N-162

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 99

Les ovoïdes plans : Volume et Covolume

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 100

L'Intégrale de RIEMANN - MINKOWSKI

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 101

Intégrales et mesures à valeurs dans $\overline{\mathcal{K}}_o$.

NOTE GEOSTATISTIQUE n° 99

Les ovoïdes plans : Volume et Covolume

Dans cette Note, je me propose de préciser les indications de la Note 98 en me limitant aux ensembles compacts convexes du plan $\mathbb{R}^2$. S désigne le cercle unité, et $\mathcal{R}$ le cone convexe à base compacte de $\mathcal{C}(S)$ formé des fonctions positives $r : S \to \mathbb{R}_+$ qui sont podaires d'ensembles convexes compacts de $C_0(\mathcal{K})$. Posons d'abord un lemme d'approximation.

1 - Caractérisation de $\mathcal{R}$.

Lemme - $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}$ est dense dans $\mathcal{R}$

Considérons, en effet, le demi-groupe de convolution associé au mouvement brownien sur S, faisant correspondre à tout $f \in \mathcal{C}(S)$ la fonction $g_t * f$, avec :

$$g_t(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha-2k\pi)^2}{2ct}} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{ct}{2}p^2} \cos p\alpha$$

Ce demi-groupe est fortement continu. Si $r \in \mathcal{R}$, la fonction $r_t = g_t * r$ est dans $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}$, et converge uniformément vers r pour $t \to 0$.

Ce lemme permet de caractériser $\mathcal{R}$:

Proposition 1 - une fonction r positive sur S est dans $\mathcal{R}$ si et seulement si $s = r + r''$ est une mesure positive sur S (r'' désignant la dérivée seconde de r au sens des distributions).

En effet, le demi-groupe de convolution g_t étant fortement continu, on a $r \in \mathcal{R}$ si et seulement si $r_t = g_t * r \in \mathcal{R}$ pour $t > 0$. Comme r_t est dans $\mathcal{C}_2$, ceci équivaut à $r_t + r''_t \geq 0$, c'est-à-dire à :

$$< r_t + r''_t \, , f > = < r_t, f + f''> \;\geq 0$$

pour toute fonction f positive de $\mathcal{C}_2(S)$. Pour t tendant vers 0, cette condition entraine :

$$< r, f + f'' > = < r + r'', f > \;\geq\; 0$$

d'où résulte que $r + r'' = s$ est une distribution positive, donc une mesure positive. Inversement, si s est une mesure positive, $g_t * s = r_t + r''_t$ est une fonction positive, et $r_t \in \mathcal{R}$, d'où $r \in \mathcal{R}$ en faisant tendre t vers 0.

Cette mesure $s = r + r''$ représente l'élément d'arc du contour de l'ovoïde A dont la podaire est r. Celà se voit sans peine pour $r \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}$, et il suffit d'utiliser le lemme pour voir que cette interprétation subsiste dans le cas général.

Pour $r \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}$, en effet, on obtient une représentation en coordonnées cartésiennes du contour de A en fonction de l'angle α de la normale positive en résolvant le système :

$$\begin{cases} x \cos\alpha + y \sin \alpha = r \\ - x \sin\alpha + y \cos \alpha = r' \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$(1) \qquad \begin{cases} x(\alpha) = r \cos \alpha - r' \sin \alpha \\ \\ y(\alpha) = r \sin \alpha + r' \cos \alpha \end{cases}$$

et, en différentiant :

(2) $$ds = (r + r'')\, d\alpha$$

Ainsi, la mesure $s(d\alpha)$ admet comme densité le rayon de courbure $r + r''$. Si maintenant r est quelconque dans $\mathcal{R}$, ses régularisées $r_t = g_t * r$ sont dans $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}$. Les mesures s_t de densité $r_t + r_t''$ convergent vaguement vers la mesure s ($s = r + r''$ au sens des distributions). En particulier, $\int_0^\beta s_t(d\alpha)$ converge vers $\int_0^\beta s(d\alpha)$ (en tout point $\beta \in S$ où cette intégrale est continue), et on en déduit facilement que cette intégrale représente encore l'abscisse curviligne sur le contour de A.

