



NOTE GEOSTATISTIQUE N° 107

KRIGEAGE UNIVERSEL POUR UNE DERIVE ALEATOIRE
=====

Par

G. MATHERON

Avril 1970

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 107

KRIGEAGE UNIVERSEL POUR UNE DERIVE ALEATOIRE

Table des Matières

<u>1 - HYPOTHESES</u>	1
Exemple d'une exponentielle de Gauss.	3
<u>2 - ESTIMATION D'UNE DERIVE</u>	5
<u>3 - UN EXEMPLE AMBIGU</u>	7
Le problème du terme constant a_0 .	12
<u>4 - LE KRIGEAGE</u>	13
<u>ANNEXE : DERIVES NORMALISEES</u>	15
1 - L'espace fonctionnel $\mathfrak{F}$.	15
2 - Dérive normalisée.	16
3 - Le projecteur Π_N .	17
4 - Relation avec le krigeage.	19
5 - Exemple.	20
- Construction des polynomes normalisés P_n .	21
- Les fonctions $\tilde{P}_n$.	24

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 107

KRIGEAGE UNIVERSEL POUR UNE DERIVE ALEATOIRE
=====

1 - HYPOTHESES

Au lieu de considérer la dérive comme une fonction $m(x)$ inconnue mais non aléatoire, on peut aussi envisager le cas où $m(x)$ est une fonction aléatoire $m(x,\omega)$, autrement dit, étudier une F.A. $Z(x,\omega)$ de la forme :

$$(1) \quad Z(x,\omega) = Y(x,\omega) + m(x,\omega)$$

avec $EY(x) = 0$. Posons :

$$\begin{cases} E Y(x) Y(y) = \sigma(x,y) \\ E m(x) m(y) = K(x,y) \\ E Y(x) m(y) = R(x,y) \end{cases}$$

(la seconde covariance est non centrée).

Il n'est pas nécessaire que les F.A. Y et m soient indépendantes. Mais, pour que la dichotomie écrite en (1) présente une signification physique réelle, et non un pur artefact, il faut que chacune des deux composantes Y et m prennent en charge des traits structuraux se rapportant à des échelles nettement différenciées (structures gigogne de J. Serra). La F.A. m doit avoir une portée (infinie ou) très grande vis-à-vis de celle de Y , et, de plus, à l'échelle de la portée de Y , la variabilité de m doit

être très réduite. A l'échelle de Y , la réalisation $m(x, \omega)$ doit ainsi pouvoir être assimilée à une fonction très régulière et continue, de sorte que - sur un certain domaine V - on doit pouvoir écrire :

$$(2) \quad m(x, \omega) \approx a_{\ell}(\omega) f^{\ell}(x) \quad (x \in V)$$

les $a_{\ell}(\omega)$ désignant des V.A. (qui dépendent du domaine V), et les f^{ℓ} les fonctions de base habituelles (avec $f^0 = 1$), par exemple des polynomes, ou, plus généralement, des fonctions continues et suffisamment régulières, linéairement indépendantes sur V .

Examinons la signification de cette hypothèse (2). Nous poserons :

$$(3) \quad K_{\ell s} = E a_{\ell} a_s$$

de sorte que la covariance $K(x, y)$ de la F.A. $m(x)$ admet, dans le domaine V où l'approximation (2) est valable, la représentation :

$$(4) \quad K(x, y) \approx K_{\ell s} f^{\ell}(x) f^s(y) \quad (x, y \in V)$$

Pour la covariance $R(x, y)$, nous trouvons

$$R(x, y) \approx E Y(x) a_{\ell} f^{\ell}(y) = R_{\ell}(x) f^{\ell}(y) \quad (x, y \in V)$$

Si la F.A. Y peut être considérée comme stationnaire sur V , $R_{\ell}(x)$ est une constante R_{ℓ} . Plus généralement, $R_{\ell}(x)$ admettra sur V une bonne représentation approchée au moyen des mêmes fonctions

$f^S(x)$, soit

$$R(x) \simeq R_{\ell_S} f^S(x) \quad (x \in V)$$

d'où finalement pour $R(x,y)$ un résultat analogue à (4) :

$$(4') \quad R(x,y) \simeq R_{\ell_S} f^{\ell}(x) f^S(y) \quad (x,y \in V)$$

Il apparaît d'ailleurs que les relations (4) et (4') sont les seules hypothèses réellement requises pour ce qui suit, et que la relation (2) n'en est qu'une traduction imagée. D'un point de vue purement pragmatique, elles signifient seulement que les fonctions $K(x,y)$ et $R(x,y)$ varient assez lentement dans l'espace à l'échelle du domaine V de référence pour qu'on puisse les remplacer sur V par les premiers termes de leurs développements limités en $f^{\ell}(x) f^S(y)$. L'exemple suivant montrera le sens de cette hypothèse.

Exemple d'une exponentielle de Gauss. - Pour alléger les écritures, plaçons-nous dans $\mathbb{R}^1$ (on aurait évidemment des résultats analogues dans $\mathbb{R}^n$) et supposons que la covariance K soit de la forme :

$$K(x,y) = B e^{-\frac{(x-y)^2}{2 b^2}}$$

avec une portée b plus grande que la longueur L de l'intervalle de référence V . Développons cette exponentielle de Gauss :

$$K(x,y) = B \left[1 - \frac{(x-y)^2}{2 b^2} + \frac{1}{8} \frac{(x-y)^4}{b^4} - \frac{1}{48} \frac{(x-y)^6}{b^6} + \dots \right]$$

chacun des termes $(x-y)^{2n}$ se développe à son tour en monomes $x^\ell y^s$, et l'on voit que $K(x,y)$ admet effectivement un développement limité de type (4) avec $f^\ell(x) = x^\ell$.

Dans le cas d'une "dérive quadratique", c'est-à-dire $\ell = 0, 1, 2$, on arrête ce développement au terme d'ordre 4, et l'erreur est majorée par

$$\frac{B}{48} \frac{(x-y)^6}{b^6} \leq \frac{4}{3} B \frac{L^6}{b^6}$$

Pour apprécier cette majoration, remarquons que B peut être très grand (voire, à la limite, infini, si m n'a pas de covariance, mais seulement un variogramme), mais B/b^2 est obligatoirement fini, puisqu'il représente le coefficient du terme en h^2 du variogramme de m . Posant $B/b^2 = B_2$, on voit que la majoration est en $B_2 L^2 \left(\frac{L}{b}\right)^4$ donc d'ordre au moins 4 en L/b . Si donc la portée b est effectivement grande vis-à-vis de L , l'approximation faite sera tout-à-fait légitime.

