

J. Serra N-112



NOTE GEOSTATISTIQUE N° 92

POLYGONES ET POLYEDRES POISSONIENS

G. MATHERON

Avril 1969

POLYGONES ET POLYEDRES POISSONIENS

1 -	<u>Loi du périmètre à n fixé</u>	1
2 -	<u>Cas des polyèdres poissonniens dans $\mathbb{R}^3$</u>	3
3 -	<u>Lois en nombre</u>	3
4 -	<u>Schémas poissonniens d'hyperplans dans $\mathbb{R}^n$</u>	6
	<u>Schémas induits dans $\mathbb{R}^{n-k}$</u>	7
5 -	<u>Densité de sommets</u>	8
	Les probabilités conditionnelles p_n	8
	Calcul des nombres spécifiques v_n	11
	Nombre de polyèdres par unité de volume	12
6 -	<u>Les premiers moments du volume d'un polyèdre</u>	12
	Calcul de $E[g(h)]$	13
	Calcul de $\mathcal{M}(v)$	14
	Calcul de $\mathcal{M}(v^2)$	15
7 -	<u>Polyèdres érodés, invariance conditionnelle</u>	16
8 -	<u>Granulométrie selon des cercles des polygones poissonniens</u>	19
9 -	<u>Les grandeurs spécifiques</u>	21
10 -	<u>Granulométrie selon les boules des polyèdres poissonniens de $\mathbb{R}^n$</u>	23
11 -	<u>Invariance des polyèdres pour les érosions aléatoires</u>	24
12 -	<u>Lois du nombre des côtés d'un polygone poissonien</u>	26

	Calcul des premiers moments du nombre des côtés	30
	Relation entre les lois de n et de $2\mathcal{L}$	31
13 -	<u>La loi du nombre des quartiers</u>	32
	Interprétation de $Q(s)$	34
	Espérance et variance du nombre n des sommets contenus dans B	35
	Calcul des moments du nombre N des quartiers	38
	Exemple du cercle de rayon R	39
14 -	<u>Loi de la taille des quartiers</u>	40
15 -	<u>Mesures aléatoires représentant les "densités" des fonctionnelles de Minkowski</u>	43
	Mesure-covariance de la densité de demi-surface spécifique	47
	Exemples	49
16 -	<u>Compléments sur la loi de la surface S</u>	51

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 92

POLYGONES ET POLYEDRES POISSONIENS

1 - Loi du Périmètre à n Fixé

Soit, dans le plan, un schéma poissonien de droites aléatoires, λ sa densité linéaire, P_n la probabilité pour qu'un point donné appartienne à un polygone de n côtés [dans la loi P_n du nombre des côtés d'un polygone, chaque polygone compte donc pour un poids proportionnel à sa surface]. Nous ne savons pas calculer les P_n , mais nous pouvons nous intéresser aux caractéristiques du polygone à $N = n$ fixé.

A $N = n$, le périmètre $2\mathcal{L} = X$ est une variable gamma de densité

$$\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$$

(on n'en conclura pas que les longueurs des n côtés sont alors indépendantes) - En effet, considérons le schéma de densité $\lambda + \mu$ comme résultant de la mise en place d'un premier schéma de densité λ , puis d'un second, de densité μ , venant recouper le précédent. Par raison de similitude, P_n ne dépend pas de la densité λ . Ainsi $P_n \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^n$ est la probabilité pour que 0 appartienne à un polygone de n côtés dont les n côtés sont des droites du premier schéma. Ceci suppose que 0 appartenait déjà à un polygone d'ordre n dans le premier schéma λ , et que les droites du second schéma n'ont pas

recoupé ce polygone de périmètre $2\mathcal{L}$: la loi du périmètre $2\mathcal{L}$ admet une densité $f_n(x; \lambda)$ avec :

$$P_n \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^n = P_n \int_0^\infty e^{-\mu x} f_n(x; \lambda) dx$$

D'où :

$$(1) \quad f_n(x; \lambda) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}$$

Plus généralement, soit Y une caractéristique linéaire du polygone à n côtés (diamètre apparent, traversée maximale dans une direction donnée, racine carrée de la surface, etc...) A $N = n$ fixé, $2\mathcal{L}$ et $Y/2\mathcal{L}$ sont des variables indépendantes -

En effet, soit $f_n(x, y; \lambda)$ la densité à n fixé de $X = 2\mathcal{L}$ et de Y , pour le schéma de densité λ . On a comme ci-dessus :

$$(2) \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^n f_n(x, y; \lambda+\mu) = e^{-\mu x} f_n(x, y; \lambda)$$

Or, mise sous la forme :

$$\frac{e^{(\lambda+\mu)x}}{(\lambda+\mu)^n} f_n(x, y; \lambda+\mu) = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^n} f_n(x, y; \lambda)$$

cette relation exprime qu'à $X = x$ fixé, la loi conditionnelle de Y ne dépend plus de λ . Mais $(X, Y) \stackrel{\mathcal{L}}{\equiv} \left(\frac{X_1}{\lambda}, \frac{Y_1}{\lambda} \right)$, X_1 et Y_1 , désignant ces variables dans le cas $\lambda = 1$. Ainsi, à $X_1 = \lambda x$ fixé,

la loi de Y_1/λ ne dépend pas de λ . Pour $x = 1$, cela signifie qu'à $X_1 = \lambda$, Y_1/λ ne dépend pas de λ , c'est-à-dire que X_1 et Y_1/X_1 sont indépendants.

2 - Cas des Polyèdres Poissoniens dans $\mathbb{R}^3$ On désignera par λ la densité linéaire des plans Poissoniens, et on se placera conditionnellement dans l'hypothèse où 0 appartient à un polygone à n faces. En considérant les deux schémas de densité λ et μ , la probabilité pour que ces n faces appartiennent au schéma de densité λ est encore :

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n = \int_0^{\infty} e^{-\mu\alpha} f_n(\alpha) d\alpha$$

Ainsi le paramètre α (intégrale de la courbure moyenne) d'un polyèdre à n faces obéit à la loi gamma de paramètre n [noter que cette loi attribue à chaque polyèdre un poids proportionnel à son volume].

Exactement comme dans le cas du plan, on montre ensuite que toute caractéristique linéaire Y (racine cubique du volume, racine carrée d'un contour apparent, diamètre etc...) est, à $N = n$ fixé, de la forme $Y = Z \alpha$, avec une variable Z indépendante de α .

3 - Lois en Nombre

Conditionnellement lorsque 0 est sur une arête (est un sommet) d'un polygone à n côtés du schéma plan, le périmètre $2\mathcal{L} = X$

obéit à la loi gamma de paramètre $n-1$ ($n-2$) : on le voit en reprenant le raisonnement du premier paragraphe, et en écrivant que les $n-1$ ($n-2$) arêtes ne contenant pas 0 appartiennent au schéma de densité λ . On le voit aussi directement, en pondérant par $\frac{1}{x} \left(\frac{1}{z x^2} \right)$, z étant indépendante de x) la densité de X .

Ainsi, le périmètre $2\mathcal{L}$ est une variable gamma de paramètre n , $n-1$ ou $n-2$ selon que l'on compte les polygones en surface, en périmètre ou en nombre. De même, à trois dimensions, et toujours à $N = n$ fixé, la paramètre α d'un polyèdre du schéma est une variable gamma de paramètre n , $n-1$, $n-2$ ou $n-3$ selon que l'on compte les polyèdres en volume, en surface, selon α (ou selon la longueur totale $L = \mathcal{L} \alpha$ des arêtes, avec $\mathcal{L}$ indépendant de α) ou enfin en nombre.

L'indépendance à $N = n$ fixé de $2\mathcal{L}$ et $Y/2\mathcal{L}$ (ou α et Y/α) subsiste pour ces différentes lois. Prenons, par exemple, les lois en nombre. Soit $X = 2\mathcal{L}$ et $Y = \mathcal{Z} X$, $\mathcal{Z}$ indépendant de X , et $g(x)$ $h(z)$ la densité de X et $\mathcal{Z}$ dans la loi en surface. La surface S du polygone est de la forme $S = T X^2$, où T est indépendant de X . La densité en nombre de X et $\mathcal{Z}$ sera de la forme :

$$C \frac{g(x)}{x^2} h(z) E\left(\frac{1}{T} \mid Z = z\right)$$

où C est une constante de normalisation. Elle est encore de la forme $g_0(x) h_0(z)$, d'où l'indépendance de X et $\mathcal{Z}$ comptés en nombre.

En général, $X = 2\mathcal{L}$ et Y/X retombent en dépendance stochastique lorsque l'on lève la condition $N = n$, de sorte qu'ils ne sont indépendants que conditionnellement.

En effet, soit $f_n(x)$ $g_n(z)$ la densité à $N = n$ de X et $Z = Y/X$. La loi inconditionnelle de X et Z admet la densité :

$$h(x, z) = \sum_{n=2}^{\infty} P_n f_n(x) g_n(z)$$

Si X et Z sont indépendants, on a

$$h(x, z) = f(x) f(z) = \left(\sum_n P_n f_n(x) \right) \left(\sum_m P_m g_m(z) \right)$$

Mais l'identité :

$$\sum_n P_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} g_n(z) = \sum_n P_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sum_m P_m g_m(z)$$

est vraie pour tout $x > 0$ si et seulement si :

$$g_n(z) = \sum_m P_m g_m(z) = g(z)$$

c'est-à-dire si $Z = Y/X$ est indépendante du nombre N des côtés du polygone. Il n'y a pas de raison, en général, pour que cette indépendance soit réalisée. Donnons un contre-exemple :

Contre-Exemple - Surface S du polygone.