En sens inverse, cherchons à quelle condition une mesure positive $s \in \mathcal{M}^+$ peut être associée à une fonction $r \in \mathcal{R}$. Les conditions :

(3) $$\int_0^{2\pi} \cos\alpha\ s(d\alpha) = \int_0^{2\pi} \sin\alpha\ s(d\alpha)$$

sont évidemment nécessaires. Elles sont également suffisantes, comme on peut le voir en utilisant les développements en série de Fourier : si r admet le développement :

$$r = \Sigma\, c_p\, e^{ip\alpha}$$

s admet (au sens des distribution) le développement :

$$s = \Sigma\, c_p (1-p^2)\, e^{ip\alpha}$$

qui ne comporte pas de terme en $p = \pm 1$ (condition (3)). Inversement, si $s = \Sigma A_p e^{ip\alpha}$ est une mesure avec $A_1 = A_{-1} = 0$, la fonction r est déterminée à une translation près par $C_p = A_p/(1-p^2)$ $(p \neq \pm 1)$ et répond à la question.

On peut aussi utiliser les formules explicites donnant $x(\alpha)$, $y(\alpha)$ et r en fonction de la mesure s :

$$(4) \qquad \begin{cases} x(\alpha) = x_o - \int_o^\alpha \sin\beta \; s(d\beta) \\ y(\alpha) = y_o + \int_o^\alpha \cos\beta \; s(d\beta) \\ r(\alpha) = x_o \cos\alpha + y_o \sin\alpha + \int_o^\alpha \sin(\alpha-\beta) \; s(d\beta) \end{cases}$$

Il résulte de ceci que l'application $r \to s = r + r''$ est une bijection de l'espace quotient $C(\mathcal{K})/\tau$ (τ, équivalence de translation) sur le sous-espace fermé $\mathcal{M}_\tau^+$ de $\mathcal{M}^+$ constitué des mesures positives vérifiant les conditions (3). Plus précisément :

<u>Proposition 2. L'application $r \to s = r + r''$ est un homéomorphisme de $C(\mathcal{K})/\tau$ muni de la topologie quotient sur $\mathcal{M}_\tau^+$ muni de la topologie vague.</u>

En effet, si $r_n \to r$ dans $\mathcal{R}$, $s_n \to s$ vaguement, car, pour tout $f \in \mathcal{C}_2(s)$, on a :

$$< s_n, f > \; = \; < r_n, f + f'' > \; \to \; < r, f + f'' > \; = \; < s, f >$$

Inversement, soit s_n une suite convergeant dans $\mathcal{M}_\tau^+$ vers une mesure s. On a $s \in \mathcal{M}_\tau^+$, puisque $\mathcal{M}_\tau^+$ est fermé. Les fonctions

$$r_n(\alpha) = \int_o^\alpha \sin(\alpha-\beta) \; s_n(d\beta)$$

sont dans $\mathcal{R}$ et admettent les s_n comme mesures associées.
Comme $\int s_n \to \int s$, les $r_n(\alpha)$ sont bornées par un nombre fixe indépendant de n. Les ovoïdes associés A_n admettent une valeur d'adhérence A pour laquelle 0 est point limite dans la direction $\alpha = 0$. Mais la mesure associée à A étant s, la podaire de A est :

$$r(\alpha) = \int_0^\alpha \sin(\alpha-\beta)\, s(d\beta)$$

La valeur d'adhérence A est donc unique, et A_n converge vers A dans $C(\mathcal{K})$.

2 - Volume et Covolume.

Désignons par V(r) le volume de l'ovoïde A associé à $r \in \mathcal{R}$. On sait que V est continue sur $\mathcal{R}$. Lorsque r appartient à $\mathcal{C}_2$, on a :

$$V(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (r^2 - r'^2)\, d\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\alpha) s(d\alpha) = \frac{1}{2} < r,s >$$

s désignant, comme plus haut, la mesure de densité $r + r''$.

Si $r \in \mathcal{R}$ n'est pas dans $\mathcal{C}_2$, on introduira ses régularisées $r_t = g_t * r$, et la continuité de V montre :

$$V(r) = \lim_{t \to o} V(r_t)$$

Mais :

$$V(r_t) = \frac{1}{2} < g_t * r,\ g_t * s > \ = \frac{1}{2} < g_{2t} * r,\ s >$$

converge vers $\frac{1}{2} < r,\ s >$. Par suite, pour tout $r \in \mathcal{R}$, on a :

(5) $$V(r) = \frac{1}{2} < r,\ s > = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\alpha)\ s(d\alpha)$$

D'autre part, pour $r \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{R}$, on a aussi $2\ V(r) = \|r^2\| - \|r'\|^2$. Si $r \in \mathcal{R}$ n'est pas dans $\mathcal{C}_2$, on a toutefois $r' \in L^2(s)$, puisque r'' est une mesure. Pour toute fonction dérivable f, on a $< r'_t, f > = - < r_t, f' > \to - < r, f' > = < r', f >$, de sorte que r'_t converge faiblement vers r' dans $L^2(s)$. Mais :

$$\|r'_t\|^2 = < g_{2t} * r', r'> = < r'_{2t}, r' >$$

converge alors vers $\|r'\|^2$, de sorte que r'_t converge fortement vers r' dans $L^2(s)$. En particulier, l'expression de volume :

(5') $$V(r) = \frac{1}{2} (\|r\|^2 - \|r'\|^2)$$

est valable pour tout $r \in \mathcal{R}$.

