J. Serra

N°213

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 112

APPLICATIONS CROISSANTES ET GRANULOMETRIES

Par

G. MATHERON

Novembre 1970

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 112

APPLICATIONS CROISSANTES ET GRANULOMETRIES

Table des Matières

Table des Matières (Suite)

Table des Matières (Suite et Fin)

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 112

APPLICATIONS CROISSANTES ET GRANULOMETRIES

Introduction

L'un des objectifs de cette Note est de donner une caractérisation complète de la notion la plus générale de granulométrie. On verra, en particulier, que dans l'espace euclidien cette notion n'est pas liée à celle de convexité - encore que les granulométries les plus faciles à construire soient effectivement les granulométries définies par des familles d'ensembles convexes. On notera aussi la possibilité peut-être intéressante pour les applications, de construire des "filtres morphologiques" permettant de distinguer et de traiter séparément des ensembles appartenant à des types morphologiques suffisamment distincts (par exemple, des cercles et des rectangles, etc...). Avant d'aborder la notion de granulométrie, nous devrons établir un certain nombre de résultats relatifs à des applications plus générales. Certains de ces résultats sont de nature purement algébrique; d'autres, les plus intéressantes en général, font intervenir des propriétés topologiques. Par exemple, si E désigne un espace LCD, parmi les applications de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, on s'intéressera surtout à celles qui laissent stables les espaces $\mathcal{G}(E)$, $\mathcal{F}(E)$ et (ou) $\mathcal{K}(E)$ et possèdent telles ou telles propriétés de semi-continuité pour les topologies respectives de ces différents espaces.

Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{a}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, pouvant coïncider avec $\mathcal{P}(E)$ lui-même, et ϕ une application de $\mathcal{a}$ dans $\mathcal{P}(E)$.

On dira que ϕ est croissante si $A, B \in \mathcal{a}$ et $A \subset B$ entraine $\phi(A) \subset \phi(B)$. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des applications croissantes, et - sauf mention explicite du contraire - le mot application signifiera toujours application croissante.

On dira que ϕ est isotone (anti-isotone) si $A \subset \phi(A)$ $(A \supset \phi(A))$ pour tout $A \in \mathcal{a}$; que ϕ est idempotente si $\phi(A) \subset \mathcal{a}$ et $\phi = \phi \circ \phi$. On appellera fermeture (ouverture) au sens algébrique une application ϕ croissante, isotone (anti-isotone) et idempotente. La notion de granulométrie sera rattachée à celle d'ouverture algébrique.

Soit $\mathcal{A}^c = \{A : A^c \in \mathcal{A}\}$ la famille des complémentaires des ensembles de $\mathcal{A}$. L'application $\psi^* : \mathcal{A}^c \to \mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\psi^*(A) = \complement \psi\, (A^c) \qquad\qquad (A \in \mathcal{A}^c)$$

soit, en abrégé, $\psi^* = \complement \psi \complement$ est appelée <u>duale</u> de l'application ψ. Elle est croissante si et seulement si ψ est croissante. On a évidemment :

$$\psi^{**} = \psi$$

En particulier, ψ est une ouverture si et seulement si ψ^* est une fermeture.

1 - PROLONGEMENTS D'UNE APPLICATION

Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$, une application ψ' de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{P}(E)$ prolonge une application ψ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E)$ si $\psi'(A) = \psi(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Etant entendu qu'il s'agit toujours d'applications croissantes, toute application $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E)$ admet <u>un plus petit prolongement</u> $\underset{\sim}{\psi}$ et un <u>plus grand prolongement</u> $\tilde{\psi}$ définis (sur $\mathcal{P}(E)$ entier, ou sur toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(E)$ contenant $\mathcal{A}$) respectivement par :

$$(1\text{-}1) \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{\psi}(B) = \bigcup\limits_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ A \subset B}} \psi(A) \\[2em] \tilde{\psi}(B) = \bigcap\limits_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ A \supset B}} \psi(A) \end{cases}$$

Il est clair, en effet, que $\underset{\sim}{\psi}$ et $\tilde{\psi}$ prolongent ψ, et que tout prolongement ψ' de ψ vérifie $\underset{\sim}{\psi} \subset \psi' \subset \tilde{\psi}$. Des formules (1-1) de définition, on déduit aussitôt les relations de <u>dualité</u>.

$$(1\text{-}2) \qquad (\underset{\sim}{\psi})^* = \widetilde{(\psi^*)}\ , \quad (\tilde{\psi})^* = \underset{\sim}{(\psi^*)}$$

Soit ψ une <u>ouverture</u> algébrique définie sur $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. <u>$\underset{\sim}{\psi}$ est alors une ouverture</u> sur $\mathcal{P}(E)$. En effet, $\underset{\sim}{\psi}$ est croissante et anti-isotone, comme on le vérifie sans peine. Il reste à montrer que $\underset{\sim}{\psi}$ est idempotente. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. On a :

$$\underset{\sim}{\psi}\,\underset{\sim}{\psi}\,(B) = \underset{\sim}{\psi}\,\Big(\bigcup_{A \subset B} \psi\,(A)\Big) \supset \bigcup_{A \subset B} \underset{\sim}{\psi}\,\psi\,(A) = \bigcup_{A \subset B} \psi(A) = \underset{\sim}{\psi}(B)$$

(l'inclusion résulte du fait que $\underset{\sim}{\psi}$ est croissante ; l'égalité qui suit résulte de $\psi(A) \in \mathcal{A}$, ψ étant une ouverture sur $\mathcal{A}$, et du fait que $\underset{\sim}{\psi}$ prolonge l'application idempotente ψ). Comme $\underset{\sim}{\psi}$ est anti-isotone, on a aussi l'inclusion inverse, et $\underset{\sim}{\psi}$ est une ouverture sur $\mathcal{P}(E)$.

Désignons par $\mathcal{B}$ la famille des ensembles de $\mathcal{A}$ <u>invariants</u> par l'ouverture ψ. La restriction de ψ à $\mathcal{B}$ est l'application identique de $\mathcal{B}$, que nous noterons $I_{\mathcal{B}}$. ψ est alors le plus petit prolongement de $I_{\mathcal{B}}$ sur $\mathcal{A}$, ou - ce qui revient au même, on a :

(1-3) $$\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}$$

En effet, si $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$ entraine $B = \psi(B) \subset \psi(A)$, et $\psi(A) \supset \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \mathcal{B}}} B$. Mais $\psi(A) \in \mathcal{B}$, puisque ψ est idempotente, et $\psi(A) \subset A$; par anti-isotonie, d'où l'inclusion inverse et l'égalité. ψ est donc le plus petit prolongement à $\mathcal{A}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$. Il en résulte aussitôt pour $D \in \mathcal{P}(E)$:

$$\underset{\sim}{\psi}(D) = \bigcup_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ A \subset D}} \psi(A) = \bigcup_{\substack{B \subset D \\ B \in \mathcal{B}}} B$$

et $\underset{\sim}{\psi}$ prolonge à $\mathcal{P}(E)$ l'identité sur $\mathcal{B}$. Il est clair alors que la famille $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ des invariants de $\underset{\sim}{\psi}$ est la famille stable pour la réunion infinie engendrée par $\mathcal{B}$, avec adjonction de $\emptyset$ si $\emptyset$ n'appartenait pas déjà à $\mathcal{B}$. (En effet, si $\emptyset \in \mathcal{B}, \underset{\sim}{\psi}(\emptyset)$, réunion de la famille vide, est égale à $\emptyset$. Si $\emptyset \in \mathcal{A}$, on a $\psi(\emptyset) \subset \emptyset$, donc $\psi(\emptyset) = \emptyset$, et $\emptyset \in \mathcal{B}$).

Inversement, soit $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}(E)$ une famille quelconque, non nécessairement stable pour U, et $\mathcal{B}$ la famille stable pour la réunion infinie engendrée par $\mathcal{B}_0$ (avec adjonction éventuelle de $\emptyset$). Le plus petit prolongement à $\mathcal{P}$ (E) de l'identité sur $\mathcal{B}_0$ est alors une ouverture ψ, et l'on a :

(1-4) $$\psi = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}_0} = \underset{\sim}{I}_{\mathcal{B}}$$

Autrement dit, la famille des invariants de ψ est $\mathcal{B}$.

Par dualité, on obtient des résultats analogues pour une fermeture. Résumons :

<u>Prop. 1-1</u> / Le plus petit (plus grand) prolongement d'une ouverture (fermeture) ψ définie sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une ouverture (une fermeture) sur $\mathcal{P}(E)$. Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ désigne la famille des ensembles invariants par ψ, ψ est le plus petit (plus grand) prolongement sur $\mathcal{A}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$. Plus généralement, si $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ ($\widetilde{\mathcal{B}}$) est la famille stable pour la réunion (intersection) infinie engendrée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ un système de générateurs de $\underset{\sim}{\mathcal{B}}$ ($\widetilde{\mathcal{B}}$) relativement à la réunion (l'intersection), ψ et ψ ($\widetilde{\psi}$) sont les plus petits (plus grands) prolongements à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}(E)$ respectivement de l'identité sur $\mathcal{B}_0$.

<u>Remarque</u> - Si ψ est une ouverture sur $\mathcal{P}$ (E), sa restriction à une partie quelconque $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ n'est une ouverture sur $\mathcal{A}$ que si $A \in \mathcal{A}$ entraine $\psi(A) \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire si $\mathcal{A}$ est <u>stable</u> pour ψ.

Par exemple, soit E un espace LCD et ψ une ouverture sur $\mathcal{P}(E)$. Désignons par ψ_f et ψ_g les restrictions de ψ à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{G}$ respectivement et par $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$ la famille des invariants de ψ.

ψ_f est une ouverture si $\psi(F) \in \mathcal{F}$ pour tout fermé F. Il en est ainsi si et seulement si $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \overline{B} \in \mathcal{B}$ (si la famille des invariants de ψ est stable pour la fermeture topologique). La condition est nécessaire, car $B \in \mathcal{B}$ entraîne $B = \psi(B) \subset \overline{B}$, d'où $B \subset \psi(\overline{B})$, et aussi $\overline{B} \subset \psi(\overline{B})$ si $\psi(\overline{B}) \in \mathcal{F}$, d'où l'égalité et $\overline{B} \in \mathcal{B}$. Elle est suffisante, car pour $F \in \mathcal{F}$, $\psi(F) \subset F$ entraine $\psi(F) \subset \overline{\psi(F)} \subset F$; comme $\psi(F) \in \mathcal{B}$, la condition donne $\overline{\psi(F)} \in \mathcal{B}$, et $\overline{\psi(F)} \subset \psi(F)$ résulte de $\overline{\psi(A)} \subset F$).

ψ_g est une ouverture si $\psi_g(G) \in \mathcal{G}$ pour tout ouvert G. Il en est ainsi si et seulement si $\mathcal{B}$ contient un système fondamental de voisinages de chacun de ses éléments, autrement dit si, pour tout $B \in \mathcal{B}$ et tout ouvert G contenant B, on peut trouver $B_o \in \mathcal{B}$ et $G_o \in \mathcal{G}$ avec :

$$(1\text{-}5) \qquad B \subset G_o \subset B_o \subset G$$

Montrons que la condition est nécessaire. Soit $G \in \mathcal{G}$ et $\psi_g(G)$ ouvert. Tout $x \in \psi_g(G)$ admet un voisinage ouvert $G_x \subset \psi_g(G)$, autrement dit, $\forall\, y \in G_x\ \exists\ B_y \in \mathcal{B}$ avec $y \in B_y \subset G$. Si l'on pose $B'_x = \bigcup_{y \in G_x} B_y$, on a $B'_x \in \mathcal{B}$ (puisque $\mathcal{B}$ est stable pour $\cup$) et

$$G_x \subset B'_x \subset G$$

Soit alors $B \in \mathcal{B}$ et $B \subset G$. Il suffit de poser $G_o = \bigcup_{x \in B} G_x$, $B_o = \bigcup_{x \in B} B'_x$ pour avoir $G_o \in \mathcal{G}$, $B_o \in \mathcal{B}$ et

$B \subset G_o \subset B_o \subset G$ -

La condition est évidemment suffisante, car $x \in \psi_g(G)$ entraine $\exists\, B \in \mathcal{B}$ avec $x \in B \subset \psi_g(G)$, et, si (1-5) est vérifié, on a $x \in G_o \subset \psi_g(G)$ donc $\psi_g(G)$ est ouvert.

Lorsque (1-5) est vérifiée, on a $\psi_g(G) \in \mathcal{B} \cap \mathcal{G}$ et $\psi_g(G) \supset B_o$, et on peut donc remplacer G_o et B_o par l'unique élément $\psi_g(G)$. Ainsi (1-5) équivaut à : $\forall\, B \in \mathcal{B}$ et $G \in \mathcal{G}$, $B \subset G \Rightarrow \exists\, B_o \in \mathcal{B} \cap \mathcal{G}, B \subset B_o \subset G$ c'est-à-dire à : $\mathcal{B}$ contient un système fondamental de voisinages ouverts de chacun de ses éléments.

Par dualité, on obtient des énoncés relatifs aux fermetures.

Prop. 1-2 / Soit ψ une ouverture sur un espace LCD E, ψ_f et ψ_g ses restrictions à $\mathcal{F}$ et à $\mathcal{G}$ respectivement. ψ_f est une ouverture si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants est stable pour la fermeture topologique. ψ_g est une ouverture si et seulement si $\mathcal{B}$ contient un système fondamental de voisinage ouverts de chaque $B \in \mathcal{B}$.

De même, soit ψ une fermeture sur E, et $\mathcal{B}$ la famille de ses invariants. ψ_g est une fermeture si et seulement si $\mathcal{B}$ est stable pour l'ouverture topologique, ψ_f est une fermeture si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$ et tout fermé $F \subset B$ on peut trouver $B' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}$ avec $F \subset B' \subset B$.

Revenons maintenant au cas général. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de parties d'un ensemble E donné, et ψ une application croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E)$. On peut définir successivement : $\underset{\sim}{\psi}$, plus petit prolongement de ψ sur $\mathcal{P}(E)$; ψ_b restriction de $\underset{\sim}{\psi}$ à $\mathcal{B}$; $\tilde{\psi}_b$, plus grand prolongement de ψ_b sur $\mathcal{P}(E)$, et enfin ψ_a, restriction de $\tilde{\psi}_b$ à $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ n'est pas

pas supposé contenu dans $\mathcal{B}$, on n'a pas en général $\phi_a = \phi$ - Toutefois, $\tilde{\phi}_b$, plus grand prolongement de ϕ_b, majore $\underset{\sim}{\phi}$ (qui est lui-même un prolongement de ϕ_b), et par suite $\phi_a \supset \phi$. Cherchons à quelle condition on a l'inclusion inverse, et par suite l'égalité $\phi = \phi_a$. D'après les définitions, on a (pour $A \in \mathcal{A}$)

$$\phi_a(A) = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \subset \mathcal{B}}} \phi_b(B) = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \in \mathcal{B}}} \bigcup_{\substack{A' \subset B \\ A' \in \mathcal{A}}} \phi(A')$$

On aura $\phi_a(A) \subset \phi(A)$ si et seulement si l'implication :

$$\forall B \in \mathcal{B} \text{ , } B \supset A \text{ et } x \in \phi_b(B) \Rightarrow x \in \phi(A)$$

est vérifiée. Cette implication équivaut à :

$$x \notin \phi(A) \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B},\ B \supset A,\ x \notin \phi_b\ (B)$$

soit explicitement :

$$x \notin \phi(A) \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B},\ B \supset A \quad \forall A' \in \mathcal{A},\ A' \subset B : x \notin \phi(A')$$

Autrement dit, en désignant par S^B la famille des ensembles contenus dans B :

$$S^B = \{H,\ H \subset E,\ H \subset B\}$$

on a $\phi_a = \phi$ si et seulement si pour tout $x \notin \phi(A)$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \in S^B$ et $x \notin \phi(A')$ pour tout $A' \in S^B \cap \mathcal{A}$. Enonçons :

<u>Proposition 1-3</u> - Avec les notations définies ci-dessus, on a $\phi = \phi_a$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x \notin \phi(A)$ on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$, et que $A' \subset B$ entraine $x \notin \phi(A')$ pour tout $A' \in \mathcal{A}$.

Par dualité, on obtiendra les résultats suivants. Si ϕ est défini sur $\mathcal{A}$, on forme $\tilde{\phi}$, puis ϕ_b restriction de $\tilde{\phi}$ à $\mathcal{B}$, puis $\underset{\sim}{\phi_b}$

et enfin ϕ_a restriction de $\tilde{\phi}_b$ à $\mathcal{A}$. On a cette fois $\phi_a \subset \phi$, et l'égalité $\phi_a = \phi$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $x \in \phi(A)$ on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ avec $B \subset A$ et $x \in \phi(A')$ pour tout $A' \in \mathcal{A}$ tel que $A' \supset B$.

L'application la plus intéressante de cette proposition correspond au cas où E est un espace LCD, et $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)$, $\mathcal{B} = \mathcal{G}(E)$. Si ϕ est une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{P}(E)$, on posera :

$$\phi_g(G) = \bigcup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset G}} \phi(K) \qquad \text{pour } G \in \mathcal{G}$$

$$\phi_k(K) = \bigcap_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ G \supset K}} \phi_g(G) \qquad \text{pour } K \in \mathcal{K}$$

On aura $\phi_k = \phi$ si et seulement si pour tout compact K et tout $x \notin \phi(K)$ on peut trouver un ouvert $G \supset K$ avec $x \notin \phi(K')$ pour tout compact $K' \subset G$. En particulier, cette condition est remplie lorsque ϕ est <u>une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (ou dans $\mathcal{K}$)</u>.

En sens inverse, si ϕ' est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}(E)$, on pose :

$$\phi'_k(K) = \bigcap_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ G \subset K}} \phi'(G) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

$$\phi'_g(G) = \bigcup_{\substack{K \in \mathcal{K} \\ K \subset G}} \phi'_k(K) \qquad (G \subset \mathcal{G})$$

et on a $\phi'_g = \phi'$ si et seulement si pour tout ouvert G et tout $x \in \phi'(G)$ on peut trouver un compact $K \subset G$ tel que $x \in \phi'(G')$ pour tout ouvert $G' \supset K$. Cette condition est remplie en particulier si ϕ' <u>est une application s c i de $\mathcal{G}$ dans lui-même</u>.

Toutefois, ces prolongements ne sont vraiment intéressants que si ψ_g est une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, et, de même, ψ'_k une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ ou dans $\mathcal{K}$. Donnons les conditions nécessaires et suffisantes.

<u>Proposition 1-4</u> - Avec les notations précédentes, ψ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si pour tous compacts K et K' et tout ouvert G vérifiant $K \subset G \subset K'$ on peut trouver un ouvert G_o tel que :

$$\psi(K) \subset G_o \subset \psi(K') \tag{1-6}$$

De même, ψ'_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (resp dans $\mathcal{K}$) si et seulement si pour tout compact K et tous ouverts G et G' tels que $G \subset K \subset G'$ on peut trouver un fermé F_o (resp. un compact K_o) vérifiant :

$$\psi'(G) \subset F_o \subset \psi'(G') \tag{1-7}$$

$$\left(\text{resp. } \psi'(G) \subset K_o \subset \psi'(G')\right) \tag{1-7'}$$

Démontrons la proposition pour ψ_g. Il est clair que (1-6) est nécessaire, puisqu'il suffit de prendre $G_o = \psi_g(G_o)$. Inversement, supposons (1-6) vérifiée, et soit G un ouvert. On peut trouver une suite B_n d'ouverts relativement compacts tels que $B_n \subset \overline{B}_n \subset B_{n+1} \subset \dots$ et $\bigcup_{n>o} B_n = \bigcup \overline{B}_n = G$ (car E est LCD). Comme tout compact $K \subset G$ est contenu dans un B_n, on a aussi

$$\psi_g(G) = \bigcup_{n>o} \psi(\overline{B}_n)$$

Si $x \in \phi_g(G)$, on peut donc trouver $\overline{B}_n$ avec $x \in \phi(\overline{B}_n)$. Mais on a $\overline{B}_n \subset B_{n+1} \subset \overline{B}_{n+1}$. Donc, d'après la condition (1-6), on peut trouver $G_o \in \mathcal{G}$ avec $x \in \phi(\overline{B}_n) \subset G_o \subset \phi(\overline{B}_{n+1}) \subset \phi_g(G)$. Par suite, $\phi_g(G)$ est ouvert.

Démontrons la proposition pour ϕ'_k. (1-7) est nécessaire, comme on le voit en prenant F_o ou $K_o = \phi'_k(K)$. Inversement, supposons (1-7) vérifiée. Soit K un compact, et B_n un système fondamental de voisinages ouverts relativement compacts de K tels que $\overline{B}_n \supset B_n \supset \overline{B}_{n+1} \supset \ldots \supset K$. Tout G ouvert contenant K contient un B_n, et par suite

$$\phi'_k(K) = \bigcap_n \phi'(B_n)$$

Mais la condition (1-7) appliquée à $B_n \supset \overline{B}_{n+1} \supset B_{n+1}$ montre qu'il existe des fermés F_n (resp. des compacts F_n) tels que $\phi(B_n) \supset F_n \supset \phi(B_{n+1})$. Donc on a aussi $\phi'_k(K) = \bigcap F_n$, et $\phi'_k(K)$ est fermé (resp. compact).

<u>Corollaire 1</u> - Si ϕ applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (resp. dans $\mathcal{K}$) et vérifie la condition (1-6), ϕ_g est une application s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et ϕ_k une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$). De même, lorsque (1-7) (resp. (1-7')) est vérifiée, ϕ'_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$), et ϕ'_g une application s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Plus précisément, ϕ_k est la plus petite majorante s c s de ϕ, et ϕ'_g la plus grande minorante s c i de ϕ'.

Raisonnons, par exemple, sur l'application ϕ. Si ϕ applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (resp. dans $\mathcal{K}$) et vérifie (1-6), ϕ_g vérifie (1-7) (resp. (1-7')), et par suite ϕ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$). En effet, pour $G \subset K \subset G'$, G, G' ouverts, K compact~~s~~, on trouve $\phi_g(G) \subset \phi(K) \subset \phi_g(G')$, c'est-à-dire (1-7) ou (1-7') selon que $\phi(K)$ est fermé ou compact.

Montrons que ϕ_g est s c i. Soient $G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$ avec $K \subset \phi_g(G)$. Prenons une suite B_n d'ouverts relativement compacts vérifiant $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$ et $\bigcup B_n = G$, d'où $\phi_g(G) = \bigcup_n \phi_g(B_n)$. Le compact K est contenu dans l'un des $\phi_g(B_n)$, soit $K \subset \phi_g(B_{n_0})$. Pour tout ouvert $G' \supset \overline{B}_{n_0}$, on a alors $\phi_g(G') \supset \phi(\overline{B}_{n_0}) \supset \phi_g(B_{n_0}) \supset K$. Donc ϕ_g est bien s c i.

Montrons que ϕ_k est s c s. Lorsque ϕ applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, donc aussi ϕ_k, on a vu que ϕ_g vérifie (1-7'). Soit alors $G \in \mathcal{G}$ et $K \in \mathcal{K}$ avec $\phi_k(K) \subset G$. Soient B_n un système fondamental de voisinages ouverts relativement compacts de K tels que $B_n \supset \overline{B}_{n+1} \supset B_{n+1}$, d'où $\phi_k(K) = \cap\, \phi_g(B_n) = \cap\, \phi_k(\overline{B}_n)$. Comme les $\phi_k(\overline{B}_n)$ sont compacts, on a $\phi_k(B_n) \subset \phi_k(\overline{B}_n) \subset G$ pour n assez grand. Pour tout compact $K' \subset B_n$, on a alors $\phi_k(K') \subset G$, ce qui établit la semi-continuité supérieure de ϕ_k lorsque ϕ applique $\mathcal{K}$ dans lui-même.

Si ϕ applique seulement $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, ϕ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ et vérifie (1-7'). Vérifions que ϕ_k est s c s pour la <u>topologie de $\mathcal{F}$</u>. Pour celà, reprenons le raisonnement précédent avec un ouvert $G = K_0^c$ (complémentaire d'un compact K_0, puisque ce sont les V^{K_0} qui engendrent la topologie s c s de $\mathcal{F}$) et un compact K tel que $\phi_k(K) \subset G = K_0^c$. Les $\phi_k(\overline{B}_n)$ étant fermés et G étant le complémentaire d'un compact K_0, on a encore $\phi_k(\overline{B}_n) \subset G$ pour η assez grand, et le raisonnement précédent montre que ϕ_k est s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$.

Si ϕ'' est déjà une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$), on a $\phi'' = \phi''_k$ comme on l'a vu ci-dessus. Pour toute majorante ϕ'' de ϕ, on en déduit $\phi''_g \supset \phi_g$ puis $\phi''_k = \phi'' \supset \phi_k$. Donc ϕ_k est bien la plus petite majorante s c s de ϕ.

<u>Remarque</u> - Si ϕ_i, $i \in I$ est une famille d'application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, l'application $\phi = \bigcap_{i \in I} \phi_i$ est encore s c s. Donc toute application ϕ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ admet une plus petite majorante s c s.

<u>Corollaire 2</u> - Une application ϕ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$) vérifiant (1-6) est s c s si et seulement si $\phi = \phi_k$. Une application ϕ' de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ vérifiant (1-7) ou (1-7') est s c i si et seulement si $\phi' = \phi'_g$.

Ce corollaire découle du précédent, puisque ϕ_k est la plus petite majorante s c s de ϕ. Il souligne l'intérêt des applications s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, ou s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. En pratique, en effet, on n'utilise le plus souvent que des applications ϕ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{K}$ telles que $\phi_g(G)$ soit ouvert pour $G \in \mathcal{G}$, et que $\phi_k = \phi$. Ces deux conditions entrainent que ϕ est s c s.

<u>Remarque</u> - Si ϕ applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, ϕ^* applique $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et la semi-continuité inférieure de ϕ équivaut à la semi-continuité supérieure de ϕ^* (pour la topologie de $\mathcal{F}$).

