NOTE GEOSTATISTIQUE N° 105

RECHERCHE DE SCHEMAS POLYNOMIAUX

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 106

EXERCICES SUR LE KRIGEAGE UNIVERSEL

Par

G. MATHERON

Mars 1970

i

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 105

RECHERCHE DE SCHEMAS POLYNOMIAUX

Table des Matières

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 106

EXERCICES SUR LE KRIGEAGE UNIVERSEL

Table des Matières

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 105

RECHERCHE DE SCHEMAS POLYNOMIAUX

INTRODUCTION

Je me propose, dans ce qui suit, de chercher des fonctions $g(r)$ de la forme :

$$(1) \quad \begin{cases} g(r) = \sum_{k=0}^{n} A_k \left(\frac{r}{a}\right)^k & (r \leq a) \\ \\ g(r) = 0 & (r > a) \end{cases}$$

- qui soient de <u>type positif</u> dans $\mathbb{R}^3$ - et qui puissent donc jouer le rôle de fonctions de covariance pour des F.A. de l'espace à 3 dimensions.

Dans ce qui suit, je prendrai toujours $A_0 = 1$ et $a = 1$, puisque A_0 est un simple facteur multiplicatif et a un paramètre d'échelle. Je me limiterai à $n = 5$.

Pour cette recherche, on peut penser partir du <u>théorème de Bochner</u>. La transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^3$ de la fonction $g(r)$ est la fonction :

$$G(\rho) = \frac{2}{\rho} \int_0^\infty r \sin 2\pi\rho r \; g(r) \, dr$$

l'intégrale étant, en réalité, arrêtée en $a = 1$. On obtient ainsi des expressions de la forme

$$A(\rho) + B(\rho) \sin 2\pi\rho + C(\rho) \cos 2\pi\rho$$

où A, B et C sont des polynomes en $1/\rho$. Mais il n'est pas facile d'exprimer les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients du polynome $g(r)$ pour que cette transformée soit une fonction positive. Il est donc préférable de recourir à des procédés plus directs permettant de construire effectivement des polynomes de type positif.

1 - LES SCHEMAS SPHERIQUES

Pour $\mu \geq 3$, le covariogramme géométrique de la boule de R^μ est - par construction - de type positif. En ramenant à l'unité la valeur en $r = 0$, on obtient ainsi la famille :

$$(2) \qquad K_\mu(r) = 1 - \frac{2\,\Gamma(1+\frac{\mu}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{1+\mu}{2})} \int_0^r (1-x^2)^{\frac{\mu-1}{2}}\,dx \qquad (r \leq 1)$$

Pour μ entier impair ≥ 3, ces fonctions sont des polynomes. Pour $\mu = 3$ et $\mu = 5$, il vient :

$$(2') \qquad \begin{cases} K_3(r) = 1 - \frac{3}{2}\,r + \frac{1}{2}\,r^3 \\ \\ K_5(r) = 1 - \frac{15}{8}\,r + \frac{10}{8}\,r^3 - \frac{3}{8}\,r^5 \end{cases}$$

Il sera commode de caractériser les polynomes $g(r)$ par leurs pentes à l'origine et leurs portées définies de manière précise par :

$$b = 2\int_0^1 g(r)\,dr$$

On trouve ici :

	Pente A_1	Portée b
K_3	$-3/2$	$3/4$
K_5	$-15/18$	$5/8$

D'autre part, les polynomes g(r) de type positif constituent un cône convexe, en ce sens que toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions g donne encore une fonction g. Ainsi, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, le polynome

$$(1-\lambda)K_3 + \lambda\, K_5$$

est de type positif. Si F(da) est une loi de probabilité concentrée sur (0,1), la fonction définie par :

$$\begin{cases} g(r) = \displaystyle\int_r^1 K\left(\frac{r}{a}\right) F(da) & (r \leq 1) \\ g(r) = 0 & (r \geq 1) \end{cases}$$

est de type positif si K est de type positif et nul pour $r > 1$. Par exemple, avec $F(da) = \alpha a^{\alpha-1}\, da\ (\alpha > 0)$ et en partant de K_3, on obtient :

$$g_\alpha(x) = \alpha \int_x^1 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{a^3}\right) a^{\alpha-1}\, da =$$

$$= 1 - \frac{3}{2}\frac{\alpha}{\alpha-1}\, x + \frac{1}{2}\ \frac{\alpha}{\alpha-3}\, x^3 - x^\alpha \left(1 - \frac{3\alpha}{2(\alpha-1)} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\alpha-3}\right)$$