Montrons que $S/4\mathcal{L}^2$ n'est pas indépendant du nombre N des

côtés du polygone. Parmi les polygones à n côtés, le polygone régulier maximise le rapport $S/4\mathcal{L}^2$, qui vaut alors :

$$\frac{n \sin \frac{2\pi}{n}}{2 (2 n \sin \frac{\pi}{n})^2} = \frac{1}{4 n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

et, à $N = n$ fixé, on a l'inégalité des isopérimètres :

$$\frac{S}{4\mathcal{L}^2} \leq \frac{1}{4 n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$$

D'autre part, à $N = n$ fixé, il y a une probabilité > 0 pour que le polygone vérifie $\frac{S}{4\mathcal{L}^2} > \frac{1}{4 n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} - \varepsilon$. Par suite, la loi de $\frac{S}{4\mathcal{L}^2}$ à $N = n$ fixé dépend effectivement de n .

Ainsi, le rapport isopérimétrique $\frac{S}{4\mathcal{L}^2}$ n'est pas indépendant de N , et par suite ne peut pas être inconditionnellement indépendant du périmètre $2\mathcal{L}$.

4 - Schémas Poissoniens d'Hyperplans dans $\mathbb{R}^n$

Soit, dans $\mathbb{R}^n$, un schéma d'hyperplans poissoniens de densité linéaire λ : un petit segment $d\ell$ a la probabilité $\lambda d\ell d\omega$ d'être coupé par un hyperplan dont l'une des normales appartient à l'angle $d\omega$ centré sur $d\ell$: il est entendu que - pour ne pas compter deux fois un même hyperplan - la direction ω décrit la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (et non la sphère entière).

Soit alors A un ensemble convexe. Il est coupé par un plan dont une normale appartient à $d\omega$ avec la probabilité $\lambda b(\omega) d\omega$, $b(\omega)$ désignant la largeur (diamètre apparent) relativement à cette direction ω . Le nombre N des hyperplans coupant A est donc un Poisson de paramètre :

$$\lambda \alpha = \frac{1}{2} \lambda \int_S b(\omega) d\omega$$

(S , sphère unité de $\mathbb{R}^n$). En se reportant à Hadwiger (formule (44), paragraphe 6-1-7), on voit que α est la norme $N(A)$ de l'ensemble A .

Schémas Induits dans $\mathbb{R}^{n-k}$

Supposons que A soit contenu dans un $(n-1)$ -plan, que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^{n-1}$. Soit λ' la densité du schéma induit dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\alpha' = N'(A)$ la norme de A dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Le nombre d'intersection de A avec les plans du réseau est un Poisson dont le paramètre $\lambda \alpha = \lambda' \alpha'$ peut être évalué indifféremment dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^{n-1}$.

Ainsi :

$$(5) \quad \lambda \alpha = \lambda' \alpha'$$

Or (cf. Hadwiger, formule (50), paragraphe 6-1-9, avec $\alpha = N(A) = n W_{n-1}(A)$, et $\alpha' = N'(A) = (n-1) W'_{n-2}(A)$), on a :

$$(6) \quad \alpha = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} \alpha'$$

avec les constantes ω_k habituelles (volume de la boule de rayon unité dans $\mathbb{R}^k$) :

$$\omega_k = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})}$$

Par suite, d'après (5) et (6) :

$$(7) \quad \lambda' = \lambda \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}}$$

(pour $n = 3$, $\lambda' = \lambda \frac{\pi}{2}$, pour $n = 2$, $\lambda' = 2 \lambda$)

Il n'y a aucune difficulté à réitérer l'opération (7). Ainsi, le schéma admettant la densité linéaire λ_n dans l'espace à n dimensions induit dans $\mathbb{R}^{n-k}$ le schéma dont la densité linéaire λ_{n-k} est :

$$(8) \quad \lambda_{n-k} = \lambda_n \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-k-1}}$$

5 - Densité de sommet

Désignons par v_n l'espérance du nombre de sommets par unité de volume. Un sommet (dans $\mathbb{R}^n$) est l'intersection de n hyperplans du réseau.

Les probabilités conditionnelles p_n

Considérons alors dans $\mathbb{R}^n$ une boule B_n de rayon R , plaçons-nous conditionnellement dans l'hypothèse où n plans rencontrent

cette boule, et cherchons la probabilité pour que le sommet (point d'intersection) défini par ces n plans tombe à l'intérieur de cette boule. Désignons par p_n cette probabilité (qui ne dépend pas de la densité λ_n , par raisons de similitude). Les n plans $\pi_1, \dots, \pi_n$, étant individualisés, considérons par exemple π_n . Il coupe la boule B_n selon une boule B_{n-1} à $n-1$ dimensions de rayon (aléatoire) $r = \sqrt{R^2 - X^2}$, avec une variable X uniformément répartie sur $(0, R)$. Dans l'espace à n dimensions, cette boule B_{n-1} a un paramètre (d'après (6)) :

$$a_r = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}} a'_r$$

Mais (Hadwiger, formule (42), paragraphe 6-1-6) $a'_r = (n-1)\omega_{n-1} r$, d'où :

$$(9) \quad a_r = (n-1) \frac{(\omega_{n-1})^2}{\omega_{n-2}} r$$

Chacun des $n-1$ plans restant, $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ (qui, par hypothèse coupent la sphère B_n de paramètre $a = n \omega_n R$) rencontre alors B_{n-1} indépendamment des autres avec la probabilité

$$\frac{a_r}{a} = \frac{n-1}{n} \frac{(\omega_{n-1})^2}{\omega_n \omega_{n-2}} \frac{r}{R}$$

Ainsi, $\left(\frac{a_r}{a}\right)^{n-1}$ est la probabilité pour qu'ils rencontrent tous B_{n-1} , et B_{n-1} contient alors un sommet avec la probabilité p_{n-1} . On a donc à r fixé :

$$(9') \quad p_n(r) = \left(\frac{n-1}{n} \frac{\omega_{n-1}^2}{\omega_n \omega_{n-2}} \right)^{n-1} \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} p_{n-1}.$$

Mais l'espérance de r^{n-1} est :

$$E(r^{n-1}) = \frac{1}{R} \int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx = \frac{1}{2} R^{n-1} \frac{\Gamma(1 + \frac{n-1}{2}) \sqrt{\pi}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

c'est-à-dire :

$$E(r^{n-1}) = \frac{1}{2} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} R^{n-1}$$

(Cette relation se déduit aussi directement de :

$$\int_0^R \omega_{n-1} r^{n-1} dx = \frac{1}{2} \omega_n R^n)$$

En prenant l'espérance de (9'), nous arrivons donc à la formule de récurrence :

$$(10) \quad p_n = \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{n} \frac{\omega_{n-1}^2}{\omega_n \omega_{n-2}} \right)^{n-1} \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} p_{n-1}$$

qui permet le calcul des p_n (probabilité pour que la boule $B_n \subset \mathbb{R}^n$ contienne un sommet sachant que n plans la rencontrent)

Exemples - Pour $n = 1$, on a évidemment $p_1 = 1$. D'où :

$$p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{4}{\pi} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \frac{2}{\frac{4}{3}\pi \times 2} \right)^2 \frac{\frac{4}{3}\pi}{\pi} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{48}$$

Calcul du nombre v_n - Le schéma dans $\mathbb{R}^n$ ayant la densité linéaire λ_n , une boule de rayon δr très petit (paramètre $\mathcal{Q} = n \omega_n \delta r$) rencontre n plans avec la probabilité :

$$\frac{(\lambda_n \mathcal{Q})^n}{n!} e^{-\lambda_n \mathcal{Q}} \approx \frac{(n \omega_n \delta r \lambda_n)^n}{n!}$$

La densité v_n de sommets est donc :

$$v_n = p_n \frac{(n \omega_n \lambda_n \delta r)^n}{n!} \frac{1}{\omega_n \delta r^n}$$

soit :

$$(11) \quad v_n = \frac{p_n}{n!} (n \lambda_n)^n (\omega_n)^{n-1}$$

Compte tenu des relations (8) et (10), on obtient une formule de récurrence liant les densités de sommet du schéma de paramètre λ_n dans $\mathbb{R}^n$ et du schéma qu'il induit dans $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$(12) \quad v_n = \frac{1}{2} \frac{\omega_n \omega_{n-2}}{\omega_{n-1}} \lambda_{n-1} v_{n-1} = \frac{1}{2} \omega_n \lambda_n v_{n-1}$$

En posant $v_0 = 1$, la formule ci-dessus s'applique pour $n = 1$ ($\omega_1 = 2$ et $v_1 = \lambda_1$). Il en résulte que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \omega_k \lambda_k$$

D'ailleurs, d'après (7), $\omega_{n-1} \lambda_n = \omega_{n-2} \lambda_{n-1} = \dots = \omega_0 \lambda_1$, ($\omega_0=1$).

Il vient par suite :

$$(13) \quad v_n = \frac{1}{2^n} \omega_n (\lambda_1)^n = \frac{1}{2^n} \omega_n (\omega_{n-1} \lambda_n)^n$$

Pour $n = 2$:

$$v_2 = \frac{\pi}{4} (\lambda_1)^2 = \pi (\lambda_2)^2$$

Pour $n = 3$

$$v_3 = \frac{\pi}{6} (\lambda_1)^3 = \frac{\pi^4}{6} (\lambda_3)^3$$

Nombre de polyèdres par unité de volume

Le nombre de polyèdres contenus dans un très grand volume V , et rapporté à ce volume V , doit coïncider avec v_n . En effet, les polyèdres sont convexes et leur nombre de convexité coïncide avec v_n : un plan P dont la normale orientée à la direction u est découpée par les plans du schéma passant par un sommet S selon un réseau de polyèdres à $n-1$ dimensions dont un seulement a un $(n-1)$ -volume fini : lorsque P décrit $\mathbb{R}^n$ en se déplaçant parallèlement à lui-même dans la direction de sa normale orientée u , le sommet S contribue toujours pour une unité au nombre de convexité.

