ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS
CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE

Fontainebleau CG N-167

Problèmes d'analyse sur un espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

(Note Géostatistique N° 102)

G. MATHERON

Janvier 1970

35, rue Saint-Honoré, 77305 FONTAINEBLEAU CEDEX, France
Téléphone (1) 64 69 47 04 - Télécopieur 64 69 47 05 - Telex MINEFON 694736F

ECOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS
CENTRE DE GÉOSTATISTIQUE

Fontainebleau CG N-167

Problèmes d'analyse sur un espace L^2 (Ω, $\mathcal{A}$, P)

(Note Géostatistique N° 102)

G. MATHERON Janvier 1970

35, rue Saint-Honoré, 77305 FONTAINEBLEAU CEDEX, France
Téléphone (1) 64 69 47 04 - Télécopieur 64 69 47 05 - Telex MINEFON 694736F

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 102

PROBLEMES D'ANALYSE SUR UN ESPACE $L^2(\Omega,\mathcal{A},\underline{P})$

Table des Matières

Table des Matières (Suite)

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 102

PROBLEMES D'ANALYSE SUR UN ESPACE $L^2(\underline{\Omega},\underline{\mathcal{A}},\underline{P})$

INTRODUCTION

Dans la transposition probabiliste de certains problèmes physiques, on est conduit à chercher des F.A. vérifiant des équations aux dérivées partielles de forme donnée, et à remplacer les conditions aux limites de type usuel par la condition que ces F.A. doivent être stationnaires. Il s'agit, si l'on veut, en termes physiques, d'une condition à l'infini - mais le problème qui se pose est alors de savoir si les théorèmes classiques d'existence et d'unicité restent valables pour ces conditions aux limites d'un type inhabituel.

Pour formuler ceci avec quelque rigueur, nous devons au préalable définir la famille des F.A. stationnaires dans laquelle nous nous proposerons de chercher la solution de notre problème physique. C'est avec des espaces de Hilbert que les choses se présentent de la manière la plus agréable. Nous allons donc partir d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ muni d'un groupe τ_h, $h \in \mathbb{R}_n$ d'automorphismes se prolongeant sur $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ par un groupe <u>continu</u> U_h, $h \in \mathbb{R}^n$ d'opérateurs unitaires. Les F.A. stationnaires que nous utiliserons seront les :

$$Y(x,\omega) = U_x Y(\omega) \quad , \; Y \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$$

Nous désignerons toujours par $A = (A_1, A_2, \ldots A_n)$ le générateur infinitésimal du groupe U_h, et ce sont les opérateurs A_i qui remplaceront les dérivées partielles ∂_i qui interviennent dans les problèmes physiques. En effet, pour $X \in \mathcal{D}_{A_i}$ (domaine de l'opérateur A_i) la F.A. $U_x A_i X = A_i U_x X$ n'est autre que la dérivée partielle $\partial_i X(x,\omega)$ de la F.A. $X(x)$, prise au sens de la convergence m.q.

Nous supposerons souvent que le groupe U_h vérifie l'hypothèse ergodique. Dans ce cas, il suffit qu'une seule dérivée partielle $A_i X$ soit nulle pour que la F.A. $U_x X$ soit constante.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de caractériser les solutions (si elles existent) de l'équation $A_1 X = Y$, ou des équations $A_i X = Y_i$ $(i = 1,2,\ldots n)$, ou enfin de l'équation $\Delta X = Y$, Δ désignant l'opérateur Laplacien $\Delta = A_1 A_1 + \ldots + A_n A_n$. Chemin faisant, nous serons conduits à introduire la notion de F.A. intrinsèque, qui nous permettra de définir des solutions généralisées de nos équations, dans certains cas où il n'existe pas de solution dans L^2. Un autre problème intéressant consistera à expliciter la décomposition d'un vecteur $(Y_i) \in (L_2)^{\oplus n}$ en somme d'un vecteur gradient et d'un vecteur conservatif, donc à former l'expression explicite des projecteurs associés aux sous-espaces correspondants de $(L^2)^{\oplus n}$. Ceci, en particulier, nous permettra de préciser la forme des développements de Schwydler qui interviennent dans le problème de la composition des perméabilités.

I - L'EQUATION AX = Y

Dans cette première section, je considère un demi-groupe markovien continu à un paramètre P_t, $t \geq 0$ opérant dans l'espace $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit A l'opérateur infinitésimal de ce demi-groupe, opérateur dense et fermé, ainsi que l'opérateur infinitésimal A' du groupe transposé P_t^* : a priori, A' ne coïncide pas avec l'adjoint A^* de A qui constitue un prolongement de A' sur L^2. De même A'^* prolonge A sur L^2.

Nous désignerons par E le projecteur du sous-espace de $\mathcal{D}_A$ constitué des éléments X tels que AX = 0 (sous-espace fermé, puisque l'opérateur A est fermé). Dans le cas ergodique, ($AX = 0 \Rightarrow X = C^{ste}$) $E(L^2)$ est l'espace des constantes, et le projecteur E s'identifie à l'espérance mathématique. Dans tous les cas, $X \in E(L^2)$ équivaut à $P_t X = X$ pout tout $t > 0$.

Nous dirons que X est solution forte de A X = Y si $X \in \mathcal{D}_A$ et vérifie AX = Y ; que X est solution faible de cette équation si pour tout $Z \in \mathcal{D}_A$, on a

$$< X, A'Z > \; = \; < Y, Z >$$

Il en est ainsi, d'après les propriétés de l'adjoint A'^* si et seulement si :

$$X \in \mathcal{D}_{A'^*} \quad \text{et} \quad Y = A'^* X$$

En particulier, si nous montrons que toute solution faible est une solution forte, il en résultera $A = A'^*$, et, aussi bien, $A' = A^*$.

Lorsqu'elle existe, la solution forte n'est déterminée qu'à un élément près de $E(L^2)$, mais, à cet élément près, est nécessairement unique (dans le cas ergodique, donc, unique à une constante près). Ou, si l'on préfère, il existe au plus un élément $X \in L^2$ vérifiant $EX = 0$ et $AX = Y$. En effet, si X_1 et X_2 sont deux solutions, $A(X_1-X_2) = 0$ entraîne $X_1 - X_2 \in E\,(L^2)$.

Cette propriété d'unicité subsiste pour la solution faible. Pour le voir, montrons que $E(L^2)$ est l'orthogonal de l'espace image $A'\,\mathcal{D}_{A'}$, (d'où résultera: $\forall\, Z \in \mathcal{D}_{A'}$, $< X, A'\,Z >= 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow X \in E(L^2)$, c'est-à-dire $AX = 0$, et l'unicité). Pour cela, on note que $X \in E(L^2)$ équivaut à $(P_t - I)X = 0$ pour tout $t > 0$, donc $\mathcal{D}_{A'}$ étant dense, à :

$$\forall\, Y \in \mathcal{D}_{A'} \text{ , } \forall\, t > 0 \text{ , } < X, (P_t^* - I)\, Y > = 0$$

mais ceci équivaut à $< X, A'Y > = 0$ pour $Y \in \mathcal{D}_{A'}$, d'où :

(1-1) $$E\,(L^2) = \left(A'\,(\mathcal{D}_{A'})\right)^{\perp}$$

On note ensuite que $P_t X = X$ équivaut à

(1-2) $$< X, P_t X > = \|X\|^2$$

En effet, puisque $\|P_t\| \leq 1$, onna

$$\|P_t X-X\|^2 = \|P_t X\|^2 + \|X\|^2 - 2 < X, P_t X > \leq$$
$$2\,(\|X\|^2 - < X, P_t\, X >)$$

de sorte que (1-2) entraîne bien $P_t X = X$. On en déduit :

(1-2') $$P_t X = X \Leftrightarrow P_t^*\, X = X$$

d'où résulte :

(1-3) $$\mathcal{D}_A = \mathcal{D}_{A'} \quad , \quad AX = 0 \Leftrightarrow A'X = 0$$

de sorte que E est également le projecteur du sous-espace $\{A'X = 0\}$ des éléments invariants par P_t^* .

Passons maintenant à l'équation $AX = Y$.

<u>Lemme 1</u> - Pour $Y \in L^2$, l'équation $AX = Y$ admet dans L^2 une solution forte (resp. faible) si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies :

a/ $EY = 0$

b/ Pour T tendant vers l'infini, les éléments :

$$X_T = -\frac{1}{T}\int_0^T (T-t)\; P_t Y\; dt$$

admettent une limite forte (resp. faible) X_0, qui est alors l'unique solution telle que $E\,X_0 = 0$.

Montrons que les conditions a/ et b/ sont suffisantes. Posons d'abord :

$$Z_t = \int_0^t P_\tau Y\; d\tau$$

d'où :

$$X_T = -\frac{1}{T}\int_0^T Z_t\; dt$$

On a évidemment $Z_t \in \mathcal{D}_A$, $A\,Z_t = P_t Y - Y$, d'où $X_T \in \mathcal{D}_A$, et :

$$A\,X_T = Y - \frac{1}{T}\int_0^T P_t Y\; dt$$

Le théorème ergodique montre alors que AX_T converge fortement vers $Y - EY = Y$ (car $EY = 0$). Si X_T converge fortement vers X_0, on a donc $X_o \in \mathcal{D}_A$ et $A\, X_o = Y$, puisque l'opérateur A est fermé. Si X_T converge faiblement vers X_o, pour tout $Z \in \mathcal{D}_{A'}$, on a

$$< X_T,\ A'Z > \ = \ < Y,\ Z > - \frac{1}{T} \int_o^T < P_t Y,\ Z > dt$$

et la limite faible X_o vérifie bien $< X_o,\ A'Z > = < Y, Z >$. D'autre part, $EY = 0$ entraîne $E(Z_t) = 0$ puis $E(X_T) = 0$ d'où, enfin $E\, X_o = 0$, et l'unicité de X_o a déjà été démontrée.

Montrons maintenant que ces conditions sont nécessaires. Tout d'abord, $EY = 0$ équivaut à $< Y,\ EZ > = 0$ pour tout $Z \in L^2$. Si X est une solution faible, (et a fortiori si X est solution forte), on a $< Y,\ EZ > = < X,\ A'\, EZ > = 0$, puisque E est le projecteur de $\{A'Z = 0\}$. On a donc bien $EY = 0$.