Pour $\alpha = 2$, par exemple, on trouve

$$\begin{cases} g_2(x) = (1-x)^3 \\ \text{Pente} = -3, \ \text{Portée} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On vérifie par récurrence que le polynome :

$$g(x) = (1-x)^n \quad (\text{pente} - n, \ \text{portée} \ \frac{2}{n+1}) \quad (n \geq 3)$$

est encore de type positif. Celà résulte de la relation :

$$\int_x^1 (n+1)\ a^n \left(1 - \frac{x}{a}\right)^n da = (1-x)^{n+1}$$

2 - DETERMINATION DES POLYNOMES DU 3eme DEGRE

2-1 Résultats

Je vais montrer que les polynomes d'ordre 3 constituent une famille à un paramètre dont les deux termes extrêmaux sont :

$$(2\text{-}1) \qquad \begin{cases} g_1(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^3 \\ g_2(x) = 1 - 4x + 5x^2 - 2x^3 = (1-x)^2\ (1-2x) \end{cases}$$

Autrement dit, le polynome le plus général de type positif et de degré 3 est de la forme :

$$\begin{cases} g(x;\lambda) = \lambda(1-x)^2\ (1-2x) + (1-\lambda)\ (1-x)^2\ (1 + \frac{1}{2}x) = \\ \qquad = (1-x)^2\ [1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\lambda x] \qquad (0 \leq \lambda \leq 1) \end{cases}$$

Pentes et portées varient linéairement en λ :

$$\begin{cases} \varpi = -\frac{3\lambda}{2} - 4(1-\lambda) = -4 + \frac{5}{2}\lambda \\ \\ b = \frac{3}{4}\lambda + (1-\lambda)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{12}\lambda \end{cases}$$

La dérivée de ce polynome :

$$g'(x) = -(1-x)\left[\frac{5}{2} + \frac{3\lambda}{2} + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda\right)x\right]$$

s'annule en $x = 1$ et en $x = (3+5\lambda)/3(5\lambda-1)$. On en déduit que c'est seulement pour $\lambda > \frac{3}{5}$ que $g(x)$ possède un minimum <0 sur $(0,1)$ (<u>effet de trou</u>, d'ailleurs peu intense). Pour $\lambda = 3/5$, on trouve :

$$g(x) = (1-x)^3$$

Pour $\lambda = 1/5$, le terme en x^3 disparaît, et on obtient l'expression :

$$g(x) = (1-x)^2$$

qui constitue <u>l'unique</u> polynome de degré < 3 qui soit de type positif dans $\mathbb{R}^3$.

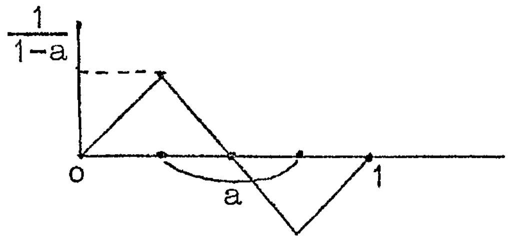
Pour établir ces résultats, je vais suivre une méthode un peu lourde (j'ignore s'il en existe de plus rapide) et malaisément généralisable.

2-2 Construction de g_2

Le polynome g_1, dans les relations (2-1), est de type positif /

puisqu'il représente le covariogramme de la boule de $\mathbb{R}^3$.