Remarque : D'après (1), la covariance de Z serait $\sigma + 2R + K$. On peut se demander si cette dichotomie est vraiment utile, et s'il ne serait pas plus simple de faire du krigeage ou du cokrigeage ordinaire directement sur cette covariance. La réponse est que (dans les conditions de nos hypothèses) l'estimation de cette covariance n'est pas possible dans des conditions acceptables. La composante $K(x,y)$ n'est, en général, pas une covariance stationnaire. Même si, localement, (c'est-à-dire à l'échelle de V) on peut la mettre sous la forme $K(x-y)$, l'inférence statistique à partir de données couvrant un domaine de l'ordre de grandeur de V ne sera pas réalisable en général.

2 - ESTIMATION D'UNE DERIVE

Désignons par Z_α les valeurs de $Z(x)$ aux points expérimentaux $x_\alpha \in S \subset V$. Nous supposons S fini, mais ce qui suit se transpose sans difficulté au cas où S est infini.

Nous voulons estimer la dérive $m(x)$ en un point $x \in V$, et pour cela nous formons un estimateur de la forme

$$M^*(x) = \lambda^\alpha Z_\alpha = \lambda^\alpha Y_\alpha + \lambda^\alpha m_\alpha$$

L'espérance du carré de l'erreur est donc :

$$\begin{aligned} E(M_x^* - m_x)^2 &= E \left(\lambda^\alpha Y_\alpha + (\lambda^\beta m_\beta - m_x) \right)^2 = \\ &= \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} + 2 \lambda^\alpha (\lambda^\beta R_{\alpha\beta} - R_{\alpha x}) + \lambda^\alpha \lambda^\beta K_{\alpha\beta} - 2 \lambda^\alpha K_{\alpha x} + K_{xx} \end{aligned}$$

Les hypothèses (4) et (4') donnent :

$$\begin{aligned} \lambda^\beta R_{\alpha\beta} - R_{\alpha x} &= R_{\ell s} (\lambda^\beta f_\beta^s - f_x^s) f_\alpha^\ell \\ \lambda^\alpha \lambda^\beta K_{\alpha\beta} - 2 \lambda^\alpha K_{\alpha x} + K_{xx} &= K_{\ell s} (\lambda^\alpha \lambda^\beta f_\alpha^\ell f_\beta^s - \lambda^\alpha f_\alpha^\ell f_x^s - \\ &\quad - \lambda^\beta f_x^\ell f_\beta^s + K_{xx}) = K_{\ell s} (\lambda^\alpha f_\alpha^\ell - f_x^\ell) (\lambda^\beta f_\beta^s - f_x^s) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} E(M_x^* - m_x)^2 &= \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} + 2 \lambda^\alpha f_\alpha^\ell R_{\ell s} (\lambda^\beta f_\beta^s - f_x^s) \\ &\quad + K_{\ell s} (\lambda^\alpha f_\alpha^\ell - f_x^\ell) (\lambda^\beta f_\beta^s - f_x^s) \end{aligned} \right.$$

On voit apparaître le sens des conditions d'universalité. Nous ne pouvons pas espérer minimiser la forme quadratique (5) pour des λ^α quelconques, puisque nous ne connaissons pas les $K_{\ell s}$ et les $R_{\ell s}$, et nous sommes ainsi conduits à imposer aux λ^α des conditions supplémentaires moyennant lesquelles (5) ne dépendra plus des $R_{\ell s}$ et $K_{\ell s}$. La matrice $K_{\ell s}$ étant toujours de type positif, ces conditions sont :

$$(6) \quad \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = f_x^\ell$$

c'est-à-dire les conditions d'universalité habituelles. Moyennant ces conditions, il reste :

$$(5') \quad E(M_x^* - m_x)^2 = \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta}$$

Il suffit alors de minimiser (5') compte tenu de (6) pour retrouver le même système que dans la théorie habituelle - et la même variance d'estimation (on vérifie sans peine $E(M_x^* - mx) = E(\lambda^\alpha m_\alpha - m_x) = 0$ dès que $m(x, \omega)$ - sans être obligatoirement stationnaire - admet elle-même une dérive $E m(x)$ représentable sur V par une expression de la forme $\alpha_\ell f^\ell(x)$). Moyennant les hypothèses (4) et (4'), la dérive aléatoire relève du même traitement que la dérive fonctionnelle.

En délinéarisant le système relativement aux seconds membres de (6), on obtient, comme dans le cas classique, les estimateurs

$$A_\ell = \lambda_\ell^\alpha Z_\alpha$$

des coefficients $a_\ell = a_\ell(\omega)$ de la dérive $m(x) \approx a_\ell f^\ell(x)$ ($x \in V$)

et les paramètres de Lagrange $\mu_{\ell s}$ conservent leur signification. Plus précisément - les a_{ℓ} étant des V.A., on a :

$$\begin{cases} E (A_{\ell} - a_{\ell}) = 0 \\ E (A_{\ell} - a_{\ell})(A_s - a_s) = \mu_{\ell s} \end{cases}$$

3 - UN EXEMPLE AMBIGU

Soit $Z(x, \omega)$ une F.A.I. sans dérive, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E (Z(x) - Z(y)) = 0 \\ \frac{1}{2} E (Z(x+h) - Z(x))^2 = \gamma(h) \end{cases}$$

et soit p une fonction de pondération très régulière et de somme égale à 1 (par exemple une exponentielle de Gauss). Posons :

$$\begin{cases} m(x) = Z * \check{p} = \int Z(x+y) p(y) dy \\ Y(x) = Z - Z * \check{p} \end{cases}$$

Dans la décomposition

$$Z = Y + m$$

m est une moyenne mobile, Y le "résidu" de Z autour de cette moyenne mobile. Le variogramme de m est $\gamma * p * \check{p} - \langle \gamma, p * \check{p} \rangle$; en vertu de la régularité de p , il admet un développement du type (4) sur un domaine V de dimension petite vis-à-vis de la portée de p . On est donc dans les conditions requises pour estimer la moyenne

mobile $m(x)$, considérée comme une dérive aléatoire, par les méthodes du Krigeage Universel.