Si $X \in \mathcal{D}_A$ est solution forte, on a $Y = AX$, d'où $Z_t = P_t X - X$ et

$$X_T = X - \frac{1}{T} \int_o^T P_t X\, dt$$

Le théorème ergodique montre alors que X_T converge fortement vers $X_o = X - EX$. Si l'on a seulement $< X,\ A'Z > = < Y, Z >$ pour tout $Z \in \mathcal{D}_{A'}$, on en tire :

$$\text{(a)} \qquad < Z_t,\ Z > = \int_o^t < Y,\ P_t^* Z > = \int_o^t < X,\ A'P_t^* Z > dt =$$

$$= < X,\ P_t^* Z > - < X, Z > = < P_t X,\ Z > - < X, Z >$$

Comme $\mathcal{D}_{A'}$ est dense, cette relation subsiste pour tout $Z \in L^2$, et, en intégrant une seconde fois, on trouve pour tout $Z \in L^2$:

$$< X_T, Z > = < X, Z > - \frac{1}{T} \int_0^T < P_t X, Z > dt$$

Il résulte alors du théorème ergodique que X_T converge faiblement vers $X_0 = X - EX$.

<u>Proposition 1</u> - <u>Toute solution faible de l'équation $AX = Y$ est également solution forte (soit $X \in \mathcal{D}_A$). Pour qu'une telle solution existe, il est :</u>

a/ <u>nécessaire que les</u> $X_T = - \frac{1}{T} \int_0^T (T-t) P_t Y \, dt$ <u>convergent fortement vers une limite X_0, et que $EY = 0$.</u>

b/ <u>suffisant que $EY = 0$ et que les X_T convergent faiblement vers une limite X_0. La limite faible X_0 est alors nécessairement aussi limite forte, et constitue l'unique solution vérifiant $E X_0 = 0$.</u>

Compte tenu du Lemme 1, il suffit de montrer que, pour $EY = 0$, la convergence faible des X_T entraîne leur convergence forte. La relation

$$Z_{t+\tau} = \int_0^t P_u Y \, du + \int_t^{t+\tau} P_u Y \, du = Z_t + P_t Z_\tau = Z_\tau + P_\tau Z_t$$

donne :

$$Z_\tau - P_t Z_\tau = Z_t - P_\tau Z_t$$

d'où :

$$P_t X_T - X_T = - \frac{1}{T} \int_0^T (Z_\tau - P_t Z_\tau) \, d\tau = Z_t - \frac{1}{T} \int_0^T P_\tau Z_t \, d\tau$$

Comme EY = 0 entraîne $E\, Z_t = 0$, le théorème ergodique montre que $P_t X_T - X_T$ converge fortement vers Z_t. Mais si X_T converge faiblement vers X_o, $P_t X_T - X_T$ converge au sens faible vers $P_t X_o - X_o$. On a donc

$$Z_t = P_t X_o - X_o$$

On en déduit :

$$X_T = X_o - \frac{1}{T} \int_0^T P_t X_o \, dt$$

et le théorème ergodique montre que X_T converge <u>fortement</u> vers $X_o - E\, X_o = X_o$.

<u>Corollaire</u> - <u>L'opérateur infinitésimal A' du groupe transposé P_t^* est identique à l'adjoint A^* de A</u> (soit $\mathcal{D}_{A'} = \mathcal{D}_{A^*}$ et $A' = A^*$).

En effet, on a vu que toute solution faible de AX = Y vérifie $X \in \mathcal{D}_{A'*}$ et $Y = A'^* X$. La proposition montre que toute solution faible vérifie aussi $X \in \mathcal{D}_A$ et Y = AX. Comme $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_{A'*}$, on en déduit l'identité de A et A'^* , et, de même, celle de A' et A^*.

Nous dirons que le demi-groupe P_t est <u>fortement mélangeant</u> si, pour tout X et tout Y dans L^2, $< P_t X, Y >$ converge vers $< X,1 > < 1,Y >$ pour t infini. Cette propriété entraîne que le groupe P_t est ergodique, et donc que le projecteur E s'identifie à l'espérance. (En effet, $P_t X = X$ entraîne alors $< X,Y > = < X,1 > < 1,Y >$ pour tout X et tout Y, d'où $X = < X,1 >$).

<u>Proposition 2</u> - <u>Pour que l'équation AX = Y admette une solution, il est suffisant, et nécessaire lorsque le demi-groupe P_t est fortement mélangeant</u>, <u>que EY = 0 et que</u>

$$- \int_0^t P_\tau Y \, d\tau$$

admette, pour t infini, une limite faible X_o, qui est alors l'unique solution vérifiant $E X_o = 0$.

Si $Z_t = \frac{1}{t} \int_o^t P_\tau Y \, d\tau$ converge faiblement vers X_o, les

$$X_T = \frac{1}{T} \int_o^T Z_t \, dt$$

convergent eux aussi au sens faible vers X_o, et il suffit d'appliquer la proposition 1.

Inversement, s'il existe une solution X, la relation (a) du lemme 1 :

$$< Z_t, Z > = < P_t X, Z > - < X, Z >$$

montre que $< Z_t, Z >$ converge vers $E(X)\, E(Y) - < X, Z >$ dès que P_t est fortement mélangeant.

Remarque : Si $- Z_t = X_o - P_t X_o$ converge faiblement vers X_o, la convergence n'a pas lieu, en général, au sens fort, car $P_t X_o$ ne converge pas fortement vers 0.

II - F.A. INTRINSEQUES SUR $\mathbb{R}$

Soit maintenant U_t un groupe markovien continu à un paramètre $t \in \mathbb{R}$ d'opérateurs unitaires sur L^2 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Nous appellerons fonction aléatoire intrinsèque une famille Z_t, $t \in \mathbb{R}$ d'éléments de L^2 vérifiant la condition :

(2-1) $$Z_{t+t'} = U_t \, Z_{t'} + Z_t \qquad (t, t' \in \mathbb{R})$$

d'où l'on tire aussitôt :

(2-1') $$U_t \, Z_{t'} - Z_{t'} = U_{t'} \, Z_t - Z_t$$

De (2-1) résulte :

(2-2) $$E \, Z_{t+t'} = E \, Z_t + E \, Z_{t'}$$

Moyennant une hypothèse de mesurabilité en t, (2-2) entraîne que l'espérance $E \, Z_t$, ou dérive de la F.A. intrinsèque est de la forme $t \, M$ pour un $M \in E \, (L^2)$. A toute F.A. intrinsèque nous associerons son demi-variogramme $\gamma(h)$ défini par :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} < Z_h, Z_h >$$

En faisant $t = t'$ dans (2-1), on trouve $Z_o = 0$, d'où $\gamma(o) = 0$. De même, pour $t = - t' = h$, on trouve $U_h \, Z_{-h} + Z_h = 0$, d'où

$$< Z_h, Z_h > = < U_h \, Z_{-h}, U_h \, Z_{-h} > = < Z_{-h}, Z_{-h} >$$

donc :

$$\gamma(h) = \gamma(-h)$$

De (2-1) résulte encore :

$$< Z_{h+h'} , Z_{h+h'} > = < U_h Z_{h'} , U_h Z_{h'} > + < Z_h , Z_h > +$$

$$+ 2 < U_h Z_{h'} , Z_h >$$

d'où l'on tire :

$$< U_h Z_{h'} , Z_h > = \gamma(h+h') - \gamma(h) - \gamma(h')$$

Mais, toujours d'après (2-1), $< U_h Z_{h'}, Z_h > = < Z_{h'} , U_{-h} Z_h > =$ $= - < Z_{h'} , Z_{-h} >$, d'où, en changeant h en -h

(2-3) $$< Z_h, Z_{h'} > = \gamma(h) + \gamma(h') - \gamma(h-h')$$

Enfin, (2-1) entraîne encore :

$$< U_b, Z_{a-b}, Z_c > = < Z_a, Z_c > - < Z_b, Z_c >$$

d'où, en utilisant (2-3) :

(2-3') $$< U_b Z_{a-b}, Z_c > = \gamma(a) + \gamma(b-c) - \gamma(b) - \gamma(a-c)$$

Nous dirons qu'une F.A. intrinsèque Z_t est <u>fortement</u> (resp. faiblement) <u>dérivable</u> si la limite

(2-4) $$Z'_o = \lim_{t \to o} \frac{1}{t} Z_t$$

existe au sens fort (resp. au sens faible). Comme (2-1) entraîne

$$\frac{Z_{t+t'} - Z_t}{t'} = U_t \frac{Z_{t'}}{t'}$$

il suit de cette définition que la dérivée $\dfrac{d\ Z_t}{dt}$ existe effectivement en tout t au sens fort (resp. au sens faible) et vérifie :

(2-4') $$\frac{d}{dt} Z_t = U_t\, Z'_o$$

Remarque : Si A est l'opérateur infinitésimal du groupe U_t, et si la F.A. intrinsèque Z_t admet la dérivée forte $U_t\, Z'_o$, on n'a pas $A\, Z_t = U_t\, Z'_o$, mais :

(2-5) $$A\, Z_t = U_t\, Z'_o - Z'_o$$

Celà résulte de $U_h\, Z_t - Z_t = U_t\, Z_h - Z_h$ (relation (2-1')).

Critère : Du critère de Cauchy et de la relation (2-3'), on déduit qu'une F.A. intrinsèque Z_t est fortement dérivable si et seulement si

$$\lim_{t,t' \to o} \frac{1}{tt'} \left[\, \gamma(t) + \gamma(t') - \gamma(t-t') \,\right] = \gamma''(o)$$

et la dérivée Z'_o admet alors la covariance :

$$< U_h\, Z'_o \,,\, Z'_o > = \gamma''(h)$$

Exemple 1 - Pour $X \in L^2$, $Z_t = U_t X - X$ est une F.A. intrinsèque.
En effet, $Z_{t+t'} = U_{t+t'}X - X = U_t(U_{t'}X - X) + U_t X - X =$

$$= U_t\, Z_{t'} + Z_t$$

Exemple 2 - Pour $Y \in L^2$, $Z_t = \int_o^t U_\tau Y\, d\tau$ est une F.A. intrinsèque fortement dérivable, avec $Z'_o = Y$.

Ce deuxième exemple nous incite à considérer la F.A. intrinsèque Z_t comme la solution (généralisée) de l'équation $AX = Y$.

Ce point de vue n'est légitime que si Z_t est bien de la forme donnée dans l'exemple 1 lorsque l'équation $AX = Y$ admet une solution. Mais il suffit de se reporter à la démonstration de la Proposition 1 pour voir qu'il en est effectivement ainsi.

