J. Serra

N-215

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 113

COMPLEMENTS SUR LES APPLICATIONS CROISSANTES

Par

G. MATHERON

Janvier 1971

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 113

COMPLEMENTS SUR LES APPLICATIONS CROISSANTES

Table des Matières

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 113

COMPLEMENTS SUR LES APPLICATIONS CROISSANTES

1 - RECTIFICATIFS

Dans cette Note, je me propose de rectifier quelques erreurs qui se sont glissées dans la Note 112, et de reprendre d'un point de vue différent l'étude de quelques-unes des questions que j'ai abordées dans cette Note 112.

Voyons d'abord les rectificatifs. La proposition 3-4, tout d'abord, donne une caractérisation des fermetures sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ compatibles avec l'addition de Minkowski : elles sont effectivement continues, compatibles avec les translations, laissent invariants les ensembles réduits à un point et appliquent $C(\mathcal{K})$ dans lui-même. Mais elles ne sont pas nécessairement compatibles avec les homothéties positives (il y a une erreur de raisonnement dans l'avant-dernier paragraphe de la page 27). C'est seulement pour $A \in C(\mathcal{K})$ compact convexe que la propriété $\psi(\lambda A) = \lambda\psi(A)$ est correctement établie.

Plus sérieuse est l'erreur affectant la proposition 4-9 : Pour qu'une application ψ'_f s c s de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ soit le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$, il suffit que les éléments minimaux de son noyau $\mathcal{V}'_f$ soient compacts, mais cette condition n'est pas nécessaire. De même, la proposition 4-11 donne une condition suffisante mais non nécessaire, et son corollaire est faux.

Montrons-le sur un contre-exemple. Considérons l'application ϕ_k dont le noyau $\mathcal{V}_k$ est engendré par les circonférences C des cercles de rayon $\geq R_o$ telles que $O \in C$ (c'est-à-dire : $K \in \mathcal{V}_k$ si le compact K contient une telle circonférence). Si un fermé F est dans $\overline{\mathcal{V}}_k$, il contient lui-même soit une telle circonférence C, soit une droite D passant par l'origine. Un compact de $\overline{\mathcal{V}}_k$ ne peut pas contenir une droite D, donc contient une circonférence C et par suite est dans $\mathcal{V}_k$.

Ainsi, $\mathcal{V}_k = \overline{\mathcal{V}}_k \cap \mathcal{K}$, et l'application ϕ'_f de noyau $\mathcal{V}'_f = \overline{\mathcal{V}}_k$ est le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction ϕ_k à $\mathcal{K}$. Mais $\mathcal{V}'_f$ n'est pas engendré par un système de compacts, car les droites D ne contiennent aucun compact appartenant à $\mathcal{V}'_f$.

L'origine de cette erreur se situe page 49, in fine. De

$$\mathcal{V}'_k = \bigcap_{\mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (V_{B'} \cap \mathcal{K})$$

il n'est pas vrai que l'on déduise par dualité :

$$\mathcal{V}'_f = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (W_{B'} \cap \mathcal{F})$$

En effet, $\mathcal{V}'_k$ n'est pas le dual de $\mathcal{V}'_f$: le dual de $\mathcal{V}'_f$ est $\mathcal{V}'_g$, soit :

$$\mathcal{V}'_g = \bigcap_{\mathcal{B}'_f \cap \mathcal{K}} (V_{B'} \cap \mathcal{G})$$

et $\mathcal{V}'_k$ est égal à $\tilde{\mathcal{V}}'_g \cap \mathcal{K}$ (ϕ'_k est la restriction à $\mathcal{K}$ du plus grand prolongement de ϕ'_g).

L'intérêt principal de la proposition 4-9 résidait dans le corollaire dela Proposition 4-11, selon lequel les bonnes ouvertures s c s vérifiaient la propriété d'approximation :

$$(1) \qquad \psi(F) = \bigcup_{\substack{K \subset F \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)$$

Cette propriété commode, puisqu'elle permet de n'avoir à travailler que sur des compacts (seuls accessibles expérimentalement), ne subsiste donc pas pour les "bonnes" ouvertures définies dans la Note 112. Mais nous la retrouverons ci-dessous comme conséquence d'une condition un peu plus forte dite <u>condition de recollement</u> qu'une application ψ doit obligatoirement vérifier pour qu'il soit possible de construire morceau par morceau l'image $\psi(F)$ d'un fermé F non compact dont on ne peut connaître expérimentalement que les intersections $F \cap K$ avec certains compacts K.

<u>2 - PROLONGEMENTS FERMES D'UNE APPLICATION CROISSANTE ψ</u>

Dans la Note 112, nous avons envisagé des applications de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, E étant un espace LCD. En fait, les résultats de cette note (à l'exception évidemment de ceux qui concernent les ouvertures et les fermetures) se généralisent sans peine aux applications de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E')$, E et E' désignant deux espaces LCD non nécessairement identiques, et c'est ce point de vue plus général que nous allons adopter ici.