<u>Proposition 3</u> - <u>L'application $r \to r'$ de $\mathcal{R}$ dans $L^2(s)$ est fortement continue</u>.

Soit $r_n \to r$ dans $\mathcal{R}$ (donc aussi dans $L^2(s)$). Le volume étant continu, (5') montre $\|r'_n\| \to \|r'\|$. Il suffit donc de montrer que r'_n converge faiblement vers r'. Comme les r'_n sont bornés en norme, ils admettent une valeur d'adhérence faible ρ, limite d'une suite partielle r'_{n_k}. Si f est une fonction dérivable, on a :

$$< \rho, f > = \lim < r'_{n_k}, f > = - \lim < r_{n_k}, f > = - < r, f'> = < r', f >$$

Donc $\rho = r'$, et la suite r'_n converge faiblement (donc aussi fortement) vers r'.

Désignons par W l'espace de Sobolev, constitué des fonctions $f \in L^2(S)$ dont les dérivées f' (au sens des distributions) sont également dans $L^2(S)$, W est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|^2 + \|f'\|^2$. On a $\mathcal{R} \subset W$, et, plus précisément :

Corollaire - La topologie induite sur $\mathcal{R}$ par celle de l'espace de Sobolev W coïncide avec la topologie de $\mathcal{R}$.

D'après la proposition (3), $r_n \to r$ dans $\mathcal{R}$ entraine $r'_n \to r'$ fortement dans $L^2(S)$, donc $r_n \to r$ fortement dans W. La réciproque est évidente.

On notera aussi que les topologies forte et faible de W coïncident sur $\mathcal{R}$.

Le covolume. Si f et g sont dans W, on pose :

$$2\,V(f, g) = \langle f, g \rangle - \langle f', g' \rangle$$

En particulier, si A et B sont dans $C(\mathcal{K})$, on appelle covolume de A et B l'expression :

$$V(A, B) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_A\, r_B\, d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r'_A\, r'_B\, d\alpha$$

Le covolume V est continu sur $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$: si $r_{A_n} \to r_A$ et $r_{B_n} \to r_B$ dans $\mathcal{R}$, ces convergences ont lieu aussi fortement dans $L^2(S)$, ainsi que $r'_{A_n} \to r'_A$ et $r'_{B_n} \to r'_B$, d'après la proposition 3, d'où résulte $V(A_n, B_n) \to V(A, B)$. On note que le covolume V(A, B) est, en réalité, défini sur $C(\mathcal{K})/\tau$ (il est invariant pour des pour des translations affectant séparément A et B). Plus généralement, soient f et g des fonctions dans W admettant les développements de Fourier :

$$f(\alpha) = \Sigma\, a_p\, e^{ip\alpha} \quad , \quad g(\alpha) = \Sigma\, b_p\, e^{ip\alpha}$$

On a :

$$V(f, g) = \Sigma\, a_p\, \overline{b}_p\, (1-p^2) \tag{6}$$

et cette expression est indépendante des termes en $p = \pm 1$, d'où l'invariance par translation.

Le critère de la proposition 1 se résume comme suit :

Critère - Une fonction $r \in W$ est dans $\mathfrak{R}$ si et seulement si le covolume $V(r, f)$ est ≥ 0 pour toute fonction positive $f \in W$

$\mathcal{C}_2$ étant dense dans W, le critère résulte de la proposition 1 et des égalités suivantes, valables pour $f \in \mathcal{C}_2$:

$$< s, f > = < r, f+f'' > = < r, f > - < r', f' > = 2\, V(r, f)$$

Relations isopérimétriques - Si $f(\alpha) = \Sigma\, a_p\, e^{ip\alpha}$ est dans W, on a :

$$V(f) = \Pi\, a_0^2 + 2\,\Pi \sum_{p=2}^{\infty} |a_p|^2\, (1-p^2) \tag{6'}$$

D'où aussitôt :

$$V(f) \leq \Pi\, a_0^2$$

Nous désignerons par $\mathcal{L}(f)$ (demi-périmètre) l'intégrale :

$$2\,\mathcal{L}(f) = \int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha = 2\,\Pi\,a_o,$$

On a donc $a_o = \mathcal{L}/\Pi$, et l'inégalité ci-dessus donne :

(7) $$\Pi\,V \leq \mathcal{L}^2$$

L'égalité se produit si et seulement si $\sum_{p=2}^{\infty} |a_p|^2(1-p^2) = 0$ soit $a_p = 0$, donc si et seulement si $f = C^{ste}$ (à une translation près) (donc, dans $\mathfrak{R}$, si et seulement si l'ovoïde dont la podaire est f est un disque).