La notion de dérivée faible n'est pas très intéressante, car <u>toute F.A. intrinsèque faiblement dérivable est fortement dérivable</u>.

En effet, supposons que pour tout $Z \in L^2$ on ait :

$$\frac{1}{t} < Z_t , Z > \rightarrow < Z'_0 , Z >$$

d'où aussi (2-4') au sens faible. Définissons une F.A. intrinsèque S_t en posant :

$$S_t = \int_0^t U_\tau \, Z'_0 \, d\tau$$

S_t est fortement (donc faiblement) dérivable, et

$$\frac{d\,S_t}{dt} = U_t \, Z'_0 = \frac{d\,Z_t}{dt}$$

Pour tout $Z \in L^2$, on a alors :

$$< S_t - Z_t \, , \, Z > = \int_0^t \frac{d}{d\tau} < S_\tau - Z_\tau \, , \, Z > d\tau = 0$$

d'où $S_t = Z_t$, et par suite Z_t est fortement dérivable.

<u>Proposition 3</u> - <u>Pour qu'une F.A. intrinsèque Z_t soit de la forme $U_t X - X$ pour un $X \in L^2$ (nécessairement unique à un élément près de $E(L^2)$) il est</u>

a/ <u>nécessaire que $E\,Z_t = 0$ et que les X_T</u> $= - \frac{1}{T} \int_0^T Z_t \, dt$

convergent fortement, pour T infini, vers une limite X_o.

b/ suffisant que $E\ Z_t = 0$ et que les X_T convergent faiblement vers X_o. La limite faible X_o des X_T est alors nécessairement aussi limite forte, et constitue l'unique élément de L^2 vérifiant $Z_t = U_t\ X_o - X_o$ et $E\ X_o = 0$.

La condition $E\ Z_t = 0$ est évidemment nécessaire, car $E\ U_t = E$. Nous la supposons vérifiée dans toute la démonstration ci-dessous.

Montrons a/ - Si $Z_t = U_t X - X$ pour un $X \in L^2$, on a :

$$X_T = X - \frac{1}{T} \int_o^T U_t X\ dt$$

et le théorème ergodique montre que X_T converge fortement vers $X_o = X - EX$.

Montrons b/ - La relation (2-1') donne :

$$U_t\ X_T - X_T = \frac{1}{T} \int_o^T (Z_\tau - U_t\ Z_\tau)\ d\tau = Z_t - \frac{1}{T} \int_o^T U_\tau\ Z_t$$

Donc $U_t\ X_T - X_T$ converge fortement vers $Z_t - E\ Z_t = Z_t$. Si de plus X_T converge faiblement vers X_o, $U_t\ X_T - X_T$ converge faiblement vers $U_t\ X_o - X_o$, et l'on a donc

$$Z_t = U_t\ X_o - X_o$$

Il en résulte, d'après a/, que la convergence des X_T vers X_o a lieu également au sens fort.

Critère : Une F.A. intrinsèque Z_t est de la forme $U_t X - X$ pour un $X \in L^2$ si et seulement si l'expression :

$$\frac{1}{t\ t'} \int_0^t \int_0^{t'} [\gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)]\ dx\ dy$$

où $\gamma(h) = \frac{1}{2} < Z_h, Z_h >$ admet une limite pour t et t' tendant vers l'infini.

La covariance $K(h) = < U_h X_o, X_o >$ de l'unique élément $X_o \in L^2$ tel que $Z_t = U_t X_o - X_o$ et $E X_o = 0$ est alors :

$$K(h) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [\gamma(t+h) + \gamma(h-t') - \gamma(h) - \gamma(h+t-t')]\ dt\ dt'$$

Ce critère résulte de la Proposition 3, du critère de Cauchy et de la relation (2-3').

Par analogie avec la Proposition 2, on a encore :

Proposition 4 - Pour qu'une F.A. intrinsèque Z_t soit de la forme $U_t X - X$, $X \in L^2$, il est suffisant, et nécessaire si U_t est fortement mélangeant, que $E Z_t = 0$ et que $- Z_t$ admette pour t infini une limite faible X_o, qui est alors l'unique élément de L^2 vérifiant $E X_o = 0$ et $Z_t = U_t X_o - X_o$.

La démonstration est la même que celle de la Proposition 2. On notera que $- Z_t$ ne converge pas fortement vers X_o.

III - F.A. INTRINSEQUES SUR $\mathbb{R}^n$

Nous supposons maintenant L^2 muni d'un groupe continu à n paramètres d'opérateurs unitaires markoviens U_h, $h \in \mathbb{R}^n$, et nous appelons F.A. intrinsèque une famille Z_h, $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant la relation

$$(3\text{-}1) \qquad Z_{h+h'} = U_h Z_{h'} + Z_h \qquad (h, h' \in \mathbb{R}^n)$$

On vérifie sans peine que les relations (2-1') à (2-3') restent valables. De même, on définira sans peine la notion de dérivée partielle forte selon une coordonnée h_i en posant :

$$(3\text{-}2) \qquad Z_i' = \ell im \frac{1}{h_i} Z_{(h_i)}$$

(h_i) désignant le vecteur $(h_1, h_2, \ldots h_n)$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf la $i^{\text{ème}}$ qui est h_i : dans cette notation, <u>l'indice h_i est toujours muet</u>. Si Z_i' existe, on vérifie sans peine que la dérivée partielle $\partial_i Z_h$ selon la coordonnée h_i existe pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et vaut :

$$(3\text{-}2') \qquad \partial_i Z_h = U_h Z_i'$$

Z_h est alors dans $\mathcal{D}_{A_i}$ et on a :

$$(3\text{-}3) \qquad A_i Z_h = U_h Z_i' - Z_i'$$

de sorte que $A_i Z_h$ est la F.A. intrinsèque associée à l'élément $Z_i' \in L^2$ comme dans l'exemple 1 du paragraphe précédent.

Si les n dérivées partielles existent, on dira que le vecteur (Z_i') est le <u>gradient</u> de la F.A. intrinsèque Z_h. Nous désignerons par $H = \underset{n}{\oplus} L^2$ l'espace de Hilbert des vecteurs $(Y_1,\ldots Y_n)$, $Y_i \in L^2$ muni de la norme canonique $\sum_i \|Y_i\|^2$. Pour plus de commodité, nous distinguerons des vecteurs covariants (Y_i) et des vecteurs contravariants (Y^i) avec $Y_i = g_{ij}\, Y^j$, $Y^j = g^{ji}\, Y_i$, la norme étant alors $g^{ij} < Y_i, Y_j >$ ou $g_{ij} < Y^i, Y^j >$ (g, matrice strictement définie positive, que l'on peut si l'on veut, prendre égale à la matrice unité). Ces notations tensorielles se révèleront assez commodes. Elles impliquent la convention de sommation. Nous devons envisager les problèmes suivants : à quelles conditions

~ Z_h est-elle de la forme $U_h X - X$, pour un $X \in L^2$?

~ un vecteur covariant (Y_i) donné est-il le gradient d'une F.A. intrinsèque Z_h ?

~ pour un vecteur (Y_i) donné, les équations $A_i X = Y_i$ ($i = 1,2,\ldots n$) admettent-elles des solutions $X \in L^2$? $A = (A_1,\ldots A_n)$ désigne ici le générateur infinitésimal du groupe U_h.

Proposition 5 - Une F.A. intrinsèque Z_h, $h \in \mathbb{R}^n$, est de la forme $U_h X - X$ pour un $X \in L^2$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

a/ $E\, Z_h = 0$.

b/ Pour un indice $i = i_o$ particulier, les

$$X^{i_o}(T) = -\frac{1}{T}\int_0^T Z_{(h^{i_o})}\, dh^{i_o} \quad \text{(sans sommation en } i_o\text{)}$$

admettent pour T infini une limite faible X_o qui est alors le seul élément de L^2 vérifiant $Z_h = U_h\, X_o - X_o$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $E\, X_o = 0$.

Lorsque ces conditions sont réalisées, pour tout vecteur unitaire α de $\mathbb{R}^n$, les intégrales

$$X_\alpha(T) = -\frac{1}{T}\int_o^T Z_{r\alpha}\, dr$$

<u>convergent alors fortement vers la même limite X_o.</u>

La proposition 3 montre que ces conditions sont nécessaires. Supposons-les vérifiées, soit $E\,Z_h = 0$ et, par exemple

$$X_T = -\frac{1}{T}\int_o^T Z_{(h^1)}\, dh_1 \quad , \quad \lim_{T\to\infty} X_T = X_o \text{ (au sens faible)}$$

La proposition 3 montre que la convergence de X_T vers X_o a lieu aussi au sens fort, et que l'on a :

$$Z_{(h^1)} = U_{(h^1)}\, X_o - X_o$$

Posons alors pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$S_h = U_h\, X_o - X_o$$

S_h est limite forte de $U_h\, X_T - X_T$ pour T infini. Mais, d'après (2-1'), on a :

$$U_h\, X_T - X_T = \frac{1}{T}\int_o^T (Z_{(h^1)} - U_h\, Z_{(h^1)}\, dh^1 = Z_h - \frac{1}{T}\int_o^T U_{(h^1)}\, Z_h\, dh^1$$

et, pour T infini, cette expression admet la limite forte $Z_h - E\,Z_h = Z_h$. On a donc bien

$$Z_h = S_h = U_h\, X_o - X_o$$

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 3 au demi-groupe $P_r = U_{r\alpha}$ et à la F.A. intrinsèque $Z_{r\alpha} = U_{r\alpha}X_o - X_o$, $r \in \mathbb{R}_+$, pour obtenir la dernière partie de l'énoncé.

Les propositions 4 et 5 entraînent alors :

Corollaire : Pour que la F.A. intrinsèque Z_h soit de la forme $U_h X - X$ pour un $X \in L^2$, il est suffisant, et nécessaire si $U_{r\alpha_o}$ est fortement mélangeant, que $Z_{r\alpha_o}$ converge faiblement vers une limite $- X_o$ pour une direction α_o particulière. X_o est alors l'unique élément de L^2 vérifiant $E\, X_o = 0$ et $Z_h = U_h X_o - X_o$, $X_o \in \mathbb{R}^n$. Si, de plus, chacun des groupes à un paramètre $U_{(h^i)}$, $i = 1,2,\ldots n$ est fortement mélangeant, X_o est limite faible des $- Z_{r\alpha}$ pour toutes les directions α.