A toute application ϕ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ vérifiant (1-6), la formule

$$\phi_f = \phi_g^*$$

associe donc une application s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Inversement, si ϕ est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ telle que ϕ^* vérifie (1-7), ou (1-7') la formule :

$$\phi_k = (\phi^*)_k$$

lui associe une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ ou dans $\mathcal{K}$.

Dans le cas où E est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une application ψ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (ou d'une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$) dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est <u>compatible avec les translations</u> si $\psi(A \oplus \{x\}) = \{x\} \oplus \psi(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Cette compatibilité se transmet évidemment à tous les prolongements de ψ.

<u>Corollaire 3</u> - Si $E = \mathbb{R}^n$ et si $\psi(\psi')$ est compatible avec les translations, les conditions de la proposition sont toujours vérifiées. En particulier, on a $\psi = \psi_k$ ($\psi' = \psi'_g$) si et seulement si ψ (ψ') est s c s (s c i).

En effet, pour toute application ψ croissante compatible avec les translations, on a :

$$\psi(A \oplus B) = \psi(\bigcup_{x \in B} A \oplus \{x\}) \supset \bigcup_{x \in B} \psi(A \oplus \{x\}) = B \oplus \psi(A)$$

dès que $A \oplus B$ et les $A \oplus \{x\}$ sont dans le domaine de définition. Soit alors ψ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{P}(E)$ compatible avec les translations, K ; K' deux compacts et G un ouvert avec $K \subset G \subset K'$. On peut trouver une boule fermée de rayon ε telle que $K \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset G$, et on a alors :

$$\psi(K) \subset B_\varepsilon \oplus \psi(K) \subset \psi(K \oplus \overline{B}_\varepsilon) \subset \psi(K')$$

et l'ouvert $G_o = B_\varepsilon \oplus \psi(K)$ vérifie la condition (1-6).

De même, si ψ' applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et si $G \subset K \subset G'$, G, G' ouverts, K compacts, on peut trouver B_ε telle que $K \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset G'$. On a alors

$$\psi'(G) \subset \psi'_k(K) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}} \oplus \psi'_k(K) \subset \psi(K \oplus B_\varepsilon) \subset \psi(G')$$

Mais $\psi'_k \subset B_\varepsilon \oplus \psi'_k(K)$ entraine $\overline{\psi'_k(K)} \subset B_\varepsilon \oplus \psi'_k(K) \subset \psi'(K \oplus B_\varepsilon)$, et la condition (1-7) est vérifiée avec $K_o = \overline{\psi'_k(K)}$.

Examinons ce que deviennent ces résultats lorsque ψ est une ouverture ou une fermeture.

2 - OUVERTURES ET FERMETURES

<u>Proposition 2-1</u> - Pour qu'une ouverture ψ sur $\mathcal{K}$ vérifie $\psi_g(G) \in \mathcal{G}$ pour tout ouvert G, il faut et il suffit que la famille $\mathcal{B}$ des invariant de ψ contienne un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}$. ψ_g est alors une ouverture s c i sur $\mathcal{G}$ et ψ_k une ouverture s c s sur $\mathcal{K}$.

En effet, supposons que ψ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, et soit $B \in \mathcal{B}$ $G \in \mathcal{G}$ avec $B \subset G$. On peut trouver un ouvert B' relativement compact avec $B \subset B' \subset \overline{B'} \subset G$. On en déduit :

$$B = \psi(B) \subset \psi_g(B') \subset \psi(\overline{B'}) \subset \psi_g(G) \subset G$$

Comme $\psi_g(B')$ est ouvert par hypothèse et que $\psi(\overline{B'}) \in \mathcal{B}$, il en résulte bien que $\mathcal{B}$ contient un système fondamental de voisinages de B.

Inversement, supposons que $\mathcal{B}$ contienne un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}$, et soit $K, K' \in \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{G}$ avec $K \subset G \subset K'$. On a $\psi(K) \in \mathcal{B}$ et $\psi(K) \subset G$. Donc, il existe $G_o \in \mathcal{G}$ et $B_o \in \mathcal{B}$ avec $\psi(K) \subset G_o \subset B_o \subset G \subset K'$. Mais $B_o \subset K'$ entraine

$B_o = \psi(B_o) \subset \psi(K')$ et $\psi(K) \subset G_o \subset \psi(K')$: la condition (1-6) de prop. 1-4 est vérifiée et ψ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$.

Si ψ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$, ψ_g est une ouverture sur $\mathcal{G}$ (comme restriction à $\mathcal{G}$ de l'ouverture $\underset{\sim}{\psi}$, prop. 1-1), d'ailleurs s c i d'après le corollaire 1 de prop. 1-4. De même, ψ_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ d'après ce même corollaire. ψ_k est croissante et anti-isotone comme ψ et ψ_g.

Montrons alors que ψ_k est idempotente, ce qui achèvera la démonstration. Pour K compact, on a :

$$\psi_k\ \psi_k(K) = \bigcap_{G \supset \psi_k(K)} \psi_g(G)$$

Mais $G \supset \psi_k(K)$ entraine $\psi_g(G) \supset \psi_k(K)$. En effet, ψ_k étant s c s, on peut trouver un ouvert $G' \supset K$ tel que $K \subset G'$ entraine $\psi_k(K') \subset G$, donc aussi $\psi_g(G') \subset G$, puis $\psi_g(G') \subset \psi_g(G)$, ψ_g étant une ouverture. Mais $G' \supset K$ entraine par définition $\psi_k(K) \subset \psi_g(G')$, d'où $\psi_k(K) \subset \psi_g(G)$. Par suite :

$$\psi_k\ \psi_k(K) = \bigcap_{\substack{G \in \mathcal{G} \\ \psi_g(G) \supset \psi_k(K)}} \psi_g(G) \supset \psi_k(K)$$

et l'égalité, puisque ψ_k est anti-isotone.

<u>Remarque</u> - Les invariants de ψ sont aussi des invariants de ψ_k. En effet, on a $\psi_k(B) \subset B$ pour tout compact. Si $B \in \mathcal{B}$, on a également $\psi_k\ \psi(B) = \psi_k(B) \supset \psi(B) = B$, d'où $\psi_k(B) = B$. Plus généralement, pour tout $K \in \mathcal{K}$, on vérifie sans peine les relations :

$$\psi(K) = \psi_k\ \psi(K) = \psi\ \psi_k(K)$$

<u>Proposition 2-2</u> - Une ouverture ψ' sur $\mathcal{G}$ vérifie $\psi'_k(K) \in \mathcal{K}$ pour tout compact si et seulement si la famille $\mathcal{B}'$ de ses invariants vérifie la propriété suivante : pour tout $B \in \mathcal{B}'$ relativement compact, tout compact K et tout ouvert G tels que $B \subset K \subset G$ on peut trouver $B' \in \mathcal{B}'$ et $K_o \in \mathcal{K}$ avec $B \subset K_o \subset B' \subset G$; cette condition équivaut encore à dire que $\mathcal{B}'$ contient un système fondamental de voisinage de $\overline{B}$ pour tout $B \in \mathcal{B}'$ tel que $\overline{B} \in \mathcal{K}$

ψ'_k est alors une ouverture s c s sur $\mathcal{K}$, et ψ'_g une ouverture s c i sur $\mathcal{G}$.

Si ψ' vérifie la condition (1-7'), $B \in \mathcal{B}'$, $B \subset K \subset G$ entraine $\psi'(B) = B \subset \psi'_k(K) \subset \psi'(G) \subset G$ et la première condition de l'énoncé est vérifiée. Cette première condition est clairement équivalente à la seconde. Inversement, supposons vérifiée ces conditions. Soit K un compact, G, G' deux ouverts avec $G \subset K \subset G'$. En posant $B = \psi'(G) \in \mathcal{B}'$ on a donc $B \subset \overline{B} \subset G'$ avec $\overline{B} \in \mathcal{K}$. Par suite, il existe $B' \subset G'$ avec $\overline{B} \subset B' \subset G'$ et $B' \in \mathcal{B}'$, d'où $\overline{B} \subset B' \subset \psi'(G')$ et finalement $\psi'(G) \subset \overline{B} \subset \psi'(G')$: la condition (1-7') est vérifiée.

ψ'_k est alors s c s sur $\mathcal{K}$, et ψ'_g est la plus grande minorante s c i de ψ' d'après le corollaire 1 de Prop. 1-4. ψ'_k et ψ'_g sont croissantes et anti isotones. Montrons que ψ'_k est idempotente. Pour K compact, on a :

$$\psi'_k\ \psi'_k(K) = \bigcap_{G \supset \psi'_k(K)} \psi'(G)$$

ψ'_k étant s c s, $G \supset \psi'_k(K)$ entraine l'existence de $G' \in \mathcal{G}$, $G' \supset K$ avec $G \supset \psi'_k(K')$ pour tout compact $K' \subset G$. Par suite aussi :

$$\psi'_g(G') = \bigcup_{K' \subset G'} \psi'_k(K') \subset G$$

Comme ϕ'_g minore ϕ', on en déduit :

$$\phi'(G) \supset \phi'_g(G) \supset \phi'_g(G')$$

Mais $G' \supset K$ entraine $\phi'_g(G') \supset \phi'_k(K)$, puisque ϕ_k se définit indifféremment à partir de ϕ'_g ou de ϕ', et finalement on a $\phi'_k(K) \subset \phi'(G)$ dès que $G \supset \phi'_k(K)$. On en déduit alors $\phi'_k\ \phi'_k(K) \supset \phi'_k(K)$ et l'égalité. Il reste à montrer que ϕ'_g est une ouverture : mais celà résulte aussitôt du fait que ϕ'_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et constitue la restriction à $\mathcal{G}$ de l'ouverture $\underset{\sim}{\phi'_k}$.

<u>Proposition 2-3</u> - Soit ϕ une fermeture sur $\mathcal{K}$ et $\mathcal{B}$ la famille de ses invariants. ϕ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si pour tout compact K, tout ouvert G et tout $B \in \mathcal{B}$ on a :

$$K \subset G \subset B \quad \Rightarrow \quad \exists\ B' \in \mathcal{B}\ ,\ G' \in \mathcal{G} \qquad K \subset B' \subset G' \subset B$$

ϕ_g est alors une fermeture s c i sur $\mathcal{G}$, et ϕ_k une fermeture s c s sur $\mathcal{K}$.

En tant que fermeture sur $\mathcal{K}$, ϕ applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Si ϕ vérifie (1,6), $K \subset G \subset B$ entraine $K \subset \phi(K) \subset \phi_g(G) \subset B$ et la condition de l'énoncé est satisfaite avec $B' = \phi(K)$ et $G' = \phi_g(G)$. Inversement, si cette condition est satisfaite, soient K et K' deux compacts et G un ouvert avec $K \subset G \subset K'$. On en déduit $K \subset G \subset \phi(K')$, et, d'après la condition de l'énoncé, on peut trouver $B' \in \mathcal{B}$, $G' \in \mathcal{G}$ avec $K \subset B' \subset G' \subset \phi(K')$. Mais $K \subset B'$ entraine $\phi(K) \subset B'$, et $\phi(K) \subset G' \subset \phi(K')$: la condition (1-6) est vérifiée.

ϕ_g est s c i sur $\mathcal{G}$ et ϕ_k s c s sur $\mathcal{K}$ d'après le corollaire 1 de Prop. 1-4. Ces applications sont croissantes et isotones comme ϕ.

Montrons que ψ_g est idempotente. Comme on a :

$$\psi_g\ \psi_g(G) = \bigcup_{K \subset \psi_g(G)} \psi(K)$$

tout se ramène à montrer que $K \subset \psi_g$ entraine $\psi(K) \subset \psi_g(G)$: il en résultera $\psi_g\ \psi_g(G) \subset \psi_g(G)$, et l'égalité puisque ψ_g est isotone. Or ψ_g est s c i, e~~s~~t $K \subset \psi_g(G)$ entraine qu'il existe $K' \in \mathcal{K}$, $K' \subset G$ avec $\psi_g(G') \supset K$ pour tout $G' \supset K'$, donc $\psi_k(K') \supset K$. Par suite : $\psi_k(K') \supset \psi_k(K) \supset \psi(K)$ (puisque ψ_k majore ψ). D'autre part, $K' \subset G$ donne $\psi_k(K') \subset \psi_g(G)$ par définition de ψ_k. On a donc bien $\psi(K) \subset \psi_g(G)$ dès que $K \subset \psi_g(G)$, et ψ_g est une fermeture sur $\mathcal{G}$. ψ_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et constitue la restriction à $\mathcal{K}$ du plus grand prolongement de ψ_g, donc ψ_k est une fermeture sur $\mathcal{K}$.

Proposition 2-4 - Soit ψ' une fermeture sur $\mathcal{G}$, $\mathcal{B}'$ la famille de ses invariants. Pour que ψ'_k applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, il faut et il suffit que l'on ait pour $G \in \mathcal{G}$, $K \in \mathcal{K}$, $B' \in \mathcal{B}'$:

$$G \subset K \subset B' \Rightarrow \exists\ B \in \mathcal{B}'\ ,\ K_0 \in \mathcal{K} : G \subset B \subset K_0 \subset B'$$

ψ'_k est alors une fermeture s c s sur $\mathcal{K}$, et ψ'_g une fermeture s c i sur $\mathcal{G}$.

Si $\psi'_k(K)$ est compact, $G \subset K \subset B'$ entraine $\psi'(G) \subset \psi'_k(K) \subset \psi'(B') = B'$, d'où $G \subset \psi'(G) \subset \psi'_k(K) \subset B'$, et la condition de l'énoncé est vérifiée. Inversement, supposons cette condition vérifiée, et soient $G, G' \in \mathcal{G}$ et $K \in \mathcal{K}$ avec $G \subset K \subset G'$. On en déduit $G \subset K \subset \psi(G')$, et la condition montre qu'il existe $B \in \mathcal{B}$ et $K_0 \in \mathcal{K}$ avec $G \subset B \subset K_0 \subset \psi(G')$. Comme $B \in \mathcal{B}$, on a $\psi(G) \subset B$ et $\psi(G) \subset K_0 \subset \psi(G')$ la condition (1-7) est vérifiée.

ψ'_k est alors une application s c s de $\mathcal{K}$ dans lui-même (prop. 1-4, corollaire 2) et une fermeture, comme restriction à $\mathcal{K}$ de la fermeture $\tilde{\psi}'$ - ψ'_g est une application s c i de $\mathcal{G}$ dans lui-même, manifestement croissante et isotone, il reste à vérifier que ψ'_g est idempotente. Comme ϕ_g est s c i, la démonstration est la même que dans la proposition précédente.

<u>Proposition 2-5</u> - Une ouverture ϕ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$) est s c s si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ de ses invariants est fermée dans $\mathcal{K}$ (resp. dans $\mathcal{F}$). Inversement toute famille $\mathcal{B}$ fermée dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$) et stable pour la réunion finie est la famille des invariants associés à une ouverture s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ (de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$). Une fermeture ϕ' de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est sci si et seulement si la famille de ses invariants est fermée dans $\mathcal{G}$.

Si ϕ est une ouverture s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ (ou de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$), et si une suite $A_n \in \mathcal{B}$ converge vers A pour la topologie de $\mathcal{K}$ (ou de $\mathcal{F}$), on a $A = \lim A_n = \lim \phi(A_n) \subset \phi(A)$, puisque ϕ est s c s, et par suite $A = \phi(A)$, puisque ϕ est une ouverture. Donc $A \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est fermée dans $\mathcal{K}$ (ou dans $\mathcal{F}$).

Inversement, supposons $\mathcal{B}$ fermé dans $\mathcal{F}$, et soit F_n une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$. Si une suite partielle $x_{n_k} \in \phi(F_{n_k})$ converge vers x, on peut trouver des $B_{n_k} \in \mathcal{B}$ avec $x_{n_k} \in B_{n_k} \subset F_{n_k}$. Soit B_o une valeur d'adhérence de B_{n_k} dans $\mathcal{F}$. On trouve $x \in B \subset F$, donc $x \in \phi(F)$ et $\overline{\lim}\, \phi(F_n) \subset \phi(F)$: ϕ est s c s.

Si $\mathcal{B}$ est fermé dans $\mathcal{K}$, et si $K_n \to K$ dans $\mathcal{K}$, les K_n sont contenus dans un compact fixe K_o, et on a aussi $\phi(K_n) \subset K_o$. On peut alors reprendre le même raisonnement que dans le cas de $\mathcal{F}$ et voir que ϕ est s c s.

Le dernier énoncé se déduit du précédent par dualité.

Si $\mathcal{B}$ est une famille stable pour la réunion finie et fermée dans $\mathcal{F}$ (ou dans $\mathcal{K}$) elle est stable pour la réunion infinie fermée (resp., si la réunion d'une famille B_i, $i \in I$, $B_i \in \mathcal{B}$ est relativement compacte, sa fermeture est dans $\mathcal{B}$). Le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}$ est alors une ouverture qui vérifie les conditions de Prop. 1-2, et sa restriction à $\mathcal{F}$ (à $\mathcal{K}$) est une ouverture dont les invariants sont manifestement les éléments de $\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est fermée, cette ouverture est s c s d'après ce qui précède.

<u>Proposition 2-6</u> - Une fermeture ϕ sur $\mathcal{K}$ est s c s si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ de ses invariants contient un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}$.

En effet, supposons que $\mathcal{B}$ possède cette propriété, et soit $K \in \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{G}$ avec $\phi(K) \subset G$. D'après la propriété de $\mathcal{B}$, on peut trouver $G_0 \in \mathcal{G}$ et $B_0 \in \mathcal{B}$ avec $\phi(K) \subset G_0 \subset B_0 \subset G$. On a $K \subset G_0$, puisque ϕ est isotone, et, pour tout compact $K' \subset G_0$, $\phi(K') \subset B_0 \subset G$. Donc ϕ est s c s.

Inversement, supposons ϕ s c s, et soient $B \in \mathcal{B}$, $G \in \mathcal{G}$ avec $B \subset G$. Comme ϕ est s c s, $\phi(B) \subset G$ entraine $\exists\, G' \in \mathcal{G}$, $G' \supset B$, $K' \subset G' \Rightarrow \phi(K') \subset G$. Comme $B \subset G'$, il existe $G'_0 \in \mathcal{G}$, $K_0 \in \mathcal{K}$ avec $B \subset G_0 \subset K_0 \subset G'$. $K_0 \subset G'$ entraine ensuite $\phi(K_0) \subset G$, d'où $B \subset G_0 \subset \phi(K_0) \subset G$. Comme $\phi(K_0) \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ contient bien un voisinage de B contenu dans G, et la propriété de l'énoncé est vérifiée.

Je n'ai pas trouvé de caractérisation équivalente pour les fermetures s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ ou les ouvertures s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. En pratique, toutefois, les seules ouvertures ϕ' s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ qui présentent de l'intérêt sont celles qui possèdent la propriété supplémentaire habituelle : ϕ'_K applique $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ (propriété toujours vérifiée dans

$\mathbb{R}^n$ si ψ' est compatible avec les translations). Ces ouvertures là sont toujours de la forme :

$$\psi'(G) = \bigcup_{K \subset G} \psi(K)$$

où $\psi = \psi'_k$ est une ouverture s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{G}$.

3 - OUVERTURES ET FERMETURES CONTINUES

Les applications s c i de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ sont moins intéressantes que les applications s c s. Il convient pourtant d'en dire un mot, ne serait-ce que pour aborder le cas des applications continues.

<u>Proposition 3-1</u> - Une fermeture ψ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ (ou de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$) est s c i si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants est fermée dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$).

Supposons ψ s c i de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Si $F_n \in \mathcal{B}$ et $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$, on a $\psi(F) \subset \underline{\lim}\ \psi(F_n) = \lim F_n = F$, et l'égalité puisque ψ est isotone, donc $\mathcal{B}$ est fermé. Même démonstration pour ψ s c i de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

Inversement, supposons $\mathcal{B}$ fermée dans $\mathcal{F}$. Soit $F_n \in \mathcal{F}$, $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$ avec une suite partielle $\psi(F_{n_k})$ convergeant vers F_o. De $F_{n_k} \subset \psi(F_{n_k})$ résulte $F \subset F_o$. Mais $F_o \in \mathcal{B}$ puisque $\mathcal{B}$ est fermée, donc on a aussi $\psi(F) \subset F_o$ et $\psi(F) \subset \underline{\lim}\ \psi(F_n)$: ψ est bien s c i. Démonstration analogue pour $\mathcal{B}$ fermée dans $\mathcal{K}$.

<u>Remarque</u> - D'après les prop. 2-6 et 3-1, une fermeture ψ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ est continu si et seulement si $\mathcal{B}$ est fermée dans $\mathcal{K}$ et contient un système fondamental de voisinages de chaque $\mathcal{B}$.

Exemple : dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, la fermeture convexe est continue. Ou encore, dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, l'application associant à chaque $K \in \mathcal{K}$ le plus petit triangle équilatéral, ou le plus petit rectangle etc... qui le contien (vérification immédiate à partir de la famille $\mathcal{B}$ des invariants).

Passons maintenant aux ouverture s c i, et pour celà posons d'abord un lemme.

<u>Lemme 1</u> - Soit $\mathcal{S}$ la famille des parties finies d'un espace L.C.D. E. Toute application ψ croissante s c i de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ admet un prolongement unique s c i ψ' de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ défini par :

$$\psi'(F) = \overline{\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{S} \\ B \subset F}} \psi(B)} \qquad (F \in \mathcal{F})$$

Si le prolongement s c i existe, il est obligatoirement de cett forme, car la famille filtrante croissante des $B \subset F$, $B \in \mathcal{S}$ converge F dans $\mathcal{F}$, d'où $\psi'(F) \subset \underline{\lim}\ \psi(B)$. Mais la famille filtrante des $\psi(B)$ converge vers $\overline{\bigcup \psi(B)}$, et cette limite est $\subset$ $\psi'(F)$, puisque $B \subset F$ don $\psi(B) \subset \psi'(F)$. D'où l'égalité.

Inversement, supposons ψ s c i de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$. L'application ψ' définie par la formule du lemme prolonge ψ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. On le voit en reprenant le raisonnement précédant dans le cas d'un compact. Soit alors F_n une suite convergeant vers F dans $\mathcal{F}$, et x un point de

$\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset F}} \psi(B)$. On a donc une partie finie $B \in \mathcal{B}$ avec $B \subset F$ et $x \in \psi(B)$, soit $B = \{x_1, \dots x_k\}$. Pour chaque $i \in [1,k]$, on peut trouver une suite $y_n^i \in F_n$ avec $y_n^i \to x_i$, puisque $F_n \to F$. Posons $\{x_n^i,\ i = 1, \dots k\} = B_n \in \mathcal{B}$. On a $B_n \subset F_n$, et B_n converge vers B dans $\mathcal{K}$. Comme ψ est s c i sur $\mathcal{K}$ il en résulte $\psi(B) \subset \underline{\lim}\ \psi(B_n) \subset \underline{\lim}\ \psi'(F_n)$ et par suite $x \in \underline{\lim}\ \psi'(F_n)$. Ainsi, on a :

$$\bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \subset F}} \psi(B) \subset \underline{\lim}\ \psi'(F_n)$$

Comme $\underline{\lim}\ \psi'(F_n)$ est un ensemble fermé, il en résulte $\psi'(F) \subset \underline{\lim}\ \psi'(F_n)$, et ψ' est bien s c i de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

<u>Proposition 3-2</u> - Une ouverture ψ de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ ou de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est s c i si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants est engendrée (par réunion infinie fermée) par une famille $\mathcal{B}_0$ d'ensembles finis possèdans la propriété suivante : pour tout $B_0 = \{x_1, \dots x_k\} \in \mathcal{B}_0$, on peut trouver des voisinages $G_1, \dots G_k$ des points $x_1, \dots x_k$ avec $\{y_1, \dots y_k\} \in \mathcal{B}_0$ dès que $y_i \in G_i$, $i = 1, 2 \dots k$.

En effet, toute partie finie $B \in \mathcal{B}$ a son image $\psi(B) \subset B$ dans $\mathcal{B}$ et le lemme 1 montre que $\mathcal{B}$ admet bien un système de générateurs finis $\mathcal{B}_0$ si ψ est s c i. Soit $B_0 = \{x_1, \dots x_k\} \in \mathcal{B}_0$, et $G'_1, \dots G'_k$ des voisinages disjoints des x_i. Comme $\psi(B_0) = B_0$ rencontre les G'_i, on peut trouver des ouverts G_j en nombre fini n rencontrant B_0 tels que $A \cap G_j \neq \emptyset \Rightarrow \psi(A) \cap G'_i \neq \emptyset$ Comme $\psi(A)$ comporte au moins k points, il en est de même de A, et $n \geq k$. Comme B_0 comporte k points et rencontre les G_j (que l'on peut toujours supposer disjoints) on a $n \leq k$, d'où $n = k$. Les G_j, $j = 1, \dots k$ peuvent être ordonnées de manière à ce que $x_i \in G_i$. Pour tout $A = \{y_1, \dots y_k\}$ avec $y_i \in G_i$, on a $\psi(A) \cap G'_i \neq \emptyset$ pour chaque i, donc $\psi(A)$ comporte au moins k points distincts. Mais $\psi(A) \subset A$ entraine alors $A = \psi(A) \in \mathcal{B}$, et la condition de l'énoncé est vérifiée.

Inversement, supposons cette condition vérifiée, et montrons que ϕ est s c i. Pour tout $F \in \mathfrak{F}$, on a par hypothèse

$$\phi(F) = \overline{\bigcup_{\substack{B \subset F \\ B \in \mathcal{B}_o}} B} \qquad (\mathcal{B}_o \subset \mathcal{B})$$

Soit F_n une suite convergeant vers F dans $\mathfrak{F}$, et $x \in \phi(F)$ tel que l'on ait $x \in B_o$ pour un $B_o = \{x_1, .. x_k\} \in \mathcal{B}_o$. On peut trouver des suites $y_{in} \in F_n$, $y_{in} \to x_i$ $(i = 1,2...k)$. D'après la condition de l'énoncé, on a $B_n = \{y_{1,n} .. y_{k,n}\} \in \mathcal{B}_o$ pour n assez grand, $B_n \subset F_n$, et, comme x est l'un des points de B_o, il existe $x_n \in B_n \subset F_n$ avec $x_n \to x$. On a donc $x_n \in \phi(F_n)$, puisque $B_n \in \mathcal{B}_o$, et $x_n \to x$, c'est-à-dire $x \in \underline{\lim}\ \phi(F_n)$.

