mathcal{K}^0$  et concave au sens de Minkowski. Pour  $p = 0$  on retrouve à nouveau le théorème de Brunn-Minkowski, puisque  $\mu_0(A) = (V(A))^{\frac{1}{k}}$

---