N-194

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 109

LES ESPACES FONCTIONNELS $\mathfrak{F}$ ET LES DERIVES AU SENS DE CRAMER

Par

G. MATHERON

Mai 1970

i

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 109

LES ESPACES FONCTIONNELS $\mathfrak{F}$ ET LES DERIVES AU SENS DE CRAMER

Table des Matières

Table des Matières (Suite et Fin)

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 109

LES ESPACES FONCTIONNELS $\mathfrak{F}$ ET LES DERIVES AU SENS DE CRAMER

Dans la théorie du krigeage universel, les concepts probabilistes n'interviennent, en fait, que par l'intermédiaire d'une fonction de covariance $C(x,y)$, et la structure de l'espace $(\Omega,\mathcal{A},P)$ reste assez indifférente. On ne retient, finalement, que la structure hilbertienne associée à la covariance $C(x,y)$ et, en raison de l'homéomorphisme $\overline{H} \to \mathfrak{F}$, tous les résultats de la théorie peuvent s'énoncer dans un langage purement fonctionnel : on est ainsi conduit à examiner des problèmes d'analyse fonctionnelle, où plus rien, en apparence, n'évoque le point de vue probabiliste initial. On notera aussi la parenté des problèmes abordés avec ceux que l'on rencontre dans la théorie du potentiel (sous sa forme dite classique plutôt que probabiliste). Dans une dernière partie, je m'inspire de certaines idées de H. Cramer pour donner une définition plus rigoureuse de la notion de dérive aléatoire, et formuler sur des bases un peu différentes les problèmes posés par le K.U.

1 - HYPOTHESES ET NOTATIONS

E désignera un espace localement compact de type dénombrable, non compact en général, et $\mathcal{K}=\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des parties compactes de E.

$\mathcal{C}_0(E)$, l'espace des fonctions continues sur E et nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme ; $M^1(E)$, dual de $\mathcal{C}_0$, l'espace des mesures bornées.

$\mathcal{C}$ (E) , l'espace des fonctions continues bornées muni de la convergence compacte ; $M^c(E)$, dual de $\mathcal{C}$, l'espace des mesures à support compact.

$\mathcal{C}_{\mathcal{K}}(E)$, l'espace des fonctions continues à support compact, muni de la topologie limite inductive habituelle, et M(E), dual de $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$, l'espace des mesures sur E.

Pour tout compact $K \in \mathcal{K}(E)$, $\mathcal{C}$ (K) sera l'espace des fonctions continues sur K muni de la convergence uniforme, et M(K), son dual, l'espace des mesures sur K.

$Y(x)$, $x \in E$ est une F.A. sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $Y(x) \in L^2\ (\Omega, \mathcal{A}, P)$ pour tout $x \in E$, et

$$C(x,y) = \langle Y(x), Y(y) \rangle \quad . \quad (x,y \in E) \tag{1-1}$$

sa fonction de covariance.

Pour toute partie $K \subset E$, H(K) est l'espace vectoriel engendré par les $Y(x)$, $x \in K$, et $\overline{H}(K)$, fermeture de H(K) dans L^2, l'espace de Hilbert correspondant.

On désigne par $\mathfrak{F}(K)$ l'ensemble des fonctions f définies sur K, de la forme

$$f(x) = \langle Y, Y(x) \rangle \quad , \quad x \in K \tag{1-2}$$

pour un $Y \in \overline{H}(K)$. L'application de $\overline{H}(K)$ dans $\mathfrak{F}(K)$ ainsi définie est manifestement bijective. En désignant par Y_f, Y_g... les éléments de $\overline{H}$ associés à des fonctions f, g,... $\in \mathfrak{F}$, on peut donc munir $\mathfrak{F}$ du produit scalaire

$$(1\text{-}3) \qquad < f, g > = < Y_f, Y_g >$$

qui en fait un espace de Hilbert homéomorphe à $\overline{H}(K)$.

Si l'on désigne par $\Lambda(K)$ l'ensemble des mesures à <u>support fini</u> $\subset K$ on sait que $f \in \mathfrak{F}(K)$ si et seulement si il existe $B < \infty$ telle que :

$$(1\text{-}4) \qquad \left|\int \lambda(dx)\ f(x)\right|^2 \leq B \int \lambda(dx)\ C(x,y)\ \lambda(dy)\ , \quad \lambda \in \Lambda(K)$$

et l'Inf des B vérifiant cette relation est alors égal à $\|Y_f\|^2$.
Pour tout $\lambda \in \Lambda(K)$, l'élément :

$$Y^\lambda = \int \lambda(dx)\ Y(x)$$

est dans $H(K)$, et a pour image dans $\mathfrak{F}(K)$ la fonction :

$$(1\text{-}5) \qquad f^\lambda = \int \lambda(dx)\ C(x,.)$$

que l'on appellera parfois <u>potentiel</u> de la mesure λ (à support fini). En particulier, à la mesure de Dirac $\delta_x \in M(K)$ $(x \in K)$, sont associés les éléments $Y(x) \in \mathfrak{F}(K)$ et $C(x,.) \in \mathfrak{F}(K)$. Pour tout $g \in \mathfrak{F}(K)$, on a

$$(1\text{-}5') \qquad < f^\lambda, g > = < Y^\lambda, Y_g > = \int \lambda(dx)\ g(x)$$

en particulier, pour λ et $\mu \in \Lambda(K)$:

$$< f^\lambda, f^\mu > = < Y^\lambda, Y^\mu > = \iint \lambda(dx)\ C(x,y)\ \lambda(dy)$$

2 - L'ESPACE $\mathfrak{F}(S)$

Soit S une partie de E (pouvant coïncider avec E, ou être compacte dans E) fermée dans E. Nous supposerons toujours $Y(x)$ faiblement continue sur S (il n'y a donc pas de perte de généralité en supposant S fermée dans E, puisque les espaces $\mathfrak{F}(S)$ et $\mathfrak{F}(\overline{S})$ sont identiques si S n'est pas fermée).

Proposition 1 - On a $\mathfrak{F}(S) \subset \mathcal{C}(S)$ si et seulement si $Y(x)$ est faiblement continue sur S. Lorsque cette condition est remplie, $\|Y(x)\|$ est borné sur tout compact $K \subset S$, et la topologie forte de $\mathfrak{F}(S)$ est plus fine que la topologie induite sur $\mathfrak{F}$ par la convergence uniforme sur tout compact.

La première partie de l'énoncé découle du fait que l'application $f \to Y_f$ est un homéomorphisme et de la relation

$$\text{(a)} \qquad f(x) = \langle Y_f, Y(x) \rangle \quad , \quad f \in \mathfrak{F}(S) \ , \ x \in S \quad .$$

Si K est un compact $\subset S$, et si $Y(x)$ est faiblement continu sur S, $f(x)$ est donc bornée sur K si $f \in \mathfrak{F}$. D'après (a) et le théorème de résonance, $\|Y(x)\|$ est alors borné sur K, soit :

$$\sup_{x \in K} \|Y(x)\| \leq C_K < \infty$$

On déduit alors de (a) :

$$|f(x)| \leq \|Y_f\| \, \|Y(x)\| \leq C_K \, \|Y_f\| \qquad (x \in K)$$

c'est-à-dire :

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq C_K \, \|Y_f\|$$

d'où résulte la proposition.

Proposition 2 - Pour que la topologie faible de $\mathfrak{F}(S)$ soit plus fine que la topologie induite par la convergence compacte, il faut et il suffit que $Y(x)$ soit fortement continue sur S.

Supposons $Y(x)$ fortement continue sur S, et $f_n = < Y_n, Y(.) >$ une suite convergeant faiblement vers 0 dans $\mathfrak{F}(S)$. On a déjà $f_n(x) = < Y_n, Y(x) > \to 0$ pour tout $x \in S$. Supposons que cette convergence ne soit pas uniforme sur un compact $K \subset S$. On peut alors trouver $a > 0$, une suite $x_k \in K$ que l'on peut toujours supposer converger vers un $x_o \in K$ (puisque K est compact), et une suite partielle f_{n_k} avec

$$|f_{n_k}(x_k)| \geq a > 0$$

Or, on a :

$$|f_{n_k}(x_k)| = |< Y_{n_k}, Y(x_k) >| \leq |< Y_{n_k}, Y(x_o) >| + |< Y_{n_k}, Y(x_k)-Y(x_o)>|$$

$$\leq |f_{n_k}(x_o)| + \|f_{n_k}\| \; \|Y(x_k)-Y(x_o)\|$$

Or $f_{n_k}(x_o)$ converge vers 0 et $\|f_{n_k}\|$ est borné, puisque f_n converge faiblement vers 0, et $\|Y(x_k)-Y(x_o)\|$ tend vers 0, puisque $Y(x)$ est fortement continue. Donc $f_{n_k}(x_k) \to 0$, ce qui contredit $|f_{n_k}(x_k)| \geq$ $\geq a > 0$.

