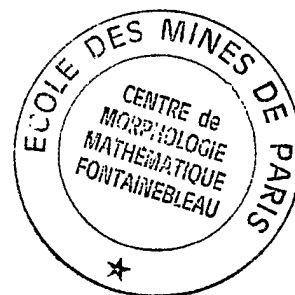


N-176



NOTE GEOSTATISTIQUE N° 104

FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES REGULIERES

=====

G. MATHERON

Mars 1970

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 104

FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES REGULIERES

Dans ce qui suit, nous considérerons d'abord un espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'un demi-groupe continu à un paramètre d'opérateurs S_t , $t \geq 0$ vérifiant $\|S_t\| \leq 1$. Nous examinerons ensuite le cas d'un groupe continu à n paramètres d'opérateurs unitaires U_h , $h \in \mathbb{R}^n$.

On appelle fonction aléatoire intrinsèque sur L^2 et pour le demi-groupe S_t une famille Z_t , $t \geq 0$ d'éléments de L^2 vérifiant la relation :

$$(1) \quad Z_{t+t'} = S_t Z_{t'} + Z_t \quad (t, t' \geq 0)$$

d'où résulte aussitôt :

$$(1') \quad (S_t - I)Z_{t'} = (S_{t'} - I)Z_t$$

A chaque F.A.I. nous associerons son demi-variogramme $\gamma(h)$ défini par :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \|Z_h\|^2 \quad (h \geq 0)$$

Nous dirons qu'une F.A.I. est régulière si son variogramme est borné sur tout intervalle fini. Il faut et il suffit pour

celà que son variogramme soit borné sur l'intervalle (0,1). En effet, de (1) résulte

$$Z_{2h} = S_h Z_h + Z_h \quad (h \geq 0)$$

et, par application de l'inégalité de Schwarz :

$$(2) \quad \gamma(2h) \leq 4 \gamma(h)$$

d'où l'on déduit

$$(2') \quad \sup_{0 \leq h \leq 2^{-n}} \gamma(h) \leq 2^{2n} \sup_{0 \leq h \leq 1} \gamma(h)$$

La dérive $E Z_t$ d'une F.A.I. Z_t (E , projecteur de l'espace $E(L^2)$ des éléments X invariants par le demi-groupe S_t , ou, ce qui revient au même, vérifiant $AX = 0$, A désignant le générateur de S_t) vérifie la relation fonctionnelle

$$(3) \quad E Z_{t+t'} = E Z_t + E Z_{t'}$$

comme il résulte aussitôt de (1). Si Z est régulière, cette dérive est bornée en norme sur tout intervalle fini. Pour tout $X \in L^2$, la fonction $f(t) = \langle E Z_t, X \rangle$ vérifie donc $f(t+t') = f(t) + f(t')$ pour $t, t' \geq 0$ en restant bornée sur tout intervalle fini. Elle est donc de la forme $t a$ avec une constante $a = \langle E Z_1, X \rangle$. Par suite, la dérive elle-même est :

$$(3') \quad E Z_t = t E Z_1$$

Nous dirons que la F.A.I. Z_t est continue si l'application de $\mathbb{R}_+$ dans L^2 définie par $t \rightarrow Z_t$ est fortement continue. Il faut et il suffit pour cela que son variogramme soit continu en $h = 0$. En effet, pour h et $t \geq 0$, on déduit de (1) $Z_{t+h} - Z_t = S_t Z_h$, d'où :

$$(4) \quad \|Z_{t+h} - Z_t\|^2 \leq 2 \gamma(h)$$

En particulier, toute F.A.I. continue est uniformément continue.

LEMME 1 - Si $\gamma(h)$ est le demi-variogramme d'une F.A.I. régulière Z_t , on a l'inégalité :

$$\gamma(h) \leq 4 h^2 \gamma_0 \quad \left(\gamma_0 = \sup_{0 \leq h \leq 1} \gamma(h) \right), \quad h \geq 1$$

En effet, de l'inégalité (2), on tire d'abord, pour $h \leq 1$

$$(a) \quad \gamma(2^n h) \leq 2^{2n} \gamma(h) \leq 2^{2n} \gamma_0$$

Soit alors $x > 1$, et n l'entier défini par

$$\frac{x}{2^n} \leq 1 < \frac{x}{2^{n-1}}$$

d'où résulte $2^n < 2x$. L'inégalité (a) permet d'écrire :

$$\gamma(x) = \gamma\left(2^n \frac{x}{2^n}\right) \leq 2^{2n} \gamma_0 \leq 4 x^2 \gamma_0$$