Pour construire g_2, je vais d'abord chercher dans $\mathbb{R}^1$ le covariogramme de la fonction définie comme suit :



Si f est cette fonction, sa dérivée $f'(x)$ vaut -1 pour $|x| < \frac{a}{2}$ et $+1$ pour $\frac{a}{2} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$. Si g est le covariogramme de f, celui de f' est $-g''$ et vaut :

$$(2\text{-}2) \qquad -g'' = \frac{1}{(1-a)^2} g_{11} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right)^2 g_{22} - \frac{2}{1-a}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}\right) g_{12}$$

avec :

$$\begin{cases} g_{11} = 1-h & (h \leq 1) \\ g_{22} = a-h & (h \leq a) \end{cases}$$

et g_{12}, covariogramme rectangle des segments $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right)$ admet la dérivée :

$$g'_{12}(h) = \begin{cases} 0 \text{ si } h < \frac{1-a}{2} \text{ ou } h > \frac{1+a}{2} \\ -1 \text{ ailleurs sur } (0,1) \end{cases}$$

soit :

$$g'_{12}(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq |1-2h| \\ -1 & \text{si } a > |1-2h| \end{cases}$$

<u>Randomisons</u> a , en lui attribuant la densité de probabilité :

$$F(da) = \frac{1}{30}\ a^2(1-a)^2 da \text{ sur } (0,1)$$

L'espérance de la dérivée en h du terme rectangle de (2-2) est :

$$\int_0^1 \frac{F(da)}{a(1-a)^2}\ g'_{12}(h) = -\int_{|1-2h|}^1 \frac{a\ da}{30} = -\frac{4}{60}\ (h-h^2)$$

et celle du terme rectangle lui-même est :

$$\int_0^1 \frac{F(da)}{a(1-a)^2}\ g_{12}(h) = \frac{1}{15} \int_h^1 (x-x^2)\ dx = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3\right)$$

Prenons de même l'espérance des 2 autres termes de (2-2) :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{F(da)}{(1-a)^2}\ g_{11}(h) = \frac{1}{90}\ (1-h) \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{F(da)}{a^2(1-a)^2}\ g_{22}(h) = \int_h^1 \frac{a-h}{30}\ da = \frac{1}{30}\left(\frac{1}{2} - h + \frac{h^2}{2}\right) \end{cases}$$

Reportons ces résultats dans (2-2) :

$$-\int_0^1 g''(h)\ F(da) = \frac{1}{180}\ (1 - 8h + 15h^2 - 8h^3)$$

Ainsi, le polynome $1 - 8h + 15h^2 - 8h^3$ ($|h| < 1$) est de type positif dans $\mathbb{R}^1$ et d'intégrale nulle. Il est donc la dérivée seconde, au signe près, d'une fonction de type positif :

$$\int_0^1 g(h)\ F(da) = \int_h^1 dx \int_0^x (1-8y+15y^2-8y^3)\ dy$$

$$= \frac{1}{60} - \frac{1}{2}h^2 + \frac{4}{3}h^3 - \frac{5}{4}h^4 + \frac{2}{5}h^5$$

Par descente d'ordre 2, enfin, nous en déduisons un polynome d'ordre 3 qui est de type positif dans $\mathbb{R}^3$, soit, à un facteur près, le polynome g_2 cherché :

$$g_2(x) = 1 - 4x + 5x^2 - 2x^3$$

2-3 Détermination de la famille

a/ Montrons d'abord que ces polynomes constituent une famille à un paramètre. En effet, la fonction g égale à :

$$g(x) = 1 + A|x| + Bx^2 + C|x|^3$$

sur (-1,1) et à 0 à l'extérieur doit s'annuler en $|x| = 1$, car une fonction de type positif continue en 0 est continue partout. On a donc :

$$1 + A + B + C = 0 \tag{2-3}$$

D'autre part, en effectuant une montée d'ordre 2 :

$$\int_x^1 r\ g(r)\ dr$$

On obtient un polynome de type positif dans $\mathbb{R}^1$ deux fois dérivable en x, de sorte que la dérivée seconde changeede signe est encore de type positif dans $\mathbb{R}^1$. Cette dérivée est :

$$\frac{d}{dx}\, x\, g(x) = 1 + 2\, Ax + 3\, Bx^2 + 4\, Cx^3$$

et elle est continue en $x = 1$, d'où :

$$1 + 2A + 3B + 4C = 0 \tag{2-4}$$

Posons $A = -\alpha$. Les relations (2-3) et (2-4) donnent :

$$B = 2\,\alpha - 3 \quad , \quad C = 2 - \alpha$$

et :

$$g(r) = 1 - \alpha r + (2\alpha - 3)\, r^2 + (2-\alpha)\, r^3 \tag{2-5}$$

Il s'agit donc bien d'une famille à 1 paramètre.