Lemme 2 - Soient $Z_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\ldots n$, n F.A. intrinsèques à une dimension, relatives respectivement aux groupes à 1 paramètre $U_{(h^i)}$. Pour qu'il existe une F.A. intrinsèque sur $\mathbb{R}^n$, Z_h, $h \in \mathbb{R}^n$ relative au groupe U_h vérifiant $Z_{(h^i)} = Z_i(h^i)$ pour tout i, il faut et il suffit que l'on ait

$$(3\text{-}4) \qquad U_{(h^i)}\, Z_j(h^j) + Z_i(h^i) = U_{(h^j)}\, Z_i(h^i) + Z_j(h^j)$$

pour tout couple d'indices i, j distincts.

En effet, cette relation, évidemment nécessaire, entraîne en écrivant Z_{i_k} au lieu de $Z_{i_k}(h_{i_k})$, que l'expression :

$$Z_h = Z_{i_1} + U_{(h_{i_1})} Z_{i_2} + \ldots + U_{(h_{i_1})}\, U_{(h_{i_2})} \cdots U_{(h_{i_n})}\, Z_{i_n}$$

ne dépend pas de l'ordre dans lequel on a pris les coordonnées $h_1, h_2, \ldots h_n$ du vecteur h, et on vérifie ensuite sans trop de peine que la relation (3-1) en résulte.

Proposition 6 - Un vecteur covariant $(Y_i) \in H$ est le gradient d'une F.A. intrinsèque Z_h si et seulement si la relation suivante est vérifiée pour tout couple $i \neq j$ et tout $h^i > 0$.

(a) $$U_{(h^i)} Y_j - Y_j = A_j \int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta_i \quad \text{(sans sommation en i)}$$

Si chacun des Y_j est dans $\mathcal{D}_A = \bigcap_i \mathcal{D}_{A_i}$, cette condition équivaut à :

(a') $$A_i Y_j = A_j Y_i \qquad (i,j = 1,2,\ldots n,\ i \neq j)$$

<u>Lorsque cette condition est réalisée, la F.A. intrinsèque Z_h dont Y_i est le gradient est définie par l'intégrale curviligne</u>

(b) $$Z_h = \int_0^1 U_{h(t)} Y_i \frac{d\,h^i(t)}{dt} \, dt$$

<u>indépendante du choix du chemin continu $h(t)$ joignant 0 et h et vérifiant $h(o) = 0$, $h(1) = h$.</u>

Montrons que la condition (a) est nécessaire. Si Y_i est le gradient de Z_h, on a pour chaque $i = 1,2,\ldots n$:

(c) $$Z_{(h^i)} = \int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta^i \quad \text{(sans sommation)}$$

et le lemme 1 montre qu'il en résulte :

(d) $$U_{(h^j)} \int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta^i + \int_0^{h^j} U_{(\eta^j)} Y_j \, d\eta^j =$$

$$= U_{(h^i)} \int_0^{h^j} U_{(\eta^j)} Y_j \, d\eta^j + \int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta^i$$

(sans sommation en i ni en j). Le second membre de (d) est dérivable en h^j, donc aussi le premier, d'où

$$\int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta_i \in \mathcal{D}_{A_j}$$

En faisant $h^j = 0$ après dérivation en h^j dans les deux membres de (d), on obtient la relation (a).

Inversement, si (a) est vérifié, on en déduit (d) en intégrant en η_j après avoir multiplié par $U_{(\eta^j)}$ les deux membres de (a). Le lemme 2 montre alors qu'il existe une F.A. intrinsèque Z_h vérifiant (c), donc aussi

$$\lim_{h^i \to 0} \frac{1}{h^i} Z_{(h^i)} = Y_i$$

Si $Y_j \in \mathcal{D}_{A_i}$, la relation (a) entraîne :

$$A_i Y_j = \lim_{h_i \to 0} \frac{U_{(h^i)} Y_j - Y_j}{h^i} = \lim_{h_i \to 0} A_j \frac{1}{h^i} \int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta^i$$

Comme l'opérateur A_j est fermé, il en résulte $Y_i \in \mathcal{D}_{A_j}$ et $A_i Y_j = A_j Y_i$. En particulier, on a (a') si (a) est vérifiée et si tous les Y_i sont dans $\mathcal{D}_A$. Inversement, il est clair que (a') entraîne (a).

La relation (b), et le fait que l'intégrale curviligne ne dépende pas du choix du chemin continu reliant 0 et h se déduisent ensuite facilement de (d).

Les propositions 1 et 2 permettent de préciser :

Critère : Pour qu'un vecteur covariant $Y_i \in H$ soit le gradient d'une F.A. intrinsèque Z_h, il faut et il suffit que, pour tout couple $i \neq j$ et tout $h^i > 0$ les :

$$X_T^j (h^i) = - \frac{1}{T} \int_0^T (T-h^j) \, U_{(h^j)} \, (U_{(h^i)} Y^j - Y^j) \, d\, h^j$$

convergent faiblement vers $\int_0^{h^i} U_{(\eta^i)} Y_i \, d\eta^i$ - et cette

convergence a lieu alors également au sens fort.
De même, il est suffisant, et nécessaire si chacun des groupes $U_{(h^i)}$ est fortement mélangeant, que les intégrales

$$- \int_o^T U_{(h^i)} (U_{(h^i)} Y_j - Y_j) \, d\, h^j$$

admettent ces mêmes limites faibles.

<u>L'espace $\tilde{H}_\partial$ des gradients généralisés</u>. - Nous dirons qu'un vecteur covariant $(Y_i) \in H$ est un gradient généralisé s'il est le gradient d'une F.A. intrinsèque - et nous désignerons par $\tilde{H}_\partial$ le sous-espace de H constitué par les gradients généralisés.

<u>Proposition 7</u> - <u>L'espace $\tilde{H}_\partial$ des gradients généralisés est fermé dans H, et constitue un espace de Hilbert</u>.

En effet, les opérateurs A_j étant fermés, on vérifie immédiatement que les conditions (a) de la proposition 6 passent à la limite.

Parmi les gradients généralisés (espace $\tilde{H}_\partial$), certains seront <u>des gradients au sens strict</u> (espace H_∂), c'est-à-dire, de la forme $Y_i = A_i X$ pour un $X \in L^2$, d'autres encore <u>des gradients au sens large</u> (espace $\bar{H}_\partial$) c'est-à-dire limite dans L^2 de gradients au sens strict - d'autres enfin ne seront pas dans $\bar{H}_\partial$ - Pour préciser la hiérarchie de ces espaces, nous allons maintenant étudier l'équation $Y_i = A_i X$.

IV - LES EQUATIONS $A_i X = Y_i$, ET LES ESPACES DE GRADIENTS $H_\partial \subset \bar{H}_\partial \subset \tilde{H}_\partial$

Les propositions 5 et 6 permettent de caractériser les gradients au sens strict :

Proposition 8 - Un vecteur covariant $(Y_i) \in H$ est le gradient d'un élément $X \in L^2$ (nécessairement unique à un élément près invariant par U_h) si et seulement si il vérifie les 3 conditions suivantes :

a/ $E\, Y_i = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots n)$

b/ Pour tout couple $i \neq j$ et tout $h^i > 0$, on a

$$U_{(h_i)}\, Y_j - Y_j = A_j \int_0^{h_i} U_{(\eta_i)}\, Y_i\, d\,\eta_i \quad \text{(sans sommation)}$$

c/ Pour une direction particulière α_o, les

$$X_T(\alpha_o) = -\frac{1}{T} \int_0^T (T-t)\, U_{t\alpha_o}\, (\alpha_o^i\, Y_i)\, dt$$

convergent faiblement vers une limite X_o.

Lorsque ces conditions sont réalisées, X_o est l'unique élément de L^2 vérifiant $E\, X_o = 0$ et $A_i\, X_o = Y_i$. De plus, pour toute direction α, les $X_T(\alpha)$ convergent alors fortement vers X_o.

Si chaque Y_j est dans $\mathcal{D}_A = \bigcap_j \mathcal{D}_{A_j}$, on peut remplacer b/ par la condition :

b'/ $A_i\, Y_j = A_j\, Y_i \qquad (i, j = 1,2,\ldots n)$

De même, les conditions suivantes sont suffisantes, et nécessaires si chacun des groupes à un paramètre $U_{(h^i)}$ est fortement mélangeant :

a/ $E\ Y_i = 0 \qquad (i = 1,2,\dots n)$

b/ Pour chaque couple $i \neq j$ et chaque $h^i > 0$

$$- \int_0^T U_{(h^j)} \left(U_{(h^i)} Y_j - Y_j \right) d\, h^j \qquad \text{(sans sommation)}$$

converge faiblement vers $\int_0^{h^i} U_{(\eta^i)}\ Y_i\ d\ \eta^i$ (sans sommation)

c/ Pour une direction α_o, $- \int_0^T U_{t\alpha_o} (\alpha_o^i\ \ Y_i)\ dt$ converge faiblement vers une limite X_o, qui est alors l'unique solution vérifiant $E\ X_o = 0$.

L'espace $H_\partial \subset H$ des <u>gradients stricts</u> (vecteurs $Y \in H$ dont les composantes covariantes Y_i vérifient $Y_i = A_i\ X$ pour un $X \in L^2$) n'est pas fermé dans H, la condition c/ de la proposition 8 ne passant pas, en général, à la limite. Comme la condition b/ de la proposition 8 est identique à la condition a/ de la proposition 6, on a $H_\partial \subset \tilde{H}_\partial$, d'où aussi $\overline{H}_\partial \subset \tilde{H}_\partial$, puisque $\tilde{H}_\partial$ est fermé dans H (Proposition 7). <u>Tout gradient au sens large</u> $Y \in \overline{H}_\partial$ <u>est donc un gradient généralisé</u> ($Y \in \tilde{H}_\partial$) <u>et vérifie de plus $EY = 0$</u>. Nous allons voir que <u>la réciproque est vraie</u>.