6 - Les Premiers Moments du volume d'un Polyèdre.

Considérons les points x et $x+h$ dans $\mathbb{R}^n$. Ils appartiennent

au même polyèdre que l'origine 0 avec la probabilité $e^{-\lambda_2 a'}$, avec $a' = 2\mathcal{L}$, périmètre du triangle $(0, x, x+h)$, et $\lambda_2 = \lambda_n \frac{\omega_{n-1}}{2}$ désignant la densité linéaire du schéma induit dans $\mathbb{R}^2$ - Pour abréger, nous écrirons λ au lieu de λ_2 :

$$\lambda = \lambda_n \frac{\omega_{n-1}}{2}$$

Ainsi, la fonction :

$$P(x, x+h) = e^{-\lambda|x| - \lambda|x+h| - \lambda|h|}$$

représente la probabilité d'avoir x et $x+h$ dans le même polyèdre A que l'origine 0. Si $g(h)$ est le covariogramme géométrique de A , on a donc :

$$(14) \quad E[g(h)] = e^{-\lambda|h|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda|x| - \lambda|x+h|} dx$$

Calcul de $E[g(h)]$

Calculons cette intégrale, en introduisant les fonctions de Bessel modifiées de seconde espèce. On a :

$$e^{-\lambda r} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\lambda r)^{1/2} K_{-\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

($r = |x|$ et cette fonction admet dans $\mathbb{R}^n$ la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}_n e^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}}} 2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{4\pi^2 \rho^2}{\lambda^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

($\rho = |u| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$, rayon vecteur dans l'espace $\mathbb{R}^n$ dual).
L'intégrale qui figure dans (14) est le produit de convolution
 $e^{-\lambda r} * e^{-\lambda r}$ (dans $\mathbb{R}^n$), et admet donc la transformée :

$$[\mathcal{F}_n e^{-\lambda r}]^2 = \frac{1}{\lambda^{2n}} 2^{2n} \pi^{n-1} \left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right)^2 \frac{1}{\left(1 + 4 \frac{\pi^2 \rho^2}{\lambda^2}\right)^{n+1}}$$

Il suffit de faire la transformation inverse pour obtenir :

$$e^{-\lambda r} * e^{-\lambda r} = \frac{1}{\lambda^n} 2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right)^2}{\Gamma(1+n)} (\lambda r)^{1+\frac{n}{2}} K_{1+\frac{n}{2}}(\lambda r)$$

D'où la valeur de $E[g(h)]$

$$(15) \quad E[g(h)] = \frac{1}{\lambda^n} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\pi} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right)^2}{n!} e^{-\lambda |h|} (\lambda h)^{1+\frac{n}{2}} K_{1+\frac{n}{2}}(\lambda h)$$

Calcul de $\mathcal{M}(V)$

Pour $h = 0$, on obtient $E[g(0)]$, qui est l'espérance du volume V_n du polyèdre de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, c'est-à-dire $\mathcal{M}(V_n)$, moment en mesure d'ordre 1. On le calcule en faisant $h = 0$ dans (15), ou encore en intégrant directement (14). A titre de vérification, effectuons les deux calculs.

Pour $x = 0$, $x^{1+\frac{n}{2}} K_{1+\frac{n}{2}}(x)$ prend la valeur $2^{\frac{n}{2}} \Gamma(1 + \frac{n}{2})$, d'où :

$$(16') \quad E[g(o)] = \frac{1}{\lambda^n} 2^n \pi^{\frac{n}{2}-1} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^2 \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(1+n)}$$

En faisant $h = 0$ dans (14), on trouve :

$$(16'') \quad E[g(o)] = n \omega_n \int_0^\infty e^{-2\lambda r} r^{n-1} dr = \frac{n! \omega_n}{(2\lambda)^n}$$

On vérifie que (16') et (16'') sont équivalentes à l'aide de la formule de duplication de la fonction eulérienne, qui s'écrit :

$$\Gamma(1+n) = \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right) \frac{2^n}{\sqrt{\pi}}$$

Nous avons donc calculé le moment d'ordre 1 en volume :

$$(16) \quad \mathcal{M}(V_n) = \frac{\omega_n n!}{2^n} \frac{1}{\lambda^n}$$

Exemple - $\mathcal{M}(V_2) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(\lambda_2)^2}$, $\mathcal{M}(V_3) = \frac{\pi}{(\lambda_3)^3} = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{\lambda_3}\right)^3$

Moment d'Ordre 2 en mesure : il est donné par

$$\mathcal{M}(V_n^2) = \int_{\mathbb{R}^n} E[g(h)] dh$$

D'après (14), cette intégrale est la valeur en $r = 0$ du produit de convolution $e^{-\lambda r} * e^{-\lambda r} * e^{-\lambda r}$, dont la transformée de Fourier est :

$$(\mathcal{F}_n e^{-\lambda r})^3 = \frac{2^{3n}}{\lambda^{3n}} \pi^{\frac{3}{2}(n-1)} \left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^3 \frac{1}{(1 + \frac{4\pi^2 \rho^2}{\lambda^2})^{\frac{3(n+1)}{2}}}$$

On a donc :

$$\mathcal{M}(V_n^2) = n \omega_n \int_0^\infty \left(\frac{4}{3} e^{-\lambda r} \right)^3 \rho^{n-1} d\rho$$

L'intégrale se calcule, et on trouve

$$(17) \mathcal{M}(V_n^2) = 2^{2n} \pi^{n-1} \frac{\frac{3}{2} \Gamma(n + \frac{3}{2}) \left(\Gamma(\frac{n+1}{2}) \right)^3}{\Gamma(\frac{3}{2}(n+1))} \frac{1}{\lambda^{2n}}$$

Exemples
$$\begin{cases} \mathcal{M}(V_2^2) = \frac{4}{7} \frac{\pi^2}{\lambda^4} \\ \mathcal{M}(V_3^2) = \frac{7\pi^2}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} \right)^6 = \frac{7 \times 2^5}{\pi^4} \left(\frac{1}{\lambda_3} \right)^6 \end{cases}$$

Ces résultats permettent le calcul des trois premiers moments de la granulométrie en nombre.

$$E(V_n) = \frac{1}{V_n}, \quad E(V_n^2) = \mathcal{M}(V_n) E(V_n), \quad E(V_n^3) = \mathcal{M}(V_n^2) E(V_n)$$

7 - Polyèdres Erodés

Soit A le polyèdre aléatoire auquel appartient l'origine O. En tant qu'ensemble convexe aléatoire, A est défini par la donnée des P(B), probabilité pour que l'ensemble B soit contenu dans A, B parcourant la famille des ensembles convexes bornés. En effet, on peut définir A en coordonnées polaires par la fonction aléatoire $\rho(u)$, u parcourant la sphère unité, $\rho(u)$ rayon vecteur de la frontière

de A dans la direction u. Si $u_1, \dots, u_k$ sont des directions, $r_1, \dots, r_k$ des nombres ≥ 0 , et B l'enveloppe convexe de 0 et des k points de coordonnées polaires (r_i, u_i) ; on a

$$P(\rho(u_i) \geq r_i, \quad i = 1, \dots, k) = P(B)$$

de sorte que la donnée des $P(B)$ définit bien la loi spatiale de $\rho(u)$.

En posant $\lambda = \lambda_n$ (densité linéaire du schéma défini dans $\mathbb{R}^n$), on a vu que :

$$(18) \quad P(B) = e^{-\lambda \alpha(B)}$$

Mais la fonctionnelle $\alpha(B)$ est linéaire vis-à-vis de l'opération $\oplus$ (addition de Minkowski) :

$$\alpha(B \oplus B') = \alpha(B) + \alpha(B') \quad (B, B' \text{ convexes})$$

La relation (18) entraîne alors une équation du type équation des demi-groupes, qui admet une interprétation markovienne :

$$(19) \quad P(B \oplus B') = P(B) P(B')$$

Sous forme de probabilités conditionnelles, ceci s'écrit aussi bien :

$$(19') \quad P(B \oplus B' \subset A \mid B' \subset A) = P(B \subset A)$$

Mais on a l'équivalence :

$$B \oplus B' \subset A \Leftrightarrow B \subset A \ominus \check{B}'$$

En effet, $B \oplus B' \subset A$ entraîne $B \subset (B \oplus B') \ominus \check{B}' \subset A \ominus \check{B}'$.
Inversement, $B \subset A \ominus \check{B}'$ entraîne $B \oplus B' \subset (A \ominus \check{B}') \oplus B' \subset A$.
La relation (19') peut donc s'écrire :

$$(20) \quad P(B \subset A \ominus \check{B}' \mid 0 \in A \ominus \check{B}') = P(B \subset A) = P(B)$$

(l'équivalence $B' \subset A \Leftrightarrow 0 \in A \ominus \check{B}'$ est un cas particulier de la précédente, compte tenu de la relation $B' \ominus \check{B}' = \{0\}$ valable dès que B' est borné).

Comme les $P(B)$ définissent un ensemble aléatoire, pour B parcourant la famille des convexes bornés, la relation (20) signifie que l'érodé $A \ominus \check{B}'$, pris conditionnellement dans l'hypothèse où l'origine appartient à cet érodé, est équivalent à l'ensemble aléatoire A initial (c'est-à-dire admet les mêmes caractéristiques probabilistes que lui) : l'érosion par un convexe laisse conditionnellement invariantes les caractéristiques probabilistes des polyèdres poissonniens.