Ainsi l'union non fermée des $B \subset F$, $B \in \mathcal{B}_o$ est contenue dans le fermé $\underline{\lim}\ \phi(F_n)$. Il en résulte bien $\phi(F) \subset \underline{\lim}\ \phi(F_n)$, et ϕ est s c i.

<u>Corollaire</u> - <u>Si E est connexe, les seules ouvertures continues de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{K}$ ou de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ sont l'identité ou l'application triviale</u> $A \to \phi(A) = \emptyset$.

Soit ϕ une ouverture non triviale de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$. Sa restriction à $\mathfrak{K}$ est une ouverture de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{K}$, puisque $\phi(K) \subset K$, et elle est continue sur $\mathfrak{K}$ pour la topologie de $\mathfrak{K}$ dès que ϕ est continue sur $\mathfrak{F}$. On peut donc se limiter à une ouverture ϕ continue de $\mathfrak{K}$ dans $\mathfrak{K}$. La famille $\mathcal{B}$ des invariants est fermée dans $\mathfrak{K}$, d'après la prop. 2-6, et engendrée par un système $\mathcal{B}_o$ de parties finies possèdant la propriété de prop. 3-2. Soit $\{x_1, .. x_k\} \in \mathcal{B}_o$.

D'après la prop. 2-8, il existe un ouvert $G \ni x_k$ tel que $\{x_1, .. x_{k-1}\ y\} \in \mathcal{B}_o$ pour tout $y \in G$. Soit G_k l'ouvert maximal tel que cette propriété soit vraie, c'est-à-dire l'union de tous les G qui conviennent, et soit z un point de la frontière de G_k. Comme $\mathcal{B}$ est fermé et que $\{x_1, .. x_{k+1}\ z\}$ est limite d'une suite $\{x_1, .. x_{k-1}, z_n\}$, $z_n \in G_k$, on a encore $\{x_1, .. x_{k-1}, z\} \in \mathcal{B} \cap \mathcal{S} = \mathcal{B}_o$.

On peut donc trouver un voisinage ouvert G' de z avec $\{x_1 .. x_{k-1},\ \ , y\} \in \mathcal{B}_o$ pour $y \in G'$. Mais on a alors $G' \subset G_k$, d'après la maximalité de G_k, et ceci contredit $z \in F_r G_k$. Donc G_k n'a pas de point frontière, et, si E est connexe, $G_k = E$. Par conséquent, on peut prendre $y = x_{k-1}$, et l'ensemble à k-1 éléments distincts $\{x_1, .. x_{k-1}\}$ est dans $\mathcal{B}_o$. De proche en proche, on montre de même $\{x_1\} \in \mathcal{B}_o$, et le voisinage maximal G_1 de x_1 tel que $\{y\} \in \mathcal{B}_o$ pour $y \in G_1$ n'a pas de point frontière et coïncide avec E. Comme $\{x\}$ est invariant pour tout $x \in E$, on a $\mathcal{B} = \mathcal{K}(E)$, et ψ est l'identité sur $\mathcal{K}$. Le seul prolongement continu possible de ψ sur $\mathcal{F}$ est alors l'identité sur $\mathcal{F}$, ce qui achève la démonstration.

Indiquons quelques résultats complémentaires relatifs à $\mathbb{R}^n$.

<u>Proposition 3-3</u> - Si $\mathcal{a}$ est une partie de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ stable pour l'addition de MINKOWSKI, les seules ouvertures sur $\mathcal{a}$ compatibles avec l'addition de MINKOWSKI: $\oplus$ sont l'identité et l'application triviale $\psi(K) = \emptyset$ sur $\mathcal{a}$.

Soit, en effet, ψ une ouverture sur $\mathcal{K}$ vérifiant $\psi(K \oplus K') = \psi(K) \oplus \psi(K')$. En particulier $\psi(\{0\}) = \psi(\{0\}) \oplus \psi(\{0\})$, d'où $\psi(\{0\}) = \{0\}$ ou $\emptyset$ puisque $\psi(\{0\})$ est compact. Si $\psi(\{0\}) = \emptyset$, on a $\psi(K \oplus \{0\}) = \psi(K) \oplus \emptyset = \emptyset$ pour tout compact K, et ψ est l'application triviale. Supposons donc $\psi\{0\} = \{0\}$. Il en résulte, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$\psi(\{x\}) \oplus \psi(\{-x\}) = \psi(\{x+(-x)\}) = \{0\}$. Donc $\psi(\{x\})$ n'est pas vide et est réduit à un seul élément. Comme $\psi\{x\} \subset \{x\}$, puisque ψ est une ouverture, $\psi(\{x\}) = \{x\}$ et ψ est l'identité.

<u>Proposition 3-4</u> - Sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, toute fermeture ψ compatible avec l'addition de MINKOWSKI est continue, compatible avec les translations et les homothéties de module positif, laisse invariants les ensembles réduits à un point et applique l'espace $C(\mathcal{K})$ des convexes compacts dans lui-même. Une fermeture ψ sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ est compatible avec $\oplus$ si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ des invariants est stable pour les translations, l'addition de MINKOWSKI et l'intersection infinie, et contient une suite croissante B_k dont la réunion est $\mathbb{R}^n$.

Soit ψ une fermeture sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\psi(K \oplus K') = \psi(K) \oplus \psi(K')$.

a/ On a $\psi(\{x\}) = \{x\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et ψ est compatible avec les translations. En effet, $\{0\} = \{0\} \oplus \{0\}$ donne tout d'abord $\psi(\{0\}) = \psi(\{0\}) \oplus \psi(\{0\})$. Comme $\psi(\{0\})$ est compact et contient $\{0\}$, il en résulte $\psi(\{0\}) = \{0\}$. On en déduit $\{0\} = \psi(\{x\} \oplus \{-x\}) = \psi(\{x\}) \oplus \psi(\{-x\})$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. Donc $\psi(\{x\})$ est réduit à un point, et $\{x\} \subset \psi(\{x\})$ donne $\psi(\{x\}) = \{x\}$. Pour tout compact K, on a alors $\psi(K \oplus \{x\}) = \{x\} \oplus \psi(K)$, et ψ est compatible avec les translations.

b/ Pour $A \in C(\mathcal{K})$, $\psi(A)$ est convexe, et $\psi(rA) = r\psi(A)$ pour r rationnel ≥ 0 En effet, si $A \in C(\mathcal{K})$, on a $A = \frac{1}{n} A^{\oplus n}$, d'où $\psi(A) = \psi(\frac{A}{n})^{\oplus n}$. Par suite $\psi(A)$ est indéfiniment divisible. $\psi(A)$ est donc convexe. On a alors $\psi(A) = \psi(\frac{A}{n})^{\oplus n} = n\, \psi(\frac{A}{n})$, puis, en changeant A en nA : $\psi(nA) = n\, \psi(A)$. Enfin, en changeant A en A/k, k entier positif :

$$\psi(\frac{n}{k} A) = n\, \psi(\frac{A}{k}) = \frac{n}{k}\, \psi(A)$$

c/ ψ est continu sur $\mathcal{K}$.

Désignons par $B_{\frac{1}{n}}$ la boule de centre O et de rayon $\frac{1}{n}$. D'après B, on a $\psi(B_{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\,\psi(B_1)$. Comme $\psi(B_1)$ est compact, pour tout η donné > 0, on peut trouver N_0 avec $\psi(B_{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\,\psi(B_1) \subset B_\eta$ pour $n \geq N_0$.

Soit alors A_n une suite convergeant vers A dans $\mathcal{K}$. Pour n assez grand, on a $A_n \subset A \oplus B_{\frac{1}{N_0}}$ et $A \subset A_n \oplus B_{\frac{1}{N_0}}$, d'où aussi

$$\psi(A_n) \subset \psi(A) \oplus \psi(B_{\frac{1}{N_0}}) \subset \psi(A) \oplus B_\eta \text{ et } \psi(A) \subset \psi(A_n) \oplus \psi(B_{\frac{1}{N_0}}) \subset \psi(A_n) \oplus B_\eta$$

Donc $\psi(A_n)$ converge dans $\mathcal{K}$ vers $\psi(A)$ et ψ est continue.

d/ Pour $\lambda \geq 0$ et $A \in \mathcal{K}$, on a $\psi(\lambda A) = \lambda\psi(A)$, et $\mathcal{B}$ est invariante pour les homothéties positives.

Si A est convexe et compact, d'après b/, la relation est vérifiée pour λ rationnel ≥ 0. Mais, d'après c/, ψ est continue et la relation est donc vérifiée pour tout $\lambda \geq 0$. Soit ensuite $A \in \mathcal{B}$ un compact invariant pour ψ. De $A = \psi(A)$ résulte $\psi(\lambda A) = \psi(\lambda\psi(A)) \supset \lambda\psi(A)$ pour tout $\lambda > 0$, donc aussi, en changeant λ en $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda}\,\psi(A) \subset \psi(\frac{A}{\lambda})$, puis, en changeant A en λA, $\psi(\lambda A) \subset \lambda\psi(A)$. On a donc l'égalité $\psi(\lambda A) = \lambda\psi(A) = \lambda A$. Par suite, $\mathcal{B}$ est invariante par homothétie, et la relation est vérifiée pour tout $A \in \mathcal{B}$.

Soit maintenant K un compact quelconque. De $\lambda K \subset \psi(\lambda K)$ résulte $K \subset \frac{1}{\lambda}\,\psi(\lambda K)$. Mais $\frac{1}{\lambda}\,\psi(\lambda K)$ est invariant, d'après ce qui précède, et vérifie la relation d/, donc $\psi(K) \subset \psi(\frac{1}{\lambda}\,\psi(\lambda K)) = \frac{1}{\lambda}\,\psi(\lambda K)$ pour tout $\lambda > 0$. En changeant λ en $1/\lambda$, on en déduit $\psi(\lambda K) = \lambda\psi(K)$ comme ci-dessus.

e/ Passons alors à la deuxième partie de l'énoncé. D'après ce qui précède, si ψ est compatible avec $\oplus$, $\mathcal{B}$ est stable pour les translations, l'addition $\oplus$ et l'intersection (et aussi d'ailleurs avec les homothéties positives). Inversement, soit $B \subset \mathcal{K}$ une famille stable pour $\cap$, $\oplus$ et les translations. Le plus grand prolongement sur $\mathcal{K}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$ est une fermeture sur $\mathcal{K}$ définie par :

(e) $$\psi(K) = \bigcap_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \supset K}} B$$

Il faut montrer que ψ est compatible avec l'addition de MINKOWSKI. La relation (e) entraine que ψ est compatible avec les translations (puisque $\mathcal{B}$ est invariant pour les translations). Pour K et K' dans $\mathcal{K}$, il en résulte :

$$\psi(K \oplus K') = \psi\Big(\bigcup_{x \in K'} K \oplus \{x\}\Big) \supset \bigcup_{x \in K'} \psi(K \oplus \{x\}) =$$

$$= \bigcup_{x \in K'} \{x\} \oplus \psi(K) = K' \oplus \psi(K)$$

soit :

$$\psi(K \oplus K') \supset K' \oplus \psi(K)$$

Comme ψ est idempotente et croissante, on en déduit:

$$\psi\,\psi\,(K \oplus K') = \psi(K \oplus K') \supset \psi(K' \oplus \psi(K)) \supset \psi(K') \oplus \psi(K)$$

Finalement donc on a :

(f) $$\psi(K \oplus K') \supset \psi(K) \oplus \psi(K')$$

et il reste à démontrer l'inclusion inverse.

Soit $x \in \phi(K \oplus K')$. On peut trouver B et B' dans $\mathcal{B}$ avec $B \supset K$ et $B' \supset K'$ (puisque $\mathcal{B}$ contient une suite croissant vers $\mathbb{R}^n$). On a $B \oplus B' \supset K \oplus K'$, donc $x \in B \oplus B'$, soit :

$$x = x(B) + x(B'),\ x(B) \in B,\ x(B') \in B'$$

Considérons alors la famille filtrante décroissante $\mathcal{B}_K = \{B,\ B \in \mathcal{B},\ B \supset K\}$. On a $\lim_{\mathcal{B}_K} B = \phi(K)$. La famille filtrante $x(B)$, $B \in \mathcal{B}_K$ admet une valeur d'adhérence (puisque les B sont compacts), qui dépend évidemment de B'. Soit $y(B')$ cette valeur d'adhérence. Comme $\phi(K)$ est la limite de la famille filtrante $(B, \mathcal{B}_K)$ on a $y(B') \in \phi(K)$. Les $x(B') = x - x(B)$ ont aussi une valeur d'adhérence $y'(B')$ selon $\mathcal{B}_A$, et $y'(B') \in B'$. Ainsi, on a :

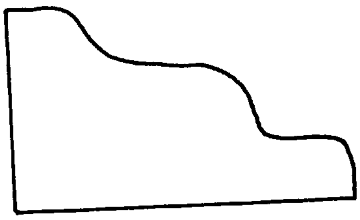
$$x = y(B') + y'(B'),\ y(B') \in \phi(K),\ y'(B') \in B'$$

Il suffit ensuite de considérer la famille filtrante $\mathcal{B}_{K'} = \{B',\ B' \in \mathcal{B},\ B' \supset K'\}$ pour voir de la même manière que $y'(B')$ a une valeur d'adhérence $z' \in \phi(K')$, et par suite $y(B')$ une valeur d'adhérence $z \in \phi(K)$ avec $x = z + z'$. On a donc $x \in \phi(K) \oplus \phi(K')$, d'où $\phi(K \oplus K') \subset \phi(K) \oplus \phi(K')$, et l'égalité d'après (f). Ainsi ϕ est compatible avec l'addition de MINKOWSKI : Quod erat demonstrandum.

Corollaire 1 - Si une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ est stable pour les translations, l'addition de MINKOWSKI et l'intersection infinie, et contient un compact d'intérieur non vide, elle est stable également pour les homothéties positives, contient les ensembles réduits à un point et des compacts convexes non réduits à un point, elle est fermée dans $\mathcal{K}$ et contient un système fondamental de voisinages de chaque $B \in \mathcal{B}$ (et, en particulier, de chaque point de $\mathbb{R}^n$).

En effet, étant stable pour $\oplus$ et contenant un convexe d'intérieur non vide, $\mathcal{B}$ contient une suite B_k croissant vers $\mathbb{R}^n$. D'après la proposition, le plus grand prolongement ψ sur $\mathcal{K}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$ est une fermeture sur $\mathcal{K}$ compatible avec $\oplus$. Il suffit alors d'appliquer la première partie de la proposition, et d'utiliser les Prop. 2-6 et 3-1 pour exprimer la continuité de ψ.

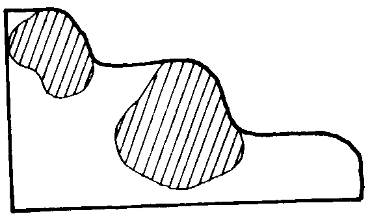
Exemples : Les convexes de $\mathbb{R}^n$, les parallèlépipèdes rectangles à faces parallèles aux hyperplans de coordonnées, etc... constituent des exemples de familles $\mathcal{B}$ possèdant ces propriétés. Citons encore dans $\mathbb{R}^2$ les triangles équilatéraux, ou la famille $\mathcal{B}$ des ensembles de la forme :



délimités par un angle droit translaté du quadrant positif et le graphe d'une fonction décroissante.

La fermeture associée se construit comme suit :

Il n'est pas difficile de vérifier qu'elle est compatible avec l'addition de MINKOWSKI.



Corollaire 2 - Si $\mathcal{B}$ vérifie les conditions du corollaire 1, il en est encore de même de la famille $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cap C(\mathcal{K})$ constituée des convexes de $\mathcal{B}$.

En effet, si A et B $\in C(\mathcal{K})$, $A \oplus B$ est convexe et on a $\psi(A \oplus B) = \psi(A) \oplus \psi(B)$ avec $\psi(A)$ et $\psi(B)$ convexes d'après la proposition.

4 - APPLICATION COMPATIBLE AVEC LES TRANSLATIONS

4-1 - Propriétés algébriques

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et nous ne considérons (sauf mention explicite du contraire) que des applications ψ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, (où $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est stable pour les translations) compatible avec les translations. En écrivant A_x au lieu de $A \oplus \{x\}$, on a donc toujours ici :

$$\psi(A_x) = \psi(A)_x \qquad (A \in \mathcal{A})$$

De même, nous désignerons par $\mathcal{B}_x$ la famille $\{B_x, B \in \mathcal{B}\}$ des translatés B_x par un $x \in \mathbb{R}^n$ donné des ensembles B d'une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

Désignons par $\mathcal{V}$ <u>le noyau</u> d'une application $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ défini par :

$$\mathcal{V} = \{A : A \in \mathcal{A} \, , \, 0 \in \psi(A)\}$$

Si ψ est compatible avec les translations, on a $x \in \psi(A)$ si et seulement si $A \in \mathcal{V}_x$. Inversement, si $\mathcal{V}$ est une famille quelconque contenue dans $\mathcal{A}$, l'application ψ définie sur $\mathcal{A}$ par :

$$\psi(A) = \{x, \, x \in \mathbb{R}^n, \, A \in \mathcal{V}_x\}$$

est compatible avec les translations, car :

$$y \in \psi(A_h) \Leftrightarrow A_h \in \mathcal{V}_y \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}_{y-h} \Leftrightarrow y-h \in \psi(A) \Leftrightarrow y \in \psi(A)_h$$

et son noyau est manifestement $\mathcal{V}$. Il y a donc correspondance bijective entre les familles $\mathcal{V} \subset \mathcal{A}$ et les applications ϕ compatibles sur $\mathcal{A}$ avec les translations.

Exemples - La dilatation $A \to A \oplus \check{B}$ (B quelconque dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, admet le noyau

(4-1) $\qquad \mathcal{V} = V_B \cap \mathcal{A} \qquad (V_B = \{B',\ B' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ B' \cap B \neq \emptyset\}$

L'érosion $A \to A \ominus \check{B}$ admet le noyau :

(4-2) $\qquad \mathcal{V} = W_B \cap \mathcal{A} \qquad (W_B = \{B',\ B' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ B' \supset B)$

L'ouverture de A selon B, soit $A \to A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$ a pour noyau :

(4-3) $\qquad \mathcal{V} = \bigcup_{y \in \check{B}} (W_{B_y} \cap \mathcal{A})$

La fermeture $A \to A^B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$ de A selon B a pour noyau :

(4-4) $\qquad \mathcal{V} = \bigcap_{y \in \check{B}} (V_{B_y} \cap A)$

L'identité sur $\mathcal{A}$ a le noyau $\mathcal{V} = \mathfrak{J} \cap \mathcal{A}$, où $\mathfrak{J}$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine ($\mathfrak{J}$ est un ultrafiltre).

La translation par $x \in \mathbb{R}^n$, soit $A \to A_x$ a pour noyau $\mathfrak{J}_x \cap \mathcal{A}$

On note que $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont les seuls éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ stables pour les translations.

Si donc $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont dans $\mathcal{A}$, leurs images seront soit $\emptyset$, soit $\mathbb{R}^n$. Il est clair que l'on a :

$$\psi(\emptyset) = \emptyset \Leftrightarrow \emptyset \notin \mathcal{V} \qquad \psi(\emptyset) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{V}$$

$$\psi(R^n) = \emptyset \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \notin \mathcal{V} \qquad \psi(R^n) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow R^n \in \mathcal{V}$$

Pour les applications ψ croissantes non triviales, les seules que nous considèrerons dans ce qui suit, on a nécessairement $\psi(\emptyset) = \emptyset$ et $\psi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire :

$$\emptyset \notin \mathcal{V} \quad \text{et } \mathbb{R}^n \in \mathcal{V}$$

Notons encore quelques propriétés élémentaires pour A, B $\in \mathcal{A}$

(4-5) $$\begin{cases} A \subset \psi(A) \Leftrightarrow \mathfrak{J} \subset \mathcal{V} \\ \psi(A) \subset A \Leftrightarrow \mathcal{V} \subset \mathfrak{J} \end{cases}$$

Plus généralement, si deux applications vérifient $\psi \subset \psi'$, leurs noyaux $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ vérifient $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$

(4-6) $$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \Leftrightarrow \psi \subset \psi'$$

De même, si ψ_i, $i \in I$ est une famille d'applications sur $\mathcal{A}$, et si $\mathcal{V}_i$ est le noyau de ψ_i, le noyau de $\cap \psi_i$ est $\cap \mathcal{V}_i$, celui de $\cup \psi_i$ est $\cup \mathcal{V}_i$.

Une application ψ est croissante si et seulement si $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{V}$ et $A \supset B$ entraine $A \in \mathcal{V}$. Nous énoncerons cette propriété en disant que $\mathcal{V}$ est permis dans $\mathcal{A}$ pour la réunion $\cup$. Analytiquement, cela donne :

(4-7) $$\psi \text{ croissante} \Leftrightarrow \mathcal{V} = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} (W_B \cap \mathcal{A})$$

Compte tenu de (4-2), on voit que toute application croissante est de la forme :

$$(4\text{-}7') \qquad \psi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{O}} (A \ominus \check{B})$$

c'est-à-dire est la réunion des érodés de A selon les $B \in \mathcal{O}$

Lorsque $\mathcal{a}$ est stable pour la réunion finie, on a :

$$(4\text{-}8) \qquad \mathcal{O} \text{ stable pour réunion finie} \Leftrightarrow \psi(A) \cap \psi(B) \subset \psi(A \cup B)$$

Si $\mathcal{a}$ est stable pour l'intersection finie, de même :

$$(4\text{-}8') \qquad \mathcal{O} \text{ stable pour intersection finie} \Leftrightarrow \psi(A \cap B) \supset \psi(A) \cap \psi(B)$$

Démontrons, par exemple, (4-8'). $x \in \psi(A) \cap \psi(B)$, équivaut à $A \in \mathcal{O}_x$ et $B \in \mathcal{O}_x$, et $x \in \psi(A \cap B)$ à $A \cap B \in \mathcal{O}_x$. L'inclusion de (4-8') est donc vérifiée si et seulement si $A \in \mathcal{O}$ et $B \in \mathcal{O}$ entraine $A \cap B \in \mathcal{O}$.

Il est clair que, si $\mathcal{a}$ est stable pour $\cap$, ψ est croissante si et seulement si $\psi(A \cap B) \subset \psi(A) \cap \psi(B)$. De (4-7) et (4-8') on déduit donc :

$$(4\text{-}9) \quad \mathcal{O} \text{ permis dans } \mathcal{a} \text{ pour } \cup \text{ et stable pour } \cap \Leftrightarrow \psi(A \cap B) = \psi(A) \cap \psi(B)$$

Nous énoncerons cette propriété de $\mathcal{O}$ en disant que <u>$\mathcal{O}$ est un filtre dans $\mathcal{a}$</u>. Ainsi, <u>une application ψ est compatible avec l'intersection finie si et seulement si son noyau $\mathcal{O}$ est un filtre dans $\mathcal{a}$</u>. On en déduit simplement une propriété intéressante :

<u>Proposition 4-1</u> - L'identité est la seule application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même qui soit isotone et compatible avec l'intersection et les translations.

En effet, si ψ est une telle application son noyau est un filtre, d'après (4-9), et vérifie $\mathcal{J} \subset \mathcal{V}$, d'après (4-5). Or $\mathcal{J}$ est un ultra-filtre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. On a donc nécessairement $\mathcal{J} = \mathcal{V}$, et ψ est l'application identique.

Examinons aussi la <u>dualité</u>. Soit ψ définie sur $\mathcal{a}$ et $\mathcal{V}$ son noyau. ψ^* est définie sur $\mathcal{a}^c$, et son noyau $\mathcal{V}^*$ est :

$$(4\text{-}10) \qquad \mathcal{V}^* = \{A : A^c \in \mathcal{a} \quad , A^c \notin \mathcal{V} \}$$

ψ^* est croissante si et seulement si ψ est croissante. Donc $\mathcal{V}^*$ est permis pour $\cup$ dans $\mathcal{a}^c$ si et seulement si $\mathcal{V}$ est permis pour $\cup$ dans $\mathcal{a}$. De même, $\mathcal{V}^*$ est stable pour $\cap$ si et seulement si $\complement\, \mathcal{V}$ est stable pour $\cup$. Il en résulte, d'après (4-8') :

$$(4\text{-}11) \qquad \complement\,\mathcal{V} \text{ stable pour } \cup \;\Leftrightarrow\; \psi(A \cup B) \supset \psi(A) \cup \psi(B)$$

et, d'après (4-9) :

$$(4\text{-}12) \qquad \mathcal{V} \text{ permis dans } \mathcal{a} \text{ pour } \cup \text{ et } \complement\, \mathcal{V} \text{ stable pour } \cup \Leftrightarrow \psi(A \cup B) = \psi(A) \cup \psi(B)$$

Nous énoncerons cette propriété de $\mathcal{V}$ en disant que $\mathcal{V}$ est un <u>antifiltre</u> dans $\mathcal{a}$. <u>Ainsi, ψ est compatible avec la réunion finie si et seulement si son noyau $\mathcal{V}$ est un antifiltre</u>.

Dans $\mathcal{P}(R^n)$, $\mathcal{U}$ est un <u>ultrafiltre</u> si et seulement si $\mathcal{U}$ <u>est à la fois un filtre et un antifiltre</u>. En effet, on sait qu'un filtre $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(R^n)$ on a soit $A \in \mathcal{U}$ soit $A^c \in \mathcal{U}$ (on rappelle que $\emptyset \notin \mathcal{U}$). Si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, $A \notin \mathcal{U}$ et $B \notin \mathcal{U}$ entraine $A^c \in \mathcal{U}$ et $B^c \in \mathcal{U}$, donc $A^c \cap B^c \in \mathcal{U}$ et par suite $\complement(A^c \cap B^c) = A \cup B \notin \mathcal{U}$: $\complement\,\mathcal{U}$ est stable pour $\cup$. Inversement, si $\mathcal{U}$ n'est pas un ultrafiltre, on a un $A \notin \mathcal{U}$ avec $A^c \notin \mathcal{U}$. Mais $\mathbb{R}^n = A \cup A^c \in \mathcal{U}$, donc $\complement\,\mathcal{U}$ n'est pas stable pour $\cup$.