Plus généralement, on retrouve facilement un résultat classique :

<u>Théorème de Brunn MINKOWSKI</u> - <u>Si A et B sont deux ovoïdes de volumes non nuls, leur covolume vérifie</u>

(8) $$V(A,\,B) \geq \sqrt{V(A)\,V(B)}$$

<u>avec égalité si et seulement si A et B sont positivement homothétiques (à une translation près)</u>

En effet, soient

$$r_A(\alpha) = \sum_p a_p\,e^{ip\alpha} \quad , \quad r_B(\alpha) = \sum_p b_p\,e^{ip\alpha}$$

les développements de Fourier des podaires de A et B. Les coefficients a_o et b_o, proportionnels aux périmètres de A et B, sont strictement positifs. Considérons la fonction $r_A + \lambda\,r_B \in W$ (λ réel). On a :

$$V(r_A + \lambda\, r_B) = \Pi(a_o + \lambda\, b_o)^2 + 2\Pi \sum_{p=2}^{\infty} |a_p + \lambda\, b_p|^2\,(1-p^2)$$

donc :

$$V(r_A + \lambda\, r_B) \leq \Pi\,(a_o + \lambda\, b_o)^2$$

avec égalité si et seulement si $a_p + \lambda\, b_p = 0$ pour $p = 2, 3 \ldots$

Prenons :

$$\lambda_o = - \frac{a_o}{b_o} = - \frac{\mathscr{L}(A)}{\mathscr{L}(B)}$$

Avec cette valeur, on a :

$$V(r_A + \lambda_o\, r_B) \leq 0$$

avec égalité si et seulement si $A = - \lambda_o\, B$ à une translation près. Or :

$$V(r_A + \lambda\, r_B) = V(A) + 2\,\lambda\, V(A,B) + \lambda^2\, V(B)$$

Ce trinome admet donc des racines réelles, d'où résulte (8). Si ces racines sont confondues, $V(r_A + \lambda_o\, r_B)$ est nul et par suite $A = - \lambda_o\, B$. On a alors l'égalité dans (8). Si A et B ne sont pas homothétiques, les racines sont distinctes et l'inégalité (8) est stricte.

<u>Corollaire</u> - Dans les mêmes conditions, on a aussi :

$$\sqrt{V(A \oplus B)} \geq \sqrt{V(A)} + \sqrt{V(B)}$$

avec égalité si et seulement si A et B sont positivement homothétiques.

En effet, $V(A \oplus B) = V(A) + V(B) + 2\,V(A,B)$, et il suffit d'appliquer (8).

3 - Les Ovoïdes Symétriques

On sait que le cone $\mathcal{R}$ n'est pas réticulé pour son ordre propre $\succcurlyeq$, défini par $f \succcurlyeq g$ si $f-g \in \mathcal{R}$. Entre élément de $C_o(\mathcal{K})$, la relation $A \succcurlyeq B$ signifie : A est ouvert selon B, ou $A_B = A$. La relation $\succcurlyeq$ définit également un ordre sur l'espace quotient $C(\mathcal{K})/\tau$, donc, d'après la proposition 2, sur l'espace $\mathcal{M}_\tau$ des mesures vérifiant les conditions (3). Mais $f-g \in \mathcal{R}$ équivaut à l'inégalité $f+f'' \geq g+g''$, de sorte que l'ordre $\succcurlyeq$ se réduit sur $\mathcal{M}_\tau$ à l'inégalité ordinaire des mesures.

Si s_A et s_B sont deux mesures quelconques dans $\mathcal{M}_\tau^+$, les mesures $\mathrm{Sup}(s_A, s_B)$ et $\mathrm{Inf}\,(s_A, s_B)$ ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{M}_\tau^+$, car les opérations Sup et Inf ne conservent pas, en général, les conditions (3), et c'est pourquoi $\mathcal{R}$ n'est pas réticulé.