Y est une F.A. stationnaire d'ordre 2. Sa covariance σ se déduit du variogramme γ par la relation :

$$\sigma = - \gamma * (\delta - p - \check{p} - p * \check{p})$$

qui s'explique ainsi (avec $P = p * \check{p}$) :

$$(7) \quad \sigma(h) = - \gamma(h) + \int \gamma(y) [p(y+h) + p(y-h)] dy - \int \gamma(y) P(y+h) dy$$

En particulier :

$$(7') \quad \sigma^2 = \sigma(0) = 2 \int \gamma(x) p(x) dx - \int \gamma(x) P(x) dx$$

C'est cette covariance (7) qui doit figurer dans les premiers membres des conditions d'optimalité du système K.U. Mais les conditions imposées à p (régularité, et portée grande vis-à-vis du voisinage V) entraînent que $\sigma(x-y)$ admet elle aussi un développement de type (4), au terme $\gamma(h)$ près, soit :

$$(8) \quad \sigma(x-y) \simeq - \gamma(x-y) + P_{\ell s} f^{\ell}(x) f^s(y) \quad (x, y \in V)$$

La quantité à minimiser pour estimer $m(x)$ se met sous la forme :

$$\lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = - \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} + P_{\ell s} \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{\ell} \lambda^{\beta} f_{\beta}^s$$

Mais les conditions d'universalité (6) entraînent alors :

$$\lambda^{\beta} \lambda^{\alpha} \sigma_{\alpha\beta} = - \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} + P_{\ell s} f_x^{\ell} f_x^s$$

Or, d'après (8), on a aussi :

$$\sigma(0) = p_{\ell s} f_x^{\ell} f_x^s$$

Donc, finalement - les conditions (6) étant supposées vérifiées - tout se ramène à minimiser l'expression :

$$\lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma(0) - \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \gamma_{\alpha\beta}$$

D'où le système :

$$(9) \quad \begin{cases} - \lambda^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = \mu_{\ell} f_{\alpha}^{\ell} \\ \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{\ell} = f_x^{\ell} \end{cases}$$

et la variance correspondante est :

$$(9') \quad D^2(M_x^* - m_x) = \sigma(0) + \mu_{\ell} f_x^{\ell}$$

On note que le système (9) ne dépend pas du choix de la fonction de pondération p (pourvu qu'elle soit régulière et de grande portée) : le même estimateur $\lambda^{\alpha} Z_{\alpha}$ s'applique à toutes les moyennes mobiles, et c'est seulement sur la variance (9') que le choix de la fonction p se répercute, par l'intermédiaire de la variance $\sigma(0)$ définie en (7') - qui n'est autre que la variance à priori du résidu $Y(x) - m(x)$.

Ce résultat ambigu mérite quelques commentaires.

Remarque 1 - Le variogramme γ étant connu, l'estimation de la moyenne mobile $m(x)$ relève en réalité du krigeage ordinaire. Au

lieu du système (9), on devrait donc utiliser le système (10) ci-après :

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} = \int \gamma(y) p(y-x+x_\alpha) dy - \mu_0 \\ \sum_\alpha \lambda^\alpha = 1 \end{cases}$$

qui ne comporte qu'une seule condition d'universalité ($\sum \lambda^\alpha = 1$), mais où, en contrepartie, le second membre de la relation d'optimalité contient le variogramme γ , et fait intervenir explicitement les valeurs prises par $\gamma(h)$ pour des distances $|h|$ notablement supérieures aux dimensions de l'ensemble S des points expérimentaux x_α . Ce système (10) se rapporte donc à une situation dans laquelle nous connaissons bien le comportement réel de $\gamma(h)$ jusqu'à des distances assez grandes. Au contraire, dans le système (9), le variogramme n'intervient que par les termes $\gamma_{\alpha\beta}$, et ne suppose donc la connaissance du $\gamma(h)$ que pour les courtes distances.

On peut alors envisager la question d'une manière différente. Supposons (et la théorie de l'inférence statistique montre que c'est là une circonstance assez générale) que nous ne soyons sûrs de notre $\gamma(h)$ qu'aux courtes distances (de l'ordre des dimensions de S), de sorte que nous connaissons bien les $\gamma_{\alpha\beta}$, mais non le second membre de (10) : dans ce cas, le système (9) nous donne la meilleure estimation possible d'une grande moyenne mobile $m(x)$, compte tenu de l'information dont nous disposons réellement.

Remarque 2 - En l'absence de dérive réelle, l'estimateur optimal de la dérive n'est donc pas dépourvu de sens : il estime une grande moyenne mobile, sans qu'il soit d'ailleurs possible de préciser

laquelle - car il s'applique à toutes. La variance (9') de cet estimateur est d'autant plus élevée qu'il est censé représenter une moyenne mobile plus étendue. Si nous posons :

$$m(x) = a_{\ell} f^{\ell}(x) \quad , \quad M^{*}(x) = A_{\ell} f^{\ell}(x)$$

nous obtenons les $A_{\ell} = \lambda_{\ell}^{\alpha} Z_{\alpha}$ en délinéarisant le système (9) :

$$(11) \quad \begin{cases} -\lambda_{\ell}^{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = \mu_{\ell s} f_{\alpha}^{\ell} \\ \lambda_{\ell}^{\alpha} f_{\alpha}^s = \delta_{\ell}^s \end{cases} \quad (\ell, s = 0, 1, \dots, n)$$

D'après (9'), la variance est alors :

$$D^2(M_{\mathbf{x}}^{*} - m_{\mathbf{x}}) = \mu_{\ell s} f_{\mathbf{x}}^{\ell} f_{\mathbf{x}}^s + \sigma(0)$$

D'où

$$(11') \quad \begin{cases} E(A_0 - a_0)^2 = \sigma(0) + \mu_{00} \\ E(A_{\ell} - a_{\ell})(A_s - a_s) = \mu_{\ell s} \end{cases} \quad (\ell, s \neq 0)$$

Ainsi les paramètres de Lagrange - sauf μ_{00} - représentent encore les covariances des $(A_{\ell} - a_{\ell})$. Le terme μ_{00} - relatif aux coefficients λ_0^{α} de somme égale à 1 - par contre, ne donne pas la variance de $A_0 - a_0$: il doit être majoré du terme $\sigma(0)$, qui est le seul à dépendre de la fonction de pondération p . Cette remarque suggère donc la solution du problème apparemment insoluble que pose le terme constant A_0 d'une dérive lorsqu'il n'y a pas de covariance.