Proposition 1 - Si Z_t est une F.A.I. régulière, $\frac{1}{t} Z_t$ converge fortement vers $E Z_1$ lorsque t tend vers l'infini. En particulier, le demi-variogramme $\gamma(h)$ d'une F.A.I. régulière et sans dérive vérifie

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^2} \gamma(h) = 0$$

Comme la dérive d'une F.A.I. régulière est nécessairement de la forme $E Z_t = t E Z_1$, il suffit de démontrer la dernière partie de l'énoncé : soit donc Z_t une F.A.I. régulière et sans dérive, et montrons que $\frac{1}{t} Z_t$ converge fortement vers 0.

a/ D'après le lemme, les $\frac{1}{t} Z_t$ sont bornées en norme. Soit donc t_n une suite de réels > 0 tels que $t_n \rightarrow \infty$ et que les $\frac{1}{t_n} Z_{t_n}$ admettent une limite faible $Z_0 \in L^2$. Pour $t > 0$, on a d'après (1) :

$$\frac{1}{t_n} Z_{t+t_n} = \frac{1}{t_n} U_{t_n} Z_t + \frac{1}{t_n} Z_{t_n} = \frac{1}{t_n} U_t Z_{t_n} + \frac{1}{t_n} Z_t$$

Pour n tendant vers l'infini, la deuxième expression converge faiblement vers Z_0 et la troisième vers $U_t Z_0$; on a donc $Z_0 = U_t Z_0$ pour tout $t \geq 0$, c'est-à-dire $Z_0 = E Z_0$. Mais $E Z_t = 0$ par hypothèse, et $\frac{1}{t_n} E Z_{t_n}$ converge vers $E Z_0$. Donc $E Z_0 = 0$ et $Z_0 = 0$. Ainsi, la suite $\frac{1}{t_n} Z_{t_n}$ converge faiblement vers 0, et il en résulte :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} Z_t = 0 \text{ au sens faible}$$

b/ Montrons que cette convergence a lieu aussi au sens fort.

Soit, en effet, h réel positif. Par récurrence, la relation (1) donne :

$$\begin{aligned} Z_h &= U_0 Z_h + Z_0 \\ \hline Z_{(n+1)h} &= U_{nh} Z_h + Z_{nh} \end{aligned}$$

d'où aussi :

$$Z_{(n+1)h} = \sum_{k=0}^n U_{kh} Z_h$$

Le théorème ergodique, appliqué à l'opérateur U_h , montre alors que la suite $\frac{1}{nh} Z_{nh}$ converge fortement, pour n infini, vers un élément X invariant par U_h . Mais, d'après la première partie de la démonstration, cette suite converge faiblement vers 0. Donc $X = 0$ et :

$$(a) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} Z_{nh} = 0 \quad \text{au sens fort.}$$

Montrons maintenant que $\frac{1}{t} Z_t$ converge fortement vers 0 pour $t \rightarrow \infty$, et pour cela que $\frac{1}{t_n} \|Z_{t_n}\|$ converge vers 0 quelle que soit la suite t_n convergeant vers ∞ . En effet, soit k_n l'entier tel que $k_n - 1 < t_n \leq k_n$, et posons $\alpha_n = t_n/k_n$. La suite α_n converge vers 1, et $|k_n - t_n| \leq 1$ entraîne d'après l'inégalité (4) :

$$| \|Z_{k_n}\| - \|Z_{t_n}\| | \leq \|Z_{k_n} - Z_{t_n}\| \leq \sqrt{2} \gamma_0$$

(avec $\gamma_0 = \sup_{h \leq 1} \gamma(h)$). On en déduit :

$$\frac{1}{t_n^2} \gamma(t_n) \leq \frac{\gamma_0}{t_n^2} + \frac{\gamma(k_n)}{\alpha_n^2 k_n^2}$$

Mais $\frac{1}{k_n} Z_{k_n}$ converge fortement vers 0, d'après (a), et α_n tend vers 1, de sorte que le second membre de cette inégalité tend vers 0. Il en résulte bien $\frac{1}{t_n^2} \gamma(t_n) \rightarrow 0$, ce qui achève la démonstration.

Proposition 2 - Pour qu'une F.A.I. Z_t soit de la forme $S_t X - X$ pour un $X \in L^2$, il faut et il suffit que Z_t soit continue et sans dérive, et que son variogramme $\gamma(h)$ soit borné.