Mais ces conditions (3) sont automatiquement vérifiées par toute mesure s symétrique ($s = \check{s}$),et,d'autre part, le Sup et l'Inf de deux mesures symétriques sont encore des mesures symétriques. Désignons alors par M_S le sous-espace vectoriel de l'espace M de MINKOWSKI constitué des $f \in M$ vérifiant $f = \check{f}$, par $\mathcal{R}_S$ le cone convexe $M_S \cap \mathcal{R}$, par $\mathcal{M}_S$ l'espace des mesures symétriques.

L'homéomorphisme de la proposition 2 induit un homéomorphisme de l'espace quotient $C_S(\mathcal{K})/\tau$ des ovoïdes symétriques sur l'espace $\mathcal{M}_S^+$ des mesures positives symétriques. Comme $\mathcal{M}_S^+$ est réticulé pour $\geq$, le cône $C_S(\mathcal{K})/\tau$, donc aussi le cône $\mathcal{R}_S$, est <u>alors réticulé pour son ordre propre</u> $\succcurlyeq$. Autrement dit :

Si A et B sont des ovoïdes symétriques, il existe deux ovoïdes symétriques $A \curlyvee B$ et $A \curlywedge B$ caractérisés par les propriétés suivantes :

~ $A \curlyvee B$ est ouvert selon A et selon B, et un ovoïde symétrique C est ouvert à la fois selon A et selon B si et seulement si il est ouvert selon $A \curlyvee B$.

~ A et B sont ouverts selon $A \curlywedge B$, et, pour que A et B soient ouverts selon un ovoïde symétrique C, il faut et il suffit que $A \curlywedge B$ soit ouvert selon C.

Nous dirons que deux ovoïdes A et B sont <u>étrangers</u> l'un à l'autre si leurs images s_A et s_B dans $\mathcal{M}_\tau^+$ sont étrangères l'une à l'autre. On sait que deux mesures positives s_A et s_B sont étrangères si et seulement si on a $\mathrm{Inf}(s_A, s_B) = 0$ ou (ce qui revient au même) si et seulement si $\mathrm{Sup}(s_A, s_B) = s_A + s_B$. Ainsi :

<u>Deux ovoïdes symétriques A et B sont étrangers si et seulement si on a</u> :

$$A \curlywedge B = \{0\} \quad \text{ou(aussi bien)} \quad A \curlyvee B = A \oplus B$$

Dans le cône convexe $\mathcal{M}_s^+$ des mesures positives symétriques, les éléments extrêmaux sont de la forme $\frac{1}{2}(\delta_\alpha + \delta_{\alpha+\pi})$ (masses $\frac{1}{2}$ en deux points opposés α et $\alpha+\pi$ du cercle unité), et sont d'ailleurs étrangers les uns aux autres. Dans $\mathcal{R}_s$, <u>les éléments extrêmaux sont donc les segments de droite</u> centrés à l'origine, et dans $C_s(\mathcal{H})/\tau$ les segments de droite. D'après le théorème de Choquet, <u>tout ovoïde symétrique admet donc une représentation unique comme barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des segments de droite</u>, ou encore tout $r \in \mathcal{R}_s$ admet une représentation unique de la forme :

$$r(\alpha) = \int_0^{2\pi} |\cos(\alpha-\beta)| \ \sigma(d\beta)$$

pour une mesure positive σ sur le cercle unité. Il est d'ailleurs facile d'expliciter cette mesure σ en fonction de la mesure s associée à r. D'après (4), en effet :

$$r(\alpha) = x_o \cos \alpha + y_o \sin \alpha + \int_0^{\alpha} \sin(\alpha-\beta) \ s(d\beta)$$

$$\check{r}(\alpha) = r(\alpha+\pi) = - x_o \cos \alpha - y_o \sin \alpha + \int_0^{\alpha+\pi} \sin(\alpha+\pi-\beta) \ s(d\beta)$$

Comme $r = \check{r}$ par hypothèse, on en déduit :

$$2 \ r(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin(\alpha-\beta) \ s(d\beta) + \int_0^{\alpha+\pi} \sin(\alpha+\pi-\beta) \ s(d\beta) =$$

$$= -\int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sin(d-\beta) \ s(d\beta) = \int_{\alpha+\pi}^{\alpha+2\pi} \sin(\alpha-\beta) \ s(d\beta)$$

(la dernière égalité résultant de la condition (3)). On en tire :

(9) $$r(\alpha) = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} |\sin(\alpha-\beta)| \ s(d\beta)$$

et la relation cherchée entre s et σ :

$$\sigma(d\beta) = s(\frac{\pi}{2} + d\beta)$$