Remarque 3 - Le problème du terme constant a_0 .

Soit $Z(x) = Y_1(x) + m_1(x)$ une F.A. comportant une dérive $m_1(x)$ (fonctionnelle ou aléatoire) et une composante $Y_1(x)$ sans covariance, dont le variogramme est $\gamma(h)$. Nous pouvons poser :

$$\begin{cases} Y(x) = Y_1(x) - \int Y_1(x+y) p(y) dy \\ m(x) = m_1(x) + \int Y_1(x+y) p(y) dy \end{cases}$$

Dans cette nouvelle décomposition, $Z = Y + m$, la composante Y admet une covariance $\sigma(x,y)$, et la dérive (aléatoire) $m(x)$ vérifie les hypothèses (4) et (4'), pourvu que la fonction de pondération $p(x)$ soit suffisamment régulière et de portée assez grande. L'estimation optimale $M^*(x) = A_\ell f^\ell(x)$, $A_\ell = \lambda_\ell^\alpha Z_\alpha$ de la dérive $m(x)$ s'obtient en résolvant le même système (11) que ci-dessus), et conduit en particulier à un estimateur A_0 : la variance $E(A_0 - a_0)^2 = \sigma(0) + \mu_{00}$ correspondante dépend explicitement du $\sigma(0)$ défini en (7'), c'est-à-dire du choix de la fonction de pondération p qui nous a servi à donner un sens à cette expression (soustraction d'une moyenne mobile). La valeur numérique de A_0 n'en dépend pas.

Or le système (11) n'est pas autre chose que le système (1-D') (page 17 du fascicule relatif au Krigeage Universel) complété par les équations relatives à $\ell = 0$. Il n'est donc pas absurde d'utiliser le système ainsi complété, et d'en déduire une estimation A_0 du terme constant a_0 (qui, à strictement parler, n'existait pas dans le cadre des hypothèses du fascicule). L'expression

$A_0 + \sum_{\ell=1}^n A_{\ell} f^{\ell}(x)$ donne une estimation de la vraie dérive corrigée d'une moyenne mobile, et sa variance est la variance de l'estimation de la dérive ainsi corrigée. Cette variance n'a qu'une signification relative (puisque'elle dépend du choix de la moyenne mobile). Mais, du fait que l'estimateur lui-même

$$M^*(x) = A_0 + \sum_{\ell=1}^n A_{\ell} f^{\ell}(x)$$

ne dépend pas de ce choix, il peut être utilisé pour cartographier la dérive, sans que se posent de problèmes de raccordement entre les différents domaines $V_1, V_2 \dots$ de travail. Plus précisément, à chaque point x on peut affecter un voisinage V_x (translaté de V centré en x), puis l'ensemble $S_x \subset V_x$ des points expérimentaux contenus dans V_x . Il suffit alors de résoudre le système (9) à l'aide des $x_{\alpha} \in S_x$ pour former l'estimateur $M^*(x)$ de la dérive en x . En choisissant l'origine des coordonnées en ce point x , et avec $f^{\ell}(0) = 0$ ($\ell = 1, 2 \dots n$) (cas des polynomes), c'est en fait $M^*(0) = A_0$ que l'on estime pour chaque V_x , et cette méthode du voisinage glissant permet de cartographier la dérive.

4 - LE KRIGEAGE

Le cas du krigeage va se présenter de manière très semblable. Pour abrégier les écritures, nous nous limitons au cas du krigeage d'un point $x \in V$ (bien que le cas général puisse se traiter de la même manière). Nous supposons toujours vérifiées les hypothèses du paragraphe 1. Il s'agit de former un estimateur $Z_x^* = \lambda^{\alpha} Z_{\alpha}$

de $Z_x = Z(x)$. Considérons l'expression

$$Z_x^* - Z_x = \lambda^\alpha Z_\alpha - Z_x = \lambda^\alpha Y_\alpha - Y_x + \lambda^\alpha m_\alpha - m_x$$

et prenons l'espérance de son carré :

$$\begin{aligned} E(Z_x^* - Z_x)^2 &= \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} - 2 \lambda^\alpha \sigma_{\alpha x} + \sigma_{xx} + 2 E(\lambda^\alpha Y_\alpha - Y_x)(\lambda^\beta m_\beta - m_x) \\ &\quad + E(\lambda^\alpha m_\alpha - m_x)^2 \end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses (4) et (4'), nous trouvons

$$\begin{cases} E(\lambda^\alpha Y_\alpha - Y_x)(\lambda^\beta m_\beta - m_x) = R_{\ell s} (\lambda^\alpha f_\alpha^\ell - f_x^\ell)(\lambda^\beta f_\beta^s - f_x^s) \\ E(\lambda^\alpha m_\alpha - m_x)^2 = K_{\ell s} (\lambda^\alpha f_\alpha^\ell - f_x^\ell)(\lambda^\beta f_\beta^s - f_x^s) \end{cases}$$

Donc, ici encore, $E(Z_x^* - Z_x)^2$ est indépendant de $K_{\ell s}$ (inconnus) si et seulement si les conditions d'universalité (6) sont vérifiées. Moyennant ces conditions, on a à nouveau $E(Z_x^* - Z_x) = 0$ et :

$$D^2(Z_x^* - Z_x) = \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta} - 2 \lambda^\alpha \sigma_{\alpha x} + \sigma_{xx}$$

En minimisant cette forme quadratique, compte tenu des conditions d'universalité (6), on retrouve le système habituel du K.U. pour les dérivées fonctionnelles.