Pour interpréter correctement cet énoncé, précisons un point important : les $P(B)$ définissent le polyèdre aléatoire A du point de vue des granulométries en mesure, c'est-à-dire en attribuant à chacun des polyèdres A_i de la partition de l'espace un poids proportionnel à son volume $V(A_i)$. De même, les $P(B \subset A \ominus \check{B}' \mid 0 \in A \ominus \check{B}')$

définissent la loi conditionnelle de l'érodé $A \ominus \check{B}'$ sous l'hypothèse $0 \in A \ominus \check{B}'$, c'est-à-dire la loi de $A \ominus \check{B}'$ (prise conditionnellement pour $A \ominus \check{B}' \neq \emptyset$) exprimée en mesure, en attribuant à chacun des $A_i \ominus \check{B}'$ non vides un poids proportionnel à son volume $V(A_i \ominus \check{B}')$. Mais l'équivalence conditionnelle de $A \ominus \check{B}' \neq \emptyset$ et de A subsiste alors évidemment pour les lois en nombres, ou pondérées par telle ou telle caractéristique.

Ce résultat va nous permettre de déterminer la granulométrie selon les boules des polyèdres poissoniens. Commençons par le cas le plus simple, qui est celui de l'espace à deux dimensions.

8 - Granulométrie selon des cercles des polygones poissoniens

Dans ce qui suit, il convient de garder toujours présente à l'esprit la distinction capitale des granulométries en nombre et en surface. Soit A le polygone poissonien contenant O , S et $2\mathcal{L}$ sa surface et son périmètre, S' et $2\mathcal{L}'$ la surface et le périmètre de $A \ominus C_r$ (érodé par le cercle de rayon r). Comme $P(C_r \subset A) = e^{-2\lambda \pi r^2}$, les érodés par C_r des polygones du schéma occupent, en moyenne, la surface $e^{-2\lambda \pi r^2}$ par unité de surface. D'autre part, la loi de $(S', \mathcal{L}')$ conditionnelle en $0 \in A \ominus C_r$ est identique à la loi de $(S', \mathcal{L}')$ comptée en surface S' et coïncide avec la loi de $(S, 2\mathcal{L})$, comptée en surface S . Désignons par F et G les lois de $(S, 2\mathcal{L})$ en nombre et en surface:

$$\begin{cases} G(dS, d2\mathcal{L}) = \frac{S F(dS, d2\mathcal{L})}{\int_S F(dS) d2\mathcal{L}} \\ F(dS, d2\mathcal{L}) = \frac{\frac{1}{S} G(dS, d2\mathcal{L})}{\int \frac{1}{S} G(dS, d2\mathcal{L})} \end{cases}$$

Ces formules montrent que si $(S', 2\mathcal{L}')$ est équivalent à $(S, 2\mathcal{L})$ pour les lois en surface, ces couples de variables sont encore équivalents pour les lois en nombre. Maintenant, l'ouverture $A_\omega = (A \ominus C_r) \oplus C_r$ de A selon le cercle C_r a pour surface :

$$S(A_\omega) = S' + 2\mathcal{L}' r + \pi r^2$$

On a donc (en nombre)

$$E(S(A_\omega) | A_\omega \neq \emptyset) = E(S') + r E(2\mathcal{L}') + \pi r^2$$

Mais, pour la granulométrie en nombre, $E(S') = E(S) = \frac{1}{v}$, ($v = \pi \lambda^2$), et $E(2\mathcal{L}') = E(2\mathcal{L}) = -\frac{\pi C'(0)}{v} = \frac{2\lambda\pi}{v}$. Ainsi :

$$E[S(A_\omega) | A_\omega \neq \emptyset] = \frac{1}{v} [1 + 2\lambda\pi r + \pi^2 \lambda^2 r^2]$$

D'autre part, par unité de surface, l'aire totale occupée par les érodés $A \ominus C_r$ est $e^{-2\lambda\pi r}$ et le nombre des grains érodés est en moyenne $v e^{-2\lambda\pi r}$ (puisque les érodés non vides ont même loi que les polygones initiaux). Par suite, les A_ω occupent par unité de surface l'aire $[1 + 2\lambda\pi r + \pi^2 \lambda^2 r^2] e^{-2\lambda\pi r}$, et la granulométrie selon les cercles est donnée par la fonction :

$$(21) \quad B_2(r) = P(0 \in (A \otimes C_r) \oplus C_r) = (1 + 2\lambda \pi r + \pi^2 \lambda^2 r^2) e^{-2\lambda \pi r}$$

Nous allons maintenant essayer de généraliser ce résultat au cas du schéma poissonien dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela nous aurons besoin de connaître certaines grandeurs spécifiques, liées aux fonctionnelles de Minkowski et généralisant les notions de surface ou de longueur spécifique.

9 - Les Grandeurs Spécifiques

Désignons par $W_k(A)$ la $k^{\text{ième}}$ fonctionnelle de Minkowski dans l'espace à n dimensions et par

$$W_k = E[W_k(A)]$$

son espérance (en nombre) pour un polyèdre poissonien de $\mathbb{R}^n$. En particulier : W_0 est l'espérance de $V(A)$, $n W_1$ celle du volume à $n-1$ dimensions de la frontière de A , et $n W_{n-1}$ celle de la norme $N(A) = \alpha(A)$.

La formule de Crofton (Hadwiger, formule (103), paragraphe 6-2-5) permet de calculer facilement ces quantités. Cette formule, en effet, s'écrit, pour $k < n$:

$$(22) \quad W_k(A) = \frac{\omega_n \omega_{i-k}}{\omega_i \omega_{n-k}} \frac{1}{b_{in}} \int W'_k(A \cap E_i) d E_i$$

W'_k : fonctionnelle d'ordre k dans $\mathbb{R}^1$, intégration étendue au groupe entier des déplacements, $b_{in} = \int d \bar{E}_i$ constante de normalisation

du groupe des rotations. Lorsque l'on passe aux espérances, l'isotropie de la loi spatiale montre d'ailleurs que l'intégration sur le groupe des rotations est superflue : on peut enlever la constante b_{in} et intégrer sur les seules translations.

Prenons la somme des $W_k(A_i)$ sur tous les polyèdres A_i contenus dans un grand volume V de $\mathbb{R}^n$ et divisons par V . On obtient à gauche $v_n W_k$ et à droite l'intégrand devient $v_i W'_k \frac{1}{V_i}$, l'intégrale étant étendue de 0 à V_i avec $\int_{V_i} dE_i = V$. D'où

$$v_n W_k = \frac{\omega_n \omega_{i-k}}{\omega_i \omega_{n-k}} v_i W'_k$$

Pour $k = n$, on a $W_n = \omega_n$. Pour $k < n$, prenons $i = k$, d'où $W'_k = \omega_k$: il vient :

$$(23) \quad v_n W_k = \frac{\omega_n}{\omega_{n-k}} v_k$$

Telles sont les grandeurs spécifiques dans $\mathbb{R}^n$. Compte tenu de (13) on les met sous la forme :

$$(23') \quad v_n W_k = \frac{\omega_n \omega_k}{\omega_{n-k}} (\lambda_2)^k$$

Enfin, les W_k eux-mêmes sont donnés par :

$$(24) \quad W_k = \frac{\omega_k}{\omega_{n-k}} (\lambda_2)^{k-n}$$

$$(\lambda_2 = \frac{\omega_{n-1} \lambda_n}{2}, \text{ densité du schéma induit dans } \mathbb{R}^2).$$

On remarquera que (24), valable pour $k < n$, s'applique encore pour $k = n$, puisque l'on a bien $W_n = \omega_n$.

10 - Granulométrie suivant les boules des polyèdres poissoniens de $\mathbb{R}^n$.

Le raisonnement s'effectue comme dans le paragraphe 11 - Si $W_k(A)$ et $W_k(A')$ sont les valeurs des fonctionnelles de Minkowski du polyèdre A et de son érodé $A' = A \ominus B_r$ par la boule de rayon r de $\mathbb{R}^n$, les $W_k(A')$, conditionnellement pour $W_0(A') \neq 0$, ont même loi (en nombre, ou en mesure) que les $W_k(A)$ (d'après le paragraphe 10 -). L'ouverture $A_\omega = A' \oplus B_r$ de A selon B_r a pour volume à n dimensions (d'après la formule de STEINER) :

$$V(A_\omega) = \sum_{k=0}^n C_n^k W_k(A') r^k$$

et donc, conditionnellement pour $A_\omega \neq \emptyset$, l'espérance (en nombre) :

$$E[V(A_\omega)] = \sum_{k=0}^n C_n^k W_k r^k$$

D'autre part, par unité de volume dans $\mathbb{R}^n$, les érodés des polyèdres du schéma occupent le volume :

$$e^{-n \omega_n \lambda_n r} = e^{-2n \frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \lambda r}$$

($\lambda = \lambda_2$) et, par unité de volume érodé, le nombre de ces polyèdres est v_n . On obtient donc la granulométrie $B_n(r)$ selon les boules de $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$B_n(r) = P(0 \in (A \ominus B_r) \oplus B_r) = v_n e^{-n \omega_n \lambda_n r} \sum_{k=0}^n C_n^k W_k r^k$$

Compte tenu de (23'), et avec $\lambda = \lambda_2$, on trouve donc :

$$(25) \quad B_n(r) = e^{-\frac{2n \omega_n}{\omega_{n-1}} \lambda r} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\omega_n \omega_k}{\omega_{n-k}} (\lambda r)^k$$