Définissons d'abord dans H <u>l'opérateur divergence</u>, en posant $\operatorname{div} Y = A_i Y^i$ pour tout $Y \in H$ dont les composantes contravariantes Y^i vérifient

$$Y^i \in \mathcal{D}_{A_i} \qquad (i = 1,2,\dots n)$$

Pour tout $X \in \mathcal{D}_A \subset L^2$ et tout vecteur $Y \in \mathcal{D}_{\operatorname{div}} \subset H$, on a évidemment :

$$(4\text{-}1) \qquad < AX,\ Y > \ = \ < A_i X,\ Y^i > \ = - < X,\ A_i\ Y^i > \ = - < X,\ \operatorname{div} Y>$$

de sorte que l'opérateur gradient A et l'opérateur divergence div sont adjoints au signe près. L'opérateur A est dense et fermé, donc aussi A^*. Par contre, l'opérateur divergence est dense mais non fermé en général. Comme $-A^*$ est fermé et prolonge div, l'opérateur divergence admet une fermeture que nous noterons Div et qui admet généralement $-A^*$ comme prolongement. On a donc $\mathcal{D}_{div} \subset \mathcal{D}_{Div} \subset \mathcal{D}_{A^*} \subset H$. Le problème qui se pose est de savoir si $\mathcal{D}_{Div} = \mathcal{D}_{A^*}$ et si par suite $\mathrm{Div} = -A^*$. Montrons qu'il en est bien ainsi. Soit, en effet, $Y \in \mathcal{D}_{A^*}$. En prenant une suite φ_k de fonctions indéfiniment dérivables définies sur $\mathbb{R}^n$, et telles que les mesures $\varphi_k(x)\,dx$ convergent étroitement vers la mesure de Dirac, les régularisées

$$Y_k = \int_{\mathbb{R}^n} U_h Y \, \varphi_k(h) \, dh$$

sont dans $\mathcal{D}_{div} \subset \mathcal{D}_{Div}$, convergent fortement vers Y, vérifient

$$- A^* Y_k = \mathrm{Div}\, Y_k = \mathrm{div}\, Y_k = -\int_{\mathbb{R}^n} U_h \, A^*Y \, \varphi_k(h) \, dh$$

de sorte que div Y_k converge aussi vers $-A^* Y$. Comme les opérateurs A^* et Div sont fermés, il en résulte que $Y \in \mathcal{D}_{Div}$ et $\mathrm{Div}\, Y = -A^* Y$. On a donc bien $\mathcal{D}_{A^*} \subset \mathcal{D}_{Div}$ et l'égalité :

$$(4\text{-}2) \qquad - A^* = \mathrm{Div}$$

Convenons maintenant de dire qu'un vecteur $Y \in H$ est <u>conservatif au sens strict</u> si $Y \in \mathcal{D}_{div}$ et $\mathrm{div}\, Y = A_i Y^i = 0$, et <u>conservatif au sens large</u> si $Y \in \mathcal{D}_{Div}$ et $\mathrm{Div}\, Y = 0$. Comme Div est la fermeture de div, tout vecteur conservatif S.L. est limite de vecteurs conservatifs S.S., et l'espace des vecteurs conservatifs S.L. est <u>fermé</u> dans H. Comme $\mathrm{div}\, Y = 0$ équivaut d'après (4-1) à $Y \in H_\partial^\perp$ et $Y \in \mathcal{D}_{div}$, on en déduit :

$$(4\text{-}3) \qquad \mathrm{Div}\, Y = 0 \Leftrightarrow Y \in H_\partial^\perp$$

<u>et l'espace des vecteurs conservatifs S.L. est le supplémentaire orthogonal de l'espace des gradients S.L.</u>

<u>Proposition 9</u> - <u>Pour tout gradient généralisé $G \in \tilde{H}_\partial$ de composantes covariantes G_i et tout vecteur conservatif S.L. $Q \in H_\partial^\perp$ de composantes contravariantes Q^i, on a la relation "énergétique"</u>:

$$< G_i, Q^i > = < E (G_i), E (Q^i) > \tag{4-4}$$

En effet, soit Z_h la F.A. intrinsèque dont G_i est le gradient. Comme $Q \in H_\partial^\perp$, la relation (3-3') entraîne pour tout h :

$$< G_i, Q^i > = < U_h G_i, Q^i >$$

donc aussi, pour chaque coordonnée h^j :

$$< G_i, Q^i > = \frac{1}{h^j} \int_0^{h^j} < U_{(\eta^j)} G_i, Q^i > d\, \eta^j \qquad \text{(sans sommation en j)}$$

D'où, E_j désignant le projeteur de $\{A_j X = 0\}$,

$$< G_i, Q^i > = < E_j G_i, Q^i >$$

En répétant l'opération pour $j = 1,2,\dots n$, et puisque $E = E_1, E_2 \dots E_n$, on trouve $< G_i, Q^i > = < E G_i, Q^i >$, d'où :

$$< G_i, Q^i > = < E G_i, E Q^i >$$

Dans le cas où U_h est ergodique, $E G_i = E(G_i)$ est l'espérance, et on a simplement

$$< G_i, Q^i > = E(G_i) E(Q^i)$$

Proposition 10 - *Pour qu'un vecteur $X \in H$ soit un gradient au sens large, il faut et il suffit qu'il soit un gradient généralisé et vérifie $EY = 0$. Autrement dit :*

$$\bar{H}_{\partial} = \tilde{H}_{\partial} \cap E(H)^{\perp} \tag{4-5}$$

On a déjà vu que la condition est nécessaire. Inversement, soit $Y \in \tilde{H}_{\partial}$ avec $EY = 0$. D'après (4-4), on a $< Y,Q > = < Y_i,Q^i >$ $= 0$ pour tout $Q \in H_{\partial}^{\perp}$, mais ceci entraîne justement $Y \in \bar{H}_{\partial}$.

Corollaire : *Tout gradient généralisé $Y \in \tilde{H}_{\partial}$ est somme de l'élément $E\,Y \in E(H)$ et de l'élément $Y - EY \in \bar{H}_{\partial}$ qui est un gradient au sens large, autrement dit $\tilde{H}_{\partial}$ est somme directe de $\bar{H}_{\partial}$ et de $E(H)$:*

$$\tilde{H}_{\partial} = \bar{H}_{\partial} \oplus E(H) \tag{4-5'}$$

V - L'OPERATEUR LAPLACIEN, ET L'EQUATION $\Delta X = Y$.

Soit $\Delta = AA = g^{ij} A_i A_j$ l'opérateur de Laplace, et $\mathcal{D}_\Delta$ son domaine dans L^2. $\mathcal{D}_\Delta$ est dense dans L^2, comme on le voit au moyen du procédé habituel de régularisation, et l'opérateur Δ est auto-adjoint. Il n'est pas nécessairement fermé, mais Δ^* (qui existe, puisque Δ est dense) prolonge Δ (qui est auto-adjoint), et constitue un opérateur fermé. On a $\Delta = (\mathrm{div})\, A$, d'où, d'après (4-2) :

$$\Delta^* = A^* (\mathrm{div})^* = A^* (\mathrm{Div})^* = (\mathrm{Div}) A^{**} = (\mathrm{Div}) A$$

soit :

$$\Delta^* = (\mathrm{Div}) A \tag{5-1}$$

d'où résulte, en particulier que Δ^* est la fermeture de Δ (et constitue un opérateur dense et fermé).

Pour $X \in \mathcal{D}_{\Delta^*}$, $\Delta^* X = 0$ équivaut à $< X, \Delta Y > = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{D}_\Delta$, c'est-à-dire à $X \in \Delta (\mathcal{D}_\Delta)^\perp$. D'autre part, si $X \in \mathcal{D}_\Delta$, $\Delta X = 0$ entraîne

$$< X, \Delta X > = - g^{ij} < A_i X, A_j X > = 0$$

donc $A_i X = 0$ et $X = EX$, E désignant le projecteur de l'espace des éléments invariants par U_h (en particulier, $X = C^{ste}$ dans le cas ergodique). Or $\mathcal{D}_\Delta$ est dense dans $\mathcal{D}_{\Delta^*}$ (puisque Δ^* est la fermeture de l'opérateur Δ). On a donc encore $X = EX$ pour $X \in \mathcal{D}_{\Delta^*}$ et $\Delta^* X = 0$.

Proposition 11 - Dans L^2, $\Delta^* X = 0$ équivaut à $X = EX$, ou à $U_h X = X$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Autrement dit, on a :

$$E(L^2) = \Delta^* (\mathcal{D}_{\Delta^*}) = \Delta (\mathcal{D}_\Delta)^\perp$$

<u>En particulier, dans le cas ergodique, toute F.A. stationnaire harmonique est une constante.</u>

Corollaire : <u>Si l'équation $\Delta X = Y$, pour $Y \in L^2$ admet une solution forte ou faible dans L^2, cette solution est unique à un élément près invariant par U_h (à une constante près dans le cas ergodique). En particulier, il existe au plus une solution vérifiant $EX = 0$.</u>

Celà résulte immédiatement de la proposition 11 si l'on remarque que X est solution faible si et seulement si $X \in \mathcal{D}_{\Delta^*}$ et $\Delta^* X = Y$.

Pour étudier commodément l'opérateur Laplacéen, nous allons construire un <u>demi-groupe continu markovien à un paramètre sur L^2 dont l'opérateur infinitésimal sera Δ^*</u>. Pour celà, nous allons randomiser U_h au moyen du mouvement brownien, en posant pour tout $X \in L^2$

$$(5\text{-}2) \qquad P_t X = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{2t}} U_x X \, dx$$

($x^2 = g_{ij}\, x^i x^j$). $P_t X$ n'est autre aue la régularisée de X par la densité de Gauss, d'où résulte $P_t X \in \mathcal{D}_\Delta$ pour tout $X \in L^2$ et tout $t > 0$. On vérifie sans peine que P_t est bien un demi-groupe continu vérifiant $\|P_t\| = 1$ et $P_t 1 = 1$. Désignons par B son générateur infinitésimal, qui est dense et fermé. Pour $X \in \mathcal{D}_B$ et $Y \in L^2$, posons $f(x) = \langle U_x X, Y \rangle$. On a évidemment

$$\langle BX, Y \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{nn}{2}}} [f(x)-f(o)]\, dx$$

Du fait que cette limite existe, on déduit que f(x) est dans le domaine du générateur $\frac{1}{2} \Delta_{\mathbb{R}^n}$ du mouvement brownien ($\Delta_{\mathbb{R}^n}$ désignant le Laplacéen dans $\mathbb{R}^n$). Ainsi :

$$< BX, Y > = \frac{1}{2} \Delta_{\mathbb{R}^n} < U_x X, Y > (0)$$

Pour $Y \in \mathcal{D}_\Delta$ (ce qui suffit pour définir B, puisque $\mathcal{D}_\Delta$ est dense) ceci s'écrit plus simplement :

$$< BX, Y > = \frac{1}{2} < X, \Delta Y > \quad (X \in \mathcal{D}_B, Y \in \mathcal{D}_\Delta)$$

Par définition de Δ^*, cette relation entraîne $X \in \mathcal{D}_{\Delta^*}$ et $BX = \Delta^* X$. Ainsi Δ^* prolonge B. Mais on a vu que Δ^* est la fermeture de Δ, et d'autre part B est fermé, comme opérateur infinitésimal du demi-groupe continu P_t, et prolonge Δ. Il en résulte $\mathcal{D}_B = \mathcal{D}_{\Delta^*}$ et $B = \frac{1}{2} \Delta^*$: <u>le générateur infinitésimal du demi-groupe P_t est $\frac{1}{2} \Delta^*$</u>.