On déduit alors de (4-12) et de (4-9) qu'une application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même compatible avec les translations est <u>compatible à la fois avec la réunion et l'intersection</u> si et seulement si son noyau <u>$\mathcal{U}$ est un ultrafiltre</u>. On sait que les seuls ultrafiltres que l'on sache construire effectivement (bien que l'axiome de Zorn permette d'établir qu'il en existe beaucoup d'autres) sont les ultrafiltres triviaux $\mathcal{J}_x = \{A : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ x \in A\}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$. On a vu que ces ultrafiltres sont les noyaux des translations de $\mathbb{R}^n$. On peut donc conclure que <u>les translations sont les seules applications de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même compatibles avec la réunion, l'intersection et les translations que l'on sera capable de construire effectivement</u> (bien qu'il en existe théoriquement beaucoup d'autres, infiniment plus compliquées).

Par dualité, la proposition 4-1 donne :

<u>Proposition 4-2</u> - L'identité est la seule application de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même qui soit anti isotone et compatible avec les translations et les réunions.

<u>Corollaire</u> - Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, il n'y a pas d'ouverture compatible avec les translations et les réunions, ni de fermeture compatible avec les translations et les intersections, qui soit distincte de l'identité.

Si ψ est une application croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, son noyau et le noyau $\mathcal{V}^*$ de l'application duale sont liés par (4-10), qui, compte tenu de (4-7), s'écrit aussi :

$$(4\text{-}13) \qquad \begin{cases} \mathcal{V}^* = \bigcap\limits_{B \in \mathcal{V}} (V_B \cap \mathcal{A}^c) \\[2ex] \mathcal{V} = \bigcap\limits_{B \in \mathcal{V}^*} (V_B \cap \mathcal{A}) \end{cases}$$

(la deuxième formule s'obtient en échangeant les rôles de ψ et ψ^*. On en déduit :

> <u>Proposition 4-3</u> - Toute application ψ croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, admet deux représentations, l'une sous forme de réunion d'érosions, l'autre sous forme d'intersection de dilatations. Explicitement, en désignant par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}^*$ les noyaux de ψ et de ψ^*, on a pour $A \in \mathcal{A}$:
>
> $$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{V}} A \ominus \check{B} = \bigcap_{B \in \mathcal{V}^*} A \oplus \check{B}$$

La première relation a déjà été établie en (4-7'). La seconde résulte de (4-13) et de (4-1).

En ce qui concerne le plus petit prolongement $\underset{\sim}{\psi}$ et le plus grand $\tilde{\psi}$ dans l'application ψ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^n$, leurs noyaux $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ et $\tilde{\mathcal{V}}$ se déduisent du noyau $\mathcal{V}$ de ψ par les formules :

$$(4\text{-}14) \qquad \underset{\sim}{\mathcal{V}} = \bigcup_{A \in \mathcal{V}} W_A \quad , \quad \tilde{\mathcal{V}} = \bigcap_{A \in \mathcal{V}^*} V_A \quad .$$

et vérifient les relations de dualité :

$$(4\text{-}14') \qquad (\underset{\sim}{\mathcal{V}})^* = \widetilde{(\mathcal{V}^*)} \quad , \quad (\tilde{\mathcal{V}})^* = \underset{\sim}{(\mathcal{V}^*)}$$

Reprenons les notations de la proposition 1-3 : Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, ψ une application sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$ son noyau, ψ_b la restriction à $\mathcal{B}$ de $\underset{\sim}{\psi}$, $\mathcal{V}_b$ son noyau, ψ_a enfin la restriction à $\mathcal{A}$ de $\tilde{\psi}_b$ et $\mathcal{V}_a$ son noyau. On a donc :

$$\mathcal{V}_b = \underset{\sim}{\mathcal{V}_a} \cap \mathcal{B} \quad , \quad \mathcal{V}_a = \tilde{\mathcal{V}}_b \cap \mathcal{A}$$

avec $\mathcal{V}_a \supset \mathcal{V}$. En termes de noyaux, la proposition 1-3 indique que $\psi = \psi_a$ équivaut à : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $A \notin \mathcal{V}_x$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$ et que $A' \subset B' \Rightarrow A' \notin \mathcal{V}_x$ pour $A' \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont stables par translation, on a un énoncé équivalent en se limitant au seul point $x = 0$. Par suite :

> Proposition 4-4 - Avec les notations précédentes, on a $\psi = \psi_a$ si et seulement si le noyau $\mathcal{V}$ de ψ vérifie la propriété suivante : Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $A \notin \mathcal{V}$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$ tel que $A' \notin \mathcal{V}$ pour tout $A' \in \mathcal{A}$ inclus dans B.

Par dualité, on obtient un résultat analogue. Partons de ψ^* définie sur $\mathcal{A}^c$, de noyau $\mathcal{V}^*$, formons la restriction ψ_b^* à $\mathcal{B}^c$ de $\tilde{\psi}^*$, puis la restriction à $\mathcal{A}^c$ de $\underset{\sim}{\psi_b^*}$, soit ψ_a^* (ψ_b^* et ψ_a^* sont effectivement les duales des ψ_a et ψ_b : On a $\psi_a^* \subset \psi^*$ et l'égalité si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{V}^*$ on peut trouver $B \in \mathcal{B}^c$ avec $B \subset A$ telle que $A' \in \mathcal{V}^*$ pour tout $A' \in \mathcal{A}^c$ tel que $B \subset A'$.

4-2 - Applications s c s

Nous allons nous intéresser au cas $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{G}$. Auparavant, établissons quelques résultats préliminaires.

<u>Proposition 4-5</u> - Une application ψ de $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une application s c s de $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$ si et seulement si son noyau est fermé dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$). De même, une application ψ' de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ est une application s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ si et seulement si son noyau $\mathcal{V}'$ est ouvert dans $\mathcal{G}$.

Notons d'abord que si $\mathcal{V}$ est fermé, ψ applique $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$. En effet, $x_n \in \psi(A)$ équivaut à $A_{-x_n} \in \mathcal{V}$ et, si $x_n \to x$, $A_{-x_n} \to A_{-x}$ dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), donc $A_{-x} \in \mathcal{V}$, soit $x \in \psi(A)$: $\psi(A)$ est fermé.

Ensuite, on note pour K compact :

$$\text{(a)} \qquad \psi^{-1}(V_K) = \{A : \psi(A) \cap K \neq \emptyset\} = \bigcup_{x \in K} \mathcal{V}_x$$

Cet ensemble est fermé dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), et par suite ψ est scs, si $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). En effet, si une suite $A_n = B_n \oplus \{x_n\}$, avec $B_n \in \mathcal{V}$ et $x_n \in K$ converge vers A dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), on peut trouver une suite partielle x_{n_k} convergeant vers $x \in K$ telle que B_{n_k} converge vers $B \in \mathcal{V}$ (si l'espace de définition est $\mathcal{K}$, cette possibilité résulte du fait que $B_n = A_n \oplus (-x_n)$ est contenu dans un compact fixe, puisque $A_n \to A$ dans $\mathcal{K}$). Mais alors $B_{n_k} \oplus (x_{n_k}) = A_{n_k}$ converge vers $B \oplus \{x\} = A$, et on a bien $A \in \mathcal{V}_x$, et $A \in \bigcup_{x \in K} \mathcal{V}_x$. Donc $\psi^{-1}(V_K)$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$), et cela signifie justement que ψ est s c s.

Inversement, si ψ est s c s, $\psi^{-1}(V_K)$ est fermé pour tout compact K. En particulier, pour $K = \{0\}$, $\psi^{-1}(V_{\{0\}}) = \mathcal{V}$ d'après (a), et $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (dans $\mathcal{F}$).

L'énoncé relatif à l'application s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ s'obtient enfin par dualité.

Soit alors ψ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathfrak{F}$, et $\mathcal{V}$ son noyau, $\mathcal{V}_g$ et $\mathcal{V}_k$ les noyaux des applications ψ_g de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{P}(R^n)$ et ψ_k de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{P}(R^n)$, construites comme dans les corollaires de Prop. 1-4. Le corollaire 3 nous indique que ψ_g applique $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et ψ_k, $\mathcal{K}$ dans $\mathfrak{F}$, puisqu'il s'agit ici d'applications compatibles avec les translations. On peut le vérifier directement. On a, en effet,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{K \in \mathcal{V}} W_K \cap \mathcal{K}, \quad \mathcal{V}_g = \bigcup_{K \in \mathcal{V}} W_K \cap \mathcal{G}$$

Par suite, $\mathcal{V}_g$ est réunion de W_K ouverts dans $\mathcal{G}$, et la proposition 4-5 montre que ψ_g est une application s c i de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Quant à $\mathcal{V}_k$, d'après (4-14), il est donné par :

$$\mathcal{V}_k = \tilde{\mathcal{V}}_g \cap \mathcal{K} = \bigcap_{A \in \mathcal{V}_g^*} V_A \cap \mathcal{K}$$

Mais $\mathcal{V}_g^*$, dual de $\mathcal{V}_g$ est contenu dans $\mathfrak{F}$. Pour $A \in \mathfrak{F}$, $V_A \cap \mathcal{K}$ est fermé dans $\mathcal{K}$, donc $\mathcal{V}_k$ est fermé dans $\mathcal{K}$, et, d'après Prop. 4-5, ψ_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathfrak{F}$.

Le corollaire de prop. 1-4 nous indique même que ψ_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans lui-même si ψ est une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$.

ψ_k majore ψ sur $\mathcal{K}$. D'après la prop. 4-4, on a $\psi_k = \psi$ si et seulement si pour tout $K \notin \mathcal{V}$ on peut trouver $G \in \mathcal{G}$ avec $K \subset G$ et $K' \notin \mathcal{V}$ pour tout compact $K' \subset G$. Mais cette condition exprime exactement que $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Ainsi, compte tenu de la prop. 4-5 on a $\psi_k = \psi$ si et seulement si ψ est elle-même une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathfrak{F}$. Par suite si ψ_1 est une majorante s c s de ψ, les opérations ci-dessus appliquées à ψ et à ψ_1 conduisent à la relation $\psi_k \subset \psi_1$, de sorte que ψ_k est la plus petite majorante s c s de ψ (ou, ce qui revient au même, $\mathcal{V}_k$ est la fermeture de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{K}$).

On aura des résultats analogues en partant d'une application ψ' de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ et en formant ψ'_k et ψ'_g.

Au lieu de ψ_g ou ψ'_g, on peut considérer leurs duales ψ_g^* et $\psi_g'^*$ que nous désignerons par ψ_f et ψ'_f : ce sont des applications de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ s c s si et seulement si leurs duales le sont. Nous désignerons par $\mathcal{V}_f$ et $\mathcal{V}'_f$ leurs noyaux :

$$\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_g^* \quad , \quad \mathcal{V}'_f = \mathcal{V}_g'^*$$

Résumons :

Proposition 4-6 - Soit ψ une application de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$), $\mathcal{V}$ son noyau, $\psi_f = \psi_g^*$ et $\mathcal{V}_f$ son noyau, ψ_k et $\mathcal{V}_k$ son noyau construits comme ci-dessus. ψ_f est une application s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et $\mathcal{V}_f$ est fermé dans $\mathcal{F}$. ψ_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ (resp. dans $\mathcal{K}$) et $\mathcal{V}_k$ est fermé dans $\mathcal{K}$. Plus précisément, $\mathcal{V}_k$ est la fermeture de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{K}$, et ψ_k la plus petite majorante s c s de ψ. On a $\psi = \psi_k$ si et seulement si ψ est elle-même s c s. Le noyau de ψ_f est :

$$\mathcal{V}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}} (V_K \cap \mathcal{F})$$

et les noyaux de $\mathcal{V}_k$ et $\mathcal{V}_f$ sont liés par les formules réciproques :

$$(4\text{-}15) \qquad \mathcal{V}_k = \bigcap_{F \in \mathcal{V}_f} (V_F \cap \mathcal{K}) \quad , \quad \mathcal{V}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}_k} (V_K \cap \mathcal{F})$$

De même, si ψ' est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}'$ son noyau, on forme successivement ψ'_k, de noyau $\mathcal{V}'_k = \bigcap_{F \in \mathcal{V}'} (V_F \cap \mathcal{K})$ et ψ'_f dont le noyau est $\mathcal{V}'_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}'_k} (V_K \cap \mathcal{F})$. ψ'_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, ψ'_f est la plus petite application s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ majorant ψ'. En particulier $\psi'_f = \psi'$ si et seulement si ψ' est s c s. Enfin les relations de dualité (4-15) sont valables pour $\mathcal{V}'_k$ et $\mathcal{V}'_f$.

<u>Corollaire</u> - Toute application ψ_k s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ est de la forme :

$$\psi_k(K) = \bigcap_{F \in \mathcal{B}} K \oplus \check{F} \qquad (K \in \mathcal{K})$$

où $\mathcal{B}$ est une partie fermée de $\mathcal{F}$, et toute application ψ_f s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ est la forme

$$\psi_f(F) = \bigcap_{K \in \mathcal{B}'} F \oplus \check{K} \qquad (F \in \mathcal{F})$$

où $\mathcal{B}'$ est une partie fermée de $\mathcal{K}$. Inversement, toute application de ce type est s c s.

On voit ici se poser deux questions - d'ailleurs liées. A quelle condition une application ψ_k s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ applique-t-elle en fait $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, et est-elle s c s pour la topologie de $\mathcal{K}$; à quelle condition cette application admet-elle un prolongement s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$?

Supposons que ψ_k admette un prolongement s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, soit ψ'_f. D'après (4-15), ou le corollaire de la proposition, cela implique que ψ_k soit <u>bornée</u>, en ce sens qu'il existe un compact K_o tel que :

$$\psi_k(K) \subset K \oplus K_o \qquad (K \in \mathcal{K})$$

En particulier, ψ_k applique en fait $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ et (comme on le vérifie sans peine) est s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Ce prolongement, s'il existe, n'est pas nécessairement unique, mais il existe toujours une plus petite application ψ'_f s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ dont la restriction à $\mathcal{K}$ majore ψ_k. Elle est définie comme l'application dont le noyau $\mathcal{V}'_f$ est la fermeture dans $\mathcal{F}$ de $\underset{\sim}{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{F}$, soit :

(4-16) $$\mathcal{V}'_f = \overline{(\underset{\sim}{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{F})}$$

L'application ψ'_f ainsi définie est effectivement un prolongement de $\mathcal{K}$ si et seulement si on a :

$$\mathcal{V}_k = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$$

Par suite ψ_k admet des prolongements s c s de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ si et seulement si on a :

(4-16') $$\mathcal{V}_k = \overline{(\tilde{\mathcal{V}}_k \cap \mathfrak{F})} \cap \mathcal{K} = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}$$

et dans ce cas le plus petit prolongement ψ'_f s c s de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ est définie par son noyau (4-16). La condition (4-16') exprime exactement ceci : si une suite de fermés F_n telle que chaque F_n contienne un $K_n \in \mathcal{V}_k$ converge (au sens de la topologie de $\mathfrak{F}$) vers un compact K, on a $K \in \mathcal{V}_k$.

Pour caractériser de manière plus précise la structure de l'ensemble $\mathcal{V}'_f$, notons que l'on a :

$$\mathcal{V}_k = \bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathcal{K}$$

puis :

$$\tilde{\mathcal{V}}_k \cap \mathfrak{F} = \bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathfrak{F}$$

Mais pour tout $K \in \mathcal{K}$, le fermé de $\mathfrak{F}$ $W_K \cap \mathfrak{F}$ est manifestement la fermeture dans $\mathfrak{F}$ de $W_K \cap \mathcal{K}$ (si une suite de compacts $K_n \supset K$ converge dans $\mathfrak{F}$ vers $F \in \mathfrak{F}$, on a encore $F \supset K$). Par conséquent :

$$\mathcal{V}'_f = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathfrak{F}} = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} \overline{W_K \cap \mathcal{K}}}$$

et, d'après la propriété bien connue des fermetures topologiques :

(4-17) $$\mathcal{V}'_f = \overline{\bigcup_{K \in \mathcal{V}_k} W_K \cap \mathcal{K}} = \overline{\mathcal{V}_k}$$

$\mathcal{V}_f$ est simplement la fermeture dans $\mathfrak{F}$ de $\mathcal{V}_k$ considéré comme sous-ensemble de $\mathcal{F}$. En conséquence, la condition (4-17) équivaut à :

(4-17') $$\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}_k} \cap \mathcal{K}$$

et signifie : si une suite $K_n \in \mathcal{V}_k$ converge <u>au sens de la topologie de $\mathcal{F}$</u> (et non de celle de $\mathcal{K}$, c'est-à-dire sans vérifier nécessairement la condition $K_n \subset K_o$ pour un compact K_o fixe) vers un compact K, on a $K \in \mathcal{V}_k$.

D'après sa définition (4-17), $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}_k}$ vérifie toujours la relation :

(4-18) $$\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}} = \overline{\mathcal{V}_k \cap \mathcal{K}}$$

En effet, $\mathcal{V}'_f \supset \mathcal{V}_k$ donne $\mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K} \supset \mathcal{V}_k$ et $\overline{\mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K}} \supset \overline{\mathcal{V}_k} = \mathcal{V}'_f$. Mais, $\mathcal{V}'_f$ étant fermé, l'inclusion inverse est toujours vérifiée.

Dans le cas général, il peut arriver que l'on ait $\mathcal{V}'_f = \mathcal{F}$, et que par suite ϕ'_f soit l'application triviale $\phi'_f(F) = \mathbb{R}^n$. Il en est ainsi, si et seulement s'il existe dans $\mathcal{V}_k$ une suite K_n de compacts convergeant vers $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$ (cette suite K_n ne converge pas dans $\mathcal{K}$, car $\mathcal{K}\setminus\emptyset$ est fermé dans $\mathcal{K}$). Pour que l'on n'ait pas $\emptyset \in \mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}_k}$, il faut et il suffit qu'il existe un voisinage de $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$, c'est-à-dire un V^{K_o}, disjoint de $\mathcal{V}_k$, autrement dit :

(4-19) $$\emptyset \notin \mathcal{V}'_f \Leftrightarrow \mathcal{V}_k \subset V_{K_o} \cap \mathcal{K}$$

A son tour, cette condition équivaut à dire que ϕ_k est <u>bornée</u> dans le sens déjà cité : il existe un compact K_o tel que :

(4-20) $$\phi_k(K) \subset K \oplus \check{K}_o \qquad (K \in \mathcal{K})$$

Inversement, supposons que ϕ_k vérifie (4-20). On a alors $\mathcal{V}'_f \subset \overline{V_{K_o} \cap \mathcal{K}} = V_{K_o} \cap \mathcal{F}$, et ϕ'_f vérifie la même relation (4-20). Désignons alors par ϕ''_f sa restriction à $\mathcal{K}$, dont le noyau est :

$$\mathcal{V}''_k = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K} = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K} \tag{4-21}$$

ϕ''_k majore ϕ_k, et l'on a $\phi_k = \phi''_k$ si et seulement si (4-17') est vérifiée (c'est-à-dire si et seulement si ϕ_k admet des prolongements s c s sur $\mathcal{F}$). Cette majorante ϕ''_k admet toujours des prolongements s c s sur $\mathcal{F}$, et, plus précisément, c'est la plus petite majorante de ϕ_k qui possède cette propriété. En effet, d'après (4-18), on a toujours $\overline{\mathcal{V}}''_k = \mathcal{V}'_f$, et par suite $\overline{\mathcal{V}}''_k \cap \mathcal{K} = \mathcal{V}'_f \cap \mathcal{K} = \mathcal{V}'_f$ .Il est clair que ϕ''_k est la plus petite majorante de ϕ_k vérifiant cette propriété, puisque $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}''_k$ et que ϕ'_f est la plus petite application s c s sur $\mathcal{F}$ majorant ϕ_k sur $\mathcal{K}$.

Remarquons, pour terminer, que la condition (4-17') équivaut à dire que ϕ_k est une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ pour la topologie induite par celle de $\mathcal{F}$ (aussi bien que pour la topologie myope). En effet, cette dernière condition exprime que $\mathcal{V}_k$ est la restriction à $\mathcal{K}$ d'un fermé de $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{V}_k = \mathcal{V} \cap \mathcal{K}$ pour un $\mathcal{V}$ fermé dans $\mathcal{F}$, d'où $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K}$.

Enonçons ces résultats :

Proposition 4-7 - Pour qu'une application s c s ϕ_k de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$ admette un prolongement sur $\mathcal{F}$ s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

1 - ϕ_k est une application de $\mathcal{K}$ dans lui-même s c s pour la topologie induite sur $\mathcal{K}$ par la topologie de $\mathcal{F}$.

2 - Le noyau de $\mathcal{V}_k$ vérifie la relation $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{V}}_k$ désignant la fermeture de $\mathcal{V}_k$ dans $\mathcal{F}$.

Lorsqu'il en est ainsi, le plus petit prolongement s c s de ψ'_k sur $\mathcal{F}$ est l'application ψ'_f dont le noyau est $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}_k$.

Pour qu'il existe une application non triviale s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ majorant ψ_k sur $\mathcal{K}$, il faut et il suffit que ψ_k soit bornée, c'est-à-dire qu'il existe un compact K_o tel que l'on ait :

$$\psi_k(K) \subset K \oplus K_o \qquad (K \in \mathcal{K})$$

La plus petite application ψ'_f s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ majorant ψ_k sur $\mathcal{K}$ est alors définie par son noyau

$$\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}_k$$

La restriction ψ''_k de ψ'_f à $\mathcal{K}$, définie par son noyau $\mathcal{V}''_k = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K}$ est alors la plus petite majorante s c s sur $\mathcal{K}$ de ψ_k admettant un prolongement s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et le plus petit prolongement s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ de cette application ψ''_k coïncide avec ψ'_f, autrement dit, on a :

$$\mathcal{V}''_k = \overline{\mathcal{V}}''_k \cap \mathcal{K}$$

Examinons ces résultats du point de vue de la dualité exprimée par les formules (4-15), et soit ψ_f l'application s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ associée à ψ_k dont le noyau $\mathcal{V}_f$ est défini en (4-15). Supposons que ψ_k admette un plus petit prolongement ψ'_f s c s sur $\mathcal{F}$, et soit $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}_k$ son noyau. A ψ'_f, les formules de dualité (4-15) permettent d'associer une application ψ'_k de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}$, définie par son noyau :

$$\mathcal{V}'_k = \bigcap_{F \in \mathcal{V}'_f} (V_F \cap \mathcal{K})$$

Comme $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}_k \supset \mathcal{O}_k$, on a :

$$\mathcal{O}'_k \subset \bigcap_{K \in \mathcal{O}_k} (V_K \cap \mathcal{K}) = \mathcal{O}_f \cap \mathcal{K}$$

ϕ'_k est donc une application bornée de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, majorée par la restriction à $\mathcal{K}$ de ϕ_f. Elle admet donc une plus petite minorante s c s ϕ''_k se prolongeant par une application s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{O}''_k$ son noyau et $\mathcal{O}''_f$ le noyau qui lui est associé par dualité. Comme $\mathcal{O}''_k \supset \mathcal{O}'_k$, on a $\mathcal{O}''_f \subset \mathcal{O}'_f$. Mais de même $\mathcal{O}'_k \subset \mathcal{O}_f$ implique $\mathcal{O}''_k \subset \mathcal{O}_f$, puisque ϕ''_k est la plus petite majorante s c s admettant un prolongement s c s sur $\mathcal{F}$, d'où par dualité $\mathcal{O}''_f \supset \mathcal{O}_k$. Finalement $\mathcal{O}_k \subset \mathcal{O}''_f \subset \mathcal{O}'_f$. Or ϕ'_f est le plus petit prolongement s c s de $\mathcal{O}_k$. On a donc $\mathcal{O}'_f = \mathcal{O}''_f$, et par dualité $\mathcal{O}''_k = \mathcal{O}'_k$. Par conséquent $\mathcal{O}'_k$ vérifie lui aussi la relation

$$\mathcal{O}'_k = \overline{\mathcal{O}}'_k \cap \mathcal{K}$$

Soit alors ϕ'''_f le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de $\phi'_k = \phi''_k$, et $\mathcal{O}'''_f$ son noyau. $\mathcal{O}'_k \subset \mathcal{O}_f$ entraine $\mathcal{O}'''_f \subset \mathcal{O}_f$. Soit ϕ'''_k l'application de noyau $\mathcal{O}'''_k$ associée à $\mathcal{O}'''_f$ selon les formules (4-15). On a cette fois $\mathcal{O}'''_k \supset \mathcal{O}_k$. Mais $\mathcal{O}'''_f \supset \mathcal{O}'_k$ donne aussi $\mathcal{O}'''_k \subset \mathcal{O}'_f$. Donc $\mathcal{O}'_f \supset \mathcal{O}'''_k \supset \mathcal{O}_k$ Or $\mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K} = \mathcal{O}_k$ et $\mathcal{O}'''_k \subset \mathcal{K}$. Donc $\mathcal{O}'''_k = \mathcal{O}_k$, et par suite aussi $\mathcal{O}'''_f = \mathcal{O}_f$.