Exemples - Pour $n = 1$ (avec $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2} \lambda_1$), on trouve

$$B_1(r) = (1 + 2 \lambda_1 r) e^{-2\lambda_1 r}$$

(ne pas oublier que la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^1$ est une traversée de longueur $2r$). On retrouve, comme il se doit, une loi gamma de paramètre 2. Pour $n = 2$, on retrouve (21). Pour $n = 3$, enfin, avec $\lambda = \lambda_2$:

$$B_3(r) = e^{-8\lambda r} (1 + 8\lambda r + \frac{2}{3} \pi^2 \lambda^2 r^2 + \frac{16}{9} \pi^2 \lambda^3 r^3)$$

où, avec $\lambda_3 = \frac{2}{\pi} \lambda_2$:

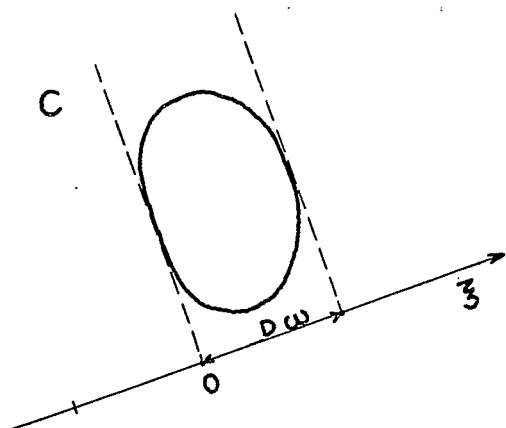
$$(26) \quad B_3(r) = (1 + 4 \pi \lambda_3 r + \frac{\pi^4}{6} \lambda_3^2 r^2 + \frac{2}{9} \pi^5 \lambda_3^3 r^3) e^{-4\pi \lambda_3 r}$$

11 - Invariance des polyèdres pour les érosions aléatoires

Eroder les polyèdres par la boule B_r de rayon r donné équivaut à dilater par B_r chacun des hyperplans Π du réseau Poissonien. Plus généralement, on peut dilater chacun des plans Π par

une boule B_R , de rayon R aléatoire, étant entendu que les R_i correspondant à chacun des Π_i sont indépendants et obéissent à une même loi F . Le complémentaire de $U(\Pi_i \oplus B_{R_i})$ est constitué de polyèdres qui se déduisent des polyèdres du schéma primitif par une érosion aléatoire. Nous désignerons par A_R l'érodé du polyèdre $A \ni 0$ dans cette érosion aléatoire, et par F la loi de R . Montrons que, conditionnellement en $C \in A_R$, l'érodé A_R possède toujours les mêmes propriétés que A , autrement dit que l'érosion aléatoire laisse conditionnellement invariantes les caractéristiques probabilistes des polyèdres.

En effet, soit ω une direction (ω décrira la demi-sphère unité de $\mathbb{R}^n$), C un convexe donné, D_ω sa largeur dans la direction ω , et $O\xi$ un axe parallèle à ω , l'origine O étant placée comme sur



la figure. Calculons la probabilité pour qu'aucun plan de normale $\in (\omega, \omega + d\omega)$ ne rencontre C : on doit écrire qu'aucun plan ne rencontre $O\xi$ de O à D_ω (probabilité $e^{-\lambda D_\omega d\omega}$), puis, en tout $\xi > D_\omega$ ou < 0 qu'aucun plan n'a germé $(1 - \lambda d\omega d\xi)$ ou bien qu'un plan a

germé mais que son dilaté par R n'atteint pas le segment D_ω : $\lambda d\omega d\xi F(\xi - a)$, a désignant l'extrémité la plus proche de ξ du segment (O, D_ω) . Au total, pour le petit angle $d\omega$, la probabilité cherchée est donc :

$$e^{-\lambda D_\omega d\omega - 2\lambda \int_0^\infty [1-F(x)] dx}$$

Posons $R_0 = E(R) = \int_0^\infty [1-F(x)] dx$, et intégrons sur la demi-sphère unité l'argument de cette exponentielle : on trouve :

$$(26) \quad P(C \subset A_R) = P(C \subset A) e^{-n\omega_n \lambda R_0}$$

En particulier :

$$(26') \quad P(0 \in A_R) = e^{-n\omega_n \lambda R_0}$$

et par suite :

$$(27) \quad P(C \subset A_R \mid 0 \in A_R) = P(C \subset A)$$

ce qui établit l'invariance conditionnelle de la loi de A_R . On notera aussi, selon (26'), que $P(0 \in A_R)$ ne dépend que de l'espérance $R_0 = E(R)$ du rayon aléatoire R , de sorte que l'érosion aléatoire $A \rightarrow A_R$ est en tous points comparable à l'érosion ordinaire $A \rightarrow A \ominus B_{R_0}$.

Pour terminer cette note, donnons quelques indications concernant des problèmes encore irrésolus, en nous limitant au cas des polygones poissonniens.

12 - Lois du nombre des côtés d'un polygone poissonien.

Nous désignerons par π_n , π'_n et P_n les probabilités

pour qu'un polygone ait n côtés comptés en nombre, en périmètre ou en surface respectivement.

En ce qui concerne la loi en nombre, son espérance est 4 :

$$(28) \quad \sum_n \pi_n = 4$$

Cette relation résulte de la théorie des graphes planaires, compte tenu du fait que tous les sommets sont d'ordre 4. On la retrouve par un raisonnement simple : à n fixé, le périmètre $2\mathcal{L} = X$ admet la densité

$$\lambda^{n-2} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda x}$$

(en nombre) et donc l'espérance $\frac{n-2}{\lambda}$. On a donc, en nombre

$$E(2\mathcal{L}) = \sum \frac{n-2}{\lambda} \pi_n$$

$$\text{Mais } E(2\mathcal{L}) = -\frac{\pi C'(0)}{v} = \frac{2}{\lambda}, \text{ d'où } \sum (n-2) \pi_n = 2.$$

Il est facile de passer des π_n aux π'_n et réciproquement :

$E(2\mathcal{L})$ à n fixé valant $\frac{n-2}{\lambda}$, on a nécessairement

$$(29) \quad \pi'_n = \frac{(n-2) \pi_n}{\sum (n-2) \pi_n} = \frac{(n-2) \pi_n}{2}$$

Plus généralement, introduisons la variable :

$$\mathbb{Z} = \frac{S}{(2\mathcal{L})^2} = \frac{S}{X^2}$$

qui représente le rapport isopérimétrique, et qui est indépendante de $X = 2\mathcal{L}$ à n fixé. Soit $g_n(z)$ sa densité (en nombre) lorsque n est fixé. On sait de plus que $g_n(z)$ ne dépend pas de λ . Nous poserons

$$I_n = \int_0^\infty z g_n(z) = E(\mathbb{Z}|n)$$

(valeur moyenne, en nombre, du rapport isopérimétrique à n fixé). Comptée en périmètre, et toujours à n fixé, la loi de $\mathbb{Z}$ est encore $g_n(z)$. Comptée en surface, par contre, elle devient :

$$\frac{z g_n(z)}{I_n}$$

En effet, à n fixé, la loi de X et $\mathbb{Z}$ a la densité

$$\lambda^{n-2} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda x} g_n(z)$$

(en nombre). En pondérant par $S = X^2 \mathbb{Z}$, on trouve bien :

$$\lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \frac{z g_n(z)}{I_n}$$

il suffit ensuite d'identifier les développements :

$$c \sum \pi_n \lambda^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-3)!} e^{-\lambda x} z g_n(z) = \sum P_n \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \frac{z g_n(z)}{I_n}$$

(C constante de normalisation) pour obtenir :

$$(30) \quad P_n = \frac{(n-1)(n-2) I_n \pi_n}{\sum_n (n-1)(n-2) I_n \pi_n} = \frac{(n-1) I_n \pi'_n}{\sum_n (n-1) I_n \pi'_n}$$

Les rapports isopérimétriques I_n interviennent ici de manière irréductible, et l'on ne passe pas aussi simplement de la loi en nombre à la loi en surface que des π_n aux π'_n .

Notons toutefois la relation simple suivante entre les moyennes en surface et en périmètre :

$$(31) \quad \sum_n n P_n = 2 \sum_n n \pi'_n - 4 = \sum_n (n-2)^2 \pi_n$$

Ainsi l'espérance en surface du périmètre est égale à l'espérance du carré de l'espérance conditionnelle $[E(2\mathcal{L}|n)]^2$ comptée en nombre.

La dernière relation se déduit de la première, compte tenu de (29) et de (28) - Démontrons la première relation : Soit O un point d'une droite poissonnienne (point de vue de la loi exprimée en périmètre) N_1, N_2 les nombres d'arêtes des 2 polygones adjacents à l'arête contenant O (cette dernière figurant à la fois dans N_1 et N_2). On a :

$$E(N_1 + N_2) = 2 \sum_n n \pi'_n$$

D'autre part, si l'on supprime la droite passant par O, O

redevient un point quelconque, et le nombre N des côtés du polygone qui le contient admet l'espérance :

$$E(N) = \sum_n n P_n$$

Mais il est clair que l'on a $N = N_1 + N_2 - 4$, d'où (31) - La relation (31) présente l'intérêt de ne pas faire intervenir explicitement les rapports isopérimétriques I_n .

Calcul des premiers moments du nombre des côtés.