Remarquons aussi que <u>le demi-groupe P_t est fortement mélangeant dès que U_h est lui-même fortement mélangeant</u> (en ce sens que $|h| \to \infty$ entraîne $< U_h X, Y > \to < X, 1 > < 1, Y >$ pour $Y, Y \in L^2$). En effet, si U_h est fortement mélangeant, la <u>mesure spectrale</u> associée à tout couple (X,Y) vérifiant $EX = EY = 0$ admet une <u>densité</u> $\Phi_{X,Y}(u)$ par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, de sorte que $< P_t X, Y >$, égal à l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t}{2} u^2} \Phi_{X,Y}(u) \, du$$

tend vers 0 pour t infini - d'où l'on déduit aussitôt que P_t est fortement mélangeant.-

En fait, il suffit même de supposer U_h <u>faiblement mélangeant</u> pour que P_t soit fortement mélangeant. Dans ce cas, en effet, la mesure spectrale $\mu_{X,Y}(du)$ associée à (X,Y), est <u>diffuse</u>, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t}{2}u^2} \mu_{X,Y}(du)$$

converge vers $\mu(\{o\}) = 0$

Compte tenu de ces propriétés du groupe P_t, les propositions 1 et 2 permettent de caractériser les solutions de $\Delta X = Y$.

<u>Proposition 12</u> - Soit $Y \in L^2$ pour que l'équation $\Delta^* X = Y$ admette une solution dans L^2 (ou, ce qui revient au même, pour que l'équation $\Delta X = Y$ admette une solution faible dans L^2) il est :

a/ nécessaire que $EY = 0$ et que les

$$X_T = -\frac{1}{2T}\int_0^T (T-t)\, P_t\, Y\, dt$$

convergent fortement vers une limite X_o pour T infini.

b/ Suffisant que $EY = 0$ et que les X_T convergent faiblement vers une limite X_o. La limite faible X_o est alors nécessairement aussi limite forte, et constitue l'unique solution vérifiant $E\, X_o = 0$.

c/ suffisant, et nécessaire si le groupe U_h est faiblement mélangeant, que $EY = 0$ et que les

$$Z_t = \frac{1}{2}\int_0^t P_\tau\, Y\, d\tau$$

admettent une limite faible $- X_o$ pour t infini : X_o est alors l'unique solution vérifiant $E\, X_o = 0$.

En vue de rendre plus maniable le critère c/ de la proposition 12, nous allons nous placer dans l'hypothèse (probablement plus forte qu'il n'est réellement nécessaire, mais qui sera vérifiée dans la plupart des applications à des problèmes physiques) où le groupe U_h est <u>fortement mélangeant</u>, et essayer de caractériser la limite faible X_o des $- Z_t$.

Sous forme faible, Z_t est caractérisé par les

$$< Z_t, Z > = \frac{1}{2}\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\tau}}}{(2\pi\tau)^{\frac{n}{2}}} < U_x Y, Z > dx \ , \quad Z \in L^2$$

U_h étant fortement mélangeant, désignons par $\Phi_{Y,Z} = \Phi$ la <u>densité</u> de la mesure spectrale associée à $< U_h Y, Z >$. On a :

$$\frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{x^2}{2t}} < U_x Y, Z > dx = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t}{2}u^2} \Phi_{Y,Z}(u)\, du$$

et par suite :

$$(5\text{-}3) \qquad < Z_t, Z > = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}u^2}}{u^2} \Phi_{Y,Z}(u)\, du$$

Supposons que les Z_t admettent la limite faible $- X_o$. Il n'est pas évident que le passage à la limite $t \to \infty$ sous le signe somme soit justifié en (5-3), et nous devons emprunter un détour. Posons

$$K(h) = < U_h X_o, Z > , \quad C(h) = < U_h Y, Z >$$

On trouve, comme ci-dessus

$$< U_h Z_t, Z > = \frac{1}{2} \int_0^t dt \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{(x-h)^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} C(x)\, dx$$

et on en déduit que $< U_h Z_t, Z >$, considéré comme fonction de h, est transformée de Fourier de

(5-4) $$\mathfrak{F}_h < U_h Z_t, Z > = \frac{1 - e^{-\frac{t}{2}u^2}}{u^2} \Phi(u)$$

D'après la Proposition 12, les $X_T = -\frac{1}{T}\int_0^T Z_t \, dt$ convergent <u>fortement</u> vers X_o, de sorte que la convergence des

$$\frac{1}{T}\int_0^T < U_h Z_t, Z > dt$$

vers $-K(h)$ a lieu <u>uniformément</u> en h. Or, d'après (5-4) :

(5-4') $$\frac{1}{T}\mathfrak{F}_h \int_0^T < U_h Z_t, Z > dt = \frac{Tu^2 - 2 + 2e^{-\frac{T}{2}u^2}}{T u^4} \Phi(u)$$

Comme $\frac{1}{T}\int_0^T < U_h Z_t, Z > dt$ converge uniformément vers $-K(h)$, la mesure admettant comme densité le second membre de (5-4') convege au sens vague vers la mesure $-\chi(du)$ dont $-K(h)$ est la transformée de Fourier. Cette mesure admet d'ailleurs une <u>densité</u> $\chi(u)$ relativement à la mesure de Lebesgue, puisque U_h est fortement mélangeant. La convergence vague de la mesure de densité (5-4') entraîne donc pour toute fonction φ continue à support compact disjoint de $\{o\}$:

$$-\int \varphi(u)\, \chi(u)\, du = \int \frac{1}{u^2} \Phi(u)\, \varphi(u)\, du$$

On a donc $\chi(u) = -\frac{1}{u^2}\Phi(u)$ presque partout sur $\mathbb{R}^n - \{o\}$ - donc presque partout sur $\mathbb{R}^n$, et $-\frac{1}{u^2}\Phi(u)\,du$ est la mesure spectrale associée à $K(h)$. En désignant par α le potentiel newtonien ($\Delta\alpha + \delta = 0$ au sens des distributions), le produit de convolution $\alpha * C$ peut être défini au sens des distributions, et on a :

(5-4") $$K = -\alpha * C$$

et, puisque $K(0) = < X_o, Z >$, toujours au sens des distributions

$$< X_o, Z > = - \int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x)\ C(x)\ dx$$

Ainsi :

<u>Proposition 13</u> - U_h étant fortement mélangeant, la solution faible de $\Delta X = Y$ vérifiant $EX = 0$ (lorsqu'elle existe) est définie par

$$K = - \alpha * C$$

($K(h) = < U_h X_o, Z >$, $C(h) = < U_h Y, Z >$, $Z \in L^2$), le produit de convolution étant à prendre au sens des distributions.

VI - EXPRESSION DU PROJECTEUR Π_∂ DE L'ESPACE DES GRADIENTS $\overline{H}_\partial$

On a vu que l'espace des vecteurs $Y \in H$ conservatifs S.L. est l'orthogonal $H_\partial^\perp$ de l'espace des gradients. Si Π_∂ et $\Pi_\partial^\perp$ désignent les projecteurs de $\overline{H}_\partial$ et $H_\partial^\perp$, tout vecteur $Y \in H$ se met donc, d'une manière unique, sous la forme :

$$(6\text{-}1) \qquad Y = G + Q \quad , \quad G \in \overline{H}_\partial \quad , \; Q \in H_\partial^\perp$$

avec $G = \Pi_\partial Y$ et $Q = \Pi_\partial^\perp\, Y$. Nous allons essayer d'expliciter l'expression de cette composante $G = \Pi_\partial Y$ de Y dans l'espace des gradients.

Plaçons-nous, pour commencer, dans le cas où chacune des composantes Y_i de Y est dans $\mathcal{D}_\Delta$. Les projecteurs Π_∂ et $\Pi_\partial^\perp$ commutent avec U_h et sont continus. Il en résulte que les composantes de G et Q sont également dans $\mathcal{D}_\Delta$. D'après la proposition 10, on a $EG = 0$, et il existe une F.A. intrinsèque Z_h dont G est le gradient : $U_h\, G_i = \partial_i\, Z_h$. De (6-1) résulte alors :

$$U_h\, Y^j = g^{ij}\, \partial_i\, Z_h + U_h\, Q^j$$

Comme Q est conservatif, $\mathrm{Div}\,(U_h Y - U_h Q) = \mathrm{Div}\, U_h Y = \mathrm{div}\, U_h Y$, (puisque $Y \in \mathcal{D}_\Delta$), donc $\partial\, Z_h \in \mathcal{D}_{\mathrm{div}}$ et, compte tenu de (3-3') :

$$U_h\, A_j\, Y^j = \Delta\, Z_h + A^i\, G_i$$

Mais $Y \in \mathcal{D}_\Delta$ entraîne que le premier membre (donc aussi le second) de cette relation est encore dans $\mathcal{D}_{A_i}$. Comme A_i commute avec Δ et vérifie $A_i\, Z_h = U_h\, G_i - G_i$, on trouve ainsi :

$$U_h\, A_i\, A_j\, Y^j = \Delta\, U_h\, G_i - \Delta\, G_i + A_i\, A_j\, G^j$$

Or, la condition (a') de la Proposition 6 donne $A_i\, G_j = A_j\, G_i$, d'où : $A_i A^j G_j = A^j A_i G_j = A^j A_j G_i = \Delta G_i$, et par suite

$$U_h A_i A_j Y^j = \Delta U_h G_i \tag{6-2}$$

Pour h tendant vers 0, le premier membre de (6-2) converge vers $A_i A_j Y^j$, et $U_h G_i$ vers G_i. L'opérateur Δ admettant la fermeture Δ^*, on en déduit que $\Delta U_h G_i$ converge vers $\Delta^* G_i$. On a donc :

$$\Delta^* G_i = A_i A_j Y^j = A_i \operatorname{div} Y \tag{6-3}$$

Nous sommes ainsi ramenés à l'équation de Laplace étudiée au paragraphe précédent, avec cet avantage que nous savons a priori que la solution $G_i = \Pi_\partial Y_i$ existe, et qu'elle est même fortement continue en Y_i.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où U_h est <u>fortement mélangeant</u>, et, compte tenu des résultats précédents, cherchons la caractérisation faible du gradient G_i. Pour $Z \in L^2$, posons :

$$\begin{cases} < U_h G_i, Z > = K_i(h) \\ < U_h Y^j, Z > = C^j(h) \end{cases}$$

et désignons par $\chi_i(u)$ et $\Phi^j(u)$ les <u>densités</u> des mesures spectrales associées à K_i et à C^j. La fonction $< U_h A_i A_j Y^j, Z >$ admet alors la mesure spectrale de densité $- U_i U_j \Phi^j(u)$, et les résultats du paragraphe précédent montrent que les mesures $\chi_i(u)$ du et

$$\frac{U_i U_j}{|U|^2} \Phi^j (u) du$$

coïncident sur $\mathbb{R}^n - \{o\}$, donc aussi sur $\mathbb{R}^n$. Comme la fonction $\frac{U_i U_j}{|U^2|}$ est bornée, on a presque partout dans $\mathbb{R}^n$:

(6-4) $$\chi_i (u) = \frac{U_i U_j}{|U|^2} \Phi^j (u)$$

et on en déduit :

(6-4') $$K_i = - \partial_{ij} \alpha * C^j$$

le produit de convolution étant à prendre au sens des distributions. En particulier $< G_i, Z > = K_i (o)$ est la valeur en 0 de ce produit de convolution (qui est donc obligatoirement continu).