Inversement, supposons $\mathfrak{F} \subset \mathcal{C}$, et la topologie faible sur $\mathfrak{F}$ plus fine que celle de la convergence compacte. D'après la Proposition 1, $Y(x)$ est faiblement continu sur S. Soit $C_x \in \mathfrak{F}$ la fonction associée à $Y(x)$, $x \in S$. Si x_n tend vers x_o dans S, C_{x_n} converge faiblement vers C_{x_o} dans $\mathfrak{F}$. Pour tout compact $K \subset S$, on a alors, d'après l'hypothèse :

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in K} |C(x_n, y) - C(x_o, y)| = 0$$

En particulier,

$$\lim_{n \to \infty} |C(x_n, x_n) - C(x_o, x_n)| = 0$$

Mais $C(x_o, x_n)$ converge vers $C(x_o, x_o)$, à cause de la convergence faible de C_{x_n} vers C_{x_o}. On en déduit que $\|Y(x_n)\|^2 = C(x_n, x_n)$ converge vers $\|Y(x_o)\|^2$, et la convergence de $Y(x_n)$ vers $Y(x_o)$ a lieu aussi au sens fort.

<u>Potentiel d'une mesure</u> - Soit $\mu \in M^c(S)$ <u>une mesure à support compact</u> dans S. L'application $f \to \int \mu f$ de $\mathcal{C}(S)$ dans $\mathbb{R}^1$ est donc continue. $Y(x)$ étant toujours supposé faiblement continu sur S, la proposition 1 montre que la restriction à $\mathfrak{F}(S)$ de cette application est fortement continue sur $\mathfrak{F}$. Il existe donc un élément $f^\mu \in \mathfrak{F}(S)$ tel que l'on ait :

$$< f^\mu, g > = \int \mu g \quad , \quad \forall g \in \mathfrak{F}(S)$$

En particulier, pour $g = C_x$, image dans $\mathfrak{F}$ de $Y(x)$, $x \in S$, on trouve :

(2-1) $$f^\mu(x) = \int \mu(dy)\, C(y,x) \qquad (x \in S)$$

et aussi :

(2-2) $$\|f^\mu\|^2 = \int \mu\, f^\mu = \iint \mu(dx)\; C(x,y)\; \mu(dy)$$

Nous désignerons par $\mathcal{F}_{M^c}(S)$ l'image de $M^c(S)$ dans $\mathcal{F}(S)$ par l'application $\mu \to f^\mu$ ainsi définie. Il est clair que $\mathcal{F}_{M^c}$ est un <u>sous-vectoriel dense de l'espace de Hilbert $\mathcal{F}$</u> (celui-ci étant déjà engendré par les images dans $\mathcal{F}$ des mesures de Dirac δ_x, $x \in S$). Nous dirons souvent que f^μ est <u>le potentiel de la mesure μ</u>.

<u>Proposition 3</u> - <u>$Y(x)$ étant faiblement continue sur S, l'application $\mu \to f^\mu$ de $M^c(S)$ munie de sa topologie faible dans $\mathcal{F}(S)$ est faiblement continue. Lorsque S est compact, cette application est fortement continue, si et seulement si $Y(x)$ est fortement continue sur S.</u>

$Y(x)$ étant faiblement continue sur S, on a $\mathcal{F}(S) \subset \mathcal{C}(S)$ (Proposition 1). Si μ_n converge faiblement vers μ dans $M^c(S)$, on a donc

$$< f^{\mu_n}, g > = \int \mu_n g \to \int \mu g = < f^\mu, g >$$

pour tout $g \in \mathcal{F}$, et f^{μ_n} converge faiblement vers f^μ dans $\mathcal{F}$.

Si S est compacte, la convergence vague $\mu_n \to \mu$ dans $M(S)$ entraîne la convergence vague des mesures produit $\mu_n \otimes \mu_n$ vers $\mu \otimes \mu$ dans $M(S\times S)$. Dans ces conditions, si de plus $Y(x)$ est fortement continu, $C(x,y)$ est continue sur $S\times S$, et on a donc :

$$\|f^{\mu_n}\|^2 = \int \mu_n \otimes \mu_n \, C \to \int \mu \otimes \mu C = \|f^\mu\|^2$$

Il en résulte que la convergence $f^{\mu_n} \to f^\mu$ a lieu aussi au sens fort.

Inversement, supposons l'application $\mu \to f^\mu$ fortement continue. Si $x_n \to x$ dans S, δ_{x_n} tend vers δ_x dans $M^c(S)$, et l'hypothèse entraîne $C(x_n, x_n) = \|f^{\delta_{x_n}}\|^2 \to \|f^{\delta_x}\|^2 = C(x,x)$. Comme $Y(x)$ est déjà faiblement continu sur S, il est donc également fortement continu.

Covariance de type positif strict - Nous dirons que la covariance C est de type positif strict sur S si

$$\mu \in M^c(S), \quad \|f^\mu\|^2 = \iint \mu(dx) C(x,y)\, \mu(dy) = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Si l'on désigne par $\mathfrak{F}_M$ l'image de $M^c(S)$ dans $\mathfrak{F}(S)$, il est clair que l'application $\mu \to f^\mu$ de M^c sur $\mathfrak{F}^M$ est bijective si et seulement si la covariance C est de type positif strict sur S. Lorsque cette condition est remplie, le produit scalaire

$$< \mu, \mu' > = \int \mu(dx)\; C(x,y)\; \mu(dy) = \; < f^\mu, f^{\mu'} >$$

définit sur $M^c(S)$ une structure préhilbertienne. Le complété de $M^c(S)$ pour cette structure s'identifie au dual $\mathfrak{F}^*$ de $\mathfrak{F}$ donc aussi à l'espace de Hilbert $\mathfrak{F}$ lui-même. En sens inverse, on peut munir $\mathfrak{F}_M(S)$ de la topologie déduite de celle de $M^c(S)$. En particulier, si S est compacte, cette topologie est la topologie vague, et la Proposition 3 donne :

Corollaire : Lorsque S est compacte, la topologie vague sur $\mathfrak{F}_M(S)$ est plus fine que la topologie induite par la topologie forte de $\mathfrak{F}(S)$ si et seulement si $Y(x)$ est fortement continue sur S.

Proposition 4 - Pour que $\mathfrak{F}(S)$ soit dense dans $\mathcal{C}(S)$ pour la convergence compacte, il faut et il suffit que la covariance C soit de type positif strict sur S, et $\mathfrak{F}_M(S)$ est alors également dense dans $\mathcal{C}(S)$.

En effet, $M^c(S)$ est le dual de $\mathscr{C}(S)$ muni de la convergence compacte, et $\mathfrak{F}(S) \subset \mathscr{C}(S)$ d'après la Proposition 1. Soit alors $\mu \in M^c(S)$ un élément de l'orthogonal de $\mathfrak{F}(S)$ dans $M^c(S)$. On a

$$< f^\mu, g > = \int \mu \, g = 0$$

pour tout $g \in \mathfrak{F}$, donc $\|f_\mu\| = 0$. L'orthogonal de $\mathfrak{F}$ est donc réduit à $\{0\}$ (et $\mathfrak{F}$ dense dans $\mathscr{C}$) si et seulement si $\|f_\mu\| = 0$ entraîne $\mu = 0$; c'est-à-dire si C est de type positif strict. D'autre part, $\mathfrak{F}_M$ est dense dans $\mathfrak{F}$ pour la topologie forte, donc aussi pour la topologie induite par celle de $\mathscr{C}(S)$ (Proposition 1), et par suite $\mathfrak{F}_M$ est dense dans $\mathscr{C}$ en même temps que $\mathfrak{F}$.

<u>Lemme 1</u> - <u>Si S est compact, et si $\mathfrak{F}(S) = \mathscr{C}(S)$, on a $\mathfrak{F}_M(S) = \mathfrak{F}(S)$ et les topologies faible et vague coïncident sur $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_M$.</u>

En effet, soit $f \in \mathfrak{F}$, et μ_n une suite dans $M(S)$ telle que f^{μ_n} converge faiblement vers f dans $\mathfrak{F}$. Pour tout $g \in \mathscr{C}(S) = \mathfrak{F}(S)$, on a :

$$\int \mu_n \, g = < f^{\mu_n}, g > \to < f, g >$$

Comme S est compact, et que g décrit $\mathscr{C}(S)$, il en résulte que μ_n converge vaguement vers une mesure $\mu \in M(S)$ vérifiant $< f, g > = = \int \mu \, g$, $g \in \mathfrak{F}$, donc $f = f^\mu$. Donc $f \in \mathfrak{F}_M$, et $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_M$. Le même raisonnement montre que la convergence faible dans $\mathfrak{F}$ entraîne la convergence vague dans $\mathfrak{F}_M$, donc l'équivalence des deux topologies d'après la Proposition 3.