Mais nous savons calculer $\sum n P_n$. En effet, d'après 1 -, l'espérance en surface du périmètre est :

$$\mathcal{M}(2\mathcal{L}) = \frac{1}{\lambda} \sum n P_n$$

D'autre part, on a aussi la relation habituelle entre périmètre et diamètre ($2\mathcal{L} = \pi D_0$), qui donne ici :

$$\mathcal{M}(2\mathcal{L}) = -\pi E[g'(0)]$$

Il suffit de se reporter à (15), et de remarquer que la fonction $x^2 K_2(x)$ a une dérivée nulle en $x = 0$, pour trouver

$$-E[g'(0)] = \lambda E[g(0)] = \lambda \mathcal{M}(S) = \frac{\pi}{2\lambda}$$

et par suite $\mathcal{M}(2\mathcal{L}) = \frac{\pi^2}{2\lambda}$, soit

$$(31') \quad \sum n P_n = \frac{\pi^2}{2}$$

On en déduit aussitôt, à l'aide de (31) et (28) :

$$(31'') \quad \sum n \pi'_n = \frac{\pi^2}{4} + 2$$

et :

$$\sum n^2 \pi_n = 12 + \frac{\pi^2}{2}$$

Ainsi, l'espérance et la variance (en nombre) du nombre des côtés n d'un polygone poissonien sont :

$$(31''') \quad \begin{cases} E(n) = \sum n \pi_n = 4 \\ D^2(n) = \frac{\pi^2}{2} - 4 \end{cases}$$

On notera que cette variance est relativement faible (de l'ordre de l'unité), notablement plus faible, compte tenu de la valeur moyenne $E(n) = 4$, que, par exemple, pour une loi de Poisson.

Relation entre les lois de n et de $2\mathcal{L}$.

Il suffirait de connaître la loi à priori (en nombre ou en surface) du périmètre $X = 2\mathcal{L}$ pour en déduire la loi correspondante π_n ou P_n . En nombre, en effet, cette loi admet la densité et la transformée de Laplace :

$$(32) \quad \begin{cases} f(x) = \sum_n \pi_n \lambda^{n-2} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} e^{-\lambda x} \\ \Phi(\mu) = \sum_n \pi_n \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n-2} \end{cases}$$

Si Γ désigne la fonction génératrice des Π_n , on a donc :

$$\Phi(\mu) = \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

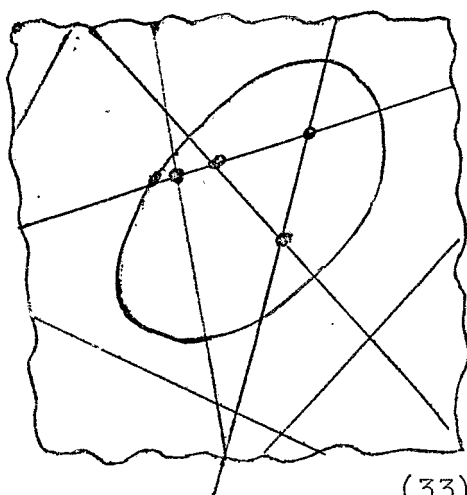
De même, si $g(x)$ est la densité en surface de $X = 2\mathcal{L}$, $\Psi(\mu)$ sa transformée de Laplace et G la fonction génératrice des P_n , on aura :

$$(32') \quad \begin{cases} g(x) = \sum P_n \lambda^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \\ \Psi(\mu) = \sum P_n \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n = G\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) \end{cases}$$

de sorte que la connaissance des P_n entraîne celle de $g(x)$ et réciproquement.

13 - La loi du Nombre des Quartiers.

Soit B un ensemble convexe, d le nombre des droites



poissonniennes qui coupent B , n le nombre des sommets du réseau qui tombent dans B , N enfin le nombre des quartiers selon lesquels ces droites partagent B .

Notons, en premier lieu, la relation eulérienne :

$$N = 1 + n + d$$

qui se démontre immédiatement par récurrence. On voit que l'on déduira la loi de N de la loi simultanée de n et d . On sait déjà que d est une variable de Poisson de paramètre $2\lambda\mathcal{L}$. Désignons par $P_{n,d}$ la probabilité conditionnelle d'avoir n sommets dans B sachant que d droites rencontrent B , et par Φ_d la fonction génératrice correspondante :

$$\Phi_d(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,d} s^n$$

On note que les $P_{n,d}$ et les Φ_d ne dépendent pas de la densité linéaire λ du schéma. Au contraire, les probabilités à priori $P_n = P_n(\lambda)$ d'avoir n sommets, et leur fonction génératrice $H(s) = H(s;\lambda)$ vont dépendre de λ . Elles sont données par :

$$(34) \quad \begin{cases} P_n(\lambda) = \sum_d \frac{(2\lambda\mathcal{L})^d}{d!} e^{-2\lambda\mathcal{L}} P_{n,d} \\ H(s,\lambda) = \sum_d \frac{(2\lambda\mathcal{L})^d}{d!} e^{-2\lambda\mathcal{L}} \Phi_d(s) \end{cases}$$

De même, la probabilité pour que B rencontre d droites et contienne n sommets, est :

$$\pi_{n,d} = \frac{(2\lambda\mathcal{L})^d}{d!} e^{-2\lambda\mathcal{L}} P_{n,d}$$

Elle admet la fonction génératrice à deux variables :

$$G(s,t) = \sum_{n,d} \pi_{n,d} s^n t^d = \sum_d \frac{(2\lambda\mathcal{L}t)^d}{d!} e^{-2\lambda\mathcal{L}} \Phi_d(s)$$

En comparant à (34), on voit - au facteur $e^{-2\lambda\mathcal{L}}$ près - que $G(s,t)$ se déduit de $H(s;\lambda)$ en remplaçant λ par λt , soit explicitement :

$$(35) \quad G(s,t) = e^{-2\lambda\mathcal{L}(1-t)} H(s;\lambda t)$$

D'après (33), enfin, la fonction génératrice $Q(s)$ de la loi du nombre N des quartiers est $s G(s,s)$, soit :

$$(36) \quad Q(s) = s e^{-2\lambda\mathcal{L}(1-s)} H(s;\lambda s)$$

Il suffirait donc de connaître la loi $H(s)$ du nombre des sommets pour en déduire la loi simultanée $G(s,t)$ des nombres n et d de sommets et de droite, ainsi que la loi $Q(s)$ du nombre N des quartiers. Mais on ne connaît pas l'expression explicite de $H(s)$.

Interprétation de $Q(s)$ - Construisons un milieu à deux composantes en tirant au sort, indépendamment les uns des autres, l'appartenance des polygones du schéma aux "grains" (probabilité p) ou aux "pores" (probabilité $q = 1-p$). On note que grains et pores interviennent de manière symétrique, et induisent sur toute droite du plan un Markov à deux états.

Soit Q_N la probabilité pour que l'ensemble B soit découpé en N quartiers. La probabilité $Q(B)$ pour que B soit contenu dans les pores de ce milieu à deux composantes est alors :

$$Q(B) = \sum_N Q_N q^N = Q(q)$$

A l'aide de (39), et en remplaçant λ par λs , on trouve :

$$H(s, \lambda s) = 1 - (1-s) \pi \lambda^2 s^2 S + \frac{(1-s)^2}{2} [4 \lambda^3 s^3 < K, \frac{1}{r} > + \lambda^4 s^4 \pi^2 S^2]$$

On doit ensuite multiplier par $e^{-2\lambda \mathcal{L}(1-s)}$ et dériver en s avant de faire $s = 0$. Ceci donne :

$$\begin{aligned} (40) \quad E(N-1) &= 2 \lambda \mathcal{L} + \pi \lambda^2 S \\ D^2(N) &= 2 \lambda \mathcal{L} + 5 \pi \lambda^2 S + 4 \lambda^3 < K, \frac{1}{r} > \end{aligned}$$

On voit que le terme $2 \pi \lambda^2 S$ représente la covariance des nombres n et d de sommets et de droites. L'inégalité de Schwarz entraîne une inégalité de type isopérimétrique qui s'écrit :

$$4 \pi^2 \lambda^4 S^2 \leq 2 \lambda \mathcal{L} [\pi \lambda^2 S + 4 \lambda^3 < K, \frac{1}{r} >]$$

ce qui entraîne, (pour λ grand) :

$$(41) \quad S^2 \leq \frac{2 \mathcal{L}}{\pi^2} < K, \frac{1}{r} >$$

Exemple du cercle de rayon R . Pour le cercle de rayon R , le covariogramme K se met sous la forme :

$$K(r) = \int_r^{2R} \sqrt{4 R^2 - \rho^2} \, d\rho \quad (r \leq 2R)$$

d'où :

$$< K, \frac{1}{r} > = 2 \pi \int_0^{2R} d r \int_r^{2R} \sqrt{4 R^2 - \rho^2} \, d\rho = \frac{16}{3} \pi R^3$$

On a ici :

$$E(N) = 1 + 2 \pi \lambda R + \pi^2 \lambda^2 R^2$$

$$D^2(N) = 2 \pi \lambda R + 5 \pi^2 \lambda^2 R^2 + \frac{64}{3} \pi \lambda^3 R^3$$

La variance est en R^3 , et la variance relative $\frac{1}{S^2} D^2(N)$ décroît comme $\frac{1}{R}$, c'est-à-dire assez lentement.

14 - Loi de la Taille des Quartiers.

Nous nous plaçons cette fois dans l'espace à n dimensions, et nous désignons par $\lambda = \lambda_2$ la densité linéaire du schéma induit dans $\mathbb{R}^2$. Soit B un ensemble convexe, $K(h)$ son covariogramme géométrique, N le nombre aléatoire des quartiers de B , $V_1, \dots, V_N$ leurs volumes. On a, évidemment,

$$V_1 + \dots + V_N = V = K(o)$$

Ainsi l'espérance en nombre de l'un, quelconque, V_i , des quartiers est :

$$E(V_i) = V E\left(\frac{1}{N}\right)$$

(et non pas $V/E(N)$), de sorte qu'en général on ne saura pas calculer cette espérance en nombre. Par contre, il est possible de déterminer les deux premiers moments de la granulométrie en volume des quartiers. Désignons par

$$P(x, x+h) = e^{-\lambda|h| - \lambda|x| - \lambda|x+h|}$$

la probabilité pour que x et $x+h$ appartiennent au même polyèdre du schéma que l'origine O . Soit $\xi \in B$ et $g_\xi(h)$ le covariogramme géométrique du quartier de B contenant ξ . On a :

$$E[g_\xi(h)] = \int P(x-\xi, x+h-\xi) k(x) k(x+h) dx$$

($k(x)$, indicatrice de B). Pour ξ quelconque dans B , l'espérance du covariogramme $g(h)$ d'un quartier de B (chaque quartier étant compté pour un poids proportionnel à son volume) est alors :

$$E[g(h)] = \frac{1}{V} \iint P(x-\xi, x+h-\xi) k(\xi) k(x) k(x+h) dx d\xi$$

ou, avec $x = \xi + \eta$

$$E[g(h)] = \frac{1}{V} \iint P(\eta, \eta+h) k(\xi) k(\xi+\eta) k(\xi+\eta+h) d\xi d\eta$$

Introduisons donc le "covariogramme" d'ordre 3 de B :

$$K_3(\eta, \eta+h) = \int k(\xi) k(\xi+\eta) k(\xi+\eta+h) d\xi$$

(avec $K_3(\eta, \eta) = K(\eta)$). Il vient :

$$(42) \quad E[g(h)] = \frac{1}{V} \int P(\eta, \eta+h) K_3(\eta, \eta+h) d\eta$$

Pour $h = 0$, on obtient l'espérance (en volume) du volume d'un quartier :

$$\mathcal{M}(V_i) = E[g(0)] = \frac{1}{V} \int P(\eta, \eta) K(\eta) d\eta$$

On a d'ailleurs $P(\eta, \eta) = e^{-2\lambda|\eta|}$, d'où :

$$(43) \quad \mathcal{M}(V_i) = \frac{1}{V} \langle e^{-2\lambda|h|}, K(h) \rangle$$

Exemple - A trois dimensions, et si B est une sphère, on a

$$K(h) = \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi R^2 h + \frac{\pi}{12} h^3$$

et

$$\frac{1}{V} \langle e^{-2\lambda|h|}, K(h) \rangle = 4\pi \int_0^{2R} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{r}{R} + \frac{1}{16} \frac{r^3}{R^3}\right) r^2 e^{-2\lambda r} dr$$

Cette intégrale se calcule à partir de :

$$\int_0^{2R} r^n e^{-2\lambda r} dr = \frac{n!}{(2\lambda)^{n+1}} \left[1 - e^{-4\lambda R} \left(1 + \frac{(4\lambda R)}{1!} + \dots + \frac{(4\lambda R)^n}{n!} \right) \right]$$

et donne $\mathcal{M}(V)$ sous la forme d'une exponentielle polynome.

Le moment d'ordre 2, de son côté, sera :

$$\mathcal{M}(V_i) = \int E[g(h)] dh = \frac{1}{V} \iint P(\eta, \eta+h) K_3(\eta, \eta+h) d\eta dh$$

On voit apparaître le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$(44) \quad \mathcal{M}(V_i^2) = \frac{1}{V} \langle P(x,y), K_3(x,y) \rangle$$

Le calcul explicite ne semble pas facile, même pour $n = 3$, mais reste toujours possible au moins sous forme numérique. En comparant (43) et (44), on voit apparaître la loi générale selon laquelle on peut calculer tous les moments successifs. Mais, naturellement, les calculs explicites deviennent vite inextricables.

15 - Mesures aléatoires représentant les "densités" des fonctionnelles de Minkowski.

On sait que les fonctionnelles de Minkowski peuvent s'interpréter comme les intégrales, étendues à la frontière d'un ensemble convexe A , des différents invariants du tenseur de courbure. A trois dimensions, par exemple, $\mathcal{A}$ est l'intégrale de la courbure moyenne, et l'intégrale de la courbure totale est $4\pi = 3 W_3(A)$. Lorsqu'il n'y a plus de courbure, ces représentations intégrales restent possibles, à condition de remplacer la densité à intégrer par une mesure décrivant le comportement de la normale. Dans le cas d'un polyèdre, $\mathcal{A}$ est l'intégrale d'une mesure portée par les arêtes (densité linéaire constante sur chaque arête et égale à la moitié de l'angle des normales extérieures aux deux faces adjacentes). De même $4\pi = 3 W_3(A)$ est l'intégrale d'une mesure portée par les sommets, chaque sommet portant un poids égal à l'angle solide du trièdre défini par les normales extérieures.

Ainsi, chacune de ces fonctionnelles admet une représentation locale sous la forme d'une densité, qui est en réalité une mesure portée par les faces, les arêtes, les sommets, etc... De plus W_0 , qui est le volume, correspond manifestement à la mesure de Lebesgue.

Si nous faisons la somme des mesures correspondant à une même fonctionnelle pour les différents polyèdres d'un schéma poissonien, nous obtenons une mesure aléatoire que nous appellerons

densité de cette fonctionnelle. A part W_0 , qui correspond à la mesure de Lebesgue, toutes ces mesures sont concentrées sur les faces, les arêtes, etc...

A deux dimensions, on trouve deux mesures : à W_1 correspond, à un facteur près, la mesure concentrée sur les droites du schéma avec une densité linéaire unité ; à W_2 correspond (à un facteur près) la mesure discrète attribuant le poids 1 à chacun des sommets du réseau (car la somme des rotations de la normale pour les quatre polygones admettant ce sommet est constante et vaut 2π).

A trois dimensions, on trouve trois mesures représentant W_1 , W_2 et W_3 à des facteurs constants près ; mesure concentrée sur les plans du réseau, avec une densité superficielle unité ; mesure concentrée sur les arêtes, avec une densité linéaire unité (la somme des rotations de la normale pour les 4 polyèdres admettant une arête donnée vaut 2π) ; mesure discrète attribuant la masse 1 à chacun des sommets (les huit trièdres définis par les 3 droites normales aux trois plans passant par un sommet totalisent 4π stéradians : c'est encore une manière de démontrer l'égalité des nombres spécifiques des sommets et des polyèdres). Ainsi, à chaque fonctionnelle W_k définie dans $\mathbb{R}^n$ correspond une mesure aléatoire $W_k(dx)$ dont l'espérance est une mesure de densité constante, égale à la grandeur spécifique W_k définie au paragraphe 9.

Dans $\mathbb{R}^2$, nous avons déjà rencontré la mesure-nombre spécifique de sommets. Son espérance est $\pi \lambda^2 dx$, et sa covariance est la

mesure $\pi \lambda^2 \delta + 4 \lambda^3 \frac{1}{r}$ (paragraphe 13).

Considérons la mesure-demi-périmètre spécifique $L(dx)$, obtenue en plaçant une densité linéaire unité sur les droites du schéma. Il s'agit bien du demi-périmètre spécifique, puisque chaque arête est adjacente à deux polygones. Nous allons voir que l'on peut la définir complètement par sa fonctionnelle caractéristique. Il n'y a d'ailleurs pas de raison de se limiter à l'espace $\mathbb{R}^2$: plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$, et étudions la mesure demi-surface spécifique $L(dx)$ obtenue en plaçant une densité (à $n-1$ dimensions) unité sur les hyperplans du réseau.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de base positive (continue, ou mesurable, à support compact), et $C(\varphi)$ la fonctionnelle caractéristique de $L(dx)$:

$$C(\varphi) = E \left[e^{-\int \varphi(x) \mu(dx)} \right] = E(e^{-\langle \mu, \varphi \rangle})$$

On remarque que $\langle \mu, \varphi \rangle$ est la somme des variables indépendantes $\int_{\pi_i} \varphi(x) dx'$ (dx' , élément du $(n-1)$ -volume du plan π_i du réseau), de sorte que l'on peut calculer $\log C(\varphi)$ de la manière suivante :

Soit u un vecteur unité de $\mathbb{R}^n$ (qui décrira la demi-sphère unité S) et E_u son orthogonal (à $n-1$ dimension), et :

$$(44) \quad \Phi_u(r) = \int_{E_u} \varphi(r u + y) dy$$

(dy , élément de $(n-1)$ -volume de E_u , $-\infty < r < +\infty$) la fonction

obtenue en effectuant sur φ la montée d'ordre $n-1$ orthogonalement à u . La probabilité pour qu'un hyperplan du réseau orthogonal à u (à du près) coupe l'axe $O u$ entre r et $r+dr$ est λ_n du dr . Il lui correspond une variable X égale à 0 avec la probabilité $1 - \lambda_n$ du dr et à $\Phi_u(r)$ avec la probabilité λ_n du dr , soit

$$E(e^{-X}) = e^{-\lambda_n \int du \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - e^{-\Phi_u(r)}] dr}$$

et $\langle L, \varphi \rangle$ est la somme de toutes ces variables $X(du, dr)$, qui sont indépendantes. D'où :

$$(45) \quad \log C(\varphi) = - \lambda_n \frac{1}{2} \int_S du \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - e^{-\Phi_u(r)}] dr$$

Ainsi, la fonctionnelle caractéristique s'obtient en exponentiant la montée $\Phi_u(r)$ et en intégrant en r et en u (le coefficient $\frac{1}{2}$ vient de ce que l'intégrale est prise cette fois sur la sphère unité entière et non plus sur la demi-sphère).

