

Ncte Géostatistique n° 97

LES SCHEMAS DE CAUWETable des Matières

I - <u>Granulométrie des convexes compacts conditionnellement stationnaires</u>	1
1/ Granulométrie de A selon le cercle	1
2/ Granulométrie selon un compact convexe B	3
II - <u>Le schéma de CAUWE</u>	
1/ Schéma induit dans \mathbb{R}^{n-k}	4
Interprétation probabiliste	6
Comparaison avec la montée, et formules de réciprocité	6
2/ Calcul des $P(B)$ en schéma de CAUWE	9
Exemples : granulométrie linéaire et moment $P(C_R)$	10
3/ Granulométrie selon le cercle en schéma de CAUWE	12

1 - Granulométrie des Convexes compacts

Soit A un ensemble aléatoire stationnaire p.s. constitué de la réunion de compacts convexes disjoints (ou dont l'intersection est constituée de points frontières : de sorte que ce qui suit s'applique en particulier aux partitions aléatoires stationnaires du plan en polyèdres convexes). Nous nous limitons explicitement au cas de l'espace \mathbb{R}^2 à deux dimensions (ou bien, dans \mathbb{R}^n , aux propriétés de A qui ne font intervenir que des ensembles B contenus dans un même plan à deux dimensions.)

I/ Granulométrie de A selon le cercle

Désignons par C_R le disque de rayon R dans \mathbb{R}^2 , par $P(C_R)$ la probabilité de $\{C_R \subset A\}$ et par ν et $\nu(R)$ les nombres spécifiques de connexité (ou de convexité) de A et de son érodé $A \ominus C_R$. On a clairement :

$$P(C_R) = \nu(R) E(S_R)$$

$E(S_R)$ désignant l'espérance (pour la granulométrie en nombre) de l'aire de la composante connexe de $A \ominus C_R$ contenant 0, (prise conditionnellement pour $0 \in A \ominus C_R$). Pour une petite variation δR de R on trouve de même :

$$\delta P(C_R) = \delta R \nu(R) E(2\mathcal{L}_R)$$

$E(2\mathcal{L}_R)$ désignant cette fois l'espérance conditionnelle du périmètre de cette composante connexe, d'où :

$$(6) \quad \frac{d P(C_R)}{d R} = - \nu(R) E(2\mathcal{L}_R)$$

Par contre, la dérivée seconde de $P(C_R)$ ne se relie pas à des propriétés aisément prévisibles.

Désignons ensuite par :

$$A_R = (A \ominus C_R) \oplus C_R$$

l'ouverture de A selon C_R , qui est réunion des ouvertures des composantes connexes de A. Pour chaque composante connexe A' de A (A' étant également convexe par hypothèse, donc aussi $A' \ominus C_R$), on a :

$$\text{Mes}(A'_R) = S_R + R^2 \mathcal{L}_R + \pi R^2$$

Par suite :

$$P(0 \in A_R) = v(R) [E(S_R) + R E(2 \mathcal{L}_R) + \pi R^2]$$

et, d'après (6) :

$$(7) \quad P(0 \in A_R) = P(C_R) - R \frac{d P(C_R)}{d R} + \pi R^2 v(R)$$

Ainsi, la granulométrie de A selon les cercles se déduit du moment $P(C_R)$ et du nombre spécifique $v(R)$

Remarque : La relation (7) ne se généralise pas à \mathbb{R}^n pour $n > 2$. En effet, dans \mathbb{R}^n , on a toujours :

$$\text{Mes}(A \oplus B_R) = \text{Mes} A + R F(A) + O(R^2)$$

$$\text{Mes}(A \ominus B_R) = \text{Mes} A - R F(A) + O(R^2)$$

mais les termes d'ordre > 1 ne sont plus les mêmes dans les deux expressions.