ϕ_f est donc effectivement le plus petit prolongement s c s de ϕ'_k sur $\mathcal{F}$. En particulier, on a

$$\mathcal{O}_f = \overline{\mathcal{O}}'_k \quad \text{et} \quad \mathcal{O}'_k = \mathcal{O}_f \cap \mathcal{K}$$

<u>Proposition 4-8</u> - Soit ϕ_k une application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ vérifiant la condition $\mathcal{O}_k = \overline{\mathcal{O}}_k \cap \mathcal{K}$, et ϕ'_f son plus petit prolongement s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, avec le noyau $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}}_k$. Les applications ϕ'_k et ϕ_f de noyau :

$$\mathcal{O}'_k = \bigcap_{F \in \mathcal{O}'_f} (V_F \cap \mathcal{K})$$

$$\mathcal{O}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{O}_k} (V_K \cap \mathcal{F})$$

vérifient les conditions :

$$\mathcal{O}_f = \overline{\mathcal{O}'_k} \quad , \quad \mathcal{O}'_k = \mathcal{O}_f \cap \mathcal{K}$$

et ψ_f est le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de ψ'_k. Par dualité, on a aussi :

$$\mathcal{O}_k = \bigcap_{F \in \mathcal{O}_f} (V_F \cap \mathcal{K}) \;,\; \mathcal{O}'_f = \bigcap_{K \in \mathcal{O}'_k} (V_K \cap \mathcal{F})$$

4-3 - Eléments minimaux d'une application s c s

Si ψ est une application s c s de $\mathcal{K}$ ou de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ (ou dans $\mathcal{K}$), son noyau $\mathcal{O}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ (ou dans $\mathcal{F}$), et il résulte facilement du théorème de Zorn que, pour tout $A \in \mathcal{O}$, il existe un élément minimal $B \subset A$ appartenant à $\mathcal{O}$ (i.e. tel que $B' \subset B$ et $B' \in \mathcal{O} \Rightarrow B' = B$). Soit $\mathcal{B}_o$ l'ensemble des éléments minimaux. On a alors manifestement :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} W_B \cap \mathcal{a}$$

(avec $\mathcal{a} = \mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ selon que ψ est définie sur $\mathcal{K}$ ou sur $\mathcal{F}$). Autrement dit, si l'on désigne par ψ_o la restriction de ψ à $\mathcal{B}_o$, ψ est le plus petit prolongement de ψ_o sur $\mathcal{a}$ ($= \mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$).

$\mathcal{B}_o$ est d'ailleurs la plus petite partie de $\mathcal{a}$ qui possède cette propriété. En effet, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{a}$ vérifiant :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (W_B \cap \mathcal{a})$$

Si $B_o \in \mathcal{B}_o$, on a $B_o \in \mathcal{O}$, donc il existe $B \in \mathcal{B}$ avec $B \subset B_o$. Mais $B \in \mathcal{O}$, et B_o est minimal dans $\mathcal{O}$, donc $B = B_o$, et $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{B}$.

Par exemple, soit $\mathcal{O}'_f$ le noyau d'une application ϕ'_f s c s de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ vérifiant $\mathcal{O}'_f = \overline{\mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K}}$, et ϕ_k l'application s c s de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ de noyau $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K}$, de sorte que ϕ'_f est le plus petit prolongement s c s sur $\mathfrak{F}$ de ϕ_k. Désignons par $\mathcal{B}'_f$ l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{O}'_f$. On a donc :

(a) $$\mathcal{O}'_f = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_f} (W_{B'} \cap \mathfrak{F})$$

Avec les notations de la prop. 4-8, l'application ϕ'_k associée à ϕ'_f par dualité a donc le noyau :

$$\mathcal{O}'_k = \bigcap_{B' \in \mathcal{B}'_f} (V_{B'} \cap \mathcal{K})$$

D'autre part, on a $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}'_f \cap \mathcal{K}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{O}_k = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_f} (W_{B'} \cap \mathcal{K}) = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (W_{B'} \cap \mathcal{K})$$

d'où, par dualité :

$$\mathcal{O}_f = \bigcap_{B' \in \mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (V_{B'} \cap \mathfrak{F})$$

et puisque $\mathcal{O}_f = \overline{\mathcal{O}'_k \cap \mathcal{K}}$ d'après la prop. 4-8 :

$$\mathcal{O}'_k = \bigcap_{\mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (V_{B'} \cap \mathcal{K})$$

Or, à nouveau par dualité, ceci donne :

(b) $$\mathcal{O}'_f = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (W_{B'} \cap \mathfrak{F})$$

Comparons (a) et (b). Par construction, $\mathcal{B}'_f$ est la plus petite partie de $\mathfrak{F}$ telle que (a) soit réalisée. On a donc $\mathcal{B}'_f \subset \mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}$, c'est-à-dire l'égalité $\mathcal{B}'_f = \mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}$, ou encore :

$$\mathcal{B}'_f \subset \mathcal{K}$$

Les <u>éléments minimaux</u> de $\mathcal{O}'_f$ <u>sont compacts</u>.

Inversement, supposons que les éléments minimaux du noyau $\mathcal{O}'_f$ d'une application ψ'_f s c s de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ soient compacts, et désignons par $\mathcal{B}'_f \subset \mathcal{K}$ l'ensemble de ces éléments minimaux. Désignons par ψ_k la restriction de ψ'_f à $\mathcal{K}$, et par $\mathcal{O}_k$ son noyau :

(c) $$\mathcal{O}_k = \bigcup_{K \in \mathcal{B}'_f} (W_K \cap \mathcal{K}) \subset \mathcal{O}'_f$$

En tant que restriction à $\mathcal{K}$ d'une application s c s sur $\mathfrak{F}$, ψ_k est bornée. Considérons $\overline{\mathcal{O}_k}$, fermeture de $\mathcal{O}_k$ dans $\mathfrak{F}$. D'après (c), on a :

$$\overline{\mathcal{O}_k} \supset \bigcup_{K \in \mathcal{B}'_f} (W_K \cap \mathfrak{F}) = \mathcal{O}'_f$$

Mais, d'après (c), on a aussi $\overline{\mathcal{O}_k} \subset \mathcal{O}'_f$, d'où l'égalité $\overline{\mathcal{O}_k} = \mathcal{O}'_f$, et ψ'_f est bien le plus petit prolongement s c s sur $\mathfrak{F}$ de sa restriction ψ_k à $\mathcal{K}$. Enonçons :

<u>Proposition 4-9</u> - Pour qu'une application ψ'_f s c s de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ soit le plus petit prolongement s c s sur $\mathfrak{F}$ de sa restriction ψ_k à $\mathcal{K}$, il faut et il suffit que les éléments minimaux de son noyau $\mathcal{O}'_f$ soient compacts. Les éléments minimaux du noyau $\mathcal{O}_f$ de l'application ψ_f s c s de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}$ associées à ψ_k par dualité sont alors également dans $\mathcal{K}$.

Nous avons ainsi caractérisé la classe des "bonnes" applications s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ comme la classe des applications dont les noyaux ont leurs éléments minimaux dans $\mathcal{K}$.

4-4 - Ouvertures et Fermetures

Soit ψ une ouverture compatible avec les translations, définie sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ stable pour les translations. La famille $\mathcal{B}$ des invariants est évidemment stable pour translation, et cette propriété est caractéristique. Soit $\mathcal{B}_o$ une base de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire une famille de partie engendrant $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ lorsqu'on la ferme pour les translations et les réunions infinies. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a alors :

$$\psi(A) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B_x \subset A}} B_x = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{R}_n \\ B_x \subset A}} B_x$$

Mais l'ouverture $A_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$ de A selon B est justement :

$$A_B = \bigcup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ B_x \subset A}} B_x$$

Par conséquent, on a :

$$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} A_B \tag{4-22}$$

Par dualité, ψ^* est une fermeture sur $\mathcal{A}^c$, $\mathcal{B}^c$ la famille des invariants de ψ^* et $\mathcal{B}_o^c$ une base de $\mathcal{B}^c$ pour les translations et l'intersection infinie, et on a :

$$\psi^*(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}_o} A^B \tag{4-23}$$

Ainsi :

<u>Proposition 4-10</u> - Si ψ est une ouverture sur $\mathcal{A}$ compatible avec les translations, et $\mathcal{B}_0$ une base de la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ψ, l'application ψ est réunion des ouvertures selon les ensembles $B \in \mathcal{B}_0$, et la fermeture duale ψ^* est intersection des fermetures selon les éléments de $\mathcal{B}_0$.

Nous nous interesserons essentiellement aux "bonnes" ouvertures et fermetures sur $\mathcal{K}$ ou sur $\mathcal{F}$, c'est-à-dire à celles qui possèdent la propriété énoncée dans Prop. 4-9.

Si ψ est une ouverture sur $\mathcal{A}$, compatible avec les translations, et $\mathcal{B}$ l'ensemble de ses éléments invariants, le noyau de ψ est évidemment

(4-24) $$\mathcal{V} = (\underset{\sim}{\mathfrak{I} \cap \mathcal{B}}) \cap \mathcal{A}$$

puisque ψ est le plus petit prolongement sur $\mathcal{A}$ de l'identité sur $\mathcal{B}$. Prenons $\mathcal{A} = \mathcal{F}$. D'après la proposition 2-5, ψ sera s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ si et seulement si la famille $\mathcal{B}$ est fermée dans $\mathcal{F}$ et stable pour la réunion. D'après (4-24), son noyau est alors :

$$\mathcal{V} = (\underset{\sim}{\mathfrak{I} \cap \mathcal{B}}) \cap \mathcal{F}$$

Soit $\mathcal{B}_0$ la famille des éléments minimaux de $\mathcal{V}$. On a évidemment $\mathcal{B}_0 \subset \mathfrak{I} \cap \mathcal{B}$. D'après la prop. 4-9, ψ est une "bonne" ouverture s c s si et seulement si $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{K}$, et ψ admet la représentation :

(4-25) $$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} A_B$$

La famille $\mathcal{B}_o$ des éléments minimaux n'est pas nécessairement fermée dans $\mathcal{K}$ ni dans $\mathcal{F}$, mais elle possède les propriétés suivantes :

1 - "Si une suite K_n de compacts de $\mathcal{B}_o$ converge dans $\mathcal{F}$ vers un fermé F, il existe $B_o \in \mathcal{B}_o$ avec $B_o \subset F$".

2 - $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{G} \cap \mathcal{K}$, et pour tout $B \in \mathcal{B}_o$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $B_x \subset \mathcal{G}$, c'est-à-dire $O \in B_x$, entraine $\exists B' \in \mathcal{B}_o$ $B' \subset B_x$. Ou encore, ce qui revient au même :

$$B \in \mathcal{B}_o,\ x \in \check{B} \Rightarrow \exists B' \in \mathcal{B}_o,\ B' \subset B_x$$

Inversement, soit $\mathcal{B}_o$ une famille de compacts contenant O et vérifiant ces 2 propriétés. Définissons ψ par la formule (4-25), soit explicitement pour $A \in \mathcal{F}$

$$\psi(A) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_o \\ B_x \subset A}} B_x$$

ψ est la restriction à $\mathcal{F}$ du plus petit prolongement de l'identité sur la famille $\mathcal{B}$ stable pour les translations et les réunions finies engendrées par $\mathcal{B}_o$. Ce sera une ouverture sur $\mathcal{F}$ si ψ applique $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Caractérisons le noyau $\mathcal{V}$ de ψ. On a $A \in \mathcal{V}$, c'est-à-dire $O \in \psi(A)$ si et seulement si $\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ et $B \in \mathcal{B}_o$ avec $O \in B_x \subset A$.

D'après la propriété 2, ceci équivaut simplement à $\exists\, B \in \mathcal{B}_o$ tel que $O \in B \subset A$, c'est-à-dire à :

$$\mathcal{V} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} (W_B \cap \mathcal{F})$$

Montrons que ce noyau est fermé dans $\mathcal{F}$. Si $A_n \in \mathcal{V}$ converge vers A dans $\mathcal{F}$, on peut trouver $B_n \in \mathcal{B}_o$ avec $B_n \subset A_n$. Soit F_o une valeur d'adhérence de B_n dans $\mathcal{F}$. D'après 2, $\exists\ B_o \in \mathcal{B}_o$ avec $B_o \subset F_o$. On a donc $B_o \subset F_o \subset A$, et $A \in \mathcal{V}$. Ainsi $\mathcal{V}$ est fermé, et ψ est une ouverture s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Comme les éléments minimaux de $\mathcal{V}$ sont contenus dans $\mathcal{B}_o$, donc compacts, la Prop. 4-9 nous garantit que ψ possède les bonnes propriétés requises. Enonçons :

<u>Proposition 4-11</u> - Soit ψ une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Pour que ψ soit une ouverture s c s sur $\mathcal{F}$ et coïncide avec le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$ (ou, ce qui revient au même, pour que son noyau $\mathcal{V}$ soit fermé dans $\mathcal{F}$ et vérifie $\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V} \cap \mathcal{K}}$) il faut et il suffit que son noyau $\mathcal{V}$ soit de la forme :

$$\mathcal{V} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} (W_B \cap \mathcal{F})$$

où $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{I} \cap \mathcal{K}$ est une famille de compacts contenant l'origine et vérifiant de plus les deux propriétés suivantes :

1 - Pour tout $B \in \mathcal{B}_o$ et tout $x \in \check{B}$, il existe $B' \in \mathcal{B}_o$ avec $B' \subset B_x$

2 - Si une suite K_n de compacts dans $\mathcal{B}_o$ converge dans $\mathcal{F}$ vers un fermé F, on peut trouver $B_o \in \mathcal{B}_o$ avec $B_o \subset F$.

Lorsque cette condition est réalisée, ψ admet les représentations :

$$\psi(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} A_B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} A \ominus \check{B}$$

Ces deux représentations de ψ ne sont pas réellement distinctes, puisque $\mathcal{B}_o$ contient tous les translatés B_x tels que $O \in B_x$ de chaque $B \in \mathcal{B}_o$. Dans les applications, les deux cas les plus simples où la propriété 2 est automatiquement vérifiée sont les suivants :

$\mathcal{B}_o$ fermé dans $\mathcal{F}$

$\mathcal{B}_0$ compact dans $\mathcal{K}$ (donc aussi fermé dans $\mathcal{F}$), c'est-à-dire : il existe un compact fixe K_0 avec $B \subset K_0$ pour tout $B \in \mathcal{B}_0$.

<u>Corollaire</u> - Soit ψ une ouverture s c s sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - ψ est le plus petit prolongement sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$.

2 - ψ vérifie la propriété d'approximation :

$$\psi(F) = \bigcup_{\substack{K \subset F \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)$$

3 - ψ est le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$.

Il est clair que 1 et 2 sont équivalents et entrainent 3. Inversement, supposons 3 vérifiée. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, on a $\psi(F) \supset \bigcup_{\substack{K \subset F \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)$.

Montrons l'inclusion inverse. Soit donc $x \in \psi(F)$, c'est-à-dire $F_{-x} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ désignant le noyau de ψ. D'après la proposition, il existe un compact $B \in \mathcal{V}$, avec $B \subset F_{-x}$, soit $B_x \subset F$. Mais $B \in \mathcal{V}$ donne $0 \in \psi(B)$, et $x \in \psi(B_x)$. On a donc $x \in \psi(B_x) \subset F$, donc $x \in \bigcup_{\substack{K \subset F \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)$, et la propriété 2 est vérifiée.

D'après les propositions 2-1, 4-8 et 4-9 une application ψ' de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sera une fermeture s c s sur $\mathcal{F}$ possèdant les "bonnes" propriétés habituelles si et seulement si son noyau $\mathcal{V}'$ est de la forme :

$$\mathcal{V}' = \bigcap_{K \in \mathcal{V} \cap \mathcal{K}} (V_K \cap \mathcal{F})$$

$\mathcal{V}$ désignant le noyau d'une "bonne" ouverture sur $\mathcal{F}$, de la forme

$$\mathcal{V} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} (W_B \cap \mathcal{F})$$

Comme $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{V}$, on a $\mathcal{V}' \subset \bigcap_{K \in \mathcal{B}_0} (V_K \cap \mathcal{F})$. Mais $\mathcal{B}_0$ contient les éléments minimaux de $\mathcal{V}$. Comme tout $K \in \mathcal{V}$ contient un élément minimal de $\mathcal{V}$, tout fermé F rencontrant tous les $B \in \mathcal{B}_0$ rencontre aussi tous les $K \in \mathcal{V} \cap \mathcal{K}$, (et tous les $F \in \mathcal{V}$) et appartient à $\mathcal{V}'$. On a donc l'inclusion inverse, et l'égalité :

$$\mathcal{V}' = \bigcap_{K \in \mathcal{B}_0} (V_K \cap \mathcal{F})$$

<u>Proposition 4-12</u> - Pour qu'une application ψ' de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ soit une fermeture s c s sur $\mathcal{F}$ et coïncide avec le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$ (qui est elle-même alors une fermeture s c s sur $\mathcal{K}$) il faut et il suffit que son noyau $\mathcal{V}'$ soit de la forme :

$$\mathcal{V}' = \bigcap_{K \in \mathcal{V} \cap \mathcal{K}} (V_K \cap \mathcal{F})$$

$\mathcal{V}$ désignant le noyau d'une fermeture sur $\mathcal{F}$ vérifiant les propriétés de Prop. 4-11. Il en est ainsi si et seulement si il existe une famille $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$ vérifiant les propriétés de Prop. 4-11 telle que l'on ait :

$$\mathcal{V}' = \bigcap_{K \in \mathcal{B}_0} (V_K \cap \mathcal{F})$$

ψ' admet alors les représentations :

$$\psi'(A) = \bigcap_{K \in \mathcal{B}_0} A \oplus \check{K} = \bigcap_{K \in \mathcal{B}_0} A^K$$

Nous verrons des exemples d'ouvertures s c s dans le prochain chapitre. Donnons d'abord quelques propriétés complémentaires.

4-5 - Compléments

Ces compléments ne seront pas utilisés dans ce qui suit. Examinons d'abord la compatibilité avec $\cap$ et $\cup$ des applications s c s de $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$.

Proposition 4-13 - Pour qu'une application ψ s c s de $\mathcal{K}$ (ou de $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$ soit compatible avec l'intersection, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $\psi(A) = A \ominus \check{F}_0$ pour un fermé F_0 fixe.

En effet, ψ est une telle application si et seulement si son noyau est un filtre fermé dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) (Prop. 4-5 et relation 4-9). Etant stable pour $\cap$ et fermé, $\mathcal{V}$ contient son intersection

$$F_0 = \bigcap_{F \in \mathcal{V}} F$$

et on a $\mathcal{V} \subset W_{F_0}$. Mais comme $\mathcal{V}$ est permis pour $\cup$, tout $A \supset F_0$ $A \in \mathcal{K}$ ($\in \mathcal{F}$) est dans $\mathcal{V}$. Donc $\mathcal{V} = W_{F_0} \cap \mathcal{K}$ (ou $W_{F_0} \cap \mathcal{F}$) et $\psi(A) = A \ominus \check{F}_0$. On vérifie immédiatement que ces conditions sont également suffisantes.

Proposition 4-14 - Pour que l'application ψ s c s de $\mathcal{K}$ (ou de $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{F}$ soit compatible avec la réunion, il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $\psi(A) = A \oplus F_0$, $A \in \mathcal{K}$, F_0 fermé fixe (resp. $\psi(A) = A \oplus K_0$, $A \in \mathcal{F}$ pour un compact K_0 fixe). ψ est alors continue.

D'après prop. 4-5 et la relation (4-12) ψ vérifie ces propriétés si et seulement si son noyau $\mathcal{V}$ est un antifiltre fermé. Donc, si ψ est défini sur $\mathcal{K}$, le lemme 2 ci-dessous montre que l'on a $\mathcal{V} = V_{F_0} \cap \mathcal{K}$ pour un $F_0 \in \mathcal{F}$, et $\psi(K) = K \oplus F_0$. Si ψ est défini sur $\mathcal{F}$, son noyau $\mathcal{V}$

est un antifiltre fermé dans $\mathcal{F}$ si et seulement si le noyau $\mathcal{V}^*$ de ψ^* est un filtre ouvert dans $\mathcal{G}$. Le lemme 3 ci-dessous montre que l'on a $\mathcal{V}^* = W_{K_0}$ pour $K_0 \in \mathcal{K}$, d'où $\mathcal{V} = V_{K_0}$ et $\psi(F) = F \oplus K_0$ sur $\mathcal{F}$.

<u>Lemme 2</u>. Soit E un espace LCD, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E)$ l'espace des compacts de E. Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{K}$ ne contenant pas $\emptyset$ est un antifiltre fermé dans $\mathcal{K}$ si et seulement si elle est de la forme V_{F_0} pour un $F_0 \in \mathcal{F}$, $F_0 \neq E$. Une partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{K}$ est ouverte permise dans $\mathcal{K}$ pour $\cap$ et stable pour la réunion finie si et seulement si elle est de la forme :

$$\mathcal{V} = S^G \cap \mathcal{K} = \{K \in \mathcal{K} \text{ , } K \subset G\}$$

pour un ouvert $G \in \mathcal{G}$.

Ces deux énoncés étant clairement équivalents, démontrons le second en écrivant S^G au lieu de $S^G \cap \mathcal{K}$. Il est clair que tout S^G, $G \in \mathcal{G}$ est ouverte, stable pour la réunion finie et permise pour $\cap$. Inversement, soit $\mathcal{V}$ une partie de $\mathcal{K}$ possèdant ces propriétés. Si $K \in \mathcal{V}$, il existe un voisinage ouvert de $\mathcal{K}$ contenu dans $\mathcal{V}$ et, $\mathcal{V}$ étant permis pour $\cap$, on peut même supposer ce voisinage de la forme S^G, $G \in \mathcal{G}$. Ainsi l'ouvert $\mathcal{V}$ est de la forme

$$\mathcal{V} = \bigcup_{G \in \mathcal{H}} S^G$$

où $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ est la famille des ouverts tels que $S^G \subset \mathcal{H}$. Montrons que $\mathcal{H}$ est stable pour la réunion finie. En effet, soient G_1 et G_2 dans $\mathcal{H}$. D'après le lemme 4 ci-dessous on a $K \subset G_1 \cup G_2$ ($K \in \mathcal{K}$) si et seulement si on peut trouver $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ compacts tels que $K = K_1 \cup K_2$. Comme $\mathcal{V}$ est stable pour la réunion finie, ceci entraine $S^{G_1 \cup G_2} \subset \mathcal{V}$, donc $G_1 \cup G_2 \in \mathcal{H}$. Posons donc $G_0 = \bigcup_{G \in \mathcal{H}} G$, et montrons $G_0 \in \mathcal{H}$. Si $K \subset G_0$, $K \in \mathcal{K}$, le compact K est contenu dans une réunion finie d'ouverts

$G \in \mathcal{H}$, donc dans un $G \in \mathcal{H}$, puisque $\mathcal{H}$ est stable pour la réunion finie, donc $G_0 \in \mathcal{H}$. On a alors $S^{G_0} \subset \mathcal{O}$, l'inclusion inverse résulte du fait que G_0 est l'élément maximum de $\mathcal{H}$, et on a bien $\mathcal{O} = S^{G_0}$.

Lemme 3 - Si E est un espace LCD, une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$, est un filtre ouvert dans $\mathcal{G}$ si et seulement si elle est de la forme $\mathcal{O} = W_{K_0}$ pour un compact $K_0 \in \mathcal{K}$ non vide.

Il est clair que les W_{K_0}, $K_0 \neq \emptyset$, $K_0 \in \mathcal{K}$ sont des filtres ouverts dans $\mathcal{G}$. Inversement soit $\mathcal{O}$ un filtre ouvert dans $\mathcal{G}$. Tout $G \in \mathcal{O}$ admet un voisinage ouvert contenu dans $\mathcal{O}$, et, $\mathcal{O}$ étant permis pour $\cup$, on peut supposer ce voisinage de la forme W_K, $K \in \mathcal{K}$. On a donc :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{K \in \mathcal{H}} W_K$$

en désignant par $\mathcal{H}$ la famille des compacts K tels que $W_K \subset \mathcal{O}$. Montrons que $\mathcal{H}$ est stable pour l'intersection finie. Soient, en effet, K_1 et K_2 dans $\mathcal{H}$. D'après le lemme 5 ci-dessous, on a $G \supset K_1 \cap K_2$ pour $G \in \mathcal{G}$ si et seulement si on peut trouver deux ouverts G_1 et G_2 avec $G = G_1 \cap G_2$ et $G_1 \cap K_1$, $G_2 \supset K_2$. Par suite puisque $\mathcal{O}$ est stable pour $\cap$, on a $G \in \mathcal{O}$ dès que $G \supset K_1 \cap K_2$, d'où $K_1 \cap K_2 \in \mathcal{H}$. Soient alors $K_0 = \bigcap_{K \in \mathcal{H}} K$ l'intersection de la famille $\mathcal{H}$. Soit $G \supset K_0$ un ouvert de W_{K_0}. L'intersection des compacts $G^c \cap K$, $K \in \mathcal{H}$ étant vide, on en extrait une intersection finie vide, et, $\mathcal{H}$ étant stable pour $\cap$, on peut trouver $K \in \mathcal{H}$, avec $G \supset K$. On en déduit $K_0 \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{O} = W_{K_0}$, avec

$$K_0 \neq \emptyset \quad \text{puisque } \emptyset \notin \mathcal{O}$$

Lemme 4 - Soient G_1 et G_2 deux ouverts dans un espace LCD E et K un compact. On a $K \subset G_1 \cup G_2$, si et seulement si il existe deux compacts $K_1 \subset G_1$, $K_2 \subset G_2$ tels que $K = K_1 \cup K_2$.

La condition est manifestement suffisante. Inversement, supposons qu'elle ne soit pas vérifiée. Soient B_n et B'_n deux suites croissantes d'ouverts relativement compacts avec $B_n \subset \overline{B}_n \subset B_{n+1} \subset \ldots$, $G_1 = \cup B_n$ et $B'_n \subset \overline{B}'_n \subset B'_{n+1}$ et $G_2 = \cup B'_n$. Pour tout n, on a $K \not\subset \overline{B}_n \cup \overline{B}'_n$ (sinon $K = (\overline{B}_n \cap K) \cup (\overline{B}'_n \cap K)$, contrairement à l'hypothèse). Soit donc $x_n \in K$ avec $x_n \notin B_m \cup B'_m$, pour $m \leq n$ et x_o une valeur d'adhérence de la suite x_n dans K. Comme x_n appartient au fermé $\complement(B_m \cup B'_m)$ pour $n \geq m$, on a $x_o \notin B_m \cup B'_m$ pour tout m, donc $x_o \notin G_1 \cup G_2$. Mais $x_o \in K$, d'où $K \not\subset G_1 \cup G_2$. La condition de l'énoncé est donc nécessaire.