Il reste à examiner le cas général où les Y^j ne sont pas dans $\mathcal{D}_\Delta$. Mais on peut trouver dans $\mathcal{D}_\Delta$ une suite Y_n de régularisées du vecteur Y convergeant fortement vers Y dans H. Le projecteur Π_∂ étant continu, les $G_n = \Pi_\partial Y_n$ convergent fortement vers $G = \Pi_\partial Y$; les $K_{i,n}(h) = < U_h G_{i n}, Z >$ et les $C_n^j (h) = = < U_h Y^j, Z >$ convergent alors vers $K_i(h) = < U_h G_i, Z >$ et $C^j(h) = < U^h Y^j, Z >$ uniformément en h. Les mesures spectrales associées $\chi_{i,n}(u)$ du et $\Phi_n^j (u)$ du convergent donc au sens vague vers les mesures de densité $\chi_i(u)$ et $\Phi^j (u)$. On en déduit que (6-4) passe à la limite, et que (6-4) et (6-4') sont valables pour Y quelconque dans H.

<u>Proposition 14</u> - <u>Pour tout $Y \in H$, le groupe U_h étant fortement mélangeant, la composante $G = \Pi_\partial Y$ de ce vecteur dans l'espace H_∂ des gradients est caractérisée faiblement par les relations</u>

$$K_i = - \partial_{ij} \alpha * C^j$$

$$(K_i(h) = < U_h G_i, Z > , C^j (h) = < U_h Y^j, Z > , Z \in L^2)$$

VII - LES DEVELOPPEMENTS DE SCHWYDLER

Soit k un opérateur sur H de la forme $k = a(I + \Gamma)$, $a \in \mathbb{R}$. On cherche un gradient généralisé $G \in \tilde{H}_\partial$ et un vecteur conservatif S.L. $Q \in H_\partial^\perp$ vérifiant

$$(7\text{-}1) \qquad \begin{cases} Q = k\,G = a(I + \Gamma)G \\ \\ E\,G = \varpi \end{cases}$$

$\varpi \in E(H)$ étant un vecteur invariant donné . Posons $G_o = G - EG = G - \varpi$, ce qui entraîne (Proposition 10), $G_o \in \bar{\bar{H}}_\partial$. La relation (7-1) s'écrit alors

$$(7\text{-}1') \qquad Q = a(\varpi + \Gamma\,\varpi + G_o + \Gamma\,G_o) \quad , \; Q \in H_\partial^\perp \, , \; G_o \in \bar{\bar{H}}_\partial$$

Appliquons le projecteur Π_∂ aux deux membres de (7-1'). Il vient:

$$0 = (I + \Pi_\partial\,\Gamma)\,G_o + \Pi_\partial\,\Gamma\,\varpi$$

soit :

$$(7\text{-}2) \qquad (I + \Pi_\partial\,\Gamma)\,G_o = -\,\Pi_\partial\,\Gamma\,\varpi$$

Inversement, si nous trouvons un $G_o \in \bar{\bar{H}}_\partial$ vérifiant (7-2), le vecteur Q défini en (7-1') vérifiera $\Pi_\partial\,Q = 0$, c'est-à-dire $Q \in H_\partial^\perp$ et les vecteurs Q et $G = \varpi + G_o$ constitueront bien une solution. Désignons par $\mathcal{N}(k)$ la restriction à $\bar{\bar{H}}_\partial$ du noyau de l'opérateur $I + \Pi_\partial\,\Gamma$, c'est-à-dire l'ensemble des $G_o \in \bar{\bar{H}}_\partial$ vérifiant $(I + \Pi_\partial\,\Gamma)\,G_o = 0$, et par $\mathcal{J}(k)$ l'espace image de $\bar{\bar{H}}_\partial$ dans $\bar{\bar{H}}_\partial$ par $I + \Pi_\partial\,\Gamma$:

$$\begin{cases} \mathcal{N}(k) = \{Y,\; Y \in \bar{\bar{H}}_\partial,\; (I + \Pi_\partial\,\Gamma)\,Y = 0\} \\ \\ \mathcal{J}(k) = (I + \Pi_\partial\,\Gamma)\,(\bar{\bar{H}}_\partial) \subset \bar{\bar{H}}_\partial \end{cases}$$

Notre problème admet des solutions si et seulement si $\Pi_\partial\, \Gamma\, \varpi \in \mathcal{J}(k)$ et cette solution est alors unique à un élément près de $\mathcal{N}(k)$. Ainsi <u>il y a au plus une solution si et seulement si</u> $(I + \Pi_\partial\, \Gamma)$ est une <u>injection</u> de $\overline{H}_\partial$ dans lui-même, et <u>au moins une</u> pour tout $\varpi \in E(H)$ si et seulement si

$$\Pi_\partial\, \Gamma\, E\,(H) \subset \mathcal{J}(k)$$

En particulier, il y a une solution et une seule dès que $I + \Pi_\partial\, \Gamma$ est une <u>bijection</u> de $\overline{H}_\partial$ sur lui-même.

Supposons vérifiée cette condition d'existence et d'unicité. $G = \varpi + G_o$ et $Q = a(I + \Gamma)\, G$ dépendent alors linéairement de $\varpi \in E\,(H)$. Comme $E\,(G) = \varpi$, il en résulte qu'il existe <u>un opérateur K sur E (H)</u> vérifiant

$$E\, Q = K\, \varpi \tag{7-3}$$

D'ailleurs, on peut mettre (7-1') sous la forme

$$Q = a(\varpi + \Gamma\, \varpi + (I + \Pi_\partial\, \Gamma\, G_o) + \Pi_\partial^{\perp}\, \Gamma\, G_o)$$

c'est-à-dire, compte tenu de (7-2)

$$Q = a(\varpi + \Pi_\partial^{\perp}\, \Gamma\, (\varpi + G_o)) = a(\varpi + \Pi_\partial^{\perp}\, \Gamma\, G)$$

Appliquons le projecteur E, en notant $E\, \Pi_\partial^{\perp} = E$. Il vient

$$E\, Q = a(\varpi + E\, \Gamma\, G) \tag{7-3'}$$

Lorsque $(I + \Pi_\partial\, \Gamma)$ est une <u>bijection de $\overline{H}_\partial$</u>, (7-2) donne explicitement

$$G_o = -\,(I + \Pi_\partial\, \Gamma)^{-1}\, \Pi_\partial\, \Gamma\, \varpi$$

et, en portant dans (7-3') :

(7-4) $$EQ = a\left(\varpi + E\,\Gamma\,\varpi - E\,\Gamma\,(I + \Pi_\partial\,\Gamma)^{-1}\,\Pi_\partial\,\Gamma\,\varpi\right)$$

d'où l'expression explicite de l'opérateur K sur E (H) défini en (7-3) :

(7-4') $$K = a\left(I + E\,\Gamma - E\,\Gamma(I + \Pi_\partial\,\Gamma)^{-1}\,\Pi_\partial\,\Gamma\right)$$

Supposons enfin que $\Pi_\partial\,\Gamma$ - considéré comme un opérateur sur $\bar{H}_\partial$ - ait <u>une norme inférieure à l'unité</u>.- On a alors le développement convergent

$$(I + \Pi_\partial\,\Gamma)^{-1} = I + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\,(\Pi_\partial\,\Gamma)^n$$

d'où, d'après (7-4') :

$$K = a\left(I + E\,\Gamma\,\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n\,(\Pi_\partial\,\Gamma)^n\right)$$

Ce sont les <u>développements de Schwydler</u>, que nous mettrons sous la forme :

(7-5) $$\begin{cases} K = a(I + E\,\Gamma - \sum\limits_{n=2}^{\infty} S_n) \\ S_n = (-1)^n\,E\,\Gamma\,(\Pi_\partial\,\Gamma)^{n-1} \end{cases}$$

Résumons ses résultats :

<u>Proposition 15</u> - <u>Pour que le système (7-1) admette pour tout $\varpi \in E\,(H)$ une solution unique $G \in \tilde{H}_\partial$, $Q \in H_\partial^\perp$, il faut et il suffit que l'opérateur $(I + \Pi_\partial\,\Gamma)$ soit une injection de $\bar{H}_\partial$ dans lui-même et que l'on ait $\Pi_\partial\,\Gamma\,E\,(H) \subset (I + \Pi_\partial\,\Gamma)\,(\bar{H}_\partial)$. En particulier, il est suffisant que $I + \Pi_\partial\,\Gamma$ soit une bi-</u>

jection de $\bar{H}_\partial$ sur lui-même. Lorsque cette condition est remplie, il existe un opérateur K défini sur E(H) tel que pour tout $\varpi \in E(H)$ la solution (Q, G) de (7-1) vérifie :

$$E\, Q = K\, \varpi = a(\varpi + E\, \Gamma\, G)$$

Enfin, lorsque $\Pi_\partial\, \Gamma$, considéré comme un opérateur sur $\bar{H}_\partial$, admet une norme strictement inférieure à 1, les développements (7-5) de Schwydler sont valables.