b/ Montrons que α vérifie les inégalités

$$\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 4 \tag{2-6}$$

ce qui achèvera de caractériser la famille, puisque nous avons construit effectivement des fonctions de type positif dans $\mathbb{R}^3$, g_1 et g_2, dont les pentes sont justement $-\frac{3}{2}$ et -4.

Si g et K sont des fonctions de type positif, l'intégrale $\int gK\, dx$ est positive. En particulier, la fonction 1 est de type positif dans $\mathbb{R}^n$ (quel que soit n) et, si g est de type positif dans $\mathbb{R}^3$ et ne dépend que de h, on doit avoir :

$$\int_0^{\infty} g(r)\ r^k\ dr \geq 0 \qquad (k = 0,1,2)$$

Pour k = 2, et notre polynome (2-5), ceci donne :

$$\int_0^1 r^2\ g(r)\ dr = \frac{1}{15} - \frac{1}{60}\,\alpha \geq 0\ ,\ \text{d'où}\quad \alpha \leq 4$$

Pour montrer la première inégalité (2-6), partons de la fonction

$$K(r) = 1 - 8r + 15r^2 - 8r^3 \qquad (r \leq 1)$$

$$(= 0,\ r > 1)$$

qui est de type positif dans $\mathbb{R}^1$ (paragraphe 2-2), et écrivons :

$$\int_0^1 g(r)\ K(r)\ dr \geq 0$$

Après un calcul élémentaire, on trouve bien :

$$\alpha \geq \frac{3}{2}$$

3 - LES POLYNOMES DU CINQUIEME DEGRE

Les fonctions de type positif dans R^3 de la forme

$$g(r) = \begin{cases} 1 + Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4 + Er^5 & (r \leq 1) \\ 0 & (r > 1) \end{cases}$$

constituent au plus une famille à 3 paramètres. En effet, $g(r)$ doit être continu en $r = 1$, d'où $g(1) = 0$. Par montée d'ordre 2, on déduit de g la fonction

$$g_1(x) = \int_x^1 rg(r)\, dr$$

qui est de type positif dans R^1, et deux fois dérivable : donc $-g"$ est de type positif dans R^1, et par suite $g"_1(1) = 0$. On en déduit :

$$g'(1) = g(1) = 0 \tag{3-1}$$

Nous montrerons que la famille des fonctions g dépend effectivement de 3 paramètres en exhibant 3 fonctions g linéairement indépendantes. L'ensemble $\mathcal{G}$ de ces fonctions est convexe. Il serait intéressant de déterminer ses éléments extrêmaux.

3-1 Le polynome extrêmal g_0

S'il y a dans $\mathcal{G}$ une fonction g_0 sans terme linéaire $(A = 0)$, elle est nécessairement unique. En effet, par montée d'ordre 2 on déduit de g_0 une fonction g_1 quatre fois dérivable, et les 4 dérivées

$$- g_1'(x) = x\, g(x) \quad , \quad - g_1''(x) = g(x) + xg'(x) \quad ,$$

$$- g'''(x) = 2g'(x) + xg''(x) \quad , - g^{IV}(x) = 3g''(x) + xg'''(x)$$

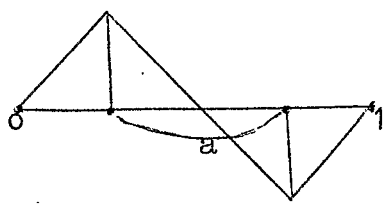
doivent s'annuler en $x = 1$. Comme $A = 0$, g_0 est nécessairement de la forme :