Ces conditions sont évidemment nécessaires, car $Z_t = S_t X - X$ entraîne la continuité de Z_t , la relation $E Z_t = 0$ et la majoration

$$\|Z_t\|^2 = 2 (\|X\|^2 - \langle S_t X, X \rangle) \leq 4 \|X\|^2$$

Inversement, supposons ces conditions remplies. Comme Z_t est continue, posons

$$X_T = -\frac{1}{T} \int_0^T Z_t dt$$

On en tire, d'après (1') :

$$S_t X_T - X_T = -\frac{1}{T} \int_0^T (S_t - I) Z_\tau d\tau = -\frac{1}{T} \int_0^T (S_\tau - I) Z_t d\tau = Z_t - \frac{1}{T} \int_0^T S_\tau Z_\tau d\tau$$

Comme Z_t est sans dérive, le théorème ergodique donne :

$$(a) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} (S_t X_T - X_T) = Z_t \quad (\text{au sens fort})$$

Mais les Z_t sont bornés en norme, donc aussi les X_{T_n} . On peut donc trouver une suite T_n tendant vers l'infini telle que les X_{T_n} convergent faiblement vers une limite X_0 . Les $S_t X_{T_n} - X_{T_n}$ convergent alors faiblement vers $S_t X_0 - X_0$, et la relation (a) donne :

$$Z_t = S_t X_0 - X_0$$

Corollaire : Pour que l'équation $AX = Y$ (A générateur de S_t , Y donné dans L^2) ait une solution $X \in L^2$ il faut et il suffit que le variogramme de la F.A.I. $Z_t = \int_0^t S_\tau Y d\tau$ reste borné.

Passons maintenant à l'étude des F.A.I. définies sur $\mathbb{R}^n$. L'espace L^2 est muni d'un groupe continu à n paramètres d'opérateurs unitaires U_h , $h \in \mathbb{R}^n$, dont le générateur est $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$. Une F.A.I. est alors une famille Z_h , $h \in \mathbb{R}^n$ d'éléments de L^2 vérifiant

$$(5) \quad Z_{h+h'} = U_h Z_{h'} + Z_h, \quad (h, h' \in \mathbb{R}^n)$$

d'où aussi :

$$(5') \quad (U_h - I)Z_{h'} = (U_{h'} - I)Z_h$$

La F.A.I. Z_h est régulière si son variogramme est borné sur tout compact. L'inégalité (2') subsiste, ainsi que le lemme 1. Si donc on pose :

$$\gamma_0 = \sup_{|h| \leq 1} \gamma(h)$$

on a aussi

$$\gamma(h) \leq 4 |h|^2 \gamma_0 \quad (|h| \geq 1)$$

D'après la proposition 1, si Z_h est une F.A.I. régulière et sans dérive, on a pour toute direction α :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \gamma(\alpha r) = 0$$

ou, si l'on préfère, $\frac{1}{r} Z_{\alpha r}$ converge fortement vers 0. Par contre, on n'a pas obligatoirement

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \frac{1}{|h|^2} \gamma(h) = 0$$

sauf, comme nous le verrons, si la F.A.I. est continue. Nous désignerons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des F.A.I. régulières, et par $\tilde{L}^2 \subset \mathfrak{F}$ l'ensemble des F.A.I. continues. Pour toute F.A.I. $Z_h \in \mathfrak{F}$ de variogramme $\gamma(h)$, posons :

$$\|Z\|^2 = \sup_{|h| \leq 1} \gamma(h)$$

Montrons que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathfrak{F}$. D'après le lemme 1, on a pour toute F.A.I. de variogramme $\gamma(h)$:

$$\gamma(h) \leq \|Z\| \vee 4 |h|^2 \|Z\|$$

et $\|Z\| = 0$ entraîne $Z_h = 0$. Soient $Z_1(h)$ et $Z_2(h)$ deux éléments de $\mathfrak{F}$, γ_1 et γ_2 leurs demi-variogrammes. L'inégalité de Schwarz dans L^2 donne :

$$\frac{1}{2} \|Z_1(h) + Z_2(h)\|^2 \leq (\sqrt{\gamma_1(h)} + \sqrt{\gamma_2(h)})^2$$

On en déduit $Z_1 + Z_2 \in \mathfrak{F}$ (qui est donc un espace vectoriel), et l'inégalité triangulaire

$$\|Z_1 + Z_2\| \leq \|Z_1\| + \|Z_2\|,$$

qui montre que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathfrak{F}$.

Proposition 3 - L'espace vectoriel $\mathfrak{F}$ des F.A.I. régulières muni de la norme

$$\|Z\| = \sqrt{\frac{1}{2} \sup_{|h| \leq 1} \|Z_h\|^2}$$

est un espace de Banach.