<u>Lemme 5</u> - Soient G un ouvert, K_1 et K_2 deux compacts dans un espace LCD. On a $G \supset K_1 \cap K_2$ si et seulement si on peut trouver deux ouverts $G_1 \supset K_1$, $G_2 \supset K_2$ tels que $G = G_1 \cap G_2$.

La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons qu'elle ne soit pas vérifiée. Soient B_n et B'_n deux suites décroissantes d'ouverts relativement compacts, avec $B_n \supset \overline{B}_{n+1}$, $B'_n \supset \overline{B}'_{n+1}$, $K_1 = \cap B_n$, $K_2 = \cap B'_n$. Pour tout n, on a $G \not\supset B_n \cap B'_n$, (sinon $G = (B_n \cup G) \cap (B'_n \cup G)$, contrairement à l'hypothèse. Soit donc $x_n \in B_n \cap B'_n$, $x_n \notin G$, x_o une valeur d'adhérence de la suite x_n : on trouve $x_o \in K_1 \cap K_2$, $x_o \notin G$, donc $K_1 \cap K_2 \not\subset G$, et la condition de l'énoncé est nécessaire.

Voici maintenant quelques compléments de <u>nature topologique</u>.

<u>Proposition 4-15</u> - E étant un espace LCD, l'application $K \to W_K \cap \mathcal{G}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{K}(E) \setminus \emptyset$ muni de la topologie myope sur

le sous-espace de $\mathcal{G}(\mathcal{G})$ constitué des filtres ouverts non vides dans $\mathcal{G}$.

D'après le lemme 3, cette application est une bijection, et il faut montrer qu'elle est bicontinue.

a/ Soit tout d'abord K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}\setminus\emptyset$. Montrons que W_{K_n} converge vers W_K dans $\mathcal{G}(\mathcal{G})$, ce qui établira la continuité de l'application $K \to W_K$. Il revient au même de montrer que les $V_{K_n} \cap \mathfrak{F}$ convergent vers V_K dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$. Soit $F \in V_K$, et (puisque $K \neq \emptyset$) $x \in F \cap K$. Comme $x \in K$, il existe $x_n \in K_n$, $x_n \to x$. La suite $F_n = F \cup \{x_n\}$ converge vers F et vérifie $F_n \in V_{K_n}$, donc $\underline{\lim}\ V_{K_n} \supset V_K$. Soit alors $F_{n_k} \in V_{K_{n_k}}$ une suite partielle convergeant vers F dans $\mathfrak{F}$, et soit $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap K_{n_k}$. Comme les K_n sont contenus dans un compact fixe, la suite x_{n_k} a une valeur d'adhérence $x_0 \in F \cap K$ d'où $F \in V_K$ et $\overline{\lim}\ V_{K_n} \subset V_K$. Donc V_{K_n} converge vers V_K dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$

b/ Inversement, soit $\mathcal{O}_n$ une suite de filtres ouverts non vides dans $\mathcal{G}$ convergeant vers une limite $\mathcal{O}$. D'après le lemme 3, on a $\mathcal{O}_n = W_{K_n}$ avec un $K_n \in \mathcal{K}$, et il faut montrer que K_n converge vers un compact K dans $\mathcal{K}$ et que l'on a $\mathcal{O} = W_K$. Par passge au dual, il suffit de raisonner dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$ et montrer la convergence des V_{K_n} vers V_K et celle de K_n vers K. La limite $\mathcal{O}^*$ des V_{K_n} dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$n'est pas vide, puisque $\mathfrak{F}$ est compact. Les V_{K_n} sont permis pour $\cup$, et on vérifie sans peine qu'il en est de même de $\mathcal{O}^*$. (si $F \in \mathcal{O}^*$ et $F' \supset F$, on prend $F_n \in V_{K_n}$, $F_n \to F$ et $F' \cup F_n$ converge vers F', d'où $F' \in \mathcal{O}^*$). Si $\emptyset \in \mathcal{O}^*$, on a donc $\mathcal{O}^* = \mathfrak{F}$ et $\mathcal{O} = \mathcal{G}$, $\mathcal{O}$ n'est pas un filtre, et la suite $\mathcal{O}_n$ ne converge pas dans le sous-espace des filtres ouverts de $\mathcal{G}$. Si $\emptyset \notin \mathcal{O}^*$, montrons que K_n converge vers un compact K dans $\mathcal{K}$: il en résultera $\mathcal{O} = W_K$, d'après a/ , et celà achèvera la démonstration.

Montrons d'abord que $\emptyset \notin \mathcal{O}^*$ entraine que les K_n sont contenus dans un compact fixe K_o. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut trouver une suite partielle $x_{n_k} \in K_{n_k}$ dépourvue de valeur d'adhérence, c'est-à-dire convergeant vers le point à l'infini de l'espace LCD non compact E. On a alors $\{x_{n_k}\} \in V_{K_{n_k}}$ et $\{x_{n_k}\}$ converge vers $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$, mais ceci entraine $\emptyset \in \mathcal{O}^*$, contrairement à l'hypothèse. Donc les K_n sont contenus dans un compact fixe K_o, et admettent une valeur d'adhérence K dans $\mathcal{K}$. Mais si K_{n_k} est une suite partielle convergeant vers K, les $V_{K_{n_k}}$ convergent vers V_K dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, d'après la première partie de la démonstration. Par suite, on a $\mathcal{O}^* = V_K$, et la valeur d'adhérence K de la suite K_n est unique. Il en résulte que K_n converge vers K dans $\mathcal{K}$. QED.

Proposition 4-16 - E étant un espace LCD, l'application $F \to S^F = \{F' : F' \in \mathcal{F}, F' \subset F\}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}(E)$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles $\mathcal{O}$ non vides fermées dans $\mathcal{F}$, permises pour l'intersection et stables pour la réunion finie. De même, l'application $F \to W_F = \{F' : F' \in \mathcal{F}, F' \supset F\}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{F}$ sur le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ constitué des familles non vides fermées dans $\mathcal{F}$, permises pour $\cup$ et stable pour l'intersection (ce sous-espace est constitué de $\mathcal{F}$ lui-même et des filtres fermés dans $\mathcal{F}$).Enoncés analogues avec $\mathcal{K}$ au lieu de $\mathcal{F}$.

Démontrons, par exemple, le premier énoncé. On vérifie sans peine que l'application de l'énoncé est bijective. Il reste à montrer qu'elle est bicontinue.

Soit, tout d'abord, A_n une suite convergeant vers A dans $\mathfrak{F}$, et montrons que les S^{A_n} convergent vers S^A dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$. Comme $F_{n_k} \subset A_{n_k}$ et $F_{n_k} \to F$ entraine $F \subset A$, on a tout d'abord $\overline{\lim}\ S^{A_n} \subset S^A$. Soit maintenant B un fermé avec $B \notin \underline{\lim}\ S^{A_n}$. Comme $\underline{\lim}\ S^{A_n}$ est fermé dans $\mathfrak{F}$, il existe un voisinage ouvert $V^K_{G_1,-G_k}$ de B disjoint de $\underline{\lim}\ S^{A_n}$, donc disjoint d'une infinité de S^{A_n}, soient $S^{A_{n_k}}$. Mais les $S^{A_{n_k}}$ sont permis pour $\bigcup$, de sorte que V_{G_i} est disjoint des $S^{A_{n_k}}$. Mais $B \in V_{G_i}$. Si $B \in S^A$, soit $B \subset A$, on a donc aussi $A \in V_{G_i}$, ce qui entraine $A_{n_k} \in V_{G_i}$ pour k assez grand et contredit V_{G_i} disjoint de $S^{A_{n_k}}$. Donc $B \notin S^A$. On en déduit $S^A \subset \underline{\lim}\ S^{A_n}$. Par suite S^{A_n} converge vers S^A dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$.

Inversement, soit A_n une suite dans $\mathfrak{F}$ telle que S^{A_n} converge vers une limite $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$. Soit A une valeur d'adhérence dans $\mathfrak{F}$ de la suite A_n, et A_{n_k} une suite partielle convergeant vers A. D'après la première partie de la démonstration $S^{A_{n_k}}$ converge vers S^A, donc $\mathcal{O} = S^A$. Par suite, A est l'unique valeur d'adhérence de la suite A_n, et A_n converge vers A dans $\mathfrak{F}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire - Si F_n est une suite convergeant vers F dans $\mathfrak{F}$ et si F' est un fermé tel que $F \supset F'$ (resp. $F \subset F'$) on peut trouver une suite F'_n convergeant vers F' dans $\mathfrak{F}$ et telle que $F'_n \subset F_n$ (resp. $F'_n \supset F_n$).

5 - LES GRANULOMETRIES

5-1 - Les Axiomes des granulométries

Analysons d'abord la notion usuelle de granulométrie. On se donne des tamis dont les mailles sont définies par leurs dimensions, caractérisées par un nombre $\lambda > 0$. Lorsqu'on applique le tamis de dimension λ à un ensemble A, son refus est un sous-ensemble de A, que l'on peut désigner par $\psi_\lambda(A)$. Ainsi $\psi_\lambda(A) \subset A$. Si $\lambda \geq \mu$, le refus de la plus grande maille λ est plus petit que celui de la maille plus petite μ, soit $\psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A)$. Si un ensemble B contient un ensemble A, son refus pour une maille λ donnée est plus grand que celui de A, soit $B \supset A \Rightarrow \psi_\lambda(B) \supset \psi_\lambda(A)$. Si l'on applique au refus $\psi_\lambda(A)$ de A pour une maille donnée λ un tamis de maille μ plus petite, le refus est $\psi_\lambda(A)$ lui-même, soit $\psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\lambda$ si $\lambda \geq \mu$. Au contraire, si $\mu \geq \lambda$, le refus de $\psi_\lambda(A)$ pour le tamis μ est identique au refus de A lui-même pour ce même tamis, soit $\psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_\mu$ si $\mu \geq \lambda$. Erigeons donc en axiomes constitutifs ces propriétés des granulométries usuelles, et posons la définition suivante :

Définition d'une granulométrie - Soit E un ensemble, et $\mathcal{a} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On appelle granulométrie sur $\mathcal{a}$ une famille ψ_λ, $\lambda > 0$ à un paramètre λ positif d'applications de $\mathcal{a}$ dans lui-même vérifiant les 4 axiomes suivants :

1. $\psi_\lambda(A) \subset A \quad , \quad \lambda > 0, \ A \in \mathcal{a}$
2. $A, B \in \mathcal{a} \ , \quad A \subset B \Rightarrow \psi_\lambda(A) \subset \psi_\lambda(B) \qquad \forall \lambda > 0$
3. $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A) \qquad (A \in \mathcal{a})$
4. $\psi_\lambda \circ \psi_\mu = \psi_\mu \circ \psi_\lambda = \psi_{\sup(\lambda,\mu)}$

On peut, conventionnellement, compléter la famille ψ_λ, $\lambda > 0$ pour $\lambda = 0$ en posant $\psi_0(A) = A$ pour $A \in \mathcal{A}$.

<u>Proposition 5-1</u> - Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. Une famille ψ_λ, $\lambda > 0$ à un paramètre positif d'applications de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E)$ est une granulométrie sur $\mathcal{A}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $\lambda > 0$, ψ_λ est une ouverture sur $\mathcal{A}$.

2. Si $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des éléments de $\mathcal{A}$ invariants par ψ_λ, $\lambda > 0$, on a : $\mu \geq \lambda > 0 \Rightarrow \mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{B}_\lambda$

Autrement dit, une famille ψ_λ, $\lambda > 0$ est une granulométrie sur $\mathcal{A}$ si et seulement si c'est une famille d'ouvertures sur $\mathcal{A}$ dont les familles $\mathcal{B}_\lambda$ d'éléments invariants sont décroissantes en λ.

Les conditions de la proposition sont suffisantes : les axiomes 1 et 2 sont vérifiés par toute ouverture ψ_λ sur $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{B}_\lambda$, le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_\mu$ est $\subset$ dans le plus petit prolongement de l'identité sur $\mathcal{B}_\lambda$, et l'axiome 3 est vérifié. Enfin, si $\mathcal{B}_\mu \subset \mathcal{B}_\lambda$, on a : tout $B \in \mathcal{B}_\mu$ inclus dans A est inclus dans $\psi_\lambda(A)$ et réciproquement, d'où $\psi_\mu(A) = \psi_\mu\ \psi_\lambda(A)$. D'autre part, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\psi_\mu(A)$ est invariant par ψ_μ, donc appartient à $\mathcal{B}_\lambda$ pour $\lambda \leq \mu$, soit $\psi_\lambda\ \psi_\mu(A) = \psi_\mu(A)$, et l'axiome 4 est vérifié.

Montrons maintenant que les conditions de la proposition sont nécéssaires. Soit ψ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{A}$. D'après les axiomes 1 et 2, ψ_λ est croissante et anti isotone pour chaque $\lambda > 0$, et l'axiome 4 montre pour $\mu = \lambda$ que ψ_λ est idempotente. Il s'agit donc bien d'une famille d'ouvertures sur $\mathcal{A}$. Désignons par $\mathcal{B}_\lambda$

la famille des invariants de l'ouverture ψ_λ. L'inclusion $\mathcal{B}_\lambda \supset \mathcal{B}_\mu$ pour $\mu \geq \lambda$, qui achève la démonstration, résulte alors du lemme ci-dessous et de l'axiome 4.

<u>Lemme 5-1</u> - Soit E un ensemble, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, ψ et ψ' deux ouvertures sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les familles d'ensembles de $\mathcal{A}$ invariants respectivement par ψ et ψ'. On a les équivalences :

$$\psi \circ \psi' = \psi \Leftrightarrow \psi' \circ \psi = \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$$

Montrons $\psi' \circ \psi = \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$: en effet, pour $A \in \mathcal{A}$, $\psi' \psi(A) = \psi(A)$ équivaut à $\psi(A) \in \mathcal{B}'$.

Montrons $\psi \circ \psi' = \psi \Leftrightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. En effet, si $A = \psi(A) \in \mathcal{B}$, la relation $\psi \circ \psi' = \psi$ entraine $\psi \psi'(A) = A$, et les inclusions $\psi \psi'(A) \subset \psi'(A) \subset A$ montrent que l'on a $A = \psi'(A)$, soit $A \in \mathcal{B}'$. Donc $\psi \circ \psi' = \psi$ entraine $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Inversement, supposons $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Tout $B \in \mathcal{B}$ est invariant pour ψ', et la réunion des $B \subset A$, $B \in \mathcal{B}$ est contenue dans celle des $B' \in \mathcal{B}'$, $B' \subset A$, soit $\psi \subset \psi'$ et, ψ étant idempotente, $\psi \subset \psi \circ \psi'$. Mais, inversement, $\psi'(A) \subset A$ entraine $\psi \circ \psi' \subset \psi$, et l'égalité en résulte.

<u>Corollaire</u> - Toute granulométrie ψ_λ, $\lambda > 0$ sur une famille $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble E se prolonge sur $\mathcal{P}(E)$

Il suffit, en effet, de considérer la famille $\tilde{\psi}_\lambda$ des plus petits prolongements sur $\mathcal{P}(E)$ des ψ_λ, $\lambda > 0$. Ce sont des ouvertures (Prop. 1-1). La famille $\tilde{\mathcal{B}}_\lambda$ des invariants de $\tilde{\psi}_\lambda$ est engendrée par réunion infinie des éléments de $\mathcal{B}_\lambda$, et les conditions de la proposition sont vérifiées.

5-2 - Régularisées d'une granulométrie

Soit alors ψ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{P}(E)$ entier (ou le prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ d'une granulométrie primitivement donnée sur $\mathcal{Q}$), et $\mathcal{B}_\lambda$ la famille des invariants de ψ_λ. On a $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu$ pour $\lambda \geq \mu$. Posons pour tout $\lambda > 0$:

$$(5\text{-}1) \qquad \hat{\mathcal{B}}_\lambda = \bigcup_{\mu > \lambda} \mathcal{B}_\mu \quad , \quad \check{\mathcal{B}}_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} \mathcal{B}_\mu$$

On a donc $\hat{\mathcal{B}}_\lambda \subset \mathcal{B}_\lambda \subset \check{\mathcal{B}}_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$, et aussi pour tout $\varepsilon > 0$: $\check{\mathcal{B}}_\lambda \subset \mathcal{B}_{\lambda+\varepsilon}$ et $\mathcal{B}_\lambda \subset \hat{\mathcal{B}}_{\lambda+\varepsilon}$. Les $\check{\mathcal{B}}_\lambda$ $(\hat{\mathcal{B}}_\lambda)$ sont, en particulier, décroissantes en λ. Si l'on désigne donc par $\check{\psi}_\lambda$ et $\hat{\psi}_\lambda$ les plus petits prolongements sur $\mathcal{P}(E)$ de l'identité sur $\check{\mathcal{B}}_\lambda$ et $\hat{\mathcal{B}}_\lambda$ respectivement, $\check{\psi}_\lambda$ et $\hat{\psi}_\lambda$ sont encore des granulométries sur $\mathcal{P}(E)$ que nous appellerons, respectivement, <u>régularisées supérieure et inférieure de la granulométrie</u> ψ_λ. D'après ce qui précède, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\lambda > 0$ tel que $\lambda-\varepsilon > 0$, on a :

$$(5\text{-}2) \qquad \psi_{\lambda-\varepsilon} \subset \hat{\psi}_\lambda \subset \psi_\lambda \subset \check{\psi}_\lambda \subset \psi_{\lambda+\varepsilon}$$

Nous dirons qu'une granulométrie ψ_λ est <u>régulière supérieurement</u> (<u>inférieurement</u>) si $\psi_\lambda = \check{\psi}_\lambda$ $(\psi_\lambda = \hat{\psi}_\lambda)$. Il n'est pas difficile de vérifier que la régularisée supérieure (inférieure) d'une granulométrie donnée est effectivement régulière supérieurement (inférieurement).

Si ψ_λ est une granulométrie sur $\mathcal{P}(A)$, on a pour tout $A \subset E$:

$$\hat{\psi}_\lambda(A) = \bigcup_{\substack{B \in \check{\mathcal{B}}_\lambda \\ B \subset A}} B = \bigcup_{\mu > \lambda} \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_\mu \\ B \subset A}} B$$

c'est-à-dire :

$$(5\text{-}3) \qquad \hat{\psi}_\lambda(A) = \bigcup_{\mu > \lambda} \psi_\mu(A)$$

Par contre, l'égalité $\check{\psi}_\lambda(A) = \bigcap_{\mu < \lambda} \psi_\mu(A)$ n'est pas vraie en général.

5-3 - Eléments critiques d'une granulométrie

Soit E un ensemble et ψ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{P}(E)$ (ou le plus petit prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ d'une granulométrie primitivement donnée sur une partie $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}(E)$, ce prolongement étant lui-même une granulométrie conformément au corollaire de Prop. 5-1). Nous dirons qu'un ensemble $M \in \mathcal{P}(E)$ est <u>critique</u> pour la granulométrie ψ_λ en $\lambda = \lambda_0 > 0$ si l'on a :

$$(5\text{-}3) \qquad M \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_0} \;,\; \hat{\psi}_{\lambda_0}(M) = \emptyset \;,\; M \neq \emptyset$$

ou, ce qui revient au même d'après les définitions précédentes :

$$(5\text{-}3') \qquad \psi_\lambda(M) = \emptyset \text{ si } \lambda > \lambda_0 \text{ et } \psi_\lambda(M) = M \text{ si } \lambda < \lambda_0, \quad M \neq \emptyset$$

Nous dirons qu'il est <u>critique au sens strict</u> si $M \in \mathcal{B}_{\lambda_0}$, $\hat{\psi}_{\lambda_0}(M) = \emptyset$, et $M \neq \emptyset$. Il est clair que tout ensemble strictement critique en λ_0 est critique en λ_0, la réciproque n'étant évidemment pas vraie (une granulométrie régulière inférieurement ne peut pas avoir d'éléments strictement critiques, mais peut très bien admettre des éléments critiques). Cependant, si ψ_λ est une granulométrie régulière supérieurement tout élément critique est strictement critique (puisqu' alors on a $\psi_\lambda = \check{\psi}_\lambda$).

Il n'est sans doute pas vrai que toute granulométrie (même régulière supérieurement) admette des éléments critiques, mais les "bonnes" granulométries devront en admettre, et, plus précisément, les familles $\mathcal{B}_\lambda$ devront être engendrées par ces éléments critiques.

Pour analyser le problème de l'existence des éléments critiques, partons d'un ensemble non vide $A \in \mathcal{P}(E)$, et posons :

$$\lambda_A = \operatorname{Inf} \{\lambda : \psi_\lambda(A) = \emptyset\}$$

(avec $\lambda_A = +\infty$ si $\psi_\lambda(A) \neq \emptyset$ pour tout $\lambda > 0$). Autrement dit, λ_A est caractérisé par la propriété :

$$\lambda > \lambda_A \Rightarrow \psi_\lambda(A) = \emptyset$$

$$\lambda < \lambda_A \Rightarrow \psi_\lambda(A) \neq \emptyset$$

ou encore :

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{\lambda_A}(A) = \emptyset \\ \lambda < \lambda_A \Rightarrow \psi_\lambda(A) \neq \emptyset \end{cases}$$

S'il existe un élément strictement critique dans la famille $\psi_\lambda(A)$, $\lambda > 0$, ce ne peut être que $\psi_{\lambda_A}(A)$, et cet élément sera effectivement strictement critique pour $\lambda = \lambda_A$ si et seulement si il n'est pas vide. En effet, pour $\lambda > \lambda_A$, $\psi_\lambda(A)$ est vide, donc n'est pas critique. Pour $\lambda < \lambda_A$, on peut trouver μ avec $\lambda < \mu < \lambda_A$, et $\psi_\mu(A)$ n'est pas vide, donc $\psi_\lambda(A)$ n'est pas critique. Mais, si $\psi_{\lambda_A}(A)$ n'est pas vide, il vérifie bien les conditions de la définition, et c'est un élément strictement critique.

De la même manière, on vérifie que le seul élément (simplement) critique de la famille $\check{\psi}_\lambda(A)$, $\lambda > 0$ est l'élément $\check{\psi}_{\lambda_A}(A)$, et il est effectivement critique en $\lambda = \lambda_A$ si et seulement si il n'est pas vide. Autrement dit, <u>les éléments critiques d'une granulométrie sont les $\check{\psi}_{\lambda_A}(A)$ non vides, A parcourant $\mathcal{P}(E)$.</u>

<u>Exemple</u> - Soit $E = \mathbb{R}^n$, et la granulométrie définie par les familles

$$\mathcal{B}_\lambda = \bigcup_{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)} \{A \oplus B_\lambda\}$$

ou B_λ est la boule fermée de rayon λ et de centre O. On a $\mathcal{B}_\lambda = \check{\mathcal{B}}_\lambda$, autrement dit cette granulométrie est régulière supérieurement, et $\psi_\lambda(A) = (A \ominus \lambda B) \oplus \lambda B$. Si A est la boule ouverte de rayon λ_0, on a $\lambda_A = \lambda_0$, mais $\check{\psi}_{\lambda_0}(A) = \emptyset$, et A n'est pas critique. Par contre, si A est la boule fermée de rayon λ_0, $\check{\psi}_{\lambda_0}(A) = A$ et A est critique en λ_0.

<u>5-4 - Granulométrie s c s</u>

Introduisons maintenant des considérations topologiques. D'après la proposition 2-5, une ouverture s c s sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ est caractérisée par le fait que la famille $\mathcal{B}$ de ses invariants est <u>fermée</u> dans $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ et stable pour la réunion. Notons un premier résultat :

<u>Proposition 5-2</u> - Soit ψ_λ, $\lambda > 0$ une granulométrie sur $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) telle que pour tout $\lambda > 0$ l'ouverture ψ_λ soit s c s sur $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). Alors la restriction à $\mathcal{K}$ (à $\mathcal{F}$) de la régularisée supérieure $\check{\psi}_\lambda$ est encore s c s sur $\mathcal{K}$ (sur $\mathcal{F}$) pour chaque $\lambda > 0$, et possède sur $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) la propriété :

$$\check{\psi}_{\lambda_0}(A) = \bigcap_{\mu < \lambda_0} \check{\psi}_\mu(A) = \bigcap_{\mu < \lambda_0} \psi_\mu(A) \quad (\lambda > 0,\ A \in \mathcal{K} \text{ ou } \mathcal{F})$$

En effet, supposons ψ_λ s c s pour chaque λ. Pour $\lambda_0 > 0$ et A dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), posons :

$$A_{\lambda_0} = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} \psi_\lambda(A)$$

On a déjà noté l'inclusion $A_{\lambda_0} \supset \check{\psi}_{\lambda_0}(A)$. Montrons que l'on a l'inclusion inverse, d'où résultera l'égalité $A_{\lambda_0} = \check{\psi}_{\lambda_0}(A)$. Pour celà, il suffit de montrer $A_{\lambda_0} \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$, c'est-à-dire (puisque A_{λ_0} est dans $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$) $A_{\lambda_0} \in \mathcal{B}_\mu$ pour tout $\mu < \lambda_0$. Lorsque $\lambda \uparrow \lambda_0$, $\psi_\lambda(A)$ converge vers A_{λ_0} dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) et, ψ_μ étant s c s, il en résulte

$$\overline{\lim_{\lambda \uparrow \lambda_0}}\ \psi_\mu\, \psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A_{\lambda_0})$$

Mais, pour $\mu < \lambda < \lambda_0$ on a $\psi_\mu\, \psi_\lambda(A) = \psi_\lambda(A)$ d'après l'axiome 4 des granulométries, et par suite $A_{\lambda_0} = \lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} \psi_\mu\, \psi_\lambda(A) \subset \psi_\mu(A_{\lambda_0})$.