ANNEXE - DERIVES NORMALISEES

Dans cette annexe, j'examine certains problèmes théoriques (qui ne sont pas liés directement à ce qui précède), et je me place dans les hypothèses du fascicule consacré au Krigeage Universel.

1 - L'Espace Fonctionnel $\mathfrak{F}$

Désignons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble des fonctions f vérifiant les conditions équivalentes de la propriété 2-2 du fascicule. C'est l'espace vectoriel des fonctions f que l'on peut utiliser pour représenter une dérive. Il dépend (uniquement) de l'ensemble S des données et de la covariance $C(x,y)$ de la F.A. $Y(x)$.

La condition $f \in \mathfrak{F}$ équivaut, d'après la proposition 2-2, à chacune des conditions suivantes :

1 - $1 \notin \bar{H}_f$

2 - $\bar{H}$ et $\bar{H}_f$ sont homéomorphes.

3 - Il existe un $M > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$$\left| \int \lambda(dx) f(x) \right|^2 \leq M^2 \iint \lambda(dx) C(x,y) \lambda(dy)$$

4 - Il existe $Y_f \in \bar{H}$ tel que :

$$\langle Y_f, Y(x) \rangle = f(x) \quad \forall x \in S$$

L'équivalence de ces conditions entraîne que l'application $f \rightarrow Y_f$ est une bijection de $\mathfrak{F}$ sur $\bar{H}$. On peut donc faire de $\mathfrak{F}$ un espace de Hilbert en posant :

$$\langle f, g \rangle = \langle Y_f, Y_g \rangle \quad (f, g \in \mathfrak{F})$$

On vérifie d'ailleurs sans peine que la norme $\|f\|$ ainsi définie sur $\mathfrak{F}$ est $\|f\| = M_f$, si l'on désigne par M_f l'Inf. des $M \geq 0$ qui vérifient la condition 3 ci-dessus.

Si Y_f et Y_g sont dans H_M , soit :

$$\begin{cases} Y_f = \int \mu_f(dx) Y(x) \\ Y_g = \int \mu_g(dx) Y(x) \end{cases}$$

pour deux mesures μ_f et $\mu_g \in M$, le produit scalaire défini sur $\mathfrak{F}$ s'explique ainsi :

$$\begin{aligned} (a-1) \quad \langle f, g \rangle &= \iint \mu_f(dx) C(x, y) \mu_g(dy) \\ &= \int \mu_f(dx) g(x) = \int f(x) \mu_g(dx) \end{aligned}$$

Si Y_f est dans H_M , mais non Y_g , on a toujours :

$$(a-2) \quad \langle f, g \rangle = \int \mu_f(dx) g(x)$$

(vérification immédiate à partir de la condition 4).

2 - Dérive Normalisée

Soit f^ℓ , $\ell = 0, 1, \dots$ une suite dans $\mathfrak{F}$ de fonctions linéairement indépendantes sur S , et soit Y la suite correspondante dans $\bar{H}$:

$$\langle Y^\ell, Y(x) \rangle = f^\ell(x) \quad (x \in S)$$

constituée d'éléments linéairement indépendants dans $\bar{H}$. Le pro-

cédé d'orthogonalisation de Schmidt permet de remplacer la suite Y^ℓ par une suite orthonormée X_ℓ du type :

$$X_0 = Y^0$$

$$X_\ell = \sum_{s=0}^{\ell} B_{\ell s} Y^s$$

avec

$$\langle X_m, X_n \rangle = \delta_{mn}$$

En vertu de l'homéomorphisme $\bar{H} \rightarrow \mathfrak{F}$, on obtient ainsi dans $\mathfrak{F}$ la suite orthonormée de fonctions :

$$\varphi_\ell = \sum_{s=0}^{\ell} B_{\ell s} f^s, \quad \langle \varphi_m, \varphi_n \rangle = \delta_{mn}$$

Désignons par $m_N^*(x)$ l'estimateur optimal de la dérive en un point x lorsque l'on utilise les $N+1$ premières fonctions f^ℓ , soient $f^0 = 1, f^1, \dots, f^N$. D'après l'invariance tensorielle, on obtient le même estimateur $m_N^*(x)$ si l'on remplace ces fonctions par $\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^N$, et, la suite X_n étant orthonormée, on a alors :

$$(a-3) \quad m_N^*(x) = \sum_{n=0}^N X_n \varphi_n(x)$$

3 - Le Projecteur Π_N

Désignons par H_N le sous-espace de $\bar{H}$ engendré par $(X_0, X_1, \dots, X_N)$ et par Π_N son projecteur. D'après (a-3), on a $m_N^*(x) \in H_N$ pour tout point x (appartenant ou non à S). On peut s'interroger sur

le comportement de $m_N^*(x)$ pour $N \rightarrow \infty$.

Examinons d'abord le cas où $x \in S$. Par définition des X_n , on a alors

$$\varphi_n(x) = \langle X_n, Y(x) \rangle \quad (x \in S)$$

Compte tenu du fait que les (X_n) sont orthonormés, (a-3) s'écrit alors :

$$(a-4) \quad m_N^*(x) = \Pi_N Y(x) \quad (x \in S)$$

Ainsi, la valeur de la dérivée estimée en un point $x \in S$ est la projection de $Y(x)$ dans H_N . On en déduit :

$$\begin{cases} \| m_N^*(x) \|^2 = \sum_{n=0}^N (\varphi_n(x))^2 \leq \| Y(x) \|^2 \\ \| Y(x) - m_N^*(x) \|^2 = \| Y(x) \|^2 - \| m_N^*(x) \|^2 \end{cases}$$

En particulier, $m_N^*(x)$ converge fortement vers $Y(x)$ pour tout $x \in S$ si et seulement si la suite X_n est une base hilbertienne de $\overline{H}_1$ ou, ce qui revient au même, si les φ_n constituent une base de $\mathcal{F}$.

Pour $x \notin S$, par contre, la relation (a-4) ne subsiste pas. Posons, en effet :

$$\tilde{\varphi}_m(x) = \langle X_m, Y(x) \rangle \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

avec $\tilde{\varphi}_m(x) = \varphi_m(x)$ pour $x \in S$, mais, en général, $\tilde{\varphi}_m(x) \neq \varphi_m(x)$ hors de S . On a cette fois :

$$(a-5) \quad \begin{cases} m_N^*(x) = \sum_{n=0}^N X_n \varphi_n(x) \\ \Pi_N Y(x) = \sum_{n=0}^N X_n \tilde{\varphi}_n(x) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

donc, en général, $m_N^*(x) \neq \Pi_N Y(x)$ hors de S .

4 - Relation avec le Krigage

Soit Π le projecteur de L^2 dans $\bar{H}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\Pi Y(x) = Y_K(x)$ est le krigeage simple de $Y(x)$ avec $Y_K(x) = Y(x)$ si et seulement si $x \in S$. Comme $\Pi_N = \Pi_N \Pi$, on a :

$$(a-6) \quad \Pi_N Y(x) = \Pi_N Y_K(x)$$

Mais le krigeage universel d'ordre N (i.e. relatif au $N+1$ premières fonctions φ_n) de $Y(x)$, soit $Y_N^*(x)$ est, comme on sait :

$$Y_N^*(x) = Y_K(x) - \Pi_N Y_K(x) + \sum_{n=0}^N X_n \varphi_n(x)$$

D'après (a-6) et (a-5), on en déduit :

$$(a-7) \quad Y_N^*(x) = Y_K(x) + \sum_{n=0}^N X_n (\varphi_n(x) - \tilde{\varphi}_n(x))$$

Ainsi, la correction de dérive n'est autre que :

$$Y_D(x) = \sum_{n=0}^N X_n (\varphi_n(x) - \tilde{\varphi}_n(x))$$

En particulier, si nous remplaçons nos fonctions de base initiales ϕ_n par les fonctions $\tilde{\phi}_n = \langle X_n, Y(\cdot) \rangle$ - ce qui ne les modifie qu'à l'extérieur de S - la correction de dérive devient identiquement nulle, et le K.U. coïncide avec le krigeage simple. L'estimateur optimal de la dérive s'identifie alors avec $\Pi_N Y(x)$ dans tout l'espace, et non plus seulement sur S. Il coïncide sur S avec l'ancien estimateur $m_N^*(x)$, et ne se trouve modifié qu'à l'extérieur de S.

Ces conséquences paradoxales montrent que le choix des fonctions de base ϕ_n (ou, plus exactement, leur prolongement à l'extérieur de S) n'est pas indifférent. Naturellement, si les $\phi_n(x)$ sont, par exemple; des polynomes (dans l'espace entier), les $\tilde{\phi}_n$ n'ont, en général, plus rien de polynomial à l'extérieur de S.

5 - Exemple

Prenons notre exemple habituel : espace $\mathbb{R}^1$, variogramme $\gamma(h) = |h|$, et $S = (-R, +R)$. L'espace $\bar{H}$ est ici engendré par les éléments de la forme : $\int_{-R}^R \lambda(dx) Y(x)$, avec des mesures λ de somme nulle :

$$\int \lambda(dx) = 0$$

Toutefois, comme nous l'avons vu, l'intervention de grandes moyennes mobiles permet de donner un sens aux éléments associés à des mesures de somme non nulle. A toute mesure λ à support sur $(-R, +R)$, on peut ainsi associer la fonction f_λ définie par :

$$(a-8) \quad f_{\lambda}(x) = - \int_{-R}^R |x-y| \lambda(dy) \quad (-R \leq x \leq R)$$

et l'on sait qu'inversement toute fonction f admettant sur $[-R, +R]$ une dérivée seconde continue est associée à la mesure λ_f à support sur $[-R, +R]$ définie par :

$$(a-9) \quad \lambda_f(dx) = - \frac{1}{2} f''(x) dx + \frac{f'(R) \delta_R - f'(-R) \delta_{-R}}{2} - \frac{(f(-R) + f(R))}{2} \left(\frac{\delta_{-R} + \delta_R}{2R} \right)$$

Soit alors $P_n(x)$ un polynome de degré n , et $\mu_n(dx)$ la mesure associée à P_n selon les formules réciproques (a-8) et (a-9). Nous dirons que la suite P_n est normalisée si :

$$(a-10) \quad \int \mu_n(dx) P_m(x) = \int \mu_m(dx) P_n(x) = \delta_{mn}$$

Construction des polynomes normalisés P_n

D'après (a-9), on a :

$$\begin{aligned} \int \mu_n(dx) P_m(x) &= - \frac{1}{2} \int_{-R}^R P_n''(x) P_m(x) dx + \\ &+ \frac{1}{2} [P_n'(R) P_m(R) - P_n'(-R) P_m(-R)] - \frac{1}{4R} [P_n(-R) + P_n(R)] [P_m(-R) + P_m(R)] \end{aligned}$$

Soit :

$$(a-11) \quad \begin{aligned} &\int P_m(x) \mu_n(dx) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-R}^R P_n'(x) P_m'(x) dx - \frac{1}{4R} [P_n(-R) + P_n(R)] [P_m(-R) + P_m(R)] \end{aligned}$$

et nous devons déterminer les polynômes pour lesquels cette expression est égale à $\delta_{m,n}$.

Examinons d'abord P_0 , soit $P_0(x) = a_0 = C^{ste}$ sur $[-R, +R]$. D'après (a-9), la mesure λ_0 est $-a_0 \frac{\delta_R + \delta_{-R}}{2R}$ et la condition

$$\int \lambda_0(dx) P_0(x) = -\frac{a_0^2}{R} = 1$$

ne peut pas être remplie pour a_0 réel (cette circonstance est liée au rôle exceptionnel que joue la mesure λ_0 de somme non nulle, à laquelle donc ne correspond aucun élément $\int \lambda_0(dx) Z(x)$ dans $\bar{H}$). Nous ne normaliserons donc pas P_0 , et prendrons (par exemple)

$$P_0 = 1, \lambda_0 = -\frac{\delta_R + \delta_{-R}}{2R}$$

Passons à P_n , pour $n \geq 1$. Ils doivent vérifier d'abord :

$$\int_{-R}^R P_0(x) \mu_n(dx) = \int_{-R}^R \mu_n(dx) = 0$$

(donc, il leur correspond des $X_n = \int \mu_n(dx) Z(x) \in \bar{H}$), soit, d'après (a-11) :

$$(a-12) \quad P_n(R) + P_n(-R) = 0$$

Pour $m \geq 1$ quelconque, la condition $\int P_m(x) \mu_n(dx) = \delta_{n,m}$, compte tenu de (a-12) et (a-11), donne alors :

$$(a-13) \quad \frac{1}{2} \int_{-R}^R P_n'(x) P_m'(x) dx = \delta_{m,n}$$

Au facteur $\sqrt{2}$ près, P'_n est donc identique au polynome de Legendre de degré $(n-1)$, soit, avec un facteur A_n à déterminer :

$$(a-14) \quad P'_n(x) = A_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - R^2)^{n-1}$$