(3-2) $$g_o(r) = (1-r)^4\,(1+4r) = 1 - 10r^2 + 20r^3 - 15r^4 + 4r^5$$

Montrons que l'on a bien $g_o \in \mathcal{G}$. Pour celà, partons de la fonction

$$g(x) = 1 - 30x^2 + 80x^3 - 75x^4 + 24x^5$$

qui est, à un facteur près, l'espérance du covariogramme de la fonction f de $\mathbb{R}^1$ définie comme suit (par 2-2) :



lorsque a a la densité $\frac{1}{30}\,a^2(1-a)^2$ sur (0-1). Comme la fonction f a une intégrale nulle, la fonction

$$\int_x^1 dy \cdot \int_o^y g(z)\,dz$$

est encore de type positif dans $\mathbb{R}^1$, et, par descente d'ordre 2, on en déduit que la fonction :

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\int_x^1 dy \int_o^y g(z)\,dz = \frac{1}{x}\int_o^x g(y)\,dy = 1 - 10x^2 + 20x^3 - 15x^4 + 4x^5$$

est de type positif dans $\mathbb{R}^3$: mais cette fonction coïncide avec g_o.

Montrons enfin que g_o est extrêmal dans $\mathcal{G}$. En effet, supposons

$$g_o = \lambda\, g_1 + (1-\lambda)\, g_2,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{G}\ ,\quad 0 \le \lambda \le 1$$

Si g_1 et g_2 sont distincts de g_o, ils ont des termes en r dont les coefficients A_1 et A_2 sont $\not\supset$ 0 (unicité de g_o). Par suite :

$$0 = \lambda\ A_1 + (1-\lambda)A_2 \quad , \quad A_1 \neq 0 \ , \ A_2 \neq 0$$

entraîne que l'un des coefficients, par exemple A_1, est > 0. Mais celà n'est pas possible, à cause de l'inégalité de Schwarz, si g_1 est de type positif. Donc $g_1 = g_2 = g_o$, et g_o est extrêmal.

3-2 Construction d'éléments de degré 4 et 5

Les polynomes g_1 et g_2 écrits en (2-1) sont de degré 3 et appartiennent à $\mathcal{G}$. Par randomisation on en déduit d'autres éléments de $\mathcal{G}$. Ainsi :

$$(3\text{-}3)\quad \left\{\begin{aligned}
g_3(x) &= 4\int_x^1 a^3\ g_2\left(\frac{x}{a}\right) da = 1 - \frac{16}{3}\ x + 10\ x^2 - 8\ x^3 + \frac{7}{3}\ x^4 = \\
&= (1-x)^3\ \left(1 - \frac{7}{3}\ x\right) \\
g_4(x) &= 5\int_x^1 a^4\ g_3\left(\frac{x}{a}\right) da = 1 - \frac{20}{3}\ x + \frac{50}{3}\ x^2 - 20\ x^3 + \frac{35}{3}\ x^4 - \\
&\quad - \frac{8}{3}\ x^5 = (1-x)^4\ \left(1 - \frac{8}{3}\ x\right) \\
g_5(x) &= 4\int_x^1 a^3\ g_1\left(\frac{x}{a}\right) da = 1 - 2x + 2\ x^3 - x^4 = (1-x)^3\ (1+x) \\
g_6(x) &= 5\int_x^1 a^4\ g_5\left(\frac{x}{a}\right) da = 1 - \frac{5}{2}\ x + 5\ x^3 - 5\ x^4 + \frac{3}{2}\ x^5 = \\
&= (x-1)^4\ \left(1 + \frac{3}{2}\ x\right)
\end{aligned}\right.$$

On peut y joindre aussi le polynome K_5 défini en (2'), covariogramme de la boule de $\mathbb{R}^5$:

$$K_5(x) = 1 - \frac{15}{8} x + \frac{10}{8} x^3 - \frac{3}{8} x^5$$

Il est clair que g_1, g_3 et g_4, par exemple, sont linéairement indépendants, de sorte que le convexe $\mathcal{G}$ est effectivement de <u>dimension égale à 3</u>.