Comme ψ_μ est une ouverture, il en résulte $A_{\lambda_0} = \psi_\mu(A_{\lambda_0})$, soit $A_{\lambda_0} \in \mathcal{B}_\mu$ pour tout $\mu < \lambda_0$, et par suite $A_{\lambda_0} \in \check{\mathcal{B}}_{\lambda_0}$, et $\check{\psi}_{\lambda_0}(A_{\lambda_0}) = A_{\lambda_0}$. Ce point établi, il en résulte $\check{\psi}_{\lambda_0}(A) = A_{\lambda_0}$ pour tout A dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). En effet, l'inclusion $A_{\lambda_0} \subset A$ donne alors $A_{\lambda_0} = \check{\psi}_{\lambda_0}(A_{\lambda_0}) \subset \check{\psi}_{\lambda_0}(A) \subset A_{\lambda_0}$, d'où l'égalité. En particulier, $\check{\psi}_{\lambda_0}$ applique $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) et sa restriction à $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) est une ouverture sur $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). Les éléments invariants pour cette restriction sont alors les $A_{\lambda_0} = \check{\psi}_{\lambda_0}(A)$, A parcourant $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), c'est-à-dire les éléments de $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} \mathcal{B}_\lambda$. Or cette famille est fermée dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), comme intersection de fermés, et par suite la restriction à $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) de $\check{\psi}_{\lambda_0}$ est s.c.s. (Proposition 2-5), ce qui achève la démonstration.

Proposition 5-3 - Pour une granulométrie ψ_λ, $\lambda > 0$ sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ telle que ψ_{λ_o} soit une ouverture s c s pour chaque $\lambda_o > 0$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - L'application $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$ (ou $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$) dans $\mathcal{K}$ (ou dans $\mathcal{F}$) est s c s , (autrement dit $\lambda_n \to \lambda$ et $A_n \to A$ entraine $\overline{\lim}\ \psi_{\lambda_n}(A_n) \subset \psi_\lambda(A)$.

2 - Pour tout $A \in \mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$), l'application $\lambda \to \Psi_\lambda(A)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$) est s c s.

3 - On a $\psi_\lambda(A) = \bigcap_{\mu < \lambda} \psi_\lambda(A)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \in \mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$).

4 - La granulométrie ψ_λ est régulière supérieurement.

Il est clair que 1 entraine 2. L'implication 2 $\Rightarrow$ 3 est évidente : si $\lambda \uparrow \lambda_o$, $\psi_\lambda(A)$ converge vers $\bigcap_{\lambda < \lambda_o} \psi_\lambda(A) = A_{\lambda_o}$, d'où $A_{\lambda_o} \subset \psi_{\lambda_o}(A)$ puisque ψ_λ est s c s en λ, et $A_{\lambda_o} = \psi_{\lambda_o}(A)$ puisque l'inclusion inverse est toujours vraie. De même 3 $\Rightarrow$ 4, puisque $A_\lambda \supset \check{\psi}_\lambda(A) \supset \psi_\lambda(A)$, d'où $A_\lambda = \check{\psi}_\lambda(A) = \psi_\lambda(A)$ dès que 3 est vraie.

En sens inverse, 4 entraine 3, d'après la proposition 5-2. Montrons que 3 entraine 2. Si $\lambda_n \to \lambda_o > 0$, soit $\mu < \lambda_o$. Pour n assez grand, on a $\mu < \lambda_n$ et, pour tout A dans $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$, $\psi_\mu(A) \supset \psi_{\lambda_n}(A)$, donc $\overline{\lim}\ \psi_{\lambda_n}(A) \subset \psi_\mu(A)$, et par suite :

$$\overline{\lim}\ \psi_{\lambda_n}(A) \subset \bigcap_{\mu < \lambda_o} \psi_\mu(A)$$

d'où la semi-continuité en λ dès que 3 est vérifiée.

Montrons enfin 2 $\Rightarrow$ 1. Supposons 2 vérifiée. Soit $\lambda_n \to \lambda_o$ et

$A_n \to A$ dans $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$). Prenons $\mu < \lambda_o$, donc $\lambda_n > \mu$ pour n assez grand. On a $\psi_\mu(\psi_{\lambda_n}(A_n) = \psi_{\lambda_n}(A_n)$ d'après l'axiome 4. Mais ψ_μ est s c s par hypothèse. Si A_o est une valeur d'adhérence de la suite $\psi_{\lambda_n}(A_n)$, et si $\psi_{\lambda_{n_k}}(A_{n_k})$ converge vers A_o, on a donc

$$A_o = \lim \psi_{\lambda_{n_k}}(A_{n_k}) \subset \psi_\mu(A_o) \subset A_o$$

d'où l'égalité $A_o = \psi_\mu(A_o)$ pour tout $\mu < \lambda_o$. Comme ψ_λ est régulière supérieurement (puisque $2 \Rightarrow 3$), on a aussi $A_o = \psi_{\lambda_o}(A_o) \in \mathcal{B}_{\lambda_o}$. Mais $\psi_{\lambda_n}(A_n) \subset A_n$ entraine $A_o \subset A$, d'où $A_o = \psi_{\lambda_o}(A_o) \subset \psi_{\lambda_o}(A)$. Comme ceci est vrai pour toute valeur d'adhérence A_o de la suite $\psi_{\lambda_n}(A_n)$, il en résulte $\overline{\lim}\, \psi_{\lambda_n}(A_n) \subset \psi_{\lambda_o}(A)$, et 1 est vérifié.

<u>Définition</u> - On dira qu'une granulométrie sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ est s c s si elle vérifie les conditions de la proposition 5-3.

Une granulométrie ψ_λ, $\lambda > 0$ sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$ est s c s si elle est régulière supérieurement, et si ψ_λ est s c s pour tout λ fixé ; cette propriété entraine que $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ est s c s.

<u>Remarque</u> - Si ψ_λ est une granulométrie quelconque sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$, on peut en déduire une granulométrie s c s : $\mathcal{B}_\lambda$ désignant la famille des invariants de ψ_λ, on forme d'abord la fermeture $\overline{\mathcal{B}}_\lambda$ de $\mathcal{B}_\lambda$ dans $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$. On vérifie sans peine que $\overline{\mathcal{B}}_\lambda$ est stable pour $\bigcup$ et vérifie la condition $\lambda \leq \mu \Rightarrow \overline{\mathcal{B}}_\mu \subset \overline{\mathcal{B}}_\lambda$. La famille $\overline{\psi}_\lambda$ des ouvertures associées aux $\overline{\mathcal{B}}_\lambda$ est donc une granulométrie, et $\overline{\psi}_\lambda$ est s c s à λ fixé. Il suffit ensuite de prendre la régularisée supérieure $\check{\overline{\psi}}_\lambda$ pour obtenir une granulométrie s c s (Propositions 5-2 et 5-3). Plus précisément, $\check{\overline{\psi}}_\lambda$

est la plus petite granulométrie s c s majorant ψ_λ sur $\mathcal{K}$ (ou $\mathcal{F}$)

<u>Proposition 5-4</u> - Soit ψ_λ une granulométrie s c s sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$, posons $\lambda_K = \text{Inf } \{\lambda : \psi_\lambda(K) = \emptyset\}$. La famille des éléments critiques compacts est constituée des $\psi_{\lambda_K}(K)$, K parcourant l'ensemble des compacts tels que $\lambda_K \neq 0$ et $\lambda_K \neq \infty$.

En effet, si λ_K n'est ni nul ni infini, on a d'après la proposition 5-3 :

$$\psi_{\lambda_K}(K) = \bigcap_{\lambda < \lambda_K} \psi_\lambda(K)$$

Comme $\psi_{\lambda_K}(K)$ est compact, $\psi_{\lambda_K}(K) = \emptyset$ entraine $\psi_\lambda(K) = \emptyset$ pour un $\lambda < \lambda_K$. Mais celà contredit la définition de λ_K. Donc $\psi_{\lambda_K}(K) \neq \emptyset$. Il en résulte, comme on l'a vu dans le paragraphe 5-3, que $\psi_{\lambda_K}(K)$ est un élément critique pour $\lambda = \lambda_K$. Inversement, les ψ_λ étant idempotentes, tout compact critique est de cette forme.

<u>5-5 - Granulométries euclidiennes</u>.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'espace E de départ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Les granulométries usuelles sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont compatibles avec les translations, en ce sens que le refus du translaté A_x d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ pour le tamis de maille λ est le translaté par x du refus de A, soit $\psi_\lambda(A_x) = \psi_\lambda(A) \oplus \{x\}$. De plus, les tamis que l'on utilise sont en général homothétiques, le module λ d'homothétie entre chaque tamis et un tamis de référence pouvant servir à indexer les tamis eux-mêmes. Avec cette définition du paramètre λ, on a alors $\psi_\lambda(\lambda A) = \lambda\psi_1(A)$. Ces deux propriétés, érigées en axiomes, conduisent à poser la définition suivante :

> <u>Définition</u> - On dit qu'une granulométrie ψ_λ, $\lambda > 0$ sur une partie $\mathcal{a}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ stable pour les translations et les homotheties positives est une <u>granulométrie euclidienne</u> si elle vérifie les deux axiomes suivants :
>
> 5 - Pour tout $\lambda > 0$, ψ_λ est compatible avec les translations.
>
> 6 - Pour tout $\lambda > 0$, et tout $A \in \mathcal{a}$, on a : $\psi_\lambda(A) = \lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda})$

L'axiome 5 est équivalent à la condition : $\mathcal{B}_\lambda$ invariant par translation pour tout $\lambda > 0$. L'axiome 6 exprime que ψ_λ est connue pour tout λ dès que l'on connait ψ_1 (ou, plus généralement, ψ_{λ_o} pour un $\lambda_o > 0$). En fait, l'axiome 6 équivaut à $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\ \mathcal{B}_1$ pour tout $\lambda > 0$. En effet, si 6 est vérifiée, $A \in \mathcal{B}_\lambda$, soit $\psi_\lambda(A) = A$ entraine $\frac{A}{\lambda} = \psi_1(\frac{A}{\lambda})$, soit $\frac{A}{\lambda} \in \mathcal{B}_1$, ou $A \in \lambda\ \mathcal{B}_1$, d'où $\mathcal{B}_\lambda \subset \lambda\ \mathcal{B}_1$.

Inversement, si $A \in \lambda\ \mathcal{B}_1$, soit $A = \lambda\ A_1$ pour un $A_1 \in \mathcal{B}_1$, on a $\psi_\lambda(A) = \lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda}) = \lambda\ \psi_1(A_1) = \lambda\ A_1 = A$, donc $A \in \mathcal{B}_\lambda$, et $\lambda\ \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_\lambda$. Ainsi l'axiome 6 entraine $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\ \mathcal{B}_1$. Réciproquement, si $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\ \mathcal{B}_1$, pour tout $A \in \mathcal{a}$ on peut trouver $B_1 \in \mathcal{B}_1$ tel que $\psi_\lambda(A) = \lambda\ B_1$. On a donc $B_1 = \frac{1}{\lambda}\ \psi_\lambda(A) \subset \frac{A}{\lambda}$ et $B_1 \in \mathcal{B}_1$, d'où $B_1 = \psi_1\left(\frac{1}{\lambda}\ \psi_\lambda(A)\right) \subset \psi_1(\frac{A}{\lambda})$, et $\psi_\lambda(A) = \lambda\ B_1 \subset \lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda})$. Mais inversement, on peut trouver $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ tel que $\lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda}) = B_\lambda$. L'inclusion $\lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda}) \subset A$ donne alors $B_\lambda = \psi_\lambda(\lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda})) \subset \psi_\lambda(A)$, donc $\lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda}) \subset \psi_\lambda(A)$. L'égalité $\psi_\lambda(A) = \lambda\ \psi_1(\frac{A}{\lambda})$ en résulte.

Cette famille $\mathcal{B}_1$ ne peut pas être tout-à-fait quelconque. En effet, ψ_λ doit être une granulométrie, donc $\lambda \geq \mu$ doit entrainer $\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu$. Comme $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\ \mathcal{B}_1$, ceci équivaut à la condition suivante : $\lambda \geq 1$ et $B \in \mathcal{B}_1 \Rightarrow \lambda\ B \in \mathcal{B}_1$, autrement dit $\mathcal{B}_1$ doit être <u>stable pour les homothéties de module</u> ≥ 1. Inversement, il est clair que si

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ possède cette propriété, les $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\, \mathcal{B}$ constituent les familles d'invariants d'une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{A}$; Enonçons :

<u>Proposition 5-5</u> - Pour qu'une famille ψ_λ, $\lambda > 0$ d'ouvertures sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ stable pour les translations et les homothéties positives constitue une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ stable pour les translations et invariante pour les homothéties du module ≥ 1 telle que, pour tout $\lambda > 0$, $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\, \mathcal{B}$ soit la famille des invariants de ψ_λ. On a alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda > 0$:

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} A_{\lambda B}$$

Nous avons déjà établi la première partie de l'énoncé. Par $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda > 0$, on a alors, d'après la formule (4-22)

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_\lambda} A_B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} A_{\lambda B}$$

<u>Générateur d'une granulométrie euclidienne</u> - Soit ψ_λ une granulométrie euclidienne et $\mathcal{B}$ la famille des invariants de ψ_1. On dit que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ engendre $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}$ est la famille stable pour les translations, les homothéties de module ≥ 1 et les réunions infinies engendrée par $\mathcal{B}_0$. La famille $\mathcal{B}_0' = \bigcup_{\lambda \geq 1} \lambda\, \mathcal{B}_0$ engendre $\mathcal{B}$ lorsqu'on la stabilise pour les translations et les réunions. D'après la formule (4-22), on a alors :

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0'} A_{\lambda B} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$$

Par suite :

<u>Corollaire</u> - Si $\mathcal{B}_o$ est un générateur de $\mathcal{B}$, on a :

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_o} \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$$

<u>Exemple</u> - Soit $\mathcal{B}$ la famille engendrée par un ensemble B unique ($\mathcal{B}_o = \{B\}$) . La formule :

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$$

est une granulométrie euclidienne que l'on appelle <u>granulométrie selon B</u>. Il n'est pas nécessaire que l'ensemble B soit convexe.

Si B est un compact convexe, $\lambda \geq \mu$ entraine $(\lambda\ B)_{\mu B} = \lambda\ B$, et par suite $A_{\lambda B} \subset A_{\mu B}$. La granulométrie selon B se réduit alors à $A_{\lambda B}$. Inversement, si B est compact, et si la granulométrie selon B se réduit à $\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$, on a $\psi_1(\lambda\ B) = (\lambda\ B)_B = \lambda\ B$ dès que $\lambda \geq 1$, et la proposition suivante montre que ceci entraine la convexité de B.

<u>Proposition 5-6</u> - Soit B un ensemble compact dans $\mathbb{R}^n$. Pour que l'homothétique λ B soit ouvert selon B pour tout $\lambda \geq 1$, il faut et il suffit que B soit convexe.

Si B est convexe, la propriété est vérifiée. Inversement, supposons que pour tout $\alpha > 0$ il existe un ensemble D_α tel que :

$$\text{(a)} \qquad (1+\alpha)\ B = B \oplus \alpha\ D_\alpha$$

Quitte à remplacer $\alpha\ D_\alpha$ par $(1+\alpha)\ B \ominus \check{B}$, on peut toujours supposer D_α compact. Prenons l'enveloppe convexe des deux membres de (a) . Il vient :

$$(a') \qquad (1+\alpha)\ C(B) = C(B) \oplus \alpha\ C(D_\alpha)$$

Mais $(1+\alpha)\ C(B) = C(B) \oplus \alpha\ C(B)$, puisqu'il s'agit de convexes, et la règle de simplification s'applique dans $C(\mathcal{K})$. Par conséquent, (a') entraine :

$$(b) \qquad C(D_\alpha) = C(B)$$

et par suite aussi :

$$(b') \qquad D_\alpha \subset C(B)$$

Les D_α , $\alpha > 0$, sont contenus dans le compact fixe $C(B)$. Ce point établi, revenons à la relation (a). Par réitération, elle donne, pour n entier > 0 :

$$(1+\alpha)^n\ B = B \oplus \alpha\ D_\alpha \oplus \alpha(1+\alpha)\ D_\alpha \oplus .. \oplus \alpha(1+\alpha)^{n-1}\ D_\alpha$$

c'est-à-dire :

$$(c) \qquad B = \frac{1}{(1+\alpha)^n}\ B \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\ D_\alpha \right)$$

D'après (b') , on a la majoration

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\ D_\alpha \subset \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k} \right)\ C(D_\alpha) \subset C(D_\alpha) = C(B)$$

d'où l'on déduit facilement la convergence de $\bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\ D_\alpha$. La relation (c), compte tenu de la continuité de $\oplus$, donne alors :

$$(d) \qquad B = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha}{(1+\alpha)^k}\ D_\alpha = \frac{\alpha}{1+\alpha} \bigoplus_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^k}\ D_\alpha$$

Montrons alors que B est indéfiniment divisible, ce qui entrainera qu'il est convexe, et achèvera la démonstration. Soit N un entier > 0. Pour $0 \leq i < N$, posons :

$$B_i(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha} \overset{\infty}{\underset{k=0}{\oplus}} \frac{1}{(1+\alpha)^{i+kN}} D_\alpha$$

On a évidemment :

$$(e) \quad \left| \begin{array}{l} B = B_0(\alpha) \oplus B_1(\alpha) \oplus .. \oplus B_{N-1}(\alpha) \\ \\ B_i(\alpha) = \dfrac{1}{(1+\alpha)^i} B_0(\alpha) \end{array} \right.$$

D'après (b') , D_α admet une valeur d'adhérence D_0 pour $\alpha \downarrow 0$. Soit $\alpha_n \downarrow 0$ une suite telle que D_{α_n} converge vers D_0 dans $\mathcal{K}$. La relation (b') montre que les $B_0(\alpha_n)$ sont eux aussi contenus dans un compact fixe, et admettent une valeur d'adhérence B_0. Soit donc α_{n_k} une suite partielle telle que $B_0(\alpha_{n_k})$ converge vers B_0. La seconde relation (e) montre que les $B_i(\alpha_{n_k})$ admettent dans $\mathcal{K}$ cette même limite B_0. En vertu de la continuité de $\oplus$, la première relation (e) passe à la limite, et donne $B = B_0^{\oplus N}$ (somme de Minkowski de N termes égaux à B_0). Donc B est infiniment divisible, et par suite B est convexe.

> <u>Corollaire</u> - Soit B un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour que la granulométrie selon l'ensemble B se réduise à $\psi_\lambda(A) = A_{\lambda B}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, il faut et il suffit que le compact B soit convexe.

<u>5-6 - Les "bonnes" granulométries euclidiennes.</u>

Nous dirons qu'une granulométrie euclidienne ψ_λ, $\lambda > 0$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ est une "bonne" granulométrie si elle est s c s (au sens de la proposition 5-3), et si chaque ψ_λ vérifie les conditions de la Proposition 4-11 (c'est-à-dire si, pour tout $\lambda > 0$, ψ_λ est le plus petit prolongement sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$). Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi. Désignons par $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ la famille des fermés invariants pour ψ_1.

Comme $\mathcal{B}_\lambda = \lambda\ \mathcal{B}$, ψ_λ sera régulière supérieurement si $\mathcal{B} = \bigcap_{\lambda < 1} \lambda\ \mathcal{B}$, autrement dit si $(1+\varepsilon)\ B \in \mathcal{B}$ pour tout $\varepsilon > 0$ entraine $B \in \mathcal{B}$. Cette condition est automatiquement vérifiée si $\mathcal{B}$ est fermé, c'est-à-dire si ψ_λ est une ouverture s c s pour tout $\lambda > 0$ fixé. D'où un premier résultat, qui résulte directement de la Proposition 5-3.

<u>Proposition 5-7</u> - Pour qu'une granulométrie euclidienne ψ_λ sur $\mathcal{F}$ (sur $\mathcal{K}$) soit s c s au sens de la Proposition 5-3, il faut et il suffit que la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ψ_1 soit fermée dans $\mathcal{F}$ (dans $\mathcal{K}$).

<u>Corollaire</u> - Si ψ_λ est une granulométrie euclidienne et s c s sur $\mathcal{F}$ distincte de l'identité, aucun élément invariant par $\psi = \psi_1$ n'admet de point isolé.

En effet, soit $B \in \mathcal{B}$ et x un point de B. Compte tenu de l'invariance de $\mathcal{B}$ pour les translations, on peut supposer $x = 0$. Si x est isolé, il existe une boule ouverte B_ε de centre O, de rayon ε, disjointe de $B\setminus 0$. Si $\lambda \to \infty$, $\lambda\ B_\varepsilon$ tend vers $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{G}$, $\{0\}$ reste invariant, $\lambda(B\setminus 0)$ converge vers $\emptyset$, et $\lambda\ B$ vers $\{0\}$ dans $\mathcal{F}$. Donc $\{0\} \in \mathcal{B}$, puisque $\mathcal{B}$ est fermé, et $\psi_\lambda(A) = A$ pour tout $A \in \mathcal{F}$.

<u>Exemple</u> - La granulométrie selon l'ensemble $B = \{x_o, y_o\}$ constitué de deux points est bien une granulométrie sur $\mathcal{F}$ (elle applique $\mathcal{F}$

dans $\mathcal{F}$) mais elle n'est pas s c s, d'après le corollaire. Mais la Proposition 3-2 montre que sa régularisée inférieure est s c i sur $\mathcal{F}$. En posant $y_o - x_o = h$, on a :

$$x \in \psi_\lambda(A) \Leftrightarrow x \in A \quad \text{et} \quad \exists\, \mu \geq \lambda : x + \mu h \in A \text{ ou } x - \mu h \in A$$

Ainsi :

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{\mu \geq \lambda} \left(A \cap (A_{-\mu h} \cup A_{+\mu h})\right)$$

$$= A \cap \left(\bigcup_{\mu \geq \lambda} (A_{-\mu h} \cup A_{+\mu h})\right)$$

Examinons la seconde condition (ψ_λ est le plus petit prolongement s c s de sa restriction à $\mathcal{K}$). D'après le corollaire de la Proposition 4-11, cette condition équivaut à : $\mathcal{B}$ est fermé dans $\mathcal{F}$, et tout fermé $F \in \mathcal{B}$ est réunion de compacts $K \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$.

<u>Proposition 5-8</u> - Pour qu'une granulométrie euclidienne ψ_λ sur $\mathcal{F}$ soit une "bonne" granulométrie au sens défini ci-dessus, il faut et il suffit que la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ψ_1 soit fermée dans $\mathcal{F}$ et que tout fermé $F \in \mathcal{B}$ soit réunion de compacts $K \in \mathcal{B} \cap \mathcal{K}$.

Cette condition n'est pas toujours facile à vérifier. Je me contenterai de quelques exemples.

<u>Exemple 2</u> - Prenons dans $\mathbb{R}^2$ la granulométrie selon la <u>circonférence</u> C du cercle de rayon unité. $\mathcal{B}$ est constitué des λ C, $\lambda \geq 1$, de leurs translatés, et des réunions infinies de ces éléments. Mais les droites du plan appartiennent à la fermeture de $\mathcal{B}$, et les droites ne sont pas réunion de circonférences de cercle. Il ne s'agit donc pas d'une bonne granulométrie.

<u>Exemple 3</u> - Soit $\mathcal{B}_o$ <u>une famille de compacts convexes</u> compacte dans $\mathcal{K}$ (c'est-à-dire : $\mathcal{B}_o$ est fermée et les $B \in \mathcal{B}_o$ sont <u>contenus dans un compact fixe</u>). Prenons pour $\mathcal{B}$ la famille stable pour les réunions, les translations et les homothéties positives engendrées par $\mathcal{B}_o$. La granulométrie euclidienne associée à $\mathcal{B}$ (que nous appellerons : <u>granulométrie selon la famille $\mathcal{B}_o$</u>) est une "bonne" granulométrie.

En effet, montrons que la granulométrie ψ_λ associée à $\mathcal{B}$ applique $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Soit $F \in \mathcal{F}$, $x_n \in \psi(F)$ et $x_n \to x$. On peut trouver un translaté $\lambda_n B_n \oplus y_n$ d'un homothétique $\lambda_n B_n$, $\lambda_n \geq 1$ d'un $B_n \in \mathcal{B}_o$ avec $x_n \in \lambda_n B_n \oplus y_n \subset F$. D'après la Proposition 5-6, $\lambda_n B_n$ est réunion de translatés de B_n, et on peut donc supposer $\lambda_n = 1$, soit $x_n \in B_n \oplus y_n \subset F$. Comme $\mathcal{B}_o$ est compacte, la suite B_n a une valeur d'adhérence $B_o \in \mathcal{B}$, et on peut trouver une suite partielle B_{n_k} convergeant vers B_o. Du fait que $(x_n - y_n) \in B_n$, les y_{n_k} ont alors une valeur d'adhérence y_o telle que $(x - y_o) \in B_o$. On en déduit $x \in B_o \oplus y_o \subset F$, soit $x \in \psi(F)$, et $\psi(F)$ est fermé.

Montrons que $\mathcal{B}$ est fermé dans $\mathcal{F}$. Soit $F_n \in \mathcal{B}$ et $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$. Il faut montrer $F = \psi(F)$, c'est-à-dire $F \subset \psi(F)$. Soit donc $x \in F$, et $x_n \in F_n$ avec $x_n \to x$. Comme ci-dessus, on peut trouver une suite $B_n \in \mathcal{B}_o$ avec $x_n \in B_n \oplus y_n \subset F_n$, $B_{n_k} \to B_o \in \mathcal{B}_o$, y_{n_k} admettant une valeur d'adhérence y_o, et, comme $B_n \oplus y_n \subset F_n$ entraine $B \oplus y_o \subset F$, on en désuit $x \in B \oplus y_o \subset F$, soit $x \in \psi(F)$. Donc $F = \psi(F)$, $\mathcal{B}$ est fermée, et la granulométrie ψ_λ est s c s (Proposition 5-7).

Pour $\lambda = 1$, on a :

$$\psi(F) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \bigcup_{\mu \geq 1} \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_0 \\ \mu B_x \subset F}} \mu B_x = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} \bigcup_{\substack{B \in \mathcal{B}_0 \\ B_x \subset F}} B_x$$

d'après la proposition 5-6 , et par suite $\psi(F)$ est réunion de compacts de $\mathcal{B}$. La proposition 5-8 montre donc que ψ_λ est une bonne granulométrie. Ce résultat s'énonce ainsi :

Proposition 5-9 - Soit $\mathcal{B}_0$ une famille de compacts convexes compacte dans $\mathcal{K}$ (c'est-à-dire fermée dans $\mathcal{K}$ et telle que les $B \in \mathcal{B}_0$ soient contenus dans un compact fixe). La granulométrie selon la famille $\mathcal{B}_0$ est une "bonne" granulométrie euclidienne, définie explicitement par :

$$\psi_\lambda(F) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} F_{\lambda B} \quad (F \in \mathcal{F})$$

Corollaire - Toute granulométrie selon une famille finie de compacts convexes est une "bonne" granulométrie euclidienne.