Par exemple dans \mathbb{R}^3 et pour le cube de côté a :

$$\text{Mes} (A \oplus B_R) = a^3 + 6 a^2 R + 3 \pi a R^2 + \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\text{Mes} (A \ominus B_R) = a^3 - 6 a^2 R + 12 a R^2 - 8 R^3$$

Cette divergence se manifeste dès que A présente des points anguleux. Or, partant d'un convexe A régulier, l'érodé $A \ominus B_R$ présente des points anguleux dès que R atteint une valeur convenable, de sorte que la dérivée $\frac{d^2 P(B_R)}{d R^2}$ ne permet pas d'atteindre le terme en R^2 de $P(0 \in A_R)$.

2/ Granulométrie selon un compact convexe B

Toujours dans \mathbb{R}^2 , soit A aléatoire stationnaire p.s. réunion de compacts disjoints. Nous supposons de plus que la loi de A est invariante par rotation (isotropie de A). Soit $B \in \mathcal{C}(\mathcal{X})$ et :

$$P(\lambda) = P(\lambda B)$$

Désignons encore par $v(\lambda)$ le nombre spécifique de l'érodé $A \ominus \lambda \overset{\vee}{B}$, et par $A_\lambda = (A \ominus \lambda \overset{\vee}{B}) \oplus \lambda B$ l'ouverture de A selon λB . On trouve de la même manière :

$$(7') \quad P(0 \in A_\lambda) = P(\lambda) - \lambda P'(\lambda) + \lambda^2 v(\lambda) \text{ Mes } B$$

Ainsi, dans le cas isotrope, on pourra déterminer les granulométries de A selon des convexes quelconques à deux dimensions.

II - Le schéma de CAUWE

II - Le schéma de CAUWE

Le schéma de CAUWE est une partition aléatoire stationnaire de \mathbb{R}^n en polyèdres convexes définie de la manière suivante : on part d'un réseau d'hyperplans poissonniens de densité linéaire λ_n constante (isotrope : $\lambda_n(d\omega) = \frac{1}{\omega_n} \lambda_n d\omega$). On remplace ensuite chacun des plans poissonniens par un doublet constitué de deux plans parallèles au plan initial et situés à une distance h l'un de l'autre, h étant une V.A. de loi donnée $F_n(h)$, indépendante de la direction ω , et les différentes V.A. h associées à chacun des doublets poissonniens étant indépendantes.

1/ Schéma induit dans \mathbb{R}^{n-k}

Il est clair que le schéma induit dans \mathbb{R}^{n-k} est encore un schéma de CAUWE. Le seul problème est d'exprimer ses caractéristiques λ_{n-k} et F_{n-k} en fonction des caractéristiques λ_n et F_n du schéma initial.

L'élément $d\omega_n$ d'hypersurface sur la sphère unité S_n de \mathbb{R}^n se met sous la forme :

$$d\omega_n = \text{Cos}^{\quad n-k-1} \varphi \quad \text{Sin}^{\quad k-1} \varphi \quad d\omega_k \quad d\omega_{n-k} \quad d\varphi$$

pour un vecteur unité de direction ω_n dans \mathbb{R}^n dont les projections dans les complémentaires orthogonaux \mathbb{R}^k et \mathbb{R}^{n-k} valent $\text{cos}\varphi$ et $\text{sin}\varphi$ respectivement. Ce $d\omega_n$ apporte à λ_{n-k} la contribution $\lambda_n \text{cos}\varphi d\omega_n$, et si H est la distance des deux hyperplans du doublet correspondant dans \mathbb{R}^n , celle du doublet induit dans \mathbb{R}^{n-k} est $H/\text{cos}\varphi$. On a donc en sommant sur la demi-sphère unité :

$$\lambda_{n-k} F_{n-k}(h) = \int_0^{\pi/2} \lambda_n d\varphi \iint |\cos\varphi|^{n-k} |\sin\varphi|^{k-1} F_n(h\cos\varphi) d\omega_k$$

soit explicitement :

$$\lambda_{n-k} F_{n-k}(h) = \lambda_n k \omega_k \int_0^{\pi/2} \cos\varphi^{n-k} \sin\varphi^{k-1} F_n(h\cos\varphi) d\varphi$$

ou encore :

$$(8) \quad \lambda_{n-k} F_{n-k}(h) = k \omega_k \lambda_n \int_0^1 u^{n-k} (1-u^2)^{\frac{k}{2}-1} F_n(hu) du$$

Pour h infini, on trouve en particulier :

$$\lambda_{n-k} = k \omega_k \lambda_n \int_0^1 u^{n-k} (1-u^2)^{\frac{k}{2}-1} du = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-k-1}} \lambda_n$$

D'où les formules explicites :

$$(8') \quad \left| \begin{aligned} \lambda_{n-k} &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-k-1}} \lambda_n \\ F_{n-k}(h) &= \frac{k \omega_k \omega_{n-1}}{\omega_{n-k-1}} \int_0^1 u^{n-k} (1-u^2)^{\frac{k}{2}-1} F_n(hu) du \end{aligned} \right.$$

En particulier

$$(8'') \quad \left| \begin{aligned} F_2(h) &= \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} F_3(uh) du \\ F_1(h) &= \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} F_2(uh) du \\ F_1(h) &= 2 \int_0^1 u F_3(uh) du \end{aligned} \right.$$

Interprétation probabiliste - Désignons par H_n et H_{n-k} les V.A. de lois F_n et F_{n-k} , et par $\pi_{n,k}$ la V.A. de densité :

$$f_{n,k}(u) = \frac{k \omega_k \omega_{n-1}}{\omega_{n-k-1}} u^{n-k} (1-u^2)^{\frac{k}{2}-1} \quad (0 \leq u \leq 1)$$

$\pi_{n,k}$ est donc la racine carrée d'une variable Beta $(\frac{n-k+1}{2}, \frac{k}{2})$

La seconde relation (8') coïncide avec l'équivalence en loi :

$$H_{n-k} \equiv \frac{H_n}{\pi_{n,k}}$$

Il en résulte, en particulier, que ces lois induites n'admettront pas de moments d'ordre élevé. En effet, la V.A. $1/\pi_{n,k}$ admet un moment d'ordre $n-k$, mais non d'ordre $n-k+1$. A supposer donc que H_n possède lui-même les moments voulus, H_{n-k} n'admettra de moments que jusqu'à l'ordre $n-k$ inclus. En particulier, dans le schéma induit sur la droite \mathbb{R}^1 par un schéma \mathbb{R}^3 , la loi F_1 admet une moyenne (pourvu que F_3 en admette déjà une), mais n'admet jamais de variance.

Comparaison avec l'opération de montée, et formules réciproques.

La relation (8) se met sous la forme équivalente :

$$(9) \quad \lambda_{n-k} F_{n-k}(h) = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \frac{\lambda_n}{h^{n-1}} \int_0^h v^{n-k} (h^2-v^2)^{\frac{k}{2}-1} F_n(v) dv$$

qui suggère une analogie avec la montée. Pour $k = 1$ et $k = 2$, en particulier, on trouve :

$$(9') \quad \begin{cases} \lambda_{n-1} F_{n-1}(h) = \frac{2 \lambda_n}{h^{n-1}} \int_0^h \frac{v^{n-1}}{\sqrt{h^2-v^2}} F_n(v) dv \\ \lambda_{n-2} F_{n-2}(h) = 2 \pi \frac{\lambda_n}{h^{n-1}} \int_0^h v^{n-2} F_n(v) dv \end{cases}$$

On voit que le passage de n à $n-2$ est une opération simple, aisément réversible : elle admet la formule de réciprocité :

$$(9'') \quad \lambda_n F_n(h) = \frac{\lambda_{n-2}}{2\pi h^{n-2}} \frac{d}{dh} (h^{n-1} F_{n-2}(h))$$

Au contraire, le passage de n à $n-1$ est une opération plus complexe. Pour obtenir la formule de réciprocité, il faut transiter par R^{n+1} , en écrivant :

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} F_{n+1}(h) = \frac{\lambda_{n-1}}{2\pi h^{n-1}} \frac{d}{dh} h^n F_{n-1}(h) \\ \lambda_n F_n(h) = \frac{2\lambda_{n+1}}{h^n} \int_0^h \frac{v^n}{\sqrt{h^2-v^2}} F_{n+1}(v) dv \end{cases}$$

D'où la formule de réciprocité cherchée :

$$(9''') \quad \lambda_n F_n(h) = \frac{\lambda_{n-1}}{\pi h^n} \int_0^h \frac{v}{\sqrt{h^2-v^2}} \frac{d}{dv} (v^n F_{n-1}(v)) dv$$

En vue des applications, explicitons les relations réciproques de (8'') :

ces relations s'écrivent :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} F_2(h) &= \frac{4}{\pi h^2} \int_0^h \frac{u^2}{\sqrt{h^2-u^2}} F_3(u) du \\ F_1(h) &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{u}{\sqrt{h^2-u^2}} F_2(u) du \\ F_1(h) &= \frac{2}{h^2} \int_0^h u F_3(u) du \end{aligned} \right.$$

et admettent les réciproques :

$$(10') \quad \left\{ \begin{aligned} F_3(h) &= \frac{1}{2 h^3} \int_0^h \frac{v}{\sqrt{h^2-v^2}} \frac{d}{dv} (v^3 F_2(v)) dv \\ F_2(h) &= \frac{2}{\pi h^2} \int_0^h \frac{v}{\sqrt{h^2-v^2}} \frac{d}{dv} (v^2 F_1(v)) dv \\ F_3(h) &= \frac{1}{2h} \frac{d}{dh} (h^2 F_1(h)) \end{aligned} \right.$$

Ces résultats de calcul, qui se rattachent à la théorie de l'équation intégrale d'Abel, paraîtront peut-être plus clair si nous les relierons aux circonstances analogues que l'on rencontre à propos

de l'opération de montée. Posons :

$$g_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{n-1}} F_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

Il suffit alors de changer v en $1/v$ dans (9) pour obtenir :

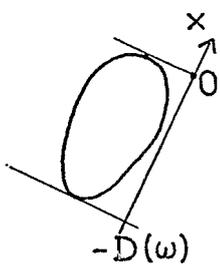
$$g_{n-1}(h) = \frac{2 \pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_h^\infty g_n(v) (v^2 - h^2)^{\frac{k}{2} - 1} v \, dv$$

c'est-à-dire l'opération même de montée d'ordre k .

2/ Calcul des P(B) en schéma de CAUWE

Soit B un compact convexe de \mathbb{R}^n (non contenu dans un hyperplan : Si B était contenu dans un sous-espace à $n-k$ dimensions, on raisonnerait directement sur le schéma induit dans \mathbb{R}^{n-k}).

Calculons $P(B)$, en écrivant pour chaque direction ω et chaque élément linéaire dx que l'un ou l'autre des 3 événements suivants se réalise pour $x > 0$



- pas de doublet dans la direction ω ($1 - \lambda_n \, d\omega \, dx$)
- un doublet laissant B à l'extérieur : $\lambda_n \, d\omega \, dx \, F_n(x)$
- un doublet contenant B : $\lambda_n \, d\omega \, dx \, (1 - F_n(D(\omega) + x))$

Au total, cette probabilité élémentaire est :

$$\exp \{ \lambda_n (1 - F_n(D(\omega) + x) - 1 + F_n(x)) \, d\omega \, dx \}$$

Pour $-D(\omega) \leq x < 0$, la première éventualité subsiste seule, et donne la probabilité élémentaire :

$$\exp \{-\lambda_n d\omega dx\}$$

Au total donc :

$$\log P(B) = -\lambda_n \int_{\frac{1}{2}S} D(\omega) d\omega + \lambda_n \int_{\frac{1}{2}S} d\omega \int_0^{\infty} (1 - F_n(x+D(\omega)) - 1 + F_n(x)) dx$$

D'où :

$$(11) \quad \log P(B) = -\lambda_n \int_{\frac{1}{2}S} d\omega \int_0^{D(\omega)} (2 - F_n(x)) dx$$

Exemples - Granulométrie linéaire - Soient λ_1 et F_1 les caractéristiques du schéma induit sur la droite. Le moment $P(h)$ est, d'après (11)

$$(11') \quad P(h) = e^{-\lambda_1 \int_0^h (2 - F_1(x)) dx}$$

On en déduit la granulométrie linéaire par les procédés habituels. En nombre, par exemple, il vient :

$$\frac{1}{m} (1 - N(h)) = \lambda_1 (2 - F_1(h)) e^{-\lambda_1 \int_0^h (2 - F_1(x)) dx}$$

avec d'ailleurs, pour $h = 0$: $1/m = 2 \lambda_1$, d'où :

$$1 - N(h) = (1 - \frac{1}{2} F_1(h)) e^{-\lambda_1 \int_0^h (2 - F_1(x)) dx}$$

Moment $P(C_R)$ du cercle de rayon R

Pour $B = C_R$, la relation (11) donne dans \mathbb{R}^2 :

$$(12) \quad P(C_R) = e^{-\pi\lambda_2 \int_0^{2R} (2-F_2(x)) dx}$$

Remarque - Du point de vue expérimental, les relations (11') et (12) seront précieuses lorsqu'il s'agira d'identifier un schéma de CAUWE. $P(h)$ et $P(C_R)$, en effet, sont faciles à déterminer expérimentalement. Posant :

$$(12') \quad \begin{cases} G_1(h) = - \log P(h) \\ G_2(h) = - \log P(C \frac{h}{2}) \end{cases}$$

on doit alors avoir :

$$\begin{cases} \lambda_1 \int_0^h (2 - F_1(x)) dx = G_1(h) \\ \pi\lambda_2 \int_0^h (2 - F_2(x)) dx = G_2(h) \end{cases}$$

Par dérivation en h , ces relations permettent donc de déterminer expérimentalement λ_1 , λ_2 , F_1 et F_2 . Ces quantités devant être liées par les relations :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \lambda_2 \\ F_1(h) = \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} F_2(uh) du \end{cases}$$

la méthode fournit également un test permettant de contrôler la validité de l'hypothèse faite (existence d'un schéma de CAUWE).

Toutefois, les dérivations étant toujours des opérations expérimentalement douteuses, il sera peut-être préférable d'effectuer directement le test sur les fonctions G_1 et G_2 elle-même.

Pour cela, partons de la relation générale (8) :

$$\lambda_1 (2 - F_1(h)) = 2 \lambda_2 \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} (2 - F_2(hu)) du$$

et intégrons en h : à gauche, on trouve $G_1(h)$; à droite, il vient :

$$2 \lambda_2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_0^h (2 - F_2(xu)) u dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 G_2(hu) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Les fonctions expérimentales G_1 et G_2 doivent donc - si l'on a réellement un schéma de CAUWE, être liées par la relation :

$$(12'') \quad G_1(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 G_2(hu) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

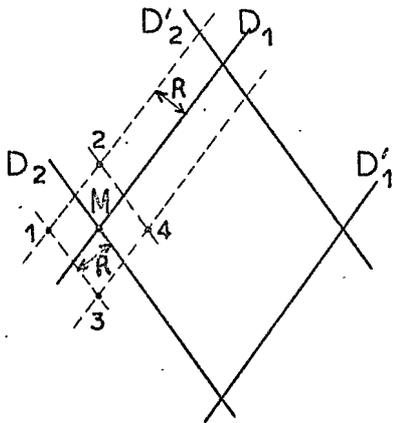
d'où possibilité d'un contrôle expérimental précis de l'hypothèse.