Montrons que l'espace normé $\mathfrak{F}$ est complet. Soit Z_n une suite de Cauchy dans $\mathfrak{F}$. Pour chaque $h \in \mathbb{R}^n$, $Z_n(h)$ est une suite de Cauchy dans L^2 , donc admet une limite $Z(h) \in L^2$ qui, en tant que fonction de h , vérifie encore les relations (1). $Z(h)$ est donc une F.A.I. Ensuite, de :

$$\lim_{m, n} \sup_{|h| \leq 1} \|Z_n(h) - Z_m(h)\| = 0$$

on tire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|h| \leq 1} \|Z_n(h) - Z(h)\| = 0$$

et l'inégalité entre normes dans L^2 , à h et n fixés

$$\|Z(h)\| \leq \|Z_n(h) - Z(h)\| + \|Z_n(h)\|$$

permet d'en déduire que la F.A.I. $Z(h)$ est régulière, donc que $\mathfrak{F}$ est complet.

Corollaire : L'espace $\tilde{L}^2$ des F.A.I. continues est fermé dans $\mathfrak{F}$ et constitue un espace de Banach.

En effet, si une suite Z_n dans $\tilde{L}^2$ converge vers $Z \in \mathfrak{F}$, et si γ_n est le variogramme de Z_n , les fonctions continues $\gamma_n(h)$ convergent vers le variogramme $\gamma(h)$ de Z au sens de la convergence compacte, et $\gamma(h)$ est donc continu.

Proposition 4 - L'ensemble des F.A.I. dérivables est dense dans $\tilde{L}^2$.

Désignons par $\varphi_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ les densités gaussiennes, et, pour tout $Z \in \tilde{L}^2$, considérons les régularisées

$$Z_t(h) = \int \varphi_t(x) U_x Z(h) dx$$

qui sont des éléments de $\tilde{L}^2$. Pour chaque $h \in \mathbb{R}^n$, $Z_t(h)$ converge fortement vers $Z(h)$ lorsque $t \rightarrow 0$. D'après les relations (1'), on a :

$$\begin{aligned} Z_t(h) - Z(h) &= \int \varphi_t(x) (U_x - I) Z(h) dx = \\ &= \int \varphi_t(x) (U_h - I) Z_x dx \end{aligned}$$

D'où :

$$\|Z_t(h) - Z(h)\| \leq 2 \left\| \int \varphi_t(x) Z_x dx \right\| \leq 2 \int \varphi_t(x) \|Z_x\| dx$$

Mais, d'après le lemme 1, on a l'inégalité :

$$\|Z_x\| \leq \frac{2|x|}{a} \sup_{|h| \leq a} \|Z_h\| \quad \text{pour } |x| > a$$

d'où

$$\begin{aligned} \int \varphi_t(x) \|Z_x\| dx &\leq \sup_{|h| \leq a} \|Z_h\| \left[\int_{|x| \leq a} \varphi_t(x) dx + \int_{|x| \geq a} \frac{2|x|}{a} \varphi_t(x) dx \right] \\ &\leq \sup_{|h| \leq a} \|Z_h\| \left[1 + \frac{t}{a^2} \right] \end{aligned}$$

$\|Z_h\|$ étant continu en $h = 0$, on en déduit que $\int \varphi_t(x) \|Z_x\| dx$ tend vers 0 avec t , donc que $\|Z_t(h) - Z(h)\|$ converge vers 0 uniformément en h : ainsi $Z(h)$ est limite dans $\tilde{L}^2$ de ses régularisées $Z_t(h)$.

D'après la relation (1), $U_x Z(h) = Z(x+h) - Z(x)$, et par suite on a aussi :

$$Z_t(h) = \int [\varphi_t(x-h) - \varphi_t(x)] Z(x) dx$$

et sous cette forme on vérifie que les $Z_t(h)$ sont faiblement dérivables en h , donc aussi fortement, ce qui achève d'établir la proposition.

Corollaire : L'ensemble des F.A.I. continues admettant une représentation de la forme $U_h X - X$ pour un $X \in L^2$ est dense dans l'es-

pace $\tilde{L}_0^2$ des F.A.I. continues sans dérive.

En effet, on déduit d'abord de la proposition que les F.A.I. dérivables et sans dérive sont denses dans $\tilde{L}_0^2$. Ces F.A.I. dérivables et sans dérive sont caractérisées par leurs gradients $G \in \bar{H}_0$. Mais la relation

$$z_h = \int_C U_\eta G_i d\eta^i$$

où C est un chemin joignant 0 à h permet de voir que la convergence dans $\bar{H}_0$ d'une suite de gradients entraîne la convergence dans $\tilde{L}^2$ des F.A.I. qui leur sont associées. Or l'espace H_0 des gradients au sens strict ($G_i = A_i X$ pour un $X \in \mathcal{D}_A$) est dense dans $\bar{H}_0$ pour la convergence de L^2 , et par suite les F.A.I. de la forme $U_h X - X$ sont denses dans $\tilde{L}_0^2$.