La condition de normalisation (a-13), pour $m = n$, donne :

$$\int_{-R}^R (P'_n(x))^2 dx = 2$$

D'où l'on déduit

$$A_n = \frac{\sqrt{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{1}{R^{n-\frac{1}{2}}}$$

De (a-14) résulte ensuite :

$$P_n(x) = A_n \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - R^2)^{n-1} + C_n \quad (n > 1)$$

$$P_1(x) = A_1 x + C_1$$

Les conditions (a-12) déterminent les constantes C_n , et il vient :

$$\begin{cases} P_1(x) = A_1 x \\ P_n(x) = A_n \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - R^2)^{n-1} \end{cases} \quad (n > 1)$$

Les mesures associées s'en déduisent d'après (a-9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1(dx) = A_1 \frac{\delta_R - \delta_{-R}}{2} , \quad \lambda_2(dx) = - A_2 dx + A_2 R (\delta_R + \delta_{-R}) \\ \lambda_n(dx) = - \frac{1}{2} A_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - R^2)^{n-1} dx \quad (n > 2) \end{array} \right.$$

Les Fonctions $\tilde{P}_n$ - Pour $x \notin [-R, +R]$, posons :

$$\tilde{P}_n(x) = - \int_{-R}^R |x-y| \lambda_n(dy)$$

Lorsque l'on prend les $\tilde{P}_n$ comme fonctions de base, le K.U. coïncide avec le krigeage simple (pas de correction de dérive). Pour $x > R$, on trouve :

$$\tilde{P}_1(x) = A_1 R$$

Ainsi $\tilde{P}_1$ n'est linéaire que sur $[-R, +R]$, et reste constante à l'extérieur de cet intervalle : $\tilde{P}_1$ ne prend nullement en charge une dérive linéaire. Pour $\tilde{P}_n$, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_n(x) &= \frac{1}{2} A_n \int_{-R}^R (x-y) \frac{d^n}{dy^n} (y^2 - R^2)^{n-1} dy = \\ &= \frac{1}{2} A_n \int_{-R}^R \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} (y^2 - R^2)^{n-1} dy \end{aligned}$$

d'où :

$$\tilde{P}_n(x) = 0$$

et l'on comprend pourquoi K.U. et krigeage simple coïncident :

il n'y a pas, à proprement parler, de dérive à l'extérieur de $(-R, +R)$.

D'une manière générale, d'ailleurs, toute fonction f_λ de la forme :

$$f_\lambda(x) = \int_{-R}^R |x-y| \lambda(dy)$$

vérifie $f_\lambda''(x) = 0$ pour x extérieur à l'intervalle fermé $[-R, R]$, donc est de la forme $ax + b$ pour $x > R$ ou $x < -R$. Si de plus la mesure λ est de somme nulle :

$$\int_{-R}^R \lambda(dx) = 0$$

$f_\lambda(x)$ est constante sur $(R, +\infty)$ et sur $(-\infty, -R)$. Cela résulte du fait que $|x|$ est le potentiel newtonien de l'espace à 1 dimension. Quelles que soient donc les fonctions φ_n utilisées pour représenter la dérive, leurs prolongements $\tilde{\varphi}_n$ sont des fonctions constantes à l'extérieur de $[-R, R]$, et ne peuvent pas servir à représenter une dérive véritable.

ADDITIF A LA NOTE GEOSTATISTIQUE N° 107

LES INDETERMINATIONS DU VARIOGRAMME SOUS - JACENT

1 - L'Invariance des résidus pour les dérivées aléatoires.

Soit $A_\ell = \lambda_\ell^\alpha Z_\alpha$ un estimateur (non optimal) des coefficients a_ℓ de la dérive, vérifiant la condition d'universalité :

$$(1) \quad \lambda_\ell^\alpha f_\alpha^s = \delta_\ell^s \quad (\ell, s = 0, 1, \dots, k)$$

Le résidu

$$R_\alpha = Y_\alpha - \lambda_\ell^\beta f_\alpha^\ell Y_\beta$$

ne dépend que de la partie aléatoire Y_α (et non de la dérive).

Plus généralement, si je remplace Z_α par :

$$(2) \quad Z'_\alpha = Z_\alpha + B_\ell f_\alpha^\ell$$

où les B_ℓ sont des variables aléatoires (et non plus des constantes), les nouveaux résidus seront :

$$\begin{aligned} R'_\alpha Z'_\alpha - \lambda_\ell^\beta f_\alpha^\ell Z'_\beta &= Z_\alpha - \lambda_\ell^\beta f_\alpha^\ell Z_\beta + B_\ell f_\alpha^\ell - \\ &- \lambda_\ell^\beta f_\alpha^\ell B_s f_\beta^s = Z_\alpha - \lambda_\ell^\beta f_\alpha^\ell Z_\beta = R_\alpha \end{aligned}$$

à cause de la condition (1) d'universalité. Ainsi, pour un estimateur donné de la dérive, universel mais non nécessairement optimal, l'addition d'une dérive aléatoire laisse invariants les

résidus R_α .

En particulier, cette addition va laisser invariante la covariance $E(R_\alpha R_\beta)$ des résidus (et toutes les quantités qui s'en déduisent), telle que l'espérance $E(\gamma^*(h))$ du variogramme γ^* des résidus sur laquelle nous avons pris l'habitude de travailler). Or elle ne laisse pas invariants la covariance, ou le variogramme sous-jacent.