Expression explicite des tenseurs de Schwydler -

Nous allons maintenant nous placer dans les hypothèses suivantes :

a/ le groupe U_h est fortement mélangeant. Cette hypothèse implique l'ergodicité, donc $E\,(H) = \mathbb{R}^n$, et les opérateurs K et S_n sont alors simplement des tenseurs d'ordre n

b/ Γ est un opérateur multiplicatif tensoriel sur H : pour $Y \in H$, les composantes contravariantes de $\Gamma\, Y$ sont les $\gamma^{ij}\, Y_j$, avec $\gamma^{ij} \in L^2$, (i, j = 1,2,...n). L'opérateur Γ étant défini sur H (ce qui signifie que chaque composante γ^{ij} est presque sûrement bornée sur Ω) les moments

$$(7\text{-}6) \qquad R^{i_1 j_1, \dots i_n j_n}_{(h_1, h_2, \dots h_n)} = E\,(\gamma^{i_1 j_1}_{(h_1)}\ \gamma^{i_2 j_2}_{(h_2)} \dots \gamma^{i_n j_n}_{(h_n)})$$

existent tous.

Nous supposons de plus que pour presque tout $\omega \in \Omega$ la matrice $\gamma^{ij}\,(\omega)$ est symétrique et strictement définie positive.

c/ enfin, $\Pi_\partial\, \Gamma$, considéré comme opérateur de $\bar{H}_\partial$, est de norme < 1. (il suffit, pour celà, que les bornes dans Ω de chacune des composantes γ^{ij} soient assez petites).

Dans ces conditions, les développements de Schwydler sont valables, et les résultats du paragraphe 6 vont nous permettre de former l'expression explicite du tenseur de Schwydler d'ordre n en fonction des moments (7-6) de γ.

Pour alléger un peu les notations tensorielles, définissons d'abord la notation

$$\Pi_\partial \; B^{i_1, i_2, \ldots i_k}$$

où B est un opérateur tensoriel : si $t_{i_2, \ldots i_k}$ est un tenseur covariant sur $\mathbb{R}^n$

$$B^{i_1, i_2, \ldots i_k} \, t_{i_2 \ldots i_k} = Y^{i_1}$$

est un vecteur contravariant de H, et sa projection $\Pi_\partial \; Y$ dans $\overline{H}_\partial$ dépend linéairement de $t_{i_2 \ldots i_k}$; il existe par suite un opérateur tensoriel

$$\Pi_\partial \; B^{i_1 \ldots i_k}$$

tel que $\qquad \Pi_\partial \; B^{i_1, \ldots i_k} \, t_{i_2 \ldots i_k} = Y^{i_1}$

Ainsi, $\Pi_\partial \; B^{i_1, i_2 \ldots i_k}$ peut être considéré comme un gradient relativement au premier indice i_1. Les composantes d'un gradient étant généralement données sous forme covariante, c'est plutôt le tenseur

$$g_{i_1 j_1} \, \Pi_\partial \; B^{i_1, i_2, \ldots i_k}$$

covariant en j_1, que l'on introduira.

Considérons alors l'opérateur tensoriel $A_n(h)$, fonction de $h \in \mathbb{R}^n$, défini par :

$$A_n{}^{\ell i_1, j_1, i_2, \ldots j_{n-1} \, s}_{(h_1, h_2 \ldots h_n)} = U_{h_1} \, \gamma^{\ell i_1} \, \Pi \, U_{h_2} \, \gamma^{j_1 i_2} \, \Pi \ldots \Pi \, U_{h_n} \, \gamma^{j_{n-1} s} \tag{7-7}$$

D'après (7-5), le tenseur S_n de Schwydler sera

$$(7\text{-}7') \qquad S_n = (-1)^n \, g_{i_1 j_1} \, g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_n j_n} \; E \, A_n{}^{\ell i_1, j_1 i_2, \dots j_{n-1} s}_{(o,o\dots,o)}$$

Plaçons-nous à n fixé, et cherchons à évaluer l'espérance $E\,A_n$ en effectuant une récurrence sur le nombre des projecteurs $\Pi = \Pi_\partial$. Pour celà, posons

$$B_1{}^{\ell i_1, \dots j_{n-1} s}_{(h)} = U_{h_1} \gamma^{\ell i_1} U_{h_2} \gamma^{j_1 i_2} \dots U_{h_n} \gamma^{j_{n-1} s}$$

et désignons par

$$B_k{}^{\ell i_1, \dots j_{n-1} s}_{(h)} = U_{h_1} \gamma^{\ell i_1} U_{h_2} \gamma^{j_1 i_2} \dots U_{h_{n-k+1}} \gamma^{j_{n-k}, i_{n-k+1}}$$

$$\Pi \, U_{h_{n-k+2}} \gamma^{j_{n-k+1}, i_{n-k+2}} \, \Pi \dots\dots \Pi \, U_{h_n} \gamma^{j_{n-1} \; s}$$

le terme où figurent k-1 projecteurs. D'après (7-7), B_k s'écrit aussi :

$$(7\text{-}8) \qquad B_k{}^{\ell i_1, \dots j_{n-1} s}_{(h)} = U_{h_1} \gamma^{\ell i_1} U_{h_2} \gamma^{i_2} \dots U_{h_{n-k}}$$

$$\gamma^{j_{n-k-1}, i_{n-k}} \; A_k{}^{j_{n-k}, i_{n-k+1}, \dots, j_{n-1} \; s}_{(h_{n-k+1}, h_{n-k+2}, \dots h_n)}$$

et l'on remarque aussi que l'on passe de B_k à B_{k+1} en introduisant un projecteur Π immédiatement avant $U_{h_{n-k}}$ dans le second membre de (7-8). La proposition (14) est donc applicable. Posons :

$$C_k{}^{\ell i_1, \dots j_{n-1} \; s}_{(h_1, \dots h_n)} = E \, B_k{}^{\ell i_1, \dots j_{n-1} \; s}_{(h_1, \dots h_n)}$$

La proposition (14) donne alors :

$$C_{k+2}^{\ell i_1,\dots j_{n-1}\,s}(h_1,\dots h_n) = -\int_{\mathbb{R}^n} g^{j_{n-k-1},i}\,\partial_{ij}\,\alpha(h_{n-k}-\xi_{n-k})$$

$$C_{k+1}^{\ell,i_1,\dots j_{n-k-2}\,i_{n-k-1},j\,i_{n-k+1},j_{n-k+1}\,i_{n-k+2},\dots j_{n-1}\,s}(h_1,h_2,\dots h_{n-k-1},\xi_{n-k},h_{n-k+1},\dots h_n)\quad d\,\xi_{n-k}$$

On connaît C_1, qui est, d'après (7-6)

$$C_1^{\ell i_1,\dots j_{n-1}\,s}(h) = R^{\ell i_1,\dots,j_{n-1}\,s}(h_1,h_2,\dots h_n)$$

En procédant par récurrence de $k = 1$ à $k = n$, on obtient $C_n =$ $= E\,A_n$ sous la forme :

$$E\,A_n^{\ell i_1,\dots j_{n-1}\,s}(h_1,\dots h_n = (-1)^n\, g^{i'_1 j_1}\, g^{i'_{n-1} j_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n(n-1)}} \partial_{i'_1 j'_1}\,\alpha(h_2-\xi_2) \tag{7-9}$$

$$\partial_{i'_2 j'_2}\,\alpha(h_3-\xi_3)\dots\partial_{i'_{n-1} j'_{n-1}}(h_n-\xi_n)\, R^{\ell i_1,j'_1 i_2,\dots j'_{n-2} i_{n-1},j'_{n-1}\,s}(h_1,h_1+\xi_2,\dots,h_1+\xi_2+\dots+\xi_n)$$

$$d\,\xi_2\, d\,\xi_3\dots d\,\xi_n$$

D'après (7-7') nous devons saturer ce tenseur par

$$(-1)^n\, g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2}\dots g_{i_n j_n}$$

pour obtenir le tenseur $S_n(h)$ dont la valeur en $h = 0$ est le tenseur de Schwydler S_n . De $g_{ij}\,g^{jk} = \delta_i^k$ résultent des simplifications évidentes, et on trouve :

$$S_n^{\ell s}(h) = \int \partial_{i_1 j_1}\,\alpha(h_2-\xi_2),\dots\partial_{i_{n-1} j_{n-1}}\,\alpha(h_n-\xi_n) \tag{7-10}$$

$$R^{\ell i_1,\dots j_{n-1}\,s}(h_1,h_1+\xi_2,\dots,h_1+\xi_2+\dots+\xi_n)\; d\,\xi_2\; d\,\xi_3\dots d\,\xi_n$$

l'intégrale dans $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ étant à prendre au sens des distributions. En faisant h = 0, on obtient le tenseur de Schwydler lui-même sous la forme :

$$S_n^{\ell s} = \int \partial_{i_1 j_1}(\xi_1)\, \partial_{i_2 j_2}(\xi_2) \ldots \partial_{i_{n-1} j_{n-1}}(\xi_{n-1})$$

(7-10')

$$R^{\ell i_1 \ldots j_{n-1}\, s}(0,\ \xi_1,\ \xi_1+\xi_2, \ldots, \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{n-1})\, d\,\xi_1\, d\,\xi_2 \ldots d\,\xi_{n-1}$$

et le tenseur K s'en déduit au moyen du développement (convergent, sous les hypothèses a/, b/ et c/ ci-dessus) :

$$K^{\ell s} = a\,(g^{\ell s} + E(\gamma^{\ell s}) - \sum_{n=2}^{\infty} S_n^{\ell s})$$

Telle est la forme explicite du développement de Schwydler, qui résoud le problème de la composition des perméabilités, du moins lorsque les conditions a/, b/ et c/ ci-dessus sont vérifiées. On peut penser, d'ailleurs, qu'il est possible d'affaiblir ces conditions.

BIBLIOGRAPHIE

G. IFKER - Changement d'échelle dans les milieux poreux .
Décembre 1969

G. MATHERON - Eléments pour une théorie des milieux poreux. Masson, Paris, 1967

G. MATHERON - Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène : critique de la règle de pondération géométrique. Revue de l'I.F.P., Février 1968.

G. MATHERON - Note Géostatistique N° 82 : Systèmes dynamiques Continus. Mars 1968

J. NEVEU - Théorie ergodique, Ch. I (Ergodisme et propriétés de mélange) - I.H.P., 1966-67

A.J. PLESNER - Spektralnaīa teoria lireinik operatorov. Moscou, 1966.