3/ Granulométrie selon les cercles :

D'après la relation (7), cette granulométrie se déduira des fonctions $P(C_R)$ et $v(R)$. Nous connaissons $P(C_R)$ par la relation (12). Il reste à évaluer le nombre spécifique $v(R)$ de l'érodé $A \ominus C_R$.

Pour abrégier les notations, nous écrirons λ et F au lieu de λ_2 et F_2 .

Pour $R = 0$, on a $\nu = \nu(0) = 4 \pi \lambda^2$: en effet, chacun des sommets du réseau poissonien a donné 4 sommets lors du dédoublement des droites poissoniennes, de sorte que l'on a $4 \pi \lambda^2$ sommets par unité de surface. Mais ce nombre coïncide avec le nombre spécifique $\nu(0)$, puisque les sommets sont tous d'ordre 4.



Considérons alors deux doublets (D_1, D_1') et (D_2, D_2') , et soit M l'un des sommets qu'ils définissent. Quatre polygones admettent ce sommet M , et raisonner à M fixé équivaut, comme on sait, à étudier en nombre les propriétés de ces polygones.

Soit H_1 et H_2 les puissances des deux doublets.

Dilatons les doublets par le cercle C_R . M donne 4 sommets 1, 2, 3 et 4 à chacun desquels correspond un polygone possible. Chacun de ces polygones possible subsiste effectivement si les deux évènements suivants se réalisent :

1- ce sommet n'est pas couvert par les dilatés de D_1, D_1', D_2, D_2' , ce qui a lieu avec les probabilités :

1 pour le sommet 1

$1 - F(2R)$ pour le sommet 2 ou 3 ($P(H_1 > 2R)$)

$(1 - F(2R))^2$ pour le sommet 4 ($P(H_1 > 2R) P(H_2 > 2R)$)

2- Il n'est pas couvert par les dilatés des autres doublets, ce qui a lieu avec la probabilité $P(C_R)$.

Ces évènements étant indépendants, ces probabilités doivent se multiplier : parmi les 4 polygones que nous avons considérés, le nombre de ceux qui subsistent admet donc l'espérance :

$$P(C_R) [1 + 2(1-F(2R)) + (1-F(2R))^2] = P(C_R) (2-F(2R))^2$$

Le nombre spécifique cherché est donc :

$$v(R) = \frac{v}{4} P(C_R) (2 - F(2R))^2$$

c'est-à-dire :

$$(13) \quad v(R) = \pi \lambda^2 (2 - F(2R))^2 P(C_R)$$

Compte tenu de (12) et de (13), la relation (7) donne alors la granulométrie selon les cercles sous la forme :

$$P(0 \in A_R) = [1 + 2\lambda\pi R (2 - F(2R)) + \pi^2 \lambda^2 R^2 (2 - F(2R))^2] P(C_R)$$

d'où finalement :

$$(14) \quad P(0 \in A_R) = [1 + \lambda\pi R (2 - F(2R))]^2 e^{-\lambda\pi \int_0^{2R} (2 - F(x)) dx}$$

On vérifiera sans peine que la densité $-\frac{d}{dR} P(0 \in A_R)$ associée à cette granulométrie est effectivement ≥ 0 : c'est la densité de la variable aléatoire R, rayon du plus grand cercle contenant l'origine et contenu dans un seul polygone du schéma.

Remarque : Expérimentalement, la relation (14) permet un deuxième contrôle, venant renforcer le test fondé sur (12''). Avec les notations définies en (12'), en effet, (14) peut s'écrire :

$$(14') \quad \frac{P(O \in A_R)}{P(C_R)} = (1 + R G_2' (2R))^2$$

et cette relation (14') peut être contrôlée expérimentalement.