Pour tout $g \in \mathcal{G}$, l'intégrale $\int_0^1 r^2\, g(r)\, dr$ est positive (valeur en 0 de la transformée de Fourier). Les éléments vérifiant

$$\int_0^1 r^2\, g(r)\, dr = 0$$

constituent donc <u>une face</u> $\mathcal{G}_0$ du convexe $\mathcal{G}$. On vérifie sans peine que g_2, g_3 et g_4 <u>appartiennent à cette face</u> $\mathcal{G}_0$.

3-3 La Sous-famille $(1-x)^4\,(1+\alpha x)$, $\left(-\frac{8}{3} \leq \alpha \leq +4\right)$

Considérons la famille à un paramètre des $g \in \mathcal{G}$ de la forme $(1-x)^4\,(1+\alpha x)$. Elle contient g_0, g_4 et g_6. Comme g_0 est extrêmal dans $\mathcal{G}$, la valeur $\alpha_0 = 4$ est la borne supérieure des α admissiblles. Comme g_4 appartient à la surface $\mathcal{G}_0$, et que $g_0 \notin \mathcal{G}_0$, la valeur $\alpha_4 = -\frac{8}{3}$ est la borne inférieure admissible. Au total, la sous-famille est constituée des éléments de la forme

$$g = \lambda\, g_0 + (1-\lambda)\, g_4 \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

La pente varie de 0 à $-\frac{20}{3}$. La portée

$$b = 2 \int_0^1 g(x)\, dx = \frac{2}{5}\,(1+\alpha) - \frac{\alpha}{3}$$

varie de 2/3 à 2/9.

Pour $\alpha < -1$, ces fonctions présentent un minimum très aplati (effet de trou peu intense), mais jamais de maximum.

3-4 Construction de g_7 (effet de trou)

Pour construire une fonction g_7 présentant un effet de trou appréciable, nous allons utiliser une méthode analogue à celle qui a réussi dans le paragraphe 2-2. Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les indicatrices k_1 et k_2 des boules de centre 0 et de diamètre 1 et $a < 1$ respectivement. Les covariogrammes correspondants sont :

$$(3\text{-}4)\quad \begin{cases} g_{11}(h) = \int k_1(x)\ k_1(x+h)dx = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{3}{2}|h| + \frac{1}{2}|h|^3\right) & (|h| \leq 1) \\ g_{22}(h) = \int k_2(x)\ k_2(x+h)dx = \frac{\pi}{6}\, a^3 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{|h|}{a} + \frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right) & (|h| \leq a) \end{cases}$$

Considérons le covariogramme rectangle :

$$g_{21}(h) = g_{12}(h) = \int k_1(x)\ k_2(x+h)dx$$

Il vaut :

$$g_{12}(h) = \frac{\pi}{6}\, a^3 \quad \text{pour } |h| < \frac{1-a}{2}$$

$$g_{12}(h) = 0 \quad \text{pour } |h| > \frac{1+a}{2}$$

Autrement dit, en posant $r = |h|$, la dérivée $g'_{12}(r)$ vérifie

$$g'_{12}(r) = 0 \quad \text{pour } a < |1-2r|$$

Lorsque r est compris entre $\frac{1-a}{2}$ et $\frac{1+a}{2}$, $-g'_{12}(r)$ est égal à l'aire du contour apparent de l'intersection des deux boules. Des calculs élémentaires donnent :

$$(3\text{-}5) \qquad -g'_{12}(r) = -\frac{\pi}{64}\left[\frac{(1-a^2)^2}{r^2} - 8(1+a^2) + 16\, r^2\right] \quad (a \leq |1-2r|)$$