De (45), qui caractérise complètement la mesure aléatoire $L(dx)$, nous allons déduire en particulier la mesure espérance et la mesure covariance.

On a en effet :

$$\begin{cases} E(\langle L, \varphi \rangle) = - \frac{d}{da} \log C(a \varphi) \Big|_{a=0} \\ D^2(\langle L, \varphi \rangle) = \frac{d^2}{da^2} \log C(a \varphi) \Big|_{a=0} \end{cases}$$

En ce qui concerne l'espérance, on a tout d'abord, d'après (45) et (44) :

$$\begin{aligned} E(< L, \varphi >) &= \frac{1}{2} \lambda_n \int_S du \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u(r) dr = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_n \int_S du \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{E_u} \varphi(r u + y) dy dr = \frac{n \omega_n \lambda_n}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Par conséquent, l'espérance de la mesure densité de demi-surface spécifique dans $\mathbb{R}^n$ est la mesure de densité constante $\frac{n \omega_n \lambda_n}{2}$:

$$(46) \quad E(L(dx)) = \frac{1}{2} n \omega_n \lambda_n dx$$

(on pouvait prévoir ce résultat d'après (23'), puisque $2 E(L)$ doit avoir pour densité $n v_n W_1$).

Mesure-Covariance de la densité de demi-surface spécifique

Passons maintenant à la variance de $< L, \varphi >$. Il vient :

$$(47) \quad D^2(< L, \varphi >) = \frac{1}{2} \lambda_n \int_{-\infty}^{+\infty} \int_S [\Phi_u(r)]^2 du dr$$

Explicitons le carré de $\Phi_u(r)$, d'après (44)

$$\begin{aligned} [\Phi_u(r)]^2 &= \int_{E_u} \int_{E_u} \varphi(r u + y) \varphi(r u + z) dy dz \\ &= \int_{E_u} \int_{E_u} \varphi(r u + y) \varphi(r u + y + z) dy dz \end{aligned}$$

Intégrons en r , et échangeons les intégrations en r et en y :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_u(r)]^2 dr = \int_{E_u} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dr \int_{E_u} \varphi(r u + y) \varphi(r u + y + z) dy$$

Mais si l'on désigne par $g = \varphi * \check{\varphi}$ le produit de convolution :

$$g(h) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \varphi(x+h) dx$$

on a manifestement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dr \int_{E_u} \varphi(r u + y) \varphi(r u + y + z) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \varphi(x+z) dx = g(z)$$

et par suite :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\Phi_u(r)]^2 dr = \int_{E_u} g(z) dz$$

Portons ce résultat dans (47). Il vient :

$$(47') \quad D^2(< L, \varphi >) = \frac{1}{2} \lambda_n \int_{S_n} du \int_{E_u} g(z) dz$$

Passons en coordonnées polaires (r, v) dans $\mathbb{R}^n$, de sorte que $g(x)$ devient une fonction $g(r, v)$ du rayon vecteur r et de $v \in S_n$ (sphère unité de $\mathbb{R}^n$). L'élément de $(n-1)$ -volume dz est de la forme $dz = r^{n-2} dr d\omega$, $d\omega$ élément de surface de la sphère unité S_u de l'espace E_u à $n-1$ dimensions. On a, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$\int_{S_n} du \int_0^\infty r^{n-2} dr \int_{S_u} g(r, w) dw = \int_{S_{r-1}} dw \int_0^\infty r^{n-2} dr \int_{S_n} g(r, u) du =$$

$$\int_{S_{n-1}} dw \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{r} g(x) dx = (n-1) \omega_{n-1} < \frac{1}{r}, g >$$

2. $\pi. \lambda$

On trouve ainsi, en portant ce résultat dans (47') :

$$D^2(< L, \varphi >) = \frac{n-1}{2} \omega_{n-1} \lambda_n < \frac{1}{r}, g >$$

D'ailleurs, d'après (8), $\omega_{n-1} \lambda_n = \omega_1 \lambda_2 = 2 \lambda_2$, d'où finalement :

$$(48) \quad D^2(< L, \varphi >) = (n-1) \lambda_2 < \frac{1}{r}, g >$$

La relation (48) signifie que la mesure $L(dx)$, densité de demi-surface spécifique dans $\mathbb{R}^n$, admet comme covariance la mesure de densité $(n-1) \lambda_2 \frac{1}{r}$, soit

$$(49) \quad D^2 \mu(dx) = (n-1) \lambda_2 \frac{dx}{r}$$

Exemples - Pour $n = 2$, prenons comme fonction φ l'indicatrice d'un ensemble B , dont le covariogramme géométrique est K : la longueur $L(B)$ des traversées interceptées par B sur les droites du réseau de densité linéaire $\lambda = \lambda_2$ admet l'espérance et la covariance :

$$\begin{cases} E(L(B)) = \pi \lambda S \\ D^2(L(B)) = \lambda < \frac{1}{r}, K > \end{cases}$$

(S, surface de B). On a vu que, si $F(dh)$ désigne la granulométrie des traversées de B selon une direction aléatoire, on a :

$$\langle \frac{1}{r}, K \rangle = 2\mathcal{L} \int_0^\infty h^2 F(dh)$$

Ainsi, la variance des traversées interceptées par B est encore :

$$D^2(L(B)) = 2\lambda \mathcal{L} \int_0^\infty h^2 F(dh)$$

16 - Compléments sur la loi de surface S du polygone poissonien.

Désignons par $F(ds)$ la loi de la surface S des polygones poissoniens (comptée en nombre) et par

$$h(S) = E(2\mathcal{L} \mid S)$$

l'espérance conditionnelle (en nombre) du périmètre à S fixé. Nous allons montrer que chacune des deux fonctions $F(S)$ et $h(S)$ se déduit de l'autre.

a/ D'après l'invariance conditionnelle établie au paragraphe 7, la probabilité (en nombre) pour qu'un polygone poissonien A vérifie $A \cap A_h \neq \emptyset$, c'est-à-dire $K(h) > 0$ ($K(h)$ covariogramme géométrique de A) est $e^{-2\lambda h}$. En effet, les érodés $A \cap A_h$ non vides sont équivalents conditionnellement aux polygones A initiaux. En particulier

$$E(K(h) \mid K(h) \neq 0) = E(K(o)) = \frac{1}{v}$$

Par unité de surface, d'autre part, les érodés occupent la surface $e^{-2\lambda h}$ (car, pour tout point x, $P(x \in A \cap A_h) = e^{-2\lambda h}$). On a donc par unité de surface $v e^{-2\lambda h}$ polygones érodés non vides pour v

polygones initiaux, et la probabilité en nombre pour que l'érodé d'un polygone donné ne soit pas vide est $e^{-2\lambda h}$.

Incidentement, on en déduit la propriété suivante :

La loi (exprimée en nombre) de la traversée maximale d'un polygone admet la même densité $2\lambda e^{-2\lambda h}$ que la loi (comptée en diamètre apparent, ou, ce qui revient au même, en périmètre) d'une traversée quelconque du même polygone.

Pour $n \geq 1$, on a toujours

$$E[(K(h))^n | K(h) \neq 0] = E[(K(o))^n]$$

Mais $e^{-2\lambda h}$ étant la probabilité de $K(h) = 0$, on a aussi :

$$E[(K(h))^n] = e^{-2\lambda h} E[(K(h))^n | K(h) \neq 0]$$

Ainsi, les moments de $K(h)$ et de $K(o)$ vérifient (pour $n \geq 1$) la relation :

$$(51) \quad E[(K(h))^n] = e^{-2\lambda h} E[(K(o))^n]$$

Dérivons (51) en h avant de faire $h = 0$. Il vient :

$$n E[K'(o) (K(o))^{n-1}] = - 2 \lambda E[(K(o))^n]$$

D'autre part, la loi de $S = K(o)$ étant invariante par rotation, on a aussi

$$E[K'(o) (K(o))^{n-1}] = - \frac{1}{\pi} E(2\mathcal{L} S^{n-1})$$

Par suite, on trouve :

$$(52) \quad E(2\mathcal{L} S^{n-1}) = \frac{2 \lambda \pi}{n} E(S^n) \quad (n \geq 1)$$

Désignons par $h(S) = E(2\mathcal{L}|S)$ l'espérance au périmètre conditionnelle en S : la relation (52) s'écrit encore :

$$E[h(S) S^{n-1}] = \frac{2 \lambda \pi}{n} E(S^n)$$

ou, avec une intégration par parties :

$$(53) \quad \int_0^\infty h(S) S^{n-1} F(ds) = 2 \lambda \pi \int_0^\infty S^{n-1} [1-F(S)] ds$$

Il résulte alors de (53) que la loi F admet une densité $f(S)$ vérifiant :

$$(54) \quad f(S) h(S) = 2 \lambda \pi [1-F(S)]$$

Cette équation différentielle s'intègre sous la forme

$$(54') \quad 1 - F(S) = e^{-2\lambda\pi \int_0^S \frac{du}{h(u)}}$$

Ces deux relations (54) et (54') montrent que la loi F et l'espérance conditionnelle $h(S)$ se déduisent effectivement l'une de l'autre : plus précisément, $\frac{2\lambda\pi}{h(S)}$ est la densité conditionnelle de mort associée à la loi F ($\frac{2\lambda\pi}{h(S)} ds$ est la probabilité de $S \in (s, s+ds)$ sachant que $S \geq s$)