Par exemple, la covariance $\sigma_{\alpha\beta} = E(Y_\alpha Y_\beta)$ (si elle existe) est remplacée par :

$$(3) \quad \sigma'_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + D_{\beta\ell} f_\alpha^\ell + D_{\alpha\ell} f_\beta^\ell + K_{\ell s} f_\alpha^\ell f_\beta^s$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} D_{\beta\ell} = E(Y_\beta B_\ell) \\ K_{\ell s} = E(B_\ell B_s) \end{cases}$$

Pour le variogramme, la transformation serait de même :

$$(3') \quad \gamma'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - 2(D_{\alpha\ell} - D_{\beta\ell})(f_\alpha^\ell - f_\beta^\ell) + K_{\ell s}(f_\alpha^\ell - f_\beta^\ell)(f_\alpha^s - f_\beta^s)$$

Il en résulte, en sens inverse, qu'à partir des résidus expérimentaux R_α ou de leur covariance $E(R_\alpha R_\beta)$ il ne sera jamais possible de déterminer le variogramme sous-jacent qu'à une indétermination près du type (3'), avec des matrices $D_{\alpha\ell}$ et $K_{\ell s}$ arbitraires.

On pourrait craindre que l'indétermination ne puisse être plus sévère encore. Nous allons voir qu'il n'en est rien, et que cette

indétermination est exactement celle qui est représentée en (3) ou (3').

2 - Covariance des résidus, et indétermination du variogramme sous-jacent.

Avec les notations précédentes, on a :

$$E(R_{\alpha} R_{\beta}) = - (\delta_{\alpha}^{\alpha'} - \lambda_{\ell}^{\alpha'} f_{\alpha}^{\ell}) (\delta_{\beta}^{\beta'} - \lambda_{\ell}^{\beta'} f_{\beta}^{\ell}) \gamma_{\alpha'\beta'}$$

[Cette covariance des résidus existe toujours, même s'il n'existe qu'un variogramme sous-jacent, à cause des conditions d'universalité (2), qui donnent :

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{\alpha'} = 1, \quad \sum_{\alpha} \lambda_{\ell}^{\alpha} = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, k)$$

d'où résulte que $Y_{\alpha} - \lambda_{\ell}^{\beta} f_{\alpha}^{\ell} Y_{\beta}$ est dans L^2]. Mettons ceci sous la forme :

$$(4) \quad \begin{cases} E(R_{\alpha} R_{\beta}) = - U_{\alpha}^{\alpha'} U_{\beta}^{\beta'} \gamma_{\alpha'\beta'} \\ U_{\alpha}^{\alpha'} = \delta_{\alpha}^{\alpha'} - \lambda_{\ell}^{\alpha'} f_{\alpha}^{\ell} \end{cases}$$

Ce système n'est pas régulier, et ne permet pas de déterminer univoquement $\gamma_{\alpha'\beta'}$, à partir de $E(R_{\alpha} R_{\beta})$. En effet, considérons le système sans second membre :

$$(5) \quad \gamma_{\alpha'\beta'} U_{\alpha}^{\alpha'} U_{\beta}^{\beta'} = 0$$

et cherchons les solutions possibles de (5). Tout d'abord, à α

fixé, l'expression

$$g_{\beta'} = \gamma_{\alpha'\beta'} U_{(\alpha)}^{\alpha'}$$

doit vérifier $g_{\beta'} U_{\beta'}^{\beta'} = 0$, c'est-à-dire, d'après (4) :

$$(5') \quad g_{\alpha} = g_{\beta'} \lambda_{\ell}^{\beta'} f_{\alpha}^{\ell}$$

D'après les conditions d'universalité (1), toute combinaison linéaire :

$$(6) \quad g_{\beta} = c_s f_{\beta}^s$$

vérifie (5'), et inversement (5') lui-même exprime que g_{α} est de la forme (6) avec

$$c_s = g_{\beta'} \lambda_s^{\beta'}$$

Ainsi, la relation (5) est vérifiée si et seulement si $\gamma_{\alpha'\beta'} U_{\alpha}^{\alpha'}$ est combinaison linéaire des f_{α}^{ℓ} :

$$\gamma_{\alpha'\beta'} U_{\alpha}^{\alpha'} = c_{\alpha,\ell} f_{\beta'}^{\ell}$$

soit, explicitement :

$$\gamma_{\alpha\beta} = c_{\alpha,\ell} f_{\beta}^{\ell} + \gamma_{\alpha'\beta'} \lambda_{\ell}^{\alpha'} f_{\alpha}^{\ell}$$

Si l'on tient compte de la condition de symétrie $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}$, on voit que les solutions du système (5) sans second membre sont de la forme :

$$(7) \quad \gamma_{\alpha\beta} = c_{\alpha\ell} f_{\beta}^{\ell} + c_{\beta\ell} f_{\alpha}^{\ell}$$

Par conséquent l'indétermination sur le variogramme sous-jacent obtenu en résolvant (4) est exactement celle qui est exprimée en (3) ou en (3').

3 - Introduction d'une hypothèse intrinsèque.

Le système (4) comporte $n(n-1)/2$ inconnues (les $\gamma_{\alpha\beta}$ pour $\alpha \neq \beta$). D'après (7), sa solution générale dépend de n k paramètres arbitraires, les $n(k+1)$ $c_{\alpha\ell}$, de la relation (7), liés par les n conditions

$$(7') \quad c_{(\alpha)\ell} f_{(\alpha)}^{\ell} = 0$$

Si l'on admet de plus que le variogramme sous-jacent est du type intrinsèque, soit :

$$\gamma(x;y) = \gamma(x-y)$$

on introduit des conditions supplémentaires qui vont réduire le degré d'indétermination du problème. La géométrie des points expérimentaux joue évidemment ici un rôle important. J'examinerai seulement le cas particulier où les n points expérimentaux sont alignés et équidistants. L'hypothèse intrinsèque s'exprime par les $\sum(n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$ relations :

$$(8) \quad \gamma_{1,1+k} = \gamma_{2,2+k} = \dots = \gamma_{n-k,n} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

qui devrait suffire en principe à lever l'indétermination pourvu que :

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq nk$$

soit $n \geq 2k+1$. Ceci, toutefois, mériterait une discussion.