On en déduit g_{12} lui-même en intégrant :

$$g_{12}(r) = -\int_r^1 g'_{12}\,(\rho)\; d\rho$$

Pour obtenir des expressions polynomiales, nous allons randomiser a en lui attribuant une loi de probabilité F(da) concentrée sur (0,1). Plus précisément, nous allons considérer la fonction $f_a(x)$ égale à $-\rho_o(a) + \rho(a)$ sur la petite boule et à $\rho(a)$ sur la couronne extérieure à la petite boule limitée par la sphère de diamètre 1, soit :

$$f_a(x) = \rho(a)\; k_1(x) - \rho_o\; k_2(x)$$

A a fixé, le covariogramme de f_a est :

$$g_a = \rho^2\; g_{11} - 2\;\rho\rho_o\; g_{12} + \rho_o^2\; g_{22}$$

L'espérance en a de g_a est la fonction $g \in \mathcal{G}$ suivante :

$$g = \int_o^1 (\rho^2\; g_{11} - 2\;\rho\rho_o\; g_{12} + \rho_o^2\; g_{22})\; F(da)$$

Le calcul des termes carrés n'offrira aucune difficulté à partir de (3-4). Examinons d'abord le terme rectangle. D'après (3-5), la dérivée en r de ce terme est :

$$(3\text{-}6) \qquad \frac{\pi}{64} \int_{|1-2r|}^{1} \left(\frac{(1-a^2)^2}{r^2} - 8(1+a^2) + 16\, r^2 \right) \rho(a)\ \rho_o(a)\ F(da)$$

Cette expression sera un polynome en r si $\rho(a)\ \rho_o(a)\ F(da)$ admet comme densité un polynome impair en a. Pour obtenir le polynome de plus faible degré possible, il convient donc de prendre :

$$(3\text{-}7) \qquad \rho(a)\ \rho_o(a)\ F(da) = 2\ a\ da$$

Calculons (3-6) dans ce cas. Développons d'abord l'intégrand :

$$\frac{(1-a^2)^2}{r^2} - 8(1+a^2) + 16\, r^2 = \frac{1}{r^2}\left((1-4\, r^2)^2 - 2(1+4\, r^2)\ a^2 + a^4\right)$$

En intégrant selon la densité (3-7), l'expression (3-6) devient :

$$\frac{d}{dr}\int_o^1 \rho\rho_o\ g_{12}\ F(da) = \frac{\pi}{64\, r^2}\left[(1-4\, r^2)^2\, x^2 - (1+4\, r^2)x^4 - \frac{1}{3}\, x^6\right]_{(1-2r)}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{r^2}\left(-\frac{2}{3}\, r^3 + r^4 - \frac{1}{3}\, r^6\right) = -\frac{\pi}{3}\left(2r - 3\, r^2 + r^4\right)$$

En intégrant en r, on en déduit :

$$(3\text{-}8)\left\{\begin{aligned} \int_o^1 \rho\rho_o\ g_{12}\ F(da) &= \frac{\pi}{3}\int_r^1 (2x - 3x^2 + x^4)\ dx = \\ &= \frac{\pi}{15}\ (1 - 5\, r^2 + 5\, r^3 - r^5) \end{aligned}\right.$$

Il reste à évaluer les termes $\int \rho^2\ g_{11}\ F(da)$ et $\int \rho_o^2\ g_{22}\ F(da)$.
Il faut tout d'abord choisir les fonctions $\rho(a)$ et $\rho_o(a)$. Prenons :

$$\rho(a) = 1$$

$$\rho_o(a) = a^{-\alpha}$$

ce qui entraîne pour F(da), d'après (3-7) :

$$F(da) = 2\, a^{1+\alpha}\, da$$

Compte tenu de (3-4), il vient alors :

$$(3\text{-}9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \rho^2\, g_{11}\, F(da) = \frac{\pi}{3(2+\alpha)} \left(1 - \frac{3}{2}\, r + \frac{1}{2}\, r^3\right) \\ \displaystyle\int \rho_o^2\, g_{22}\, F(da) = \frac{\pi}{3} \int_r^1 \left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{r}{a} + \frac{1}{2}\,\frac{r^3}{a^3}\right) a^{4-\alpha}\, da = \\ \displaystyle = \frac{\pi}{3} \left[\frac{1}{5-\alpha} - \frac{3}{2}\,\frac{r}{4-\alpha} + \frac{1}{2}\,\frac{r^3}{2-\alpha} - r^{5-\alpha} \left(\frac{1}{5-\alpha} - \frac{3}{2(4-\alpha)} + \frac{1}{2(2-\alpha)}\right)\right] \end{cases}$$

Reportons (3-8) et (3-9) dans l'expression de g. Nous obtenons une famille à 1 paramètre essentiel α qu'il est facile d'expliciter. Le cas le plus intéressant correspond à $\alpha = 3$ (masse totale des deux boules égale à 0), c'est-à-dire à l'effet;de trou le plus intense. On a dans ce cas :

$$\int \rho^2\, g_{11}\, F(da) = \frac{\pi}{15} \left(1 - \frac{3}{2}\, r + \frac{1}{2}\, r^3\right)$$

$$\int \rho_o^2\, g_{22}\, F(da) = \frac{\pi}{6}\, (1-r)^3$$

et on en tire :

$$g(h) = \pi\left(\frac{1}{10} - \frac{6}{10}\, r + \frac{7}{6}\, r^2 - \frac{8}{10}\, r^3 + \frac{2}{15}\, r^5\right)$$

L'élément $g_7 \in \mathcal{G}$ correspondant est :

$$g_7(r) = 1 - 6r + \frac{35}{3} r^2 - 8 r^3 + \frac{4}{3} r^5 = \tag{3-10}$$

$$= (1-r)^2 \left(\frac{4}{3} r^3 + \frac{8}{3} r^2 - 4r + 1 \right)$$

On vérifie sans peine $\int_0^1 r^2 g_7(r)\, dr = 0$, de sorte que g_7 appartient à la face $\mathcal{G}_o$ de $\mathcal{G}$ (ce qui était évident à priori d'après le procédé de construction utilisé). Cette fonction g_7 admet un minimum négatif et un maximum positif, donc présente un effet de trou caractérisé.

3-5 Choix d'une famille de fonction g

En vue des applications, et pour ne pas multiplier exagérément le nombre des paramètres, il y a lieu de choisir des familles de fonction g dépendant d'un seul paramètre essentiel (c'est-à-dire au total de 3 paramètres, en tenant compte d'un paramètre d'échelle et d'un paramètre multiplicatif). Nous avons déjà construit une telle famille en 3-3, mais celle-ci ne présente pas d'effet de trou bien marqué. Pour étudier l'effet de trou, on peut utiliser la famille à un paramètre joignant g_1 et g_7

$$g_\lambda = (1-\lambda) g_1 + \lambda\, g_7 \qquad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

Les limites 0 et 1 ne peuvent pas être franchies par le paramètre λ. En effet, g_7 appartient à la face $\mathcal{G}_o$, mais non g_1. Inversement, g_1 vérifie

$$\int_0^1 g_1(r)\, K(r)\, dr = 0$$

avec $K(r) = 1 - 8r + 15\, r^2 - 8\, r^3$ (de type positif dans $\mathbb{R}^1$), tandis que g_7 n'annule pas cette intégrale : il suit de là que g_1 est extrêmal dans $\mathcal{G}$, ou appartient au moins à une face de $\mathcal{G}$ ne contenant pas g_7, et que par suite g_1 et g_7 sont les extrémités dans $\mathcal{G}$ de la droite joignant ces deux points. Explicitement, celà donne

$$g_\lambda(r) = (1-r)^2 \left[1 + \frac{1-9\lambda}{2}\, r + \frac{8}{3}\, \lambda\, r^2 + \frac{4}{3}\, \lambda\, r^3\right]$$

On pourrait aussi envisager les familles joignant g_o et g_1 ou g_o et g_7.

En dernier lieu, enfin, si l'on désire disposer de fonctions g se comportant en r^β, on pourra utiliser la famille suivante, déduite de (3-9), avec $\beta = 5 - \alpha$:

$$(3\text{-}11) \qquad g_\beta(r) = 1 - \frac{3\beta}{2(\beta-1)}\, r + \frac{\beta}{2(\beta-2)}\, r^3 - \beta\, r^\beta \left(\frac{1}{\beta} - \frac{3}{2(\beta-1)} + \frac{1}{2(\beta-2)}\right)$$

Pour $\beta = 1$ ou 2, cette famille contient des termes en $r \log r$ ou en $r^3 \log r$.