<u>Proposition 5</u> - <u>Soit S un sous-ensemble non discret de E fermé dans E. Si Y(x) est fortement continu sur S, et la covariance C de type positif strict sur S, les inclusions $\mathfrak{F} \subset \mathscr{C}$ et $\mathfrak{F}_M \subset \mathfrak{F}$ sont toujours strictes.</u>

a/ Supposons d'abord que S soit <u>compact</u> dans E. Si $\mathfrak{F}(S) = \mathscr{C}(S)$, on a $\mathfrak{F}_M = \mathfrak{F}$ et les topologies faible et vague coïncident sur $\mathfrak{F}$(lemme 1). Mais, d'après le corollaire de la Proposition 3, la topologie vague est plus fine que la topologie forte. Les topologies forte et faible sont donc équivalentes sur $\mathfrak{F}(S)$, et celà n'est possible que si <u>$\mathfrak{F}$(S) est de dimension finie</u>.

b/ De même, (toujours avec S compact) supposons $\mathfrak{F}_M(S) = \mathfrak{F}(S)$, et soit $f \in \mathscr{C}(S)$. Comme C est de type positif strict, on peut trouver (Proposition 4) une suite $f_n \in \mathfrak{F}_M(S)$ convergeant uniformément sur S vers f. Soit alors g^μ un élément quelconque de $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_M$, associé à une mesure $\mu \in M(S)$. La convergence uniforme des f_n vers f donne :

$$\int \mu \ f_n = < g^\mu, \ f_n > \ \rightarrow \int \mu f$$

Par suite, f_n converge faiblement dans $\mathfrak{F}$ vers un élément $f' \in \mathfrak{F}$ tel que $\int \mu f' = < g^\mu, f > = \int \mu f$ pour toute mesure $\mu \in M$, d'où résulte $f' = f \in \mathfrak{F}$, et $\mathfrak{F} = \mathscr{C}$. La première partie de la démonstration montre à nouveau que $\mathfrak{F}(S)$ est de dimension finie.

c/ Montrons maintenant que (S étant quelconque) $\mathfrak{F}(S)$ ne peut être de dimension finie que si l'ensemble S est lui-même fini. En effet, soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ un nombre fini de points de S tels que les $Y(x_i)$ engendrent S. Si x est un point de S distinct des x_i, $i = 1, 2, \ldots n$, on a une relation de la forme $Y(x) = \sum \lambda^i \, Y(x_i)$, mais celà contredit la positivité stricte de la covariance C sur S. Donc S est fini.

d/ la proposition résulte de a/, b/ et c/ lorsque S est compact. Soit alors S fermé non compact dans E. La relation $\mathfrak{Y}(S) = \mathscr{C}(S)$ implique $\mathfrak{Y}(K) = \mathscr{C}(K)$ pour tout compact $K \subset S$. D'après a/ et c/, tout compact $K \subset S$ est un ensemble fini. Comme le fermé S, en tant que sous-espace de E, est localement compact, il en résulte que tout point de S admet un voisinage fini dans S, donc que S est un espace discret.

Si maintenant $\mathfrak{Y}_M(S) = \mathfrak{Y}(S)$, il suffit de reprendre le raisonnement fait en b/ (en remplaçant la convergence uniforme par la convergence compacte, et M par M^c) pour trouver $\mathfrak{Y}(S) = \mathscr{C}(S)$, d'où résulte à nouveau que S est discret.

Le corollaire suivant précise l'énoncé dans le cas compact :

Corollaire: Si S est compact et Y(x) fortement continu sur S, l'inclusion $\mathfrak{Y}(S) \subset \mathscr{C}(S)$ est stricte si $\mathfrak{Y}(S)$ n'est pas de dimension finie. Si de plus la covariance est de type positif strict sur S, les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ S est un sous-ensemble fini de E.

b/ $\mathfrak{Y}(S)$ est de dimension finie.

c/ $\mathfrak{Y}(S) = \mathscr{C}(S)$

d/ $\mathfrak{Y}_M(S) = \mathfrak{Y}(S)$

<u>Proposition 6 - Supposons que la covariance soit de type positif strict sur S. Pour qu'un sous-vectoriel $\mathfrak{F}_0$ de $\mathfrak{F}$ soit dense dans $\mathscr{C}(S)$ pour la convergence compacte, il faut et il suffit que son orthogonal $\mathfrak{F}_0^{\perp}$ dans $\mathfrak{F}$ vérifie</u>

$$\mathfrak{F}_{M^c} \cap \mathfrak{F}_0^{\perp} = \{0\}$$

D'après la proposition 1, on peut supposer $\mathfrak{F}_0$ fermé dans $\mathfrak{F}$ (puisqu'un sous-vectoriel de $\mathfrak{F}$ et sa fermeture dans $\mathfrak{F}$ ont même adhérence dans $\mathscr{C}$). Soit Π_0 le projecteur de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}_0$. $\mathfrak{F}_0$ est engendré par les $\Pi_0 Y(x)$, $x \in S$. D'après la proposition 4, $\mathfrak{F}_0$ est dense dans $\mathscr{C}$ si et seulement si la covariance C_0 associée à $\Pi_0 Y(x)$, soit :

$$C_0(x,y) = < \Pi_0 Y(x), \Pi_0 Y(y) > \qquad (x, y \in S)$$

est de type strictement positif sur S. Mais pour toute mesure $\mu \in M^c(S)$, on a :

$$\int \mu(dx)\ \Pi_0 Y(x) = \Pi_0 \int \mu(dx)\ Y(x)$$

La condition ci-dessus équivaut donc a :

$$\mu \in M^c(S), \quad \Pi_0\ f^{\mu} = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Comme C est de type positif strict, $\mu = 0$ si et seulement si $f^{\mu} = 0$, et la relation ci-dessus exprime que $\mathfrak{F}_{M^c}$ ne contient aucun élément autre que 0 qui soit orthogonal à $\mathfrak{F}_0$.

3 - RECIPROQUE

Examinons, maintenant, le problème inverse. Soit S une partie fermée de E, $\mathcal{C}(S)$ l'espace des fonctions continues sur S muni de la convergence compacte, et $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(S)$ un sous-vectoriel de $\mathcal{C}(S)$. Supposons que $\mathfrak{F}$ soit muni d'un produit scalaire qui en fait un espace de Hilbert, et que l'injection de cet espace de Hilbert $\mathfrak{F}$ dans $\mathcal{C}(S)$ soit continue pour la convergence compacte. Montrons que cet espace $\mathfrak{F}$ peut être construit à partir d'une F.A. Y(x) comme dans le paragraphe précédent.

En effet, soit, tout d'abord, x un point de S. La forme linéaire $C_x : f \to f(x)$ est continue sur $\mathcal{C}(S)$, et sa restriction à $\mathfrak{F}$ est à fortiori continue pour la topologie hilbertienne de $\mathfrak{F}$. Par suite, il existe un élément $C_x \in \mathfrak{F}$ vérifiant :

$$(3\text{-}1) \qquad < C_x, f > = f(x) \qquad (x \in S,\ f \in \mathfrak{F})$$

En particulier :

$$< C_x, C_y > = C_x(y) = C_y(x)$$

Désignons par $C(x,y) = C_x(y)$ la fonction symétrique ainsi définie sur S × S. C'est une <u>fonction de type positif</u>. En effet, soit λ une mesure $\in \Lambda$ (S) (c'est-à-dire à support fini inclus dans S). L'élément $\int \lambda(dx)\, C_x$ est dans $\mathfrak{F}$, et, d'après (3-1), on a :

$$(3\text{-}2) \qquad \left\| \int \lambda(dx)\, C_x \right\|^2 = \iint \lambda(dx)\, C(x,y)\, \lambda(dy) \geq 0$$

On peut donc trouver une F.A. Y(x), x ∈ S admettant comme <u>covariance</u>

la fonction $C(x,y)$.

Soit alors $\overline{H}_o(S)$ l'espace de Hilbert engendré par les $Y(x)$, $x \in S$, et $\mathfrak{F}_o(S)$ l'espace fonctionnel homéomorphe à $\overline{H}_o(S)$ construit comme dans le paragraphe précédent. Soit aussi $H_o(S)$ l'espace des combinaisons linéaires finies $\int \lambda(dx)\ Y(x)$, $\lambda \in \Lambda(S)$. L'application :

$$\int \lambda(dx)\ Y(x) \to \int \lambda(dx)\ C_x$$

de $H_o(S)$ dans $\mathfrak{F}(S)$ est continue et conserve la norme, d'après (3-2). Elle se prolonge donc par une isométrie de $\overline{H}_o(S)$ sur un sous-espace de $\mathfrak{F}(S)$ qui coïncide avec $\mathfrak{F}_o(S)$, et l'injection de $\mathfrak{F}_o(S)$ dans $\mathfrak{F}(S)$ est par suite une isométrie. D'ailleurs, on a $\mathfrak{F}_o = \mathfrak{F}$, car $f \in \mathfrak{F}_o^{\perp}$ équivaut à $< C_x, f > = f(x) = 0$ pour tout $x \in S$, c'est-à-dire à $f = 0$. Les propositions du paragraphe précédent se transposent donc directement à l'espace fonctionnel $\mathfrak{F}(S)$. Ainsi :

- D'après la Proposition 2, la topologie faible de $\mathfrak{F}(S)$ est plus fine que la topologie induite par la convergence compacte si et seulement si la fonction $C(x,y)$ est continue sur $S \times S$.

- D'après la Proposition 3, l'application $\mu \to f^{\mu} = \int \mu(dx)\ C_x$ de $M^c(S)$ (muni de sa topologie faible) dans $\mathfrak{F}$ est faiblement continue. Si S est compacte, elle est fortement continue si et seulement si $C(x,y)$ est continu sur $S \times S$.

- D'après la Proposition 4, $\mathfrak{F}$ (et $\mathfrak{F}_M$) sont dense dans $\mathcal{C}$ si et seulement si C est de type positif strict, c'est-à-dire si $\mu \in M^c(S)$ et $f^{\mu} = 0$ entraînent $\mu = 0$.

- Les Propositions 5 et 6 se transposent d'elles-mêmes.

4 - LE PROBLEME DU BALAYAGE

Nous nous plaçons toujours dans le cas où la F.A. $Y(x)$ est faiblement continue sur E et où la covariance est de type positif strict. Si S est un sous-ensemble de E (que l'on peut toujours supposer fermé), $\overline{H}(S)$ est un sous-espace fermé de $\overline{H}(E)$. Toute fonction $f \in \mathfrak{F}(S)$ peut être prolongée par la fonction $\tilde{f} \in \mathfrak{F}(E)$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = < Y, Y(x) > \quad , \qquad x \in E$$

L'espace $\tilde{\mathfrak{F}}(S)$ ainsi constitué par les prolongements $\tilde{f}$ des $f \in \mathfrak{F}(S)$ est l'image de $\overline{H}(S)$ dans l'homéomorphisme $\overline{H}(E) \to \mathfrak{F}(E)$. C'est donc un sous-espace fermé de $\mathfrak{F}(E)$, et l'application $f \to \tilde{f}$ de $\mathfrak{F}(S)$ dans $\tilde{\mathfrak{F}}(S)$ est un homéomorphisme. Il est donc possible d'identifier f et $\tilde{f}$, ou $\mathfrak{F}(S)$ et $\tilde{\mathfrak{F}}(S)$, ce que nous ferons, en général, dans ce qui suit.

Soit Π_S le projecteur de $\mathfrak{F}(E)$ dans $\mathfrak{F}(S)$. La fonction $\Pi_S f =$ $= f_S \in \mathfrak{F}(S)$ vérifie, par définition

$$f_S(x) = f(x) \qquad x \in S$$

Mais, en général, cette égalité ne subsiste pas hors de S.

Le Problème du balayage. -

Soit $M^+(S)$ l'ensemble des mesures positives à support dans S. (S est fermé dans E), et $M_c^+(S)$ l'ensemble des mesures positives à support compact $K \subset S$. Soit, de même, $\mathcal{F}_{M_c^+}(S)$ l'image de $M_c^+(S)$ dans $\mathcal{F}(S)$ par l'application $\mu \to f^\mu$. Nous dirons que le problème du balayage d'une mesure positive $\mu \in M^c(E)$ sur un compact $K \subset E$ est soluble si la projection $\Pi_K f^\mu$ du potentiel de μ dans $\mathcal{F}(K)$ appartient à $\mathcal{F}_{M^+}(K)$, autrement dit s'il existe une mesure $\mu_K \in M(K)$ à support dans K telle que l'on ait :

$$\int \mu(dx)\ C(x,y) = \int \mu_K(dx)\ C(x,y) \ , \qquad y \in K$$

En général, cette égalité ne subsiste pas hors de K. Nous dirons que le balayage de μ sur K est soluble au sens strict si l'on a

$$\Pi_K f^\mu \in \mathcal{F}_{M^+}(K) \ , \ \Pi_K f^\mu \leq f^\mu \ \text{ sur E , et } \Pi_K f^\mu = f^\mu \text{ sur K}$$

Lorsque le problème du balayage est soluble pour toute mesure $\mu \in M_c^+$ et tout compact K, on dira simplement que le problème du balayage est soluble dans S (au sens large, ou au sens strict respectivement).

Le cône convexe $\mathcal{F}_{M^+}(K)$. -

Il est clair que l'ensemble $\mathcal{F}_{M^+}(K)$ des potentiels des mesures positives à support dans un compact $K \subset E$ donné constitue un cône convexe, qui va jouer un rôle décisif dans l'étude du problème du balayage. Dans ce qui suit, nous fixons un compact $K_0 \subset E$, et nous désignons, pour abréger, par $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_M$, $\mathfrak{F}_{M^+}$ et $\mathfrak{F}^+$, au lieu de $\mathfrak{F}(K_o)$, $\mathfrak{F}_M(K_o)$, $\mathfrak{F}_{M^+}(K_o)$ et $\mathfrak{F}^+(K_o)$ les ensembles suivants de fonctions : $\mathfrak{F}$ est l'espace $\mathfrak{F}(K_o)$ lui-même ; $\mathfrak{F}_M$ et $\mathfrak{F}_{M^+}$ sont formés des potentiels des mesures (resp. des mesures positives) à support dans K_o, et $\mathfrak{F}^+$ des fonctions $f \in \mathfrak{F}(K_o)$ positives sur K_o.

<u>Lemme 2</u> - <u>Une fonction $f \in \mathfrak{F}(K_o)$ est dans $\mathfrak{F}^+$ si et seulement si $< f,g > \geq 0$ pour tout $g \in \mathfrak{F}_{M^+}$; elle est dans $\mathfrak{F}_{M^+}$ si et seulement si $< f,g > \geq 0$ pour tout $g \in \mathfrak{F}^+$.</u>

La première partie de l'énoncé est évidente, puisqu'une fonction $f \in \mathcal{C}(K)$ est ≥ 0 si et seulement si $\int \mu f \geq 0$ pour tout $\mu \in M^+(K_o)$. Passons à la seconde partie. Soit $f \in \mathfrak{F}_{M^+}$, ou, explicitement :

$$f = \int \mu(dx)\ C(x, .)$$

avec $\mu \in M^+$. On a $< f,g > = \int \mu g \geq 0$ pour tout $g \in \mathfrak{F}^+$.

Inversement, soit $f \in \mathfrak{F}$ une fonction vérifiant $< f,g > \geq 0$ pour tout $g \in \mathfrak{F}^+$. La forme linéaire $g \to < f,g >$, définie sur $\mathfrak{F}$, est donc positive. D'après Bourbaki [Intégration, Ch. III, 1, N° 7, Prop. 9], cette forme se prolongera sur $\mathcal{C}$ par une mesure positive pourvu seulement qu'il existe une fonction $f_1 \in \mathfrak{F}$ strictement positive sur K_o. Or cette condition est toujours remplie. En effet, la covariance étant de type positif strict, $\mathfrak{F}$ est dense dans $\mathcal{C}(K_o)$ d'après la Proposition 4, et la fonction constante 1 sur K_o est limite uniforme de fonctions de $\mathfrak{F}$.

De plus, toujours d'après la Proposition de Bourbaki, cette mesure est unique puisque $\mathfrak{F}$ est dense dans $\mathcal{C}$. On a donc une mesure positive (unique) $\mu \in M^+(K_o)$ vérifiant $< f,g > = \int \mu g \ , \ g \in \mathfrak{F}$. Mais ceci entraîne $f = f^\mu = \int \mu(dx)\ C(x,.)$, et par suite $f \in \mathfrak{F}_{M^+}$.

<u>Proposition 7 - L'application $\mu \to f^\mu$ définit un homéomorphisme de M^+ muni de la topologie vague sur $\mathfrak{F}_{M^+}$ muni de la topologie faible de $\mathfrak{F}$.</u>

En effet, cette application est bijective, pusique la covariance est de type positif strict, et faiblement continue (Proposition 3) puisque $Y(x)$ est faiblement continu. Montrons que l'application inverse est continue, ce qui achèvera la démonstration. Soit μ_n une suite de mesures dans $M^+(K_o)$ dont les potentiels f^{μ_n} convergent faiblement dans $\mathfrak{F}$ vers un élément $f_o \in \mathfrak{F}$. Pour tout $g \geq 0$, on a :

$$< f^{\mu_n}, g > = \int \mu_n\ g \geq 0$$

donc aussi $< f_o, g > \geq 0$. D'après le lemme 2, on a donc $f_o \in \mathfrak{F}_{M^+}$, (et le cône convexe $\mathfrak{F}_{M^+}$ est faiblement fermé dans $\mathfrak{F}$). Soit μ_o la mesure positive telle que $f_o = f^{\mu_o}$. Il reste à montrer que la suite μ_n converge vaguement vers μ_o dans M^+. Or la convergence faible des f^{μ_n} vers f^{μ_o} implique $\int \mu_n\ g \to \int \mu_o\ g$ pour toute fonction f appartenant au sous-vectoriel $\mathfrak{F}$ dense dans $\mathcal{C}$ pour la convergence uniforme. Les mesures positives μ_n convergent donc vaguement vers μ_o pourvu seulement que $\operatorname{Sup}_n \int \mu_n < \infty$. Soit alors $g \in \mathfrak{F}$ une fonction vérifiant $0 < a \leq g \leq b$ sur K_o (il en existe, puisque $\mathfrak{F}$ est dense dans $\mathcal{C}$). On trouve, pour n assez grand, et $\varepsilon > 0$ donné :

Si $f' \in \mathcal{F}_{M^+}$ vérifie les m cond.:

$$\begin{aligned} &\langle f-f^+, f' \rangle \leq 0 \\ &\langle f-f', f^+ \rangle \leq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\|f'\|^2 = \langle f, f' \rangle \leq \langle f^+ f' \rangle \\ &\|f^+\|^2 = \langle f, f^+ \rangle \leq \langle f^+, f' \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f'\|^2 + \|f^+\|^2 \leq 2 \langle f^+, f' \rangle \Rightarrow f' = f^+$$

$$\int \mu_n \leq \frac{1}{a} \int \mu_n \, g \leq \frac{1}{a} \int g \, \mu_o + \varepsilon \leq \frac{b}{a} \int \mu_o + \varepsilon$$

Donc $\int \mu_n$ est borné, et la suite μ_n converge vaguement vers μ_o.

Corollaire : Les trois topologies faible, forte et vague coïncident sur le cône convexe $\mathfrak{F}_{M^+}$ dès que $Y(x)$ est fortement continue sur K_o. Dans ce cas, le cône convexe $\mathfrak{F}_{M^+}$ admet une base fortement compacte.

En effet, la topologie vague coïncide sur $\mathfrak{F}_{M^+}$ avec la topologie faible, et elle est plus fine que la topologie forte si $Y(x)$ est fortement continue (Proposition 3).

D'après la Proposition 7, le cône convexe $\mathfrak{F}_{M^+}$ est fermé dans $\mathfrak{F}$, et le théorème des projections lui est applicable. Toute fonction $f \in \mathfrak{F}(E)$ (et non plus seulement à $\mathfrak{F}(K_o)$ admet une projection sur $\mathfrak{F}_{M^+} = \mathfrak{F}_{M^+}(K_o)$, que nous désignerons par f^+. Cet élément f^+ est caractérisé, d'une manière unique, par les conditions :

$$f^+ \in \mathfrak{F}_{M^+}, \quad < f-f^+, g > \leq 0 \ , \ \forall g \in \mathfrak{F}_{M^+} \ , \ < f-f^+, f^+ > = 0$$

Posons

$$f = f^+ - f_1 \qquad (4-1)$$

La condition $< f_1, g > \geq 0$ pour tout $g \in \mathfrak{F}_{M^+}$ équivaut à $f_1 \in \mathfrak{F}^+$ si $f_1 \in \mathfrak{F}(K_o)$ (Lemme 2). Ainsi, tout élément $f \in \mathfrak{F}(K_o)$ admet une décomposition unique (4-1) avec :

$$f^+ \in \mathfrak{F}_{M^+} \ , \ f_1 \in \mathfrak{F}^+ \quad , \quad < f^+, f_1 > = 0$$

Il en résulte aussitôt, compte tenu de lemme 2, que la composante f_1 est la projection de $-f$ dans le cône convexe fermé $\mathfrak{F}^+$, et aussi que la condition $f^+ = 0$ est équivalente à $f \leq 0$ sur K_o, donc que les deux cônes convexes $-\mathfrak{F}^+$ et $\mathfrak{F}_{M^+}$ sont supplémentaires dans $\mathfrak{F}$. Résumons ces résultats :

Lemme 3 - Tout élément $f \in \mathfrak{F} = \mathfrak{F}(K_o)$ admet une décomposition unique de la forme $f = f^+ - f_1$ avec :

$$f^+ \in \mathfrak{F}_{M^+},\ f_1 \in \mathfrak{F}^+ \ ,\quad < f^+,\ f_1 > = 0$$

Dans cette décomposition, f^+ est la projection de f dans le cône convexe $\mathfrak{F}_{M^+}$ et $-f_1$ la projection de f dans le cône convexe $-\mathfrak{F}^+$, qui est le supplémentaire de $\mathfrak{F}_{M^+}$. En particulier, on a l'équivalence :

$$f \leq 0 \quad (\text{sur } K_o) \quad \Leftrightarrow \quad f^+ = 0$$

Voici un exemple d'application de ce lemme :

Application - Soit $f_o \in \mathfrak{F}(K_o)$, et posons par récurrence :

$$f_o = f_o^+ - f_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = f_n^+ - f_{n+1}$$

avec, selon le lemme 3 :

$$f_n^+ \in \mathfrak{F}_{M^+} \ ,\ f_n \in \mathfrak{F}^+ \quad , \quad < f_n^+ \ ,\ f_{n+1} > = 0$$

On en déduit pour tout $N > 0$:

$$f_o = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n f_n^+ + (-1)^{N+1} f_{N+1}$$

Montrons que la série $\sum (-1)^n f_n^+$ <u>converge faiblement vers f_o dans $\mathfrak{F}$</u> (ce qui donne un procédé permettant de construire explicitement une suite d'éléments de $\mathfrak{F}_M$ convergeant vers un $f_o \in \mathfrak{F}$ donné).

La relation d'orthogonalité $< f_n^+ , f_{n+1} > = 0$ donne d'abord :

$$\|f_n\|^2 = \|f_n^+\|^2 + \|f_{n+1}\|^2$$

d'où l'on tire :

$$\|f_o\|^2 = \sum_{n=0}^{N} \|f_n^+\|^2 + \|f_{N+1}\|^2$$

On en déduit aussitôt que f_n^+ converge fortement vers 0, et que les $\|f_N\|$ convergent en décroissant vers une limite $a \geq 0$, donc, en particulier, que la suite $\|f_N\|$ est bornée.

D'autre part, $f_n \in \mathfrak{F}^+$ donne $0 \leq f_n \leq f_n^+$ pour $n > 0$. Comme $\int \mu f_n^+$ tend vers 0 pour toute mesure μ, d'après la convergence forte $f_n^+ \to 0$, on a aussi $\int \mu f_n \to 0$, c'est-à-dire $< f_n, g > \to 0$ pour $g \in \mathfrak{F}_M$, sous-espace dense de $\mathfrak{F}$. Ce résultat, compte tenu du fait que les f_n sont bornés en norme, entraîne la convergence faible de f_n vers 0, et la relation

$$f_o = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n^+ \qquad \text{(au sens faible)}$$

Le second principe du maximum.-

Rappelons maintenant un résultat classique en théorie du potentiel, qui éclaire assez bien les rapports entre cette théorie et l'objet qui nous occupe actuellement. On dit que le second principe du maximum est vérifié (dans E, et pour le noyau C qui est ici pour nous la fonction de covariance) si, pour toutes mesures μ_1, μ_2 positives à supports compacts, l'inégalité $f^{\mu_1} \leq f^{\mu_2}$ μ_1 - presque partout entre les potentiels de ces mesures entraîne l'inégalité $f^{\mu_1} \leq f^{\mu_2}$ partout dans E. On a alors le résultat classique suivant :

Proposition 8 - Lorsque le second principe du maximum est vérifié, le problème du balayage est soluble au sens strict.

En effet, soit μ une mesure positive à support compact, f^{μ} son potentiel, K un compact quelconque de E, et $f_K^+ \in \mathfrak{F}_{M^+}(K)$ la projection de f^{μ} sur le cône convexe $\mathfrak{F}_{M^+}(K)$. D'après le lemme 3, cette projection vérifie :

$$(a) \qquad f^{\mu} \leq f_K^+ \text{ sur } K \quad \text{et} \quad < f^{\mu} - f_K^+ , f_K^+ > = 0$$

Cette deuxième relation s'écrit

$$\int (f^{\mu} - f_K^+) \, \mu_K^+ = 0$$

en désignant par $\mu_K^+ \in M^+(K)$ la mesure positive dont f_K^+ est le potentiel et entraîne, compte tenu de la première relation (a) :

$$f_K^+ = f^{\mu} \qquad \mu_K^+ \text{- presque partout}$$

Le deuxième principe du maximum donne alors :

$$f_K^+ \leq f^{\mu} \quad \text{sur } E$$

d'où, d'après l'inégalité (a), $f_K^+ = f^{\mu}$ sur K, et le balayage sur K est soluble au sens strict.

Remarque : Plus généralement, soit K un compact dans E, f une fonction de $\mathcal{F}(E)$ dont la restriction à K n'est pas ≤ 0, $f_o \in \mathcal{F}(K)$ sa projection sur $\mathcal{F}(K)$ qui vérifie $f = f_o$ sur K. Il est clair que f et f_o ont même projection f_o^+ sur le cône convexe $\mathcal{F}_{M^+}(K)$. Soit $\mu_o \in M^+(K)$ la mesure μ_o dont f_o^+ est le potentiel, soit f $f_o^+ = f^{\mu_o}$. Comme f_o n'est pas ≤ 0 sur K, on a $\mu_o \neq 0$ d'après le lemme 3. D'après ce même lemme, la fonction $f_1 = f_o^+ - f_o$ est ≥ 0 sur K, d'où aussi :

$$\text{(a)} \qquad f_o^+ - f \geq 0 \text{ sur } K$$

Par suite, la relation

$$< f_o^+ , f_o^+ - f > = \int \mu_o \, (f_o^+ - f) = 0$$

qui résulte aussi du lemme 3, entraîne $f = f_o^+$ μ_o presque partout. Comme il s'agit ici de fonctions continues, on a encore $f = f_o^+$ sur le support de μ_o, qui est un compact. Ainsi

Lemme 4 - Pour tout $f \in \mathcal{F}(E)$ et tout compact $K \subset E$, on peut trouver un compact $K_o \subset K$ et une mesure positive μ_o à support dans K_o telle que l'on ait

$$f = f^{\mu_o} \qquad \text{sur } K_o$$

(ce lemme ne suppose pas le second principe du maximum).

Etudions maintenant quelques exemples.

5 - EXEMPLES

Premier exemple : $E = \mathbb{R}^1$, $C(x,y) = e^{-a|x-y|}$ $(a > 0)$

Il résulte facilement de la propriété markovienne que possède dans $\mathbb{R}^1$ la covariance exponentielle que le problème du balayage est soluble dans $\mathbb{R}^1$. Désignons par $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynomes, par $\mathcal{P}_K$ leurs restrictions à un compact $K \subset \mathbb{R}_1$ quelconque, et montrons que $\mathcal{P}_K \subset \mathcal{F}_M(K)$ et que $\mathcal{P}_K$ est dense dans $\mathcal{F}(K)$.

Remarquons d'abord qu'il suffit d'établir la propriété dans le cas où le compact K est un intervalle $[a,b]$, et même (par translation) un intervalle $[0,L]$. En effet, si K est un compact quelconque, on pourra toujours prendre un intervalle $[a,b] \supset K$. Si les polynomes sur $[a,b]$ sont dans $\mathcal{F}_M([a,b])$, c'est-à-dire sont potentiels de mesures à support dans $[a,b]$, le balayage sur K de ces mesures nous donnera des mesures à support dans K dont les potentiels coïncideront sur K avec les polynomes correspondants, et on aura donc encore $\mathcal{P}_K \subset \mathcal{F}_M(K)$. Enfin, si $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{F}([a,b])$, $\mathcal{P}_K$ sera à fortiori dense dans $\mathcal{F}(K)$.

Considérons donc le compact $[0,L]$. On sait que toute fonction f sur $[0,L]$ admettant une dérivée seconde continue est le potentiel de la mesure μ à support dans $[0,L]$ défini par :

$$\mu(dx) = \frac{1}{2a} [a^2 f(x) - f''(x)] dx + [a f(L) + f'(L)] \delta_L$$
(a)
$$+ [a f(0) - f'(0)] \delta_o$$

On en déduit aussitôt $\rho \subset \mathcal{F}_{M'}$. Il reste à montrer que ρ est dense dans $\mathcal{F}$. De (a), tout d'abord, on déduit aussi que l'exponentielle $e^{\lambda x}$ appartient à l'adhérence de ρ dans $\mathcal{F}$(il suffit de s'assurer de la convergence de la suite de mesure $\sum_{n=o}^{N} \frac{1}{n!} \lambda^n \mu_n$, où μ_n est la mesure associée à; x^n). Or, $e^{\lambda x}$ est, d'après (a), le potentiel de la mesure $\mu_\lambda(dx) = \frac{1}{2a} (a^2-\lambda^2) e^{\lambda x} dx + (a+\lambda) e^{\lambda L}\delta_L +$ $+ (a-\lambda) \delta_o$. Soit alors $f \in \rho^\perp \subset \mathcal{F}$. Cette fonction doit vérifier $\int f \mu_\lambda(dx) = 0$ pour tout λ réel, donc, avec $\Phi(\lambda) = \int_0^L f(x) e^{\lambda x} dx$:

$$\frac{1}{2a} (a^2-\lambda^2) \Phi(\lambda) + (a+\lambda) e^{\lambda L} f(L) + (a-\lambda) f(o) = 0$$

Pour $a = \lambda$, on trouve $f(L) = 0$; pour $a = -\lambda$, $f(o) = 0$; et pour $\lambda \neq \pm a$, $\Phi(\lambda) = 0$, d'où $f = 0$, ce qui montre que ρ est dense dans $\mathcal{F}$.

En terme de krigeage universel, et pour un compact K quelconque, on a ainsi montré que l'estimateur optimal $m_N^*(x)$ de la dérive en $x \in K$ relativement aux polynomes de degré $\leq N$ converge fortement vers $Y(x)$ pour N infini. Le processus $Y(x)$ de covariance exponentielle admet donc sur K un développement, convergent en moyenne quadratique, de la forme :

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n f_n(x) \qquad (x \in K)$$

où les f_n constituent un système normalisé de polynomes, et les A_n des variables aléatoires orthogonales dans $\bar{H}(K)$. On aurait un résultat analogue avec les développements en série de Fourier.

Deuxième exemple : Covariance analytique dans $\mathbb{R}^n$

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^n$, et prenons une covariance $C(x,y)$ analytique et bornée dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, par exemple une exponentielle de Gauss. Alors la F.A. $Y(x)$ admet un développement en série de Taylor fortement convergente, du type :

$$Y(y) = \sum_p \frac{y^p}{p!} D^p Y(o)$$

Il suit de là que tous les espaces $\overline{H}(K)$, et $\overline{H}(\mathbb{R}^n)$ lui-même sont engendrés par les mêmes $D^p Y(o)$ (dès que K est infini), et que toute fonction $f \in \mathfrak{F}(K) = \mathfrak{F}(\mathbb{R}^n)$ admet un développement convergent sur $\mathbb{R}^n$ entier :

$$f(y) = \langle Y_f, Y(y) \rangle = \sum_p \frac{y^p}{p!} \langle Y_f, D^p Y(o) \rangle$$

Soit alors C_o la borne de la covariance sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Toute fonction $f = f^\mu \in \mathfrak{F}_M(K)$ est alors bornée sur $\mathbb{R}^n$ entier, puisque $|f(x)| = |\int_K \mu(dy)\ C(y,x)| \leq C_o \int \mu$. En particulier, $\mathfrak{F}_M$ ne contient aucun polynome (sauf, peut-être, les constantes).

Il reste à examiner si les polynomes sont dans $\mathfrak{F}$. Il est probable que la réponse est négative dans le cas général. J'examinerai ici seulement le cas où $Y(x)$ est stationnaire et ergodique. Sous cette hypothèse, aucun polynome n'est dans $\mathfrak{F}$ (sauf, peut-être, les constantes). En effet, si $f \in \mathfrak{F}$ est un polynome de degré $\leq n$, la relation :

$$f(y) \equiv \sum_p \frac{y^p}{p!} \langle Y_f, D^p Y(o) \rangle$$

donne :

$$< Y_f, D^p Y(o) > = 0 \quad \text{pour } p > n$$

et inversement, cette relation entraîne que f est un polynome de degré $\leq n$. Or, l'espace engendré par les $D^p Y(o)$, $p > n$ contient évidemment les $D^p Y(x)$, $p > n$. Mais, dans le cas stationnaire et ergodique, l'équation $D^p Y(x) = Z(x)$ détermine $Y(x)$ à une constante près et celà par des opérations successives de caractère linéaire. Ainsi, Y_f est encore orthogonal à tous les $D^p Y(o)$, $p > 0$. Par suite, les seuls polynomes pouvant (éventuellement) se trouver dans $\mathfrak{F}$ sont les constantes.

Supposons d'ailleurs $1 \in \mathfrak{F}$, c'est-à-dire l'existence de $Y_1 \in H$ avec :

$$1 = \sum_p \frac{y^p}{p!} < Y_1, D^p Y(o) > \qquad (y \in \mathbb{R}^n)$$

Il en résulte

$$< Y_1, Y(o) > = 1 \ , < Y_1, D^p Y(o) > = 0 \quad \text{pour } p > 0$$

En désignant par U_h le groupe d'opérateurs unitaires tels que $C(x,y) =$ $= < U_x Y(o), U_y Y(o) >$, on a alors aussi, d'après la remarque précédente :

$$< Y_1, D^p Y(h) > = < U_{-h} Y_1, D^p Y(o) > = 0$$

Par suite, $U_h Y_1$ est proportionnel à Y_1 lui-même, donc invariant, et Y_1 est <u>une constante</u> non aléatoire d'après l'hypothèse ergodique.

Il suffit donc d'imposer la condition $E\, Y(x) = 0$ pour obtenir $Y_1 = 0$, c'est-ç-dire l'impossibilité de $1 \in \mathfrak{F}$. Par contre, si

$E\left(Y(x)\right) = m \neq 0$, la constante $Y_1 = 1/m$ vérifie les conditions voulues.

En résumé : dans le cas stationnaire et ergodique et si $E\,Y(x) = 0$, aucun polynome n'est dans $\mathcal{F}$.

Ce résultat n'est lié que partiellement aux hypothèses faites (stationnarité stricte et ergodicité). Si la covariance est de type stationnaire, soit

$$C(x,y) = C(x-y)$$

où $C(h)$ est une fonction analytique sur $\mathbb{R}^n$, il suffit de montrer l'existence d'une F.A. stationnaire au sens strict et admettant cette covariance pour que la conclusion s'étende à toutes les F.A. stationnaires au sens large admettant cette covariance, puisque la structure de l'espace $\mathcal{F}$ est liée uniquement à la fonction $C(h)$.

Ainsi :

Si $C(x,y) = C(x-y)$, avec une fonction $C(h)$ analytique et nulle à l'infini, aucun polynome n'est dans $\mathcal{F}$.

6 - LES DERIVES AU SENS DE CRAMER

En m'inspirant de certaines idées de H. Cramer, je vais maintenant donner une définition précise de la notion de dérive aléatoire. E désigne encore un espace localement compact de type dénombrable (il suffirait d'ailleurs de le supposer dénombrable à l'infini -

dans les applications, E sera le plus souvent l'espace $\mathbb{R}^n$ ou un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$). $Y(x)$ est une F.A. sur E vérifiant

$$E\big(Y(x)\big) = 0 \quad , \quad E\big(Y(x)\ Y(y)\big) = C(x,y)$$

(la condition $E\ Y(x) = 0$ n'est pas réellement indispensable, mais simplifie les discussions).

Considérons une suite croissante d'ouverts $B_n \subset E$ relativement compacts vérifiant :

$$\overline{B}_n \subset B_{n+1} \quad , \quad \bigcup B_n = E$$

et leurs complémentaires dans E, soit : $V_n = E \setminus \overline{B}_n$, $\overline{V}_n = E \setminus B_n$, suites décroissantes vérifiant $V_n \supset \overline{V}_{n+1}$ et $\bigcap V_n = \emptyset$.

Pour chaque n, nous désignerons par :

$$H_n = \overline{H}\ (V_n)$$

l'espace de Hilbert engendré par les $Y(x)$, $x \in V_n$, et par H_D l'intersection de cette suite décroissante :

$$H_D = \bigcap H_n$$

H_D est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $H = \overline{H}(E)$ engendré par les $Y(x)$, $x \in E$. Nous dirons que H_D est l'espace des dérives, et que son orthogonal $H_o = H_D^{\perp}$ dans H est l'espace des résidus.

Montrons, tout d'abord, que la décomposition de H comme somme

orthogonale :

$$H = H_D \oplus H_o \tag{6-1}$$

ne dépend pas du choix de la suite B_n qui a servi à construire H_D. En effet, soient B_n' et $V_n' = E \setminus B_n'$ deux suites d'ouverts vérifiant les mêmes hypothèses que la suite B_n. Du fait que $\overline{B}_n'$ est compact, on a $B_m \supset \overline{B}_n'$ et $V_m \subset V_n'$ pour m assez grand, d'où $\overline{H}(V_m) \subset \overline{H}(V_n')$ et $\bigcap_m \overline{H}(V_m) \subset \bigcap_n \overline{H}(V_n)$. L'inclusion inverse se démontre de la même manière, et l'on voit que H_D ne dépend pas du choix de la suite B_n.

D'après (6-1), pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$Y(x) = Y_D(x) + Y_o(x) \ , \ Y_D(x) \in H_D \ , \ Y_o(x) \in H_o$$

en désignant par $Y_D(x)$ et $Y_o(x)$ les projections de $Y(x)$ sur H_D et H_o. On dira que le processus $Y_D(x)$ est la <u>dérive</u> (au sens de Cramer) et que le processus $Y_o(x)$ est le <u>résidu</u>. Pour tout $x, y \in E$, $Y_D(x)$ et $Y_o(y)$ sont orthogonaux par construction. La dérive $Y_D(x)$, projection dans l'espace H_D qui ne dépend que du comportement à l'infini du processus $Y(x)$, se trouve donc déterminée dès lors que ce comportement est connu. Au contraire, $Y_o(x)$ est orthogonal à ces données infiniment éloignées, et sa connaissance apporte une information substantiellement nouvelle.

[H. Cramer appelle $Y_D(x)$ la composante purement déterministe et $Y_o(x)$ la composante purement stochastique ; nous ne pouvons pas conserver ici cette terminologie, puisque $Y_D(x)$ est en fait toujours une F.A. et correspond au contraire exactement à la notion de dérive aléatoire].

Si $H_D = \}0\}$, nous dirons que l'espace H et le processus $Y(x)$ lui-même sont <u>sans dérive</u> ; si, au contraire, $H_o = \{0\}$, qu'ils sont <u>sans résidus</u> ou à <u>dérive pure</u>.

Dans le cas général, soit $H = H_o \oplus H_D$, on peut, à propos de chacun des processus composants Y_o et Y_D, répéter la construction qui a permis d'obtenir H_D à partir du processus initial. Montrons alors que <u>l'espace H_o des résidus est un espace sans dérive</u>, <u>et que l'espace H_D des dérives est un espace à dérive pure</u>.

En effet, soient Π_o et $\Pi_D = I - \Pi_o$ les projecteurs de H dans H_o et H_D. L'espace $H_n = \overline{\overline{H}}(V_n)$ se décompose en somme directe :

$$H_n = \Pi_D H_n \oplus \Pi_o H_n$$

Or, on a d'une part $\Pi_D H_n \subset H_D$; de l'autre $H_D \subset H_n$. D'où $H_D = \Pi_D H_n$ et $\bigcap\limits_n \Pi_D H_n = H_D$. Ainsi, H_D est un espace de dérive pure. On trouve ensuite :

$$H_D = \cap H_n = (\cap \Pi_D H_n) \oplus \cap (\Pi_o H_n) = H_D \oplus (\cap \Pi_o H_n)$$

D'où $\cap \Pi_o H_n = \{0\}$, et H_o est un espace sans dérive.

Montrons maintenant que cette décomposition de H en somme orthogonale $H_o \oplus H_D$ d'un espace H_o sans dérive et d'un espace H_D sans résidu <u>est unique</u>. En effet, supposons : $H = H_o' \oplus H_D'$, H_o' sans dérive et H_D' à dérive pure, et soient Π_o' et $\Pi_D' = I - \Pi_o'$ les projecteurs de H_o' et H_D'. Nous avons à nouveau :

$$H_n = \Pi_D' H_n \oplus \Pi_o' H_n$$

puis :

$$H_D = \cap H_n = (\cap \Pi_D' H_n) \oplus (\cap \Pi_o' H_n) = \cap \Pi_D' H_n = H_D'$$

puisque, par hypothèse, $\cap \Pi_o' H_n = \{0\}$ et que H_D' est sans résidus - d'où l'unicité annoncée - Enonçons :

Proposition 9 - Tout processus $Y(x)$ d'ordre 2 sur E et d'espérance nulle admet une décomposition unique $Y = Y_o + Y_D$ comme somme de deux processus orthogonaux dont l'un, Y_o, est sans dérive, et le second, Y_D, à dérive pure.

Exemples - 1/ Si l'espace E est compact, tout processus d'ordre 2 sur E est sans dérive. En effet, si les B_n sont les ouverts croissants qui servent à construire H_D, $E = \bigcup B_n$ entraîne $E = B_n$ pour n assez grand, d'où $V_n = E \setminus B_n = \emptyset$ et $H_n = \{0\}$, puis $H_D = \{0\}$.

2/ Prenons comme espace E l'espace $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et un processus $Y(x)$ dont la covariance $C(x,y)$ est analytique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (par exemple, une exponentielle de Gauss). Alors, le processus $Y(x)$ est à dérive pure. En effet, on a vu dans le paragraphe précédent, exemple 2, que tous les espaces $\overline{H}(V)$ sont identiques pour V ouvert dans E. Donc $H_n = H$, et $H_D = H$. Ce second exemple est intéressant en ce sens qu'il suggère que la dérive, au sens de Cramer, doit effectivement prendre en charge la partie "régulière" d'un processus donné.

3/ $Y(x)$ est défini et fortement continu sur $\mathbb{R}^n$ et, pour sa covariance $C(x,y)$, le problème du balayage est soluble dans $\mathbb{R}^n$.

Prenons alors comme espace E un ouvert relativement compact dans $\mathbb{R}^n$, et soit F la frontière (compacte) de E. On a alors $H_D = \overline{H}(F)$, autrement dit l'espace des dérives est engendré par les $Y(x)$, x parcourant la frontière F de E.

En effet, soit B_n la suite habituelle d'ouverts $\overline{B}_n \subset B_{n+1} \subset E$, $E = \bigcup B_n$. On peut remplacer $V_n = E \setminus B_n$ par son adhérence K_n qui est compacte dans $\mathbb{R}^n$, puisque $\overline{H}(V_n) = \overline{H}(K_n)$ à cause de la continuité forte. On a

$$H_D = \bigcap \overline{H}(K_n) \quad , \quad F = \bigcap K_n$$

d'où évidemment $\overline{H}(F) \subset H_D$. L'inclusion inverse (qui ne serait pas vraie dans le cas général) va résulter du fait que le problème du balayage est soluble. En effet, H_D est engendré par les $\Pi_D\, Y(x)$, $x \in E$. Mais, pour un x donné, il existe pour chaque n une mesure positive μ_n à support dans K_n telle que $Y_n = \int \mu_n(dx)\, Y(x)$ soit la projection de $Y(x)$ dans K_n. Pour n tendant vers l'infini, Y_n converge fortement vers $\Pi_D\, Y(x)$. Le corollaire de la proposition 7 montre alors que les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure μ_o dont le support est contenu dans $\bigcap K_n = F$ et telle que l'on ait $\Pi_D\, Y(x) = \int \mu_o(dx)\, Y(x)$. On en déduit aussitôt $H_D = \overline{H}(F)$.

Exemple 4 - Covariance exponentielle $e^{-a|x-y|}$ dans $E = \mathbb{R}^1$.

Le processus correspondant est sans dérive. En effet, H_D est engendré par les $\Pi_D\, Y(x) = \lim \Pi_n\, Y(x)$, où Π_n est le projecteur de l'espace $H_n = \overline{H}\big((-\infty, -n) \cup (+n, -\infty)\big)$. Or $\Pi_n\, Y(x) = a_n\, Y(n) + b_n\, Y(-n)$, à cause de la propriété markovienne de l'exponentielle, avec a_n et

b_n convergeant vers 0. D'où $\Pi_D\, Y(x) = 0$ et $H_D = \{0\}$.

On notera qu'au contraire, d'après l'exemple 2, un processus dont la covariance est $e^{-a(x-y)^2}$ est à dérive pure dans $\mathbb{R}^1$.

Problème de l'estimation de la dérive.

Le processus $Y(x) = Y_o(x) + Y_D(x)$ étant décomposé comme ci-dessus, proposons-nous d'estimer le terme de dérive $Y_D(x)$ en un point $x \in K$ à partir de la connaissance d'une réalisation de $Y(x)$ sur un compact K donné. C'est le problème habituel du cokrigeage. En désignant par Π_D le projecteur de H dans H_D et par Π_K le projecteur de H dans $\overline{H}(K)$, l'estimateur optimal est :

$$(6\text{-}2) \qquad Y_D^*(x) = \Pi_K\, \Pi_D\, Y(x)$$

On note que $\Pi_K\, \Pi_D$ n'est, en général, pas le moins du monde un projecteur de l'espace H. L'estimateur (6-2) ne se laissera donc pas ramener à la forme voulue pour coïncider avec un estimateur optimal de la dérive comme on les construit en théorie du K.U. Il n'y a là rien de surprenant, car la détermination explicite de l'estimateur (6-2) n'est possible que si l'on connaît séparément les covariances C_o et C_D des composantes orthogonales Y_o et Y_D : si on les connaît effectivement, le cokrigeage simple est possible, et il n'y a pas lieu d'introduire de conditions d'universalité. Le K.U. n'intervient qu'à partir du moment où notre connaissance de la covariance C_D n'est que partielle. Pour préciser les rapports entre le K.U. et la notion de dérive au sens de Cramer, nous aurons besoin du résultat suivant, qui généralise la proposition (2-2) du fascicule sur le K.U. :

Soient $Y_o(x)$ et $Y_D(x)$ deux processus d'ordre deux, orthogonaux sur un sous-ensemble $S \subset E$, $C_o(x,y)$ et $C_D(x,y)$ leurs covariances. On suppose C_o de type positif strict sur K (mais non nécessairement C_D), et on désigne par H_o, H_D et H_Z les espaces de Hilbert engendrés par $Y_o(x)$, $Y_D(x)$ et $Z(x) = Y_o(x) + Y_D(x)$ pour $x \in S$ (on notera bien qu'ici H_Z n'est pas du tout égal à la somme directe $H_n \oplus H_D$). Si $\Lambda(S)$ est l'ensemble des mesures à support fini dans S, tout $Z \in H_Z$ est limite dans $\overline{H}_Z$ d'éléments $Z_n = Y_o^n + Y_D^n$, avec $Y_o^n = \int \lambda_n(dx)\, Y_o(x)$, $Y_D^n = \int \lambda_n(dx)\, Y_D(x)$. Comme les Y_o^n et les Y_D^n sont orthogonaux, Y_o^n et Y_D^n convergent respectivement vers des limites $Y_o \in H_o$ et $Y_D \in H_D$. On a donc $Z = Y_o + Y_D$, et $H_Z \subset H_o \oplus H_D$ (mais non l'inclusion inverse), et cette décomposition est évidemment unique. Désignons alors par $\Phi : H_Z \to H_o$ l'application linéaire , évidemment continue, définie par $\Phi(Z) = Y_o$. C'est la seule application linéaire continue de H_Z dans H_o qui vérifie la condition :

$$\Phi\big(Y(x)\big) = Y_o(x) \qquad (x \in S)$$

Proposition 10 - Avec les notations définies ci-dessus, les 5 propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - Φ est une injection de H_Z dans H_o.

2 - Il existe $B < \infty$ telle que pour toute mesure $\lambda \in \Lambda(S)$ on ait :

$$\int \lambda(dx)\, C_D(x,y)\, \lambda(dy) \leq B \int \lambda(dx)\, C_o(x,y)\, \lambda(dy)$$

3 - Φ est un homéomorphisme de H_Z sur H_o.

4 - $H_Z \cap H_D = \{0\}$

5 - <u>Il existe une application linéaire continue α de H_o dans H_D vérifiant :</u>

$$\alpha\, Y_o(x) = Y_D(x) \quad , \quad \forall\, x \in S$$

Montrons 1 ⇔ 2. Soit Z un élément de H_Z. Il est limite dans H_Z d'une suite de la forme :

$$Z_n = \int \lambda_n(dx)\; Y_o(x) + \int \lambda_n(dx)\; Y_D(x)$$

avec $\lambda_n \in \Lambda$. La rèlation $\Phi(Z) = 0$ équivaut à $\int \lambda_n\, C_o\, \lambda_n \to 0$. Ainsi $\Phi(Z) = 0$ entraîne $Z = 0$ (i.e. Φ est injective) si et seulement si pour toute suite $\lambda_n \in \Lambda$ la relation $\int \lambda_n\, C_o\, \lambda_n \to 0$ entraîne $\int \lambda_n\, C_D\, \lambda_n \to 0$, donc si l'injection de Λ muni de la norme définie par C_o dans Λ muni de la norme définie par C_D est continue - c'est-à-dire si et seulement si 2 est vérifié.

Montrons 2 ⇔ 3. Il est évident que 3 ⇒ 2. Inversement, si 2 est vérifiée, Φ est une application injective (d'après 1 ⇔ 2) et continue de H_Z dans H_o. Φ sera donc un homéomorphisme si elle est de plus surjective. Soit Y_o un élément de H_o, limite dans H_o d'une suite de la forme $\int \lambda_n(dx)\; Y_o(x) = Y_o^n$ ($\lambda^n \in \Lambda$). Posons $Y_D^n = \int \lambda_n(dx)\; Y_D(x)$. D'après 2, on a :

$$\int (\lambda_n - \lambda_m)\; C_D\; (\lambda_n - \lambda_m) \leq B \int (\lambda_n - \lambda_m)\; C_o\; (\lambda_n - \lambda_m)$$

Par suite, Y_D^n est une suite de Cauchy, et converge vers un $Y_D \in H_D$: l'élément $Z = Y_o + Y_D$ est dans H_Z (comme limite de la suite $Y_o^n + Y_D^n \in H_Z$) et a pour image par l'application continue Φ :

$$\Phi(Z) = \lim \Phi\ (Y_o^n + Y_D^n) = \lim Y_o^n = Y_o$$

Donc Φ est surjective, et $2 \Rightarrow 3$.

Montrons $4 \Rightarrow 1$: si $H_Z \cap H_D = \{0\}$ et si $Z = Y_o + Y_D$ est tel que $Y_o = 0$, on a $Y_D = Z \in H_Z \cap H_D$, donc $Z = 0$. Inversement, supposons $Z = Y_o + Y_D \in H_Z \cap H_D$. On a aussi $Z = 0 + Z$, et, cette décomposition étant unique, $Y_o = 0$. Si Φ est injective, il en résulte $Z = 0$, et $1 \Rightarrow 4$.

Montrons $3 \Rightarrow 5$: il suffit de prendre $\alpha = (I-\Phi) \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} - I$. Réciproquement, si 5 est vrai, on a $Y(x) = (I+\alpha)\ Y_o(x)$ pour $x \in S$, et l'application $(I+\alpha)$ vérifie $(I+\alpha) \circ \Phi = I$ sur un sous-espace dense de H, donc sur H entier puisque $I + \alpha$ est continue. De même, $\Phi \circ (I+\alpha) = I$ sur H_o, et Φ est un homéomorphisme (puisque bijective et continue).

Remarques - Ces conditions ne sont jamais vérifiées si $H = H_o \oplus H_D$ est somme orthogonale des espaces H_o et H_D. On a alors, en effet, $H \cap H_D = H_D \neq \{0\}$, et la propriété 3 n'est pas vérifiée. En particulier, si l'on décompose $H(E)$ en somme $H(E) = H_o(E) \oplus H_D(E)$ d'un espace des résidus $H_o(E)$ et d'un espace des dérives $H_D(E)$ (cf. Proposition 9), les propriétés de la proposition 10 ne sont pas applicables. Mais elles peuvent l'être à un sous-espace $H(S)$, $S \subset E$, en prenant pour $H_o(S)$ et $H_D(S)$ les espaces engendrés par le résidu $Y_o(x)$ et la dérive $Y_D(x)$, $x \in S$.

Je poursuivrai cette étude de l'estimation optimale d'une dérive aléatoire dans une note ultérieure.