5-7 - Filtres morphologiques

Dans les conditions de la Proposition 5-9, les compacts convexes $B \in \mathcal{B}_0$ sont critiques pour une valeur de $\lambda \leq 1$, pourvu seulement que $\psi_\lambda(B)$ tende vers $\emptyset$ pour λ infini. En effet, celà résulte immédiatement de la Proposition 5-4. On note qu'ici :

$$\lambda_B = \text{Inf } \{\lambda : \psi_\lambda(B) = \emptyset\}$$

est l'Inf des λ tels que $\frac{1}{\lambda}$ B ne contienne aucun translaté d'aucun ensemble de B_o (d'où $\lambda_B \leq 1$).

Supposons que $\mathcal{B}_o$ possède la propriété supplémentaire suivante :

(5-3) $$B \in \mathcal{B}_o \ , \ \lambda > 1 \ , \ B' \subset \frac{1}{\lambda} \ B \Rightarrow \ B' \notin \mathcal{B}_o$$

Les éléments de $\mathcal{B}_o$ sont alors <u>tous critiques pour $\lambda = 1$</u> , et on a pour tout μ B , B $\in \mathcal{B}_o$, $\mu > 0$:

$$\psi_\lambda(\mu \ B) = \begin{cases} B & \text{si} \quad \lambda \leq \mu \\ \emptyset & \text{si} \quad \lambda > \mu \end{cases}$$

D'autre part, les éléments de $\mathcal{B}_o$ sont convexes dans R^n, donc connexes. La proposition suivante montre que si les A_i , $i \in I$ sont les <u>composantes connexes</u> d'un ensemble A, on a pour tout $\lambda > 0$:

$$\psi_\lambda(A) = \bigcup_{i \in I} \psi_\lambda(A_i)$$

<u>Proposition 5-10</u> - Soit ψ une ouverture sur une partie $\mathcal{a}$ de $\mathcal{P}(E)$, E désignant un espace topologique. Si la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ψ admet une base $\mathcal{B}_o$ (i.e. : $\mathcal{B}_o \subset \mathcal{B}$, et la restriction à $\mathcal{a}$ de la famille stable pour $\bigcup$ engendrée par $\mathcal{B}_o$ est $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}\setminus\emptyset$) composée de parties connexes dans E, l'ouverture de tout A $\in \mathcal{a}$ est réunion des ouvertures des composantes connexes de A.

En effet, l'inclusion $\psi(A) \supset \bigcup_{i \in I} \psi(A_i)$ est vraie dès que $A = \bigcup A_i$. Si les A_i sont les composantes connexes de A, l'inclusion inverse est également vérifiée. En effet, soit $x \in \psi(A)$, et $B \in \mathcal{B}_0$ avec $x \in B \subset A$. Comme B est connexe par hypothèse, il existe $i \in I$ avec $x \in B \subset A_i$, d'où $x \in \psi(A_i)$, et $\psi(A) \subset \bigcup_{i \in I} \psi(A_i)$.

Revenons à la granulométrie selon la famille $\mathcal{B}_0$ de la Proposition 5-9. Si A est un fermé dont les composqntes connexes A_i, $i \in I$ sont des homothétiques d'ensembles de $\mathcal{B}_0$, soit :

$$A_i = \lambda_i B_i \quad , B_i \in \mathcal{B}_0$$

la granulométrie ψ_λ éteindra les composantes telles que $\lambda_i < \lambda$, et laissera les autres invariantes :

$$(5\text{-}4) \qquad \psi_\lambda(A) = \bigcup \{A_i : i \in I , \lambda_i \geq \lambda\}$$

Supposons alors qu'un ensemble $B_0 \in \mathcal{B}_0$ possède la propriété suivante (plus forte que celle qui découle de (5-3)), qui exprime que B_0 est "<u>bien séparé</u>" des autres $B \in \mathcal{B}_0$:

Il existe deux réels positifs α et β avec $\alpha < 1 < \beta$ tels que :

1. $\lambda > \alpha$, $B \neq B_0$ et $B \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow \lambda B_0 \not\subset B$

2. $\mu < \beta$, $B' \neq B_0$ et $B' \in \mathcal{B}_0 \Rightarrow B' \not\subset \mu B_0$

Alors les deux familles :

$$\mathcal{B}_\alpha = (\mathcal{B}_0 \setminus B_0) \cup \{\alpha B_0\}$$

$$\mathcal{B}_\beta = (\mathcal{B}_0 \setminus B_0) \cup \{\beta B_0\}$$

obtenues en remplaçant B_0 par αB_0 ou βB_0 vérifient encore la relation 5-3. Soit ψ_λ^α et ψ_λ^β les granulométries euclidiennes associées à $\mathcal{B}_\alpha$ et $\mathcal{B}_\beta$, et A un fermé dont les composantes connexes sont des λB_i , $B_i \in \mathcal{B}_o$ comme ci-dessus. Soit I_o l'ensemble des indices i_o tel que $B_{i_o} = B_o$. On a, pour $i_o \in I_o$:

$$A_{i_o} = \lambda_{i_o} B_o = \frac{\lambda_{i_o}}{\alpha} \alpha B_o = \frac{\lambda_{i_o}}{\beta} \beta B_o$$

Désignons par A_o et A_1 les ensembles :

$$A_o = \bigcup_{i \in I_o} A_i \qquad\qquad A_1 = \bigcup_{i \in I \setminus I_o} A_i$$

Le premier contient les composantes de A qui sont homothétiques de B_o (du type B_o), le second contient les autres composantes. On a :

$$\left|\begin{array}{l} \psi_\lambda(A) = \psi_\lambda(A_o) \cup \psi_\lambda(A_1) \\ \psi_\lambda^\alpha(A) = \psi_\lambda^\alpha(A_o) \cup \psi_\lambda(A_1) \\ \psi_\lambda^\beta(A) = \psi_\lambda^\beta(A_o) \cup \psi_\lambda(A_1) \end{array}\right.$$

D'après (5-4), de plus :

$$\left|\begin{array}{l} \psi_\lambda(A_o) = \bigcup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda_i \geq \lambda\} \\ \psi_\lambda^\alpha(A_o) = \bigcup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda_i \geq \lambda\alpha\} \\ \psi_\lambda^\beta(A_o) = \bigcup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda_i \geq \lambda\beta\} \end{array}\right.$$

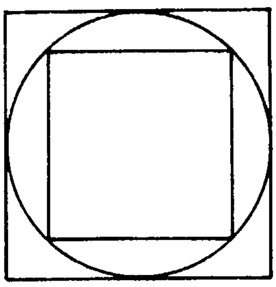
Par suite :

$$\psi_\lambda^\alpha(A) \setminus \psi_\lambda(A) = \bigcup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \alpha\lambda \leq \lambda_i < \lambda\}$$

$$\psi_\lambda(A) \setminus \psi_\lambda^\beta(A) = \bigcup \{A_i \ , \ i \in I_o \ , \ \lambda \leq \lambda_i < \beta\lambda\}$$

Le premier ensemble est constitué des homothétiques $\lambda_i\ B_o$ contenus dans A et vérifiant $\alpha\lambda \leq \lambda_i < \lambda$, le deuxième des $\lambda_i\ B_o$ tels que $\lambda \leq \lambda_i < \beta\ \lambda$. Autrement dit, on a bien réalisé un <u>filtre morphologique</u>, permettant d'obtenir la granulométrie des seules composantes du type B_o.

<u>Exemple de filtre morphologique</u> - Supposons qu'un fermé $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ soit constitué de <u>cercles et de carrés</u> disjoints . Prenons les deux familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ ainsi constituées : $\mathcal{B}_1$ contient le cercle unité et le carré de côté $\sqrt{2}$, $\mathcal{B}_2$ le cercle unité et le carré de côté 2. $\psi^1_\lambda(A)$ retient parmi les composantes de A



celles qui sont des cercles de rayon $\geq \lambda$ et celles qui sont des carrés de côté $\geq \lambda\sqrt{2}$. $\psi^2_\lambda(A)$ contient les mêmes cercles, mais seulement les carrés de côté $\geq 2\ \lambda$. Par conséquent $\psi^1_\lambda(A) \setminus \psi^2_\lambda(A)$ est constituée des carrés de côté a tels que $\lambda\sqrt{2} \leq a < 2\ \lambda$. En posant :

$$F_\lambda(A) = \psi^1_\lambda(A) \setminus \psi^2_\lambda(A)$$

les $F_{\lambda_n}(A)$, $\lambda_n = 2^{n/2}\ \lambda_o$ donnent l'"histogramme" des carrés, selon des classes constituant une progression géométrique de raison 2. Ces opérations sont faciles à réaliser : si l'on désigne par B le cercle unité, et par C_1 et C_2 les carrés inscrit et circonscrit à B, on a simplement :

$$\psi^1_\lambda(A) = A_{\lambda B} \cup A_{\lambda C_1}$$

$$\psi^2_\lambda(A) = A_{\lambda B} \cup A_{\lambda C_2}$$

d'où :

$$F_\lambda(A) = (A_{\lambda C_1} \setminus A_{\lambda C_2}) \cap \complement A_{\lambda B}$$

Donnons pour terminer quelques exemples.

5-8 - Exemples de granulométries euclidiennes

1 - La granulométrie <u>universelle</u> : $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des ensembles mesurables dont la mesure de Lebesgue est $\geq \lambda$. Tous les ensembles de mesure λ_o sont critiques pour $\lambda = \lambda_o$ (mais il n'y a pas de filtre morphologique possible). On a $\psi_\lambda(A) = \emptyset$ ou A selon que Mes $A < \lambda$ ou Mes $A \geq \lambda$.

2 - La granulométrie <u>connexe universelle</u> : $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des ensembles <u>connexes</u> mesurables et de mesure $\geq \lambda$. $\psi_\lambda(A)$ est la réunion des composantes connexes de A de mesure $\geq \lambda$. Tout ensemble connexe est critique pour λ = Mes A, mais il n'y a pas de filtre.

3 - <u>Tamisage</u> selon un convexe B (par exemple, B sera un cylindre convexe, ce qui correspond à peu près aux tamisages usuels). $\mathcal{B}_\lambda$ est la famille des ensembles <u>non contenus</u> dans un translaté de λ B. Plus généralement, on peut prendre B dans un sous-espace à $k < n$ dimension, et pour $\mathcal{B}_\lambda$ la famille des ensembles dont la projection sur ce sous-espace n'est pas contenue dans un translaté de λ B.

4 - Granulométrie selon un ensemble B (en général compact convexe) ou selon une famille $\mathcal{B}_o$ (en général $\mathcal{B}_o$ est compacte dans $\mathcal{K}$ et contenue dans $C(\mathcal{K})$, avec possibilité de former des filtres

morphologiques si les ensembles de $\mathcal{B}_0$ sont suffisamment "séparés" les uns des autres.

6 - GRANULOMETRIE D'UN ENSEMBLE ALEATOIRE

Soit E un espace LCD. Un ensemble compact (fermé) aléatoire est une application mesurable d'un espace probabilisable dans $\mathcal{K}(E)$ (resp. $\mathcal{F}(E)$) muni de la σ-algèbre de ses boréliens. En particulier l'application identique de $\mathcal{K}$ (de $\mathcal{F}$) sur lui-même est un compact (fermé) aléatoire que nous appellerons le <u>compact</u> (<u>fermé</u>) <u>aléatoire canonique</u>. Nous le désignerons par A ($A(F) = F$ sur $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$). Si ψ est une application s c s (s c i) de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$ ou dans $\mathcal{F}$, $\psi(A) = \psi \circ A$ est un compact ou un fermé aléatoire. En effet, si $\mathcal{F}$ est l'espace image, la σ-algèbre sur $\mathcal{F}$ est engendrée indifféremment par les V^K , $K \in \mathcal{K}$ ou les V_G , $G \in \mathcal{G}$. Si ψ est s c s, $\psi^{-1}(V^K)$ est ouvert dans l'espace de définition, et de même $\psi^{-1}(V_G)$ est ouvert si ψ est s c i. Dans les deux cas ψ est mesurable, et $\psi(A)$ est un ensemble aléatoire.

Cet ensemble aléatoire $\psi(A)$ vérifie même la condition de mesurabilité. En effet, considérons par exemple une application ψ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ (les trois autres cas se traitent de la même manière), et l'application :

$$k : E \times \mathcal{F}(E) \to \{0,1\}$$

définie par $k(x,F) = 1$ si $x \in \psi(F)$, 0 sinon. Montrons que cette application est mesurable lorsqu'on munit $E \times \mathcal{F}$ de la σ-algèbre borélienne, dans le cas où ψ est s c s ou s c i. En effet, si ψ est s c s, l'image inverse de 1 est $k^{-1}(1) = \{(x,F)\ ,\ x \in \psi(F)\}$, et cet ensemble est <u>fermé</u> (donc mesurable) dans $E \times \mathcal{F}$ (car $x_n \to x$, $F_n \to F$ et $x_n \in \psi(F_n)$ entraine $x \in \underline{\lim}\ \psi(F_n) \subset \overline{\lim}\ \psi(F_n)$, et $x \in \psi(F)$ si ψ est s c s).

Si ψ est s c i, $x \notin \psi(F)$ entraine l'existence d'un ouvert $B \ni x$ tel que $\psi(F) \in V^B$. E étant LCD, sa topologie admet une base dénombrable $\mathcal{B}$. On a alors :

$$k^{-1}(0) = \{(x,F)\ ,\ x \notin \psi(F)\} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times \psi^{-1}(V^B)$$

Les B sont ouverts, les $\psi^{-1}(V^B)$ fermés, puisque ψ est s c i , et $\mathcal{B}$ dénombrable, donc cet ensemble est mesurable. Enonçons :

<u>Proposition 6-1</u> - Si E est un espace LCD et ψ une application s c s ou s c i de $\mathcal{K}(E)$ ou $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{K}$ (resp. dans $\mathcal{F}$) , $\psi(A)$ est un compact (un fermé) aléatoire mesurable. En particulier, pour toute mesure positive μ sommable sur E, l'intégrale $\int_{\psi(A)} \mu(dx) = \int k(x,A)\ \mu(dx)$ est une variable aléatoire, et son espérance vérifie :

$$E \int_{\psi(A)} \mu(dx) = \int P(x \in \psi(A))\ \mu(dx)$$

Supposons maintenant que ψ_λ, $\lambda > 0$ soit une granulométrie s c s sur $\mathcal{F}(E)$(ou $\mathcal{K}$) . D'après la Proposition 5-3, l'application $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ est s c s de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{F}$ (ou $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$) dans $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{K}$). L'image inverse des V^K , $K \in \mathcal{K}$, (ou des V^F , $F \in \mathcal{F}$) est donc un ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \mathfrak{F}$ ($\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$), et l'application $(\lambda, A) \to \psi_\lambda(A)$ est mesurable. $\psi_\lambda(A)$ est donc un fermé (compact aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathfrak{F}$ ($\mathbb{R}_+ \times \mathcal{K}$) muni de ses boréliens. L'application k de $E \times \mathbb{R}_+ \times \mathfrak{F}$ sur $\{0,1\}$ définie par $k(x,\lambda,A) = 1$ si $x \in \psi_\lambda(A)$ et 0 sinon est mesurable, car :

$$k^{-1}(1) = \{(x,\lambda,A) : x \in \psi_\lambda(A)\}$$

est fermé dans $E \times R_+ \times \mathfrak{F}$, comme on le vérifie à partir de la semi-continuité supérieure. Si nous posons :

$$\Lambda(x) = \text{Sup}\ \{\lambda : k(x,\lambda,A) = 1\} = \text{Sup}\ \{\lambda : x \in \psi_\lambda(A)\}$$

$\Lambda(x)$, à x fixé, est une V.A. sur $\mathfrak{F}$ muni de ses boréliens, et la famille $\Lambda(x)$, $x \in E$ est une F.A., d'ailleurs mesurable comme on le déduit sans peine de la mesurabilité de $k(x,\lambda,A)$. Si $F_x(\lambda)$ est la fonction de répartition de $\Lambda(x)$, on a :

$$F_x(\lambda) = P\big(\Lambda(x) < \lambda\big) = P\big(x \notin \psi_\lambda(A)\big)$$

En effet, $\Lambda(x) < \lambda$ implique $x \notin \psi_\lambda(A)$, et, plus précisément :

$$\{\Lambda(x) < \lambda\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{x \notin \psi_{\lambda-\varepsilon}(A)\}$$

D'après la propriété 3 de la Proposition 5-3, on en déduit :

$$\{\Lambda(x) \geq \lambda\} = \{x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \psi_{\lambda-\varepsilon}(A)\} = \{x \in \psi_\lambda(A)\}$$

On convient alors d'appeler <u>mesure granulométrique</u> au point x (associée à la granulométrie ψ_λ) de l'ensemble aléatoire A - soit, plus brièvement, granulométrie de l'ensemble aléatoire A, la fonction :

$$1 - F_x(\lambda) = P(\Lambda(x) \geq \lambda) = P(x \in \psi_\lambda(A))$$

Enonçons :

Proposition 6-2 - Soit E un espace LCD et ψ_λ une granulométrie s c s sur $\mathcal{F}(E)$ (ou sur $\mathcal{K}(E)$) et A le fermé (le compact) aléatoire canonique. Alors $\psi_\lambda(A)$ est un fermé (un compact) aléatoire mesurable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{F}$ ($\mathbb{R}^+ \times \mathcal{K}$). Si l'on pose $\Lambda(x) =$ $= \operatorname{Sup} \{\lambda : x \in \psi_\lambda(A)\}$, $\Lambda(x)$, $x \in E$ est une fonction aléatoire mesurable sur $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{K}$) muni de ses boréliens et vérifie la relation $\{\Lambda(x) \geq \lambda\} = \{x \in \psi_\lambda(A)\}$.

Définition - Dans les mêmes conditions, si P est une probabilité sur $\mathcal{F}$ (sur $\mathcal{K}$), on appelle mesure granulométrique associée à ψ_λ la fonction :

$$1 - F_x(\lambda) = P(\Lambda(x) \geq \lambda) = P(x \in \psi_\lambda(A))$$

Remarque - Les réalisations de $\Lambda(x)$ sont s c s sur E. En effet, soit x_n une suite convergeant vers x dans E, et λ_o une valeur d'adhérence (dans le compactifié de $\mathbb{R}_+$) de $\Lambda(x_n)$. Soit $\Lambda(x_{n_k})$ une suite partielle convergeant vers λ_o, et $\lambda_{n_k} < \Lambda(x_{n_k})$ avec $\lambda_{n_k} \to \lambda_o$. On a $x_{n_k} \in \psi_{\lambda_{n_k}}(A)$ d'après la définition de $\Lambda(x)$. Comme ψ_λ est s c s en λ, on en déduit $x \in \overline{\lim}\, \psi_{\lambda_{n_k}}(A) \subset \psi_{\lambda_o}(A)$, c'est-à-dire $\Lambda(x) \geq \lambda_o$. Donc Λ est s c s sur E.

Granulométrie des pores.

Soit ψ_λ une granulométrie euclidienne s c s sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ la famille des invariants de ψ_1. Posons :

$$\psi'_\lambda(G) = \bigcup_{\substack{K \subset G \\ K \in \mathcal{K}}} \psi_\lambda(K) \qquad (G \in \mathcal{G})$$

D'après la Proposition 3-1, ψ'_λ est une ouverture s c i sur $\mathcal{G}$ pour chaque $\lambda > 0$, et on vérifie sans peine que les ψ'_λ , $\lambda > 0$ constituent une granulométrie euclidienne sur $\mathcal{G}$. Montrons que cette granulométrie est s c i, c'est-à-dire que l'application $(\lambda, G) \to \psi'_\lambda(G)$ est s c i de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$. Pour celà, il faut établir l'énoncé suivant : pour $\lambda > 0$, $K \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{G}$, si $K \subset \psi'_\lambda(G)$, on peut trouver $\lambda_o > \lambda$ et $K_o \subset G$, $K_o \in \mathcal{K}$ tel que $\mu < \lambda_o$ et $G' \supset K_o$ entraine $K \subset \psi'_\mu(G)$. Or, si le compact K est contenu dans l'ouvert $\psi_\lambda(G)$, on peut trouver un $B \in \lambda\mathcal{B}$ invariant pour ψ_λ et un $\varepsilon > o$ tel que la boule fermée $\overline{B}_\varepsilon$ vérifie :

$$K \subset K \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset B \subset B \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset G$$

Mais l'homothétie est continue sur $\mathcal{K}$. On peut donc trouver $\alpha > 1$ avec : $\frac{1}{\alpha} K \subset K \oplus \overline{B}_\varepsilon$ et $\alpha B \subset B \oplus \overline{B}_\varepsilon$, d'où :

$$K \subset \alpha B \subset B \oplus \overline{B}_\varepsilon \subset G$$

Mais $B \in \lambda \mathcal{B}$ donne $\alpha B \in \alpha \lambda \mathcal{B}$, αB est invariant pour $\psi_{\alpha\lambda}$. On a donc $K \subset \alpha B \subset \psi'_{\alpha\lambda}(G')$ pour tout ouvert G' vérifiant $G' \supset B \oplus \overline{B}_\varepsilon$. Ainsi, $G' \supset B \oplus \overline{B}_\varepsilon$ et $\mu \leq \alpha \lambda$ entraine $K \subset \psi'_\mu(G')$, et $(\lambda, G) \to \psi'_\lambda(G)$ est s c i.

<u>Proposition 6-3</u> - Si ψ_λ, $\lambda > 0$ est une granulométrie s c s euclidienne sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, la formule :

$$\psi'_\lambda(G) = \bigcup_{\substack{K \subset G \\ K \in \mathcal{K}}} \psi_\lambda(K) \qquad (G \in \mathcal{G})$$

définit une granulométrie euclidienne s c i sur $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire : l'application $(\lambda, G) \to \psi'_\lambda(G)$ de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ est s c i).

Si une granulométrie ψ_λ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ vérifie la "bonne" propriété habituelle (pour tout $\lambda > 0$, ψ_λ est le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$), le corollaire de la Proposition 4-11 montre que l'on a :

$$\psi'_\lambda(G) = \bigcup_{\substack{K \subset G \\ K \in \mathcal{K}}} \psi_\lambda(K) = \bigcup_{\substack{F \subset G \\ F \in \mathcal{F}}} \psi_\lambda(F) \qquad (G \in \mathcal{G})$$

de sorte que le plus petit prolongement sur $\mathcal{G}$ de ψ_λ constitue encore une granulométrie s c i. C'est évidemment ψ'_λ qui va servir à définir la granulométrie des pores, c'est-à-dire la granulométrie du complémentaire d'un ensemble fermé aléatoire.

Soit donc A le fermé aléatoire canonique. Comme l'application duale de ψ'_λ est s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, la proposition 6-1 montre que $\psi'_\lambda(A^c)$ est un ouvert aléatoire mesurable. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, posons :

$$\Lambda(x) = \operatorname{Sup} \{\lambda : x \in \psi'_\lambda(A^c)\}$$

Comme ψ'_λ est s c i, pour tout $G \in \mathcal{G}$ fixé, et tout $\lambda > 0$, on a :

$$\psi'_\lambda(G) = \bigcup_{\mu > \lambda} \psi'_\mu(G)$$

la convergence de la famille filtrante $\psi'_\mu(G)$, $\mu > \lambda$ ayant lieu aussi vers $\psi'_\lambda(G)$ dans $\mathcal{G}$. Par suite, $x \notin \psi'_{\lambda(x)}(A^c)$, et $\Lambda(x) \leq \lambda$ équivaut à $x \notin \psi_\lambda(A^c)$. Ainsi $\Lambda(x)$ est une fonction aléatoire sur $\mathcal{F}$, et on peut même vérifier sa mesurabilité.

Proposition 6-4 - Soit ψ_λ, $\lambda > 0$ une bonne granulométrie euclidienne sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, ψ'_λ son plus petit prolongement s c i sur $\mathcal{G}$ (qui est une granulométrie s c i sur $\mathcal{G}$), et A le fermé aléatoire canonique, P une probabilité sur $\mathcal{F}$. Alors $\psi'_\lambda(A^c)$ est un ouvert aléatoire mesurable. Pour toute mesure positive μ sur $\mathbb{R}^n$, l'intégrale $\int_{\psi'_\lambda(A^c)} \mu(dx)$ existe et vérifie

$$E \int_{\psi'_\lambda(A^c)} \mu(dx) = \int \mu(dx)\ P\left(x \in \psi'_\lambda(A^c)\right)$$

La fonction $\Lambda'(x,A) = \operatorname{Sup} \{\lambda : x \in \psi'_\lambda(A^c)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une fonction aléatoire mesurable, et vérifie l'égalité :

$$\{\Lambda'(x) \leq \lambda\} = \{x \notin \psi'_\lambda(A^c)\}$$

Définition - Dans les mêmes conditions, on appelle mesure granulométrique des pores associée à ψ_λ la fonction :

$$1 - F'_x(\lambda) = P\left(\Lambda'(x) > \lambda\right) = P\left(x \in \psi'_\lambda(A^c)\right)$$

Remarque - On notera qu'ici les réalisations de $\Lambda'(x)$ sont s c i sur $\mathbb{R}^n$: si $x_n \to x$, soit λ_0 une valeur d'adhérence de $\lambda_n = \Lambda'(x_n)$, x_{n_k} une suite partielle avec $\lambda_{n_k} \to \lambda_0$, On a $x_{n_k} \notin \psi'_{\lambda_{n_k}}(A^c)$, donc, ψ'_λ étant s c i, $x \notin \psi_{\lambda_0}(A_c)$, c'est-à-dire $\Lambda'(x) \leq \lambda_0$, et Λ' est s c i.

G. MATHERON   Novembre 1970