- NOTE sur un opuscule de Monsieur LANERY -

Dans un opuscule d'une vingtaine de pages dactylographiées, intitulé "estimation du profil sous-marin à l'aide du krigeage", un certain Monsieur E. LANERY nous propose une refutation du krigeage universel. Dans une introduction - brève, mais nuancée - il nous indique que ses critiques ne concernent que l'application du K.U. à l'estimation des "profils sous-marins", mais que cette théorie présente un intérêt certain pour d'autres problèmes dans lesquels intervient un bruit aléatoire : trajectoire d'un missile, détection radar ou "ajoute-t-il même un peu obscurément" estimation du profil sous-marin quand on envisage une incertitude sur les résultats des sondages en raison de, etc...".

Ici, une première remarque s'impose. La suite du texte se situe en fait à un niveau de généralité où rien ne permet de différencier le cas particulier des "profils sous-marins" : si les critiques formulées par Monsieur LANERY sont valables dans ce cas particulier, elles le sont aussi dans tous ceux qu'il énumère, et dans bien d'autres encore. On s'aperçoit même que ces critiques ne s'appliquent pas d'ailleurs au seul K.U. mais à peu près à n'importe quel procédé d'estimation utilisé dans une application pratique de la théorie des probabilités. En vérité, Monsieur LANERY est trop modeste : ce n'est pas seulement le krigeage universel qu'il a refuté, mais, comme on le verra, la possibilité même d'utiliser la théorie des probabilités pour interpréter n'importe quel phénomène physique.

Analysons rapidement ce texte.

Dans une première partie, Monsieur LANERY nous rappelle un peu lourdement qu'il ne faut pas confondre les espaces $\mathcal{L}^2$ et L^2, ni une variable aléatoire avec une classe d'équivalence de V.A. (On sait que deux V.A. appartenant à une même classe sont égales avec une probabilité unité). En fait, les techniques de regression ou de prédiction linéaire que rappelle Monsieur LANERY, et de manière générale, depuis WIENER, KOLMOGOROV etc..., à peu près tous les travaux relatifs aux F.A. d'ordre deux (y compris l'analyse spectrale) utilisent des structures d'espace de Hilbert, donc travaillent sur des classes d'équivalence de V.A. On peut consulter sur ce point par exemple le livre de CRAMER et LEADBETTER (Stationary and related stochastic processes, J. WILEY, 1968).

La seconde partie est intitulée "Estimateurs universels optimaux d'après G. MATHERON". Elle expose la théorie du K.U. dans le cas particulier où l'ensemble des données est fini, mais ne parle pas de l'estimation optimale de la dérive elle-même (il n'est d'ailleurs pas certain que Monsieur LANERY ait clairement saisi la différence qui sépare l'estimation de la vraie valeur inconnue en un point donné et celle de la dérive en ce même point). Monsieur LANERY se limite au cas fini, et à la démonstration simple, valable seulement dans ce cas là, qui consiste à déterminer le minimum de la variance d'estimation par la technique des multiplicateurs de

LAGRANGE. Il conclut en suggérant (sans le dire d'ailleurs explicitement) que ces résultats ne sont pas transposables au cas infini (a-t-il lu mon fascicule sur le K.U. dont il donne la référence [9]), sans d'ailleurs l'utiliser dans son texte : le cas infini y est traité en termes d'espace de Hilbert avec toute la précision que l'on souhaite d'ordinaire). Une remarque terminale nous rappelle une fois de plus que deux V.A. équivalentes peuvent (avec une probabilité nulle) prendre des valeurs différentes.

Le titre de la troisième partie -"Etude critique de l'application du krigeage à l'étude du profil sous-marin"- nous fait espérer qu'après ces généralités nous allons enfin entrer dans le vif du sujet. En fait, il est question de beaucoup de choses dans cette dernière partie - sauf, précisément, du "profil sous-marin"-.

Viennent tout d'abord deux contre-exemples (paragraphes 1 et 2) construits sur le même modèle : Quitte à compléter l'espace de probabilité initial sans modifier la loi spatiale ni la covariance (ce qu'il fait avec une extrême minutie), Monsieur LANERY démontre longuement ce résultat évident : à savoir que l'on peut toujours trouver un évènement ω_o de probabilité nulle pour lequel la réalisation $X(\omega_o,t)$ présentera telle ou telle particularité aberrante choisie d'avance et mettant en défaut les conclusions du K.U. Rien ne nous garantit, nous dit Monsieur LANERY, que ce n'est pas justement cette trajectoire $X(\omega_o,t)$ qui se réalisera : rien ne nous le garantit, en effet, sinon justement qu'il y a une probabilité nulle pour que celà se produise.

C'est, on le voit, un leit motiv chez Monsieur LANERY, et le fondement de sa critique : on peut toujours trouver des cas possibles, mais de probabilité nulle, où telle ou telle conclusion, tel ou tel résultat tombe en défaut. Et celà est parfaitement vrai. Pourtant, déjà la terminologie même (ensemble négligeable, évènement presque impossible etc...) qu'utilisent les probabilistes pour désigner ces évènements de probabilité nulle indique assez qu'à leurs yeux mêmes il n'y a pas trop lieu de tenir compte de leur éventualité dans une application pratique de la théorie. En fait - et celà a souvent été dit - <u>toutes</u> les applications de la théorie des probabilités à des phénomènes concrets reposent sur ce principe : on peut négliger la possibilité d'un évènement de probabilité nulle. En mécanique statistique, par exemple, il y a "seulement" une probabilité unité pour que telle moyenne spatiale converge vers l'espérance mathématique correspondante. Celà n'a jamais empêché aucun physicien d'utiliser cette moyenne spatiale pour estimer l'espérance en question. D'une manière générale, tout procédé d'inférence statistique repose sur ce principe. Souvent même - oh scandale ! - on néglige la possibilité d'évènements de probabilité inférieure à ε non nul choisi d'avance.

Ainsi, comme je l'ai déjà indiqué, c'est la possibilité même d'utiliser la théorie des probabilités pour étudier quel que problème pratique que ce soit - et non pas seulement le K.U. - qui se trouve "refuté" par ce trop modeste Monsieur LANERY.

En poursuivant cette lecture instructive, nous tombons sur un paragraphe 3 intitulé "Comparaison avec la méthode du maximum de vraisemblance". Le texte n'est pas précisément clair, mais il semble ici que, dans l'esprit de notre auteur, le champ d'application de cette méthode se limite au cas où l'on dispose des résultats numériques de n tirages au sort indépendants d'une même V.A. On sait, bien sûr, que cette méthode est beaucoup plus générale. Si Monsieur LANERY avait lu mon texte sur le K.U., il y aurait vu que, dans le cas gaussien fini, l'estimateur du maximum de vraisemblance est identique à l'estimateur optimal de la dérive auquel conduit la théorie du K.U. - L'avantage du K.U., ici, réside d'ailleurs en ce qu'il n'est pas lié à une hypothèse gaussienne, et s'applique aussi bien aux cas fini et infini. Dans ces conditions, on jugera à leurs valeurs les conclusions de notre auteur sur la différence irréductible des deux méthodes, et la remarque sybilline qui termine ce paragraphe. On peut dire à peu près la même chose du paragraphe suivant consacré à une comparaison avec les moindres carrés.

Nous trouvons ensuite un paragraphe 5 consacré à la détermination (probablement : l'estimation) de la fonction de covariance. Ici, notre auteur s'enveloppe de brumes, comme il sied sans doute à la majesté divine. Il lance vers le ciel quelques incantations magiques, où l'on saisit au passage d'obscures allusions à DOOB et à certains théorèmes ergodiques. Disons, pour être courtois, que la théorie ergodique ne semble décidément pas la spécialité de ce Monsieur LANERY.

Le dernier paragraphe se veut une apothéose, mais, hélas, puisqu'il faut appeler les choses par leur nom, il semble s'agir plutôt d'une pure et simple malhonnêteté intellectuelle. Il y a là en effet (c'est un des rares endroits) une référence explicite à mon texte sur le K.U. Je cite Monsieur LANERY (page 19), dans son français approximatif : "Par contre, les restrictions faites par G. MATHERON pour s'assurer une convergence numérique ([9],II, n° 2, p. 22) ne sont pas suffisantes, car la convergence dans L_p n'implique pas la convergence presque partout, comme le prouve le contre exemple classique suivant : ...".

Suit un contre exemple interminable, qui montre en effet ce résultat bien connu que la convergence dans L_p n'entraine pas la convergence p.s. - On sait par contre (cf. J. NEVEU, [10], Prop II, 6-1 et II, 4-3, dans la bibliographie de notre auteur), que de toute suite convergeant dans L_p on peut extraire une suite p.s. convergente. C'est à ce résultat bien classique en théorie de l'intégration que fait allusion le passage incriminé par l'honnête Monsieur LANERY. Ce passage est le suivant : (on m'excusera de me citer moi-même, mais celà est nécessaire ici pour qui veut juger à sa valeur cette déplaisante polémique) :

[il s'agit d'une suite Y_n convergeant vers un Y dans un espace de L^2]. "On peut, théoriquement, extraire de la suite Y_n une suite partielle convergeant presque sûrement vers Y, mais, dans les applications, on ne saura pas construire effectivement etc..."

Pour conclure cette analyse fastidieuse en termes modérés, je dirai donc que ce Monsieur LANERY semble s'être égaré sur un terrain qui n'est manifestement pas le sien. Je passerai sous silence de nombreuses malhonnêtetés intellectuelles, et me contenterai de donner en annexe une brève étude de l'appareil critique utilisé par notre auteur. Certains, peut-être, y trouveront matière à un jugement plus sévère.

ANNEXE - L'appareil critique de Monsieur LANERY

La bibliographie de Monsieur LANERY (reproduite ci-après) comporte 11 titres prestigieux (exception faite, bien sûr, des n° 8 et 9). Il est instructif de voir comment, et à quel propos, ils sont utilisés dans le texte.

[1] et [8] sont cités uniquement dans l'introduction, le premier à titre de référence générale (non utilisé par la suite), le second pour mentionner au moins une fois l'existence du travail de A. JOURNEL.

Les références [2] à [5] se rapportent à BOURBAKI. En fait, [3] n'est pas utilisé dans le texte. [2] est cité page 12 et 13 : il s'agit de justifier la possibilité d'adjoindre à un ensemble Ω donné un élément ω_0 supplémentaire, et de définir l'ensemble réunion de Ω et de cet élément ω_0. Cette opération d'apparence élémentaire pose, certes, de délicats problèmes de logique formelle - mais on peut se demander si ce genre de subtilité est bien à sa place dans une étude qui (si l'on en croit son titre) se rapporte aux fonds sous-marins. [3] n'est utilisé nulle part dans le texte (sauf erreur de ma part). [4] est cité page 18 à propos d'une notion élémentaire de topologie (celle de point isolé). [5] est cité à 3 reprises, à propos de résultats tout à fait élémentaires : théorème de projection dans un espace de Hilbert, page 3 ; procédé d'orthogonalisation de SCHMIDT, page 4 (tous les taupins connaissent celà) ; et l'inégalité de SCHWARZ (orthographié SCHWARTZ), page 6.

HALMOS, [7], est cité à deux reprises, page 11, à propos de la notion élémentaire d'atome ; page 18, pour justifier le fait que l'ensemble des rationnels est de mesure nulle (personne ne s'en doutait).

J. NEVEU, [10], est cité à 3 reprises : page 2, pour la notion d'égalité presque partout, et pour justifier le résultat archiconnu que L^2 est un espace de HILBERT ; page 6, à propos de la notion de trajectoire (ou réalisation) d'une fonction aléatoire ; page 17, enfin, à propos des théorèmes ergodiques, dont on ne peut donc pas dire que Monsieur LANERY n'ait pas du tout entendu parler.

Les seules références un tout petit peu techniques se rapportant à l'ouvrage honorable de PALLU DE LA BARRIERE, [11], cours d'Automatique théorique, cité à 6 reprises (pages 3, 9, 10, 11, 15 et 19).

J'allais oublier l'excellent M. GIRAULT, [6], cité page 6 à propos de résultats aussi peu connus que la loi des grands nombres et l'inégalité de TCHEBYCHEV.

Passons maintenant aux références non prestigieuses, [8], et [9], qui devraient être de vraies références de travail. Le travail de JOURNEL, [8] est cité, pour la forme dans l'introduction. Or, ce travail est consacré très explicitement à l'application du K.U. aux fonds sous-marins, tandis que le mien est à caractère plus général. On mesure par là déjà le degré réel d'intérêt que Monsieur LANERY porte aux problèmes qui intéressent les marins.

Mon travail, [9], est cité dans l'introduction ; page 6, où Monsieur LANERY désapprouve sérieusement mon système de notations ; page 10, à propos du système du K.U., que Monsieur LANERY n'examine que dans le cas fini (pour suggérer sa non-validité dans le cas infini), alors que la référence qu'il donne concerne justement le cas général, fini ou non ; page 19 enfin, outre le gracieux passage que j'ai cité ci-dessus, on lit encore ceci :

" l'hypothèse de stricte positivité de la fonction de covariance telle que la formule G. MATHERON ([9],II, n° 2, page 21) risque fort de n'être jamais réalisée pour des fonctions de covariances continues". (En fait, une application élémentaire du théorème de BOCHNER montre que les fonctions de covariance usuellement utilisées dans R^n, comme l'exponentielle e^{-ar}, l'exponentielle de GAUSS e^{-ar^2} etc... vérifient cette condition. Mais poursuivons cette citation savoureuse :) "en effet, si x_o est un point non isolé de E et si x_n est une suite à valeurs dans E qui converge vers x_o, le vecteur $Y(x_o)$ appartient au sous espace fermé de L^2 engendré par les classes $Y(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Toutefois, etc...". On voit vraiment mal en quoi cette remarque banale contredit la posivité stricte de la covariance. Certes, $Y(x_n) - Y(x_o)$ converge fortement vers 0, mais la mesure $\delta_{x_n} - \delta_{x_o}$ en fait vaguement de même, et notre brillant mathématicien n'a pas établi l'existence d'une mesure μ non nulle telle que $\iint \mu\, C\, \mu$ soit égale à 0.

BIBLIOGRAPHIE de Monsieur LANERY

[1] A. Bensoussan. Sur l'identification et le filtrage des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles - Cahier de l'I.R.I.A., n°1, Février 1969.

[2] N. Bourbaki - Théorie des Ensembles, ch. I et II - Actualités scientifiques et industrielles n° 1212 - 3ème édition, - Hermann Paris, 1966.

[3] N. Bourbaki - Théorie des Ensemble, ch.III - Actualités scientifiques et industrielles n° 1243 2ème édition, - Hermann Paris, 1963.

[4] N. Bourbaki - Topologie Générale, ch. I et II - Actualités scientifiques et industrielles n° 1142 4ème édition, - Hermann Paris, 1965.

[5] N. Bourbaki - Espaces vectoriels topologiques, ch. III IV et V,- Actualités scientifiques et industrielles n° 1229 - Hermann Paris, 1964.

[6] M. Girault - Calcul des probabilités en vue des applications - Probabilités, Statistiques, Recherche opérationnelle, section A - 2ème édition - Dunod Paris 1964.

[7] P.R. Halmos - Measure Theory - The University series in higher Mathematics - 12 th printing - Van Nostrand, Princeton, 1968.

[8] A. Journel - Rapport d'Etude sur l'Estimation d'une variable régionalisée : Application à la cartographie automatique - Service Central Hydrographique de la Marine, Paris, 1969.

[9] G. Matheron - Le Krigeage Universel - Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, Fascicule 1 - Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1969.

[10] J. Neveu - Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités - Masson, Paris, 1964.

[11] R. Pallu de la Barrière - Cours d'Automatique théorique - Collection Universitaire de Mathématiques, XVII - Dunod, Paris, 1966.

G. MATHERON
Mai 1970