Une autre différence, plus importante, concernera l'espace image : nous nous limiterons ici aux applications à valeurs fermées, applications de $\mathcal{P}(E)$ ou d'une partie de $\mathcal{P}(E)$ dans l'espace $\mathfrak{F}(E')$ des fermés de E'. Soit alors $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, par exemple $\mathcal{A} = \mathcal{K}$, $\mathcal{G}$ ou $\mathfrak{F}$, et $\psi : \mathcal{A} \to \mathfrak{F}(E')$ une application croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$. Dans la Note 112, nous avons défini le plus petit prolongement de ψ sur $\mathcal{P}(E)$ par la formule

$$\underset{\sim}{\psi}(H) = \bigcup_{\substack{A \subset H \\ A \in \mathcal{A}}} \psi(A)$$

Lorsque H est un ensemble quelconque, $\underset{\sim}{\psi}(H)$ n'est pas, en général, un ensemble fermé. Nous allons donc introduire le plus petit prolongement fermé de ψ sur $\mathcal{P}(E)$. Nous le noterons $\underline{\psi}$, soit, explicitement :

$$\underline{\psi}(H) = \overline{\bigcup_{\substack{A \subset H \\ A \in \mathcal{A}}} \psi(A)} \tag{2}$$

Si $\mathcal{B}$ est une autre partie de $\mathcal{P}(E)$ (en général distincte de $\mathcal{A}$), nous pouvons ensuite considérer la restriction de $\underline{\psi}$ à $\mathcal{B}$, puis le plus grand prolongement sur $\mathcal{P}(E)$ de cette restriction. Nous le noterons $\overline{\psi}$, soit :

$$\overline{\psi}(H) = \bigcap_{\substack{B \supset H \\ B \in \mathcal{B}}} \underline{\psi}(B) \tag{3}$$

$\overline{\psi}$ est évidemment une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$, et pour tout $H \in \mathcal{P}(E)$ on a $\overline{\psi}(H) \supset \underline{\psi}(h)$ (car $\underline{\psi}$ est un prolongement de sa restriction à $\mathcal{B}$, donc est majoré par le plus grand prolongement de cette restriction). Il serait intéressant (par analogie avec la théorie des capacités) de caractériser la famille $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(E)$ des ensembles H vérifiant $\overline{\psi}(H) = \underline{\psi}(H)$. Nous nous limiterons ici à un objectif plus modeste : rechercher à quelle condition $\overline{\psi}(A) = \underline{\psi}(A)$ pour $A \in \mathcal{A}$. Cette condition est la suivante :

<u>Proposition 1</u> - Soient E et E' deux espaces LCD, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, ψ une application croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$, et $\mathcal{B}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ <u>stable pour l'intersection finie</u>. Pour tout $H \in \mathcal{P}(E)$, on pose :

$$\underline{\psi}(H) = \overline{\bigcup_{\substack{A \subset H \\ A \in \mathcal{A}}} \psi(A)} \quad , \qquad \overline{\psi}(H) = \bigcap_{\substack{B \supset H \\ B \in \mathcal{B}}} \underline{\psi}(B)$$

On a $\underline{\psi} = \overline{\psi}$ sur $\mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $A_o \in \mathcal{A}$ et tout compact $K' \in \mathcal{K}(E')$ disjoint de $\psi(A_o)$ on peut trouver $B_o \in \mathcal{B}$, $B_o \supset A_o$, tel que $A \subset B_o$ entraîne $\psi(A) \cap K' = \emptyset$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Remarquons que la définition de $\underline{\psi}$ implique $\underline{\psi}(H) = \emptyset$ s'il n'existe pas de $A \in \mathcal{A}$ $A \subset H$, et celle de $\overline{\psi}$ implique $\overline{\psi}(H) = E'$ s'il n'existe pas de $B \in \mathcal{B}$ contenant H. Montrons que la condition est nécessaire. Si $\underline{\psi}(A_o) = \overline{\psi}(A_o)$, on a $\overline{\psi}(A_o) \cap K' = \emptyset$ pour tout compact K' disjoint de $\psi(A_o)$, soit :

$$\bigcap_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ B \supset A_o}} \underline{\psi}(B) \cap K' = \emptyset$$

Comme les $\underline{\psi}(B) \cap K'$ sont compacts dans E', on peut trouver $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1,2\ldots k$ avec $B_i \supset A_o$ et $\underline{\psi}(B_1) \cap \ldots \cap \underline{\psi}(B_k) \cap K' = \emptyset$. Posons

$$B_o = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$$

On a $B_o \supset A_o$, $B_o \in \mathcal{B}$ puisque $\mathcal{B}$ est stable pour l'intersection finie, et $\underline{\psi}(B_o) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \underline{\psi}(B_i)$, puisque $\underline{\psi}$ est croissante. Il en résulte $\underline{\psi}(B_o) \cap K' = \emptyset$, et a fortiori $\psi(A) \cap K' = \emptyset$ pour $A \in \mathcal{A}$ contenu dans $\overline{B}_o$: la condition de l'énoncé est vérifiée.

Inversement, supposons vérifiée cette condition, et soit $A_o \in \mathcal{A}$. On a $\overline{\psi}(A_o) \supset \psi(A_o)$, et il faut établir l'inclusion inverse. Pour celà, il suffit d'établir $x' \notin \psi(A_o) \Rightarrow x' \notin \overline{\psi}(A_o)$ pour tout $x' \in E'$. Si $x' \notin \psi(A_o)$, E' étant LCD et $\psi(A_o)$ fermé, on peut trouver un ouvert $B' \ni x'$ relativement compact tel que $\overline{B}'$ soit disjoint de $\psi(A_o)$. D'après la condition de l'énoncé, il existe $B_o \supset A_o$, $B_o \in \mathcal{B}$ avec $\psi(A) \cap \overline{B}' = \emptyset$ pour $A \subset B_o$, $A \in \mathcal{A}$. L'ouvert B' est alors disjoint de la réunion $\bigcup_{\substack{A \subset B_o \\ A \in \mathcal{A}}} \psi(A)$, donc aussi de l'adhérence de cette réunion, qui est $\underline{\psi}(B_o)$. Par suite, $x' \notin \underline{\psi}(B_o)$ et, comme $B_o \supset A_o$, $x' \notin \psi(A_o)$, ce qui achève la démonstration.

Examinons les deux cas particuliers les plus intéressants ($\mathcal{A} = \mathcal{K}$ et $\mathcal{A} = \mathfrak{F}$), en posant d'abord un lemme qui confère une signification topologique à la continuité monotone séquentielle.

Lemme 1 - (Equivalence de la continuité monotone séquentielle et de la semi-continuité supérieure). Si E est un espace LCD et A_n une suite dans $\mathfrak{F}(E)$, on a :

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} A_n} \tag{4}$$

Si E et E' sont deux espaces LCD, une application ψ de $\mathfrak{F}(E)$ ou de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$ est s c s si et seulement si $A_n \downarrow A$ dans $\mathfrak{F}(E)$ ou $\mathcal{K}(E)$ entraîne $\psi(A_n) \downarrow \psi(A)$.

La formule (4) résulte directement de la propriété caractéristique : $x \in \overline{\lim}\, A_n$ si et seulement si tout voisinage de x rencontre une infinité d'A_n. Soit ψ une application s c s de $\mathcal{F}(E)$ ou $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. Si $A_n \downarrow A$, $A_n \in \mathcal{F}(E)$ ou $\mathcal{K}(E)$, on a aussi $A_n \to A$ pour la topologie de $\mathcal{F}(E)$ ou $\mathcal{K}(E)$, donc $\overline{\lim}\, \psi(A_n) \subset \psi(A)$ puisque ψ est s c s. Mais $A_n \supset A$ entraine $\psi(A_n) \supset \psi(A)$, et $\psi(A_n)$ converge vers $\bigcap \psi(A_n) \supset \psi(A)$ aussi bien pour la convergence séquentielle que pour la topologie de $\mathcal{F}(E')$. Par suite $\bigcap \psi(A_n) = \psi(A)$.

Inversement, supposons que ψ vérifie la continuité monotone séquentielle $\downarrow$, et soit A_n une suite convergeant vers A dans $\mathcal{F}(E)$ ou $\mathcal{K}(E)$. Il faut montrer $\overline{\lim}\, \psi(A_n) \subset \psi(A)$. D'après (4), on a :

$$\overline{\lim}\, \psi(A_n) = \bigcap_N \overline{\bigcup_{n\geq N} \psi(A_n)}$$

Comme ψ est croissante, on a $\bigcup_{n\geq N} \psi(A_n) \subset \psi\left(\overline{\bigcup_{n\geq N} A_n}\right)$, d'où $\overline{\bigcup_{n\geq N} \psi(A_n)} \subset \psi\left(\overline{\bigcup_{n\geq N} A_n}\right)$. La suite $B_N = \overline{\bigcup_{n\geq N} A_n}$ vérifie donc :

$$\overline{\lim}\, \psi(A_n) \subset \bigcap_N \psi(B_N)$$

Mais B_N est décroissante dans $\mathcal{F}(E')$ et vérifie $B_N \downarrow A$. La continuité monotone donne donc $\bigcap_N \psi(B_N) = \psi(A)$, et ψ est s c s .

Du lemme et de la proposition résulte aussitôt le corollaire suivant :

<u>Corollaire 1</u> - Dans les conditions de la proposition 1, si $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{G}(E)$, on a $\psi = \overline{\psi}$ sur $\mathcal{K}(E)$ si et seulement si ψ est une application s c s de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$, ou encore si et seulement si ψ vérifie la condition de continuité monotone séquentielle $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K} \Rightarrow \psi(K_n) \downarrow \psi(K)$.

<u>L'espace $\mathscr{L}(E)$</u> - Dans ce qui suit, nous utiliserons l'espace $\mathscr{L}(E)$ constitué des <u>ouverts L complémentaires des compacts</u> $K \in \mathcal{K}(E)$. Nous munirons en général $\mathscr{L}(E)$ de la <u>topologie localement compacte</u> déduite de celle de $\mathcal{K}(E)$, topologie engendrée par les W_F, $F \in \mathfrak{F}$ et les W^G, $G \in \mathcal{G}$.

<u>Corollaire 2</u> - Dans les conditions de la proposition 1, si $\mathcal{A} = \mathfrak{F}(E)$ et $\mathcal{B} = \mathscr{L}(E)$, on a $\psi = \overline{\Psi}$ sur $\mathfrak{F}(E)$ si et seulement si ψ est une application s c s de $\mathfrak{F}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$, ou encore si et seulement si ψ vérifie la continuité monotone séquentielle: $F_n \downarrow F$ dans $\mathfrak{F}(E) \Rightarrow \psi(F_n) \downarrow \psi(F)$.

En effet, d'après la Proposition 1, on a $\psi = \overline{\Psi}$ sur $\mathfrak{F}(E)$ si et seulement si pour tout $F_o \in \mathfrak{F}(E)$ et tout $K' \in \mathcal{K}(E')$ tel que $\psi(F_o) \in V^{K'}$ on peut trouver $L_o \in \mathscr{L}(E)$ contenant F_o tel que $F \subset L_o$ entraine $\psi(F) \in V^{K'}$. Or L_o est le complémentaire d'un $K_o \in \mathcal{K}(E)$, et $F \subset L_o$ équivaut à $F \in V^{K_o}$. Ainsi, cette condition équivaut à la semi-continuité supérieure de ψ.

<u>3 - PROLONGEMENT S C S SUR $\mathfrak{F}$ D'UNE APPLICATION ψ DEFINIE SUR $\mathcal{K}$.</u>

Nous allons maintenant examiner à quelle condition une application ψ s c s de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$ admet un prolongement s c s sur $\mathfrak{F}(E)$. Lorsqu'il en est ainsi, ψ est s c s non seulement pour la topologie myope de $\mathcal{K}(E)$ mais également pour la topologie induite sur $\mathcal{K}(E)$ par celle de $\mathfrak{F}(E)$. Nous allons voir que cette condition nécessaire est également suffisante.

En sens inverse, il conviendra aussi d'examiner à quelle condition une application ψ s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ est le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$. Autrement dit, nous allons donner dans le cas général la caractérisation des "bonnes" applications s c s que nous n'avions obtenue, dans la Note 112, que dans le cas des applications compatibles avec les translations. Auparav nt, nous allons renforcer les résultats obtenus dans les corollaires 1 et 2 ci-dessus.

<u>Proposition 2</u> - Soit ψ une application de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. Pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}(E)$, on pose $\underline{\psi}(G) = \bigcup_{\substack{K\subset G \\ K\in\mathcal{K}}} \psi(K)$, et pour tout $K \in \mathcal{K}$, $\overline{\psi}(K) = \bigcap_{\substack{G\supset K \\ G\in\mathcal{G}}} \underline{\psi}(G)$. $\underline{\psi}$ est une application s c i de $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$, et $\overline{\psi}$ est la plus petite majorante s c s de ψ. En particulier, $\overline{\psi} = \psi$ si et seulement si ψ est s c s . En sens inverse, soit ψ' une application de $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. <u>On pose, pour</u> $K \in \mathcal{K}(E)$, $\overline{\psi}'(K) = \bigcap_{G\supset K} \psi'(G)$, et pour $G \in \mathcal{G}$, $\underline{\psi}'(G) = \bigcup_{K\subset G} \overline{\psi}'(K)$. $\overline{\psi}'$ est une application s c s de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$, et $\underline{\psi}'$ est la plus grande minorante s c i de ψ. En particulier $\underline{\psi}' = \psi'$ si et seulement si ψ' est s c i.

Démontrons d'abord la première partie de l'énoncé. $\underline{\psi}$ est s c i de $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. En effet, soit G' un ouvert de E'. Il faut montrer que l'image inverse de $V_{G'}$ par $\underline{\psi}$ est un ouvert de $\mathcal{G}(E)$. Si $G \in \mathcal{G}(E)$, $\underline{\psi}(G) \in V_{G'}$ équivaut à $G'\ \overline{\bigcup_{K\subset G} \psi(K)} \neq \emptyset$, donc à $G' \cap \bigcup_{K\subset G} \psi(K) \neq \emptyset$, donc encore à : $\exists\, K \in \mathcal{K}(E)$, $K \subset G$, $\psi(K) \cap G' \neq \emptyset$, soit enfin à :

$$G \in \bigcup_{K \in \psi^{-1}(V_{G'})} W_K$$

et cet ensemble est ouvert dans $\mathcal{G}(E)$ comme réunion d'ouverts W_K, $K \in \mathcal{K}(E)$. Le corollaire 1 de la Proposition 1 montre que $\psi = \overline{\psi}$ sur $\mathcal{K}$ équivaut à ψ s c s. Si ψ_1 est une majorante s c s de ψ, on a évidemment $\underline{\psi}_1 \supset \underline{\psi}$ et $\overline{\psi}_1 \supset \overline{\psi}$ sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ respectivement. Mais $\overline{\psi}_1 = \psi_1$ d'après ce qui précède, donc ψ_1 majore $\overline{\psi}$. Enfin, $\underline{\psi}$ appliquant $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$, la démonstration de la deuxième partie de la proposition montrera que $\overline{\psi}$ est s c s sur $\mathcal{K}$. Donc $\overline{\psi}$ est bien la plus petite majorante s c s de ψ.

Soit maintenant ψ' appliquant $\mathcal{G}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. $\overline{\psi}'$ est s c s sur $\mathcal{K}(E)$. En effet, si $K' \in \mathcal{K}(E)$, $K_o \in \overline{\psi}'^{-1}(V^{K'})$ équivaut à $\bigcap_{G \supset K_o} \psi'(G) \cap K' = \emptyset$, puis (s'agissant d'une intersection de compacts, et en utilisant le fait que ψ' est croissante) à $\exists\, G_o \in \mathcal{G}$, $G_o \supset K_o$, $\psi'(G_o) \cap K' = \emptyset$. Pour tout $K \subset G_o$ on a alors $\overline{\psi}'(K) \cap K' = \emptyset$, et par suite $\overline{\psi}'$ est s c s sur $\mathcal{K}$.

La première partie de la démonstration montre ensuite que $\underline{\psi}'$ est s c i sur $\mathcal{G}$ et minore manifestement ψ'. Si $\underline{\psi}' = \psi'$, ψ' est donc s c i. Montrons, inversement que si ψ' est s c i, on a $\underline{\psi}' = \psi'$. Il faut, pour celà, montrer pour tout $G_o \in \mathcal{G}(E)$ et tout $G' \in \mathcal{G}(E')$ l'implication :

$$\psi'(G_o) \cap G' \neq \emptyset \Rightarrow \underline{\psi}'(G_o) \cap G' \neq \emptyset$$

Or, ψ' étant s c i, $\psi'(G_o) \in V_{G'}$, entraine qu'il existe $K_o \in \mathcal{K}$, $K_o \subset G_o$ tel que $\psi(G) \in V_{G'}$, pour tout $G \in W_{K_o}$. Prenons alors un ouvert B relativement compact vérifiant $K_o \subset B \subset \overline{B} \subset G_o$. $B \in W_{K_o}$ donne $\psi'(B) \cap G' \neq \emptyset$, donc $\overline{\psi}'(\overline{B}) \cap G' \neq \emptyset$, et, comme $\overline{B}$ est inclus dans G_o, $\underline{\psi}'(G_o) \cap G' \neq \emptyset$. Donc $\underline{\psi}' = \psi'$.

Il en résulte alors, si ψ' n'est pas s c i, que $\underline{\psi}'$ est la plus grande minorante s c i de ψ'. En effet, si ψ'_1 est une minorante s c i de ψ', on a $\overline{\Psi}'_1 \subset \overline{\Psi}'$, puis $\underline{\psi}'_1 \subset \underline{\psi}'$. Mais $\psi'_1 = \underline{\psi}'_1$ d'après ce qui précède (puisque ψ'_1 est s c i), donc $\psi'_1 \subset \underline{\psi}'$, et $\underline{\psi}'$ est la plus grande minorante s c i de ψ'.

Proposition 3 - Soit ψ une application de $\mathfrak{F}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$. Pour tout ouvert $L \in \mathcal{L}(E)$ complémentaire d'un compact de E on pose $\underline{\psi}(L) = \bigcup\limits_{F \subset L} \psi(F)$, et pour tout $F \in \mathfrak{F}(E)$, $\overline{\Psi}(F) = \bigcap\limits_{L \supset F} \underline{\psi}(L)$. Alors $\underline{\psi}$ est une application s c i de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$, et $\overline{\Psi}$ est la plus petite majorante s c s de ψ sur $\mathfrak{F}$. En particulier, $\psi = \overline{\Psi}$ sur $\mathfrak{F}$ si et seulement si ψ est s c s.

Soit ψ' une application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$. Pour $F \in \mathfrak{F}(E)$, on pose $\overline{\Psi}'(F) = \bigcap\limits_{L \supset F} \psi'(L)$, et, pour $L \in \mathcal{L}$, $\underline{\psi}'(L) = \bigcup\limits_{F \subset L} \overline{\Psi}'(F)$. Alors $\overline{\Psi}'$ est une application s c s de $\mathfrak{F}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$, et $\underline{\psi}'$ est la plus grande minorante s c i de ψ' sur $\mathcal{L}$. En particulier, $\psi' =$ $= \underline{\psi}'$ si et seulement si ψ' est s c i sur $\mathcal{L}$.

La démonstration est identique, point par point, à celle de la proposition 2, à ceci près que les $\{K \in \mathcal{K},\ K \subset G\}$ ouverts dans $\mathcal{K}$ et les $\{G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$ ouverts dans $\mathcal{G}$ sont remplacés par des $\{F \in \mathfrak{F},\ F \subset L\}$ ouverts dans $\mathfrak{F}$ et $\{L \in \mathcal{L},\ L \supset F\}$ ouverts dans $\mathcal{L}$ respectivement.

Caractérisons maintenant les "bonnes" applications s c s.

Proposition 4 - Soit ψ une application de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathfrak{F}(E')$. Pour que ψ admette un prolongement s c s sur $\mathfrak{F}(E)$, il faut et il suffit que ψ soit une application s c s lorsque $\mathcal{K}(E)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathfrak{F}(E)$.

On remarque que si ψ est s c s pour la topologie induite sur $\mathcal{K}(E)$ par $\mathcal{F}(E)$, elle est a fortiori s c s pour la topologie myope, qui est plus fine. Cette condition s'énonce ainsi : si $K \in \mathcal{K}(E)$ et $K' \in \mathcal{K}(E')$ vérifient $K' \cap \psi(K) = \emptyset$, on peut trouver K_o compact dans E tel que $K' \cap \psi(H) = \emptyset$ pour tout compact $H \in \mathcal{K}(E)$ disjoint de K_o. La condition de l'énoncé est évidemment nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée. Posons alors sur $\mathcal{L}(E)$ et sur $\mathcal{F}(E)$:

$$\psi_\ell(L) = \overline{\bigcup_{\substack{K \subset L \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)} \quad , \quad \psi_f(F) = \bigcap_{\substack{L \supset F \\ L \in \mathcal{L}}} \psi_\ell(L)$$

D'après la Proposition 2, ψ_ℓ est s c i sur $\mathcal{L}$ pour la topologie induite sur $\mathcal{L}$ par celle de $\mathcal{G}$, donc, à fortiori, pour la topologie myope de $\mathcal{L}$ (qui est plus fine). D'après la Proposition 3, ψ_f est alors s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. Il reste à montrer que $\psi_f = \psi$ sur $\mathcal{K}(E)$.

En effet, si $K \in \mathcal{K}(E)$, on a évidemment $\psi(K) \subset \psi_f(K)$. Montrons l'inclusion inverse - ce qui achèvera la démonstration. Soit donc $x' \notin \psi(K)$, et (E' étant LCD), $B' \ni x'$ un ouvert relativement compact tel que $\overline{B}'$ soit disjoint de $\psi(K)$. De $\psi(K) \in V^{\overline{B}'}$ résulte, d'après la condition de l'énoncé, qu'il existe un compact $K_o \in \mathcal{K}(E)$ disjoint de K vérifiant $V^{K_o} \subset \psi^{-1}(V^{\overline{B}'})$. Soit $L_o \in \mathcal{L}(E)$ le complémentaire de K_o. Tout compact contenu dans L_o a son image disjointe de $\overline{B}'$ dans $\mathcal{F}(E')$. Il en résulte $\psi_\ell(L_o) \cap B' = \emptyset$ et, comme $K \subset L_o$, $\psi_f(K) \cap B' = \emptyset$, donc a fortiori $x' \notin \psi_f(K)$. On a donc bien $\psi(K) \supset \psi_f(K)$, et l'égalité.

<u>Corollaire</u> - Soit ψ une application de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. Posons sur $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$:

$$\psi_\ell(L) = \overline{\bigcup_{K \subset L} \psi(K)} \quad , \quad \psi_f(F) = \bigcap_{L \supset F} \psi_\ell(L)$$

Alors ψ_f est la plus petite application s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ majorant ψ sur $\mathcal{K}(E)$, et ψ_f est aussi le plus petit prolongement s c s sur $\mathcal{F}$ de sa restriction à $\mathcal{K}$.

La première partie de la démonstration de la proposition subsiste, et montre que ψ_ℓ est s c i sur $\mathcal{L}$ et ψ_f s c s sur $\mathcal{F}$. Soit ψ_1 une application s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ majorant ψ sur $\mathcal{K}$, et $\psi' \supset \psi$ sa restriction à $\mathcal{K}$. On en déduit $\psi'_\ell \supset \psi_\ell$ puis $\psi'_f \supset \psi_f$. Mais ψ_1 est s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ et vérifie $\overline{\psi}_1 = \psi_1$ sur $\mathcal{F}$ d'après la Proposition 2. Or pour $L \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\underline{\psi}_1(L) = \overline{\bigcup_{\substack{F \subset \mathcal{L} \\ F \in \mathcal{F}}} \psi_1(F)} \supset \overline{\bigcup_{\substack{K \subset \mathcal{L} \\ K \in \mathcal{K}}} \psi'(K)} = \psi'_\ell(L)$$

Par suite $\overline{\psi}_1 = \psi_1$ majore ψ'_f sur $\mathcal{F}(E)$, donc aussi ψ_f - et ψ_f est la plus petite application s c s majorant ψ sur $\mathcal{K}$.

Soit enfin ψ'' la restriction de ψ_f à $\mathcal{K}$ et ψ_2 un prolongement de ψ'' s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. On a $\psi_2 \supset \psi_f$, et ψ_f est le plus petit prolongement s c s de sa restriction à $\mathcal{K}$. En effet, ψ'' majore ψ sur $\mathcal{K}$, d'où $\psi''_\ell \supset \psi_\ell$ et $\psi''_f \supset \psi_f$ sur $\mathcal{F}$. Mais on vérifie comme ci-dessus $\underline{\psi}_2 \supset \psi''_\ell$, puis $\psi_2 = \overline{\psi}_2 \supset \psi''_f$, d'où $\psi_2 \supset \psi_f$.

<u>Proposition 5</u> - Soit ψ' une application s c s de $\mathcal{F}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$. Pour que ψ' soit le plus petit prolongement s c s de sa restriction a $\mathcal{K}(E)$, il faut et il suffit que ψ' soit s c i sur $\mathcal{L}(E)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{G}(E)$.

Nous désignerons par ψ la restriction de ψ' à $\mathcal{K}(E)$, et par ψ_ℓ et ψ_f les applications de $\mathcal{L}$ et de $\mathfrak{F}$ dans $\mathfrak{F}(E')$ construites comme dans le corollaire de la Proposition 4. ψ_ℓ est la restriction à $\mathcal{L}$ du plus petit prolongement fermé $\underline{\psi}$ de ψ, donc est s c i pour la topologie induite sur $\mathcal{L}$ par celle de $\mathfrak{G}$ (Proposition 2).

Montrons que la condition de l'énoncé est nécessaire. Si ψ' est le plus petit prolongement s c s de sa restriction a $\mathcal{K}$, on a $\psi' = \psi_f$ d'après le corollaire de la Proposition 3. D'après la Proposition 2, ψ_ℓ est le plus petit prolongement fermé de ψ_f sur $\mathcal{L}$. On a donc $\underline{\psi}' = \psi_\ell$ sur $\mathcal{L}$, et ψ' est s c i pour la topologie induite sur $\mathcal{L}$ par celle de $\mathfrak{G}$, puisque ψ_ℓ possède cette propriété.

Inversement, supposons que $\underline{\psi}'$ soit s c i sur $\mathcal{L}$ pour la topologie induite par celle de $\mathfrak{G}$. On a $\psi_f \subset \psi'$, d'après le corollaire de la Proposition 3, d'où $\psi_\ell \subset \underline{\psi}'$ sur $\mathcal{L}$. Montrons l'inclusion inverse, d'où résultera $\psi_\ell = \underline{\psi}'$ sur $\mathcal{L}$, puis $\psi_f = \overline{\psi}' = \psi'$ sur $\mathfrak{F}$, ce qui achèvera la démonstration.

Soit donc $L_0 \in \mathcal{L}(E)$. Pour établir $\underline{\psi}'(L_0) \subset \psi\ (L_0)$, montrons que si un ouvert $G' \in \mathfrak{G}(E')$ rencontre $\underline{\psi}'(L_0)$, il rencontre aussi $\psi\ (L_0)$. Si $\underline{\psi}'(L_0) \cap G' \neq \emptyset$, on peut trouver un ouvert B' relativement compact rencontrant $\underline{\psi}'(L_0)$ et vérifiant $B' \subset \overline{B}' \subset G'$. Comme $\underline{\psi}'$ est s c i pour la topologie induite sur $\mathcal{L}$ par $\mathfrak{G}$, $\underline{\psi}'(L_0) \in V_{B'}$ entraine qu'il existe un <u>compact</u> $K_0 \subset L_0$ tel que $L \supset K_0$ entraine $\underline{\psi}'(L) \cap B' \neq \emptyset$ pour tout $L \in \mathcal{L}$. On a alors aussi, a fortiori, $\underline{\psi}'(L) \cap \overline{B}' \neq \emptyset$, puis $\bigcap_{L \supset K_0} \underline{\psi}'(L) \cap \overline{B}' \neq \emptyset$, puisque les $\underline{\psi}'(L) \cap \overline{B}'$ sont compacts, donc $\overline{\psi}'(K_0) = \psi'(K_0) = \psi(K_0)$ rencontre $\overline{B}'$ et a fortiori $G' \supset \overline{B}'$. Mais $K_0 \subset L_0$ et $\psi(K_0) \cap G' \neq \emptyset$ entraine alors que $\psi_\ell(L_0)$ rencontre G' - QED.

4 - L'AXIOME DU RECOLLEMENT

Soit ψ une application de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ et $\underline{\psi}$ son plus petit prolongement fermé sur $\mathcal{P}(E)$ défini par :

$$\underline{\psi}(H) = \overline{\bigcup_{\substack{K \subset H \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)} \qquad \left(H \in \mathcal{P}(E)\right)$$

Lorsque l'ensemble H n'est pas borné, on ne peut connaître expérimentalement que les intersections $H \cap K$ de H avec des ensembles K plus ou moins grands, mais bornés (par exemple des compacts). Si nous désirons pouvoir construire au moins localement l'image $\underline{\psi}(H)$, c'est-à-dire déterminer avec exactitude l'intersection $K'_o \cap \underline{\psi}(H)$ de cette image avec un compact $K'_o \in \mathcal{K}(E')$ donné, il sera nécessaire quencette image locale ne dépende que d'une donnée locale concernant H, soit de l'intersection $K_o \cap H$ pour un compact $K_o \in \mathcal{K}(E)$ (dépendant de K'_o mais non de H). Autrement dit, dans une étude expérimentale, on ne pourra utiliser que des applications ψ vérifiant l'axiome suivant :

<u>Axiome du recollement</u> : $\forall\, K'_o \in \mathcal{K}(E')\ \exists\, K_o \in \mathcal{K}(E)\ \forall\, H \in \mathcal{P}(E)$
$\underline{\psi}(K_o \cap H) \supset K'_o \cap \underline{\psi}(H)$ $\left(\text{ou, ce qui revient au même, } K'_o \cap \underline{\psi}(K_o \cap H) = \right.$
$\left. = K'_o \cap \underline{\psi}(H)\right)$

Notons tout de suite que <u>l'axiome du recollement est vérifié pour</u> tout $H \in \mathcal{P}(E)$ <u>dès qu'il est vérifié pour tout compact</u> $K \in \mathcal{K}(E)$.

En effet, supposons l'axiome vérifié sur $\mathcal{K}(E)$, et soit $H \in \mathcal{P}(E)$. Soit K'_o un compact, et $x \in K'_o \cap \underline{\psi}(H) = K'_o \cap \overline{\bigcup_{K \subset H} \psi(K)}$.

On peut donc trouver une suite x_n convergeant vers x dans E' et une suite K_n dans $\mathcal{K}(E)$ avec $K_n \subset H$ et $x_n \in \psi(K_n)$. Si $B'_o \supset K'_o$ est un ouvert relativement compact contenant K'_o, on a $x_n \in \psi(K_n) \cap B'_o$ pour n assez grand. Comme l'axiome du recollement est vérifié sur $\mathcal{K}(E)$ et que $\overline{B}'_o$ est compact, il existe $K_o \in \mathcal{K}(E)$, indépendant de H, tel que

$$\psi(K_o \cap K) \supset \overline{B}'_o \cap \psi(K)$$

pour tout $K \in \mathcal{K}(E)$. En particulier, avec $K = K_n$, on obtient $x_n \in \psi(K_o \cap K_n)$ pour n assez grand, d'où $x_n \in \underline{\psi}(K_o \cap H)$ et, comme $x_n \to x$, $x \in \underline{\psi}(K_o \cap H)$. Par suite, l'axiome du recollement est vérifié sur $\mathcal{P}(E)$ entier.

Cet axiome du recollement entraîne la propriété d'approximation (1). Plus précisément :

<u>Proposition 6</u> - Soit ψ une application s c s de $\mathcal{K}(E)$ dans $\mathcal{F}(E')$ vérifiant l'axiome du recollement. Alors le plus petit prolongement fermé de ψ est s c s sur $\mathcal{F}(E)$, et vérifie sur $\mathcal{F}$ la propriété d'approximation :

$$\underline{\psi}(F) = \bigcup_{\substack{K \subset F \\ K \in \mathcal{K}}} \psi(K)$$

De même si l'on pose $\overline{\Psi}(F) = \bigcap_{\substack{G \supset F \\ G \in \mathcal{G}}} \underline{\psi}(G)$, on a pour tout $F \in \mathcal{F}(E)$:

$$\overline{\Psi}(F) = \bigcap_{\substack{L \supset F \\ L \in \mathcal{L}}} \underline{\psi}(L) = \underline{\psi}(F)$$

En effet, soit K'_o un compact de E' et K_o le compact de E tel que :

$$K'_o \cap \psi(K) \subset \psi(K_o \cap K) \qquad \forall\ K \in \mathcal{K}(E)$$

Il en résulte $\psi(K) \in V^{K'_o}$ si et seulement si $\psi(K \cap K_o) \in V^{K'_o}$. Or, ψ étant s c s pour la topologie myope de $\mathcal{K}(E)$, $\psi(K \cap K_o) \in V^{K'_o}$ entraine qu'il existe un fermé $F \in \mathcal{F}(E)$ disjoint de $K \cap K_o$ tel que $K_1 \cap K_o \in V^F \Rightarrow \psi(K_1 \cap K_o) \in V^{K'_o}$ pour tout compact K_1. Ainsi, $K_1 \cap K_o \cap F = \emptyset$, c'est-à-dire $K_1 \in V^{K_o \cap F}$ entraine $\psi(K_1) \in V^{K'_o}$. Comme $K_o \cap F$ est compact, il en résulte que ψ est s c i pour la topologie induite sur $\mathcal{K}(E)$ par celle de $\mathcal{G}(E)$.

D'après la proposition 4, ψ admet donc un prolongement s c s sur $\mathcal{F}(E)$. Posons :

$$\psi_f(F) = \bigcap_{\substack{L \supset \overset{\circ}{F} \\ L \in \mathcal{L}}} \psi(L)$$

ψ_f est le plus petit prolongement de ψ scs sur $\mathcal{F}$ (corollaire de la Proposition 4). $\underline{\psi}$ vérifie l'axiome du recollement. Montrons qu'il en est de même de ψ_f. En effet, pour $K'_o \in \mathcal{K}(E')$, désignons par $K_o = K_o(K'_o)$ le compact de $\mathcal{K}(E)$ associé à K'_o dans l'énoncé de l'axiome du recollement. On a donc :

$$K'_o \cap \psi_f(F) = \bigcap_{L \supset \overset{\circ}{F}} \psi(L) \cap K'_o \subset \bigcap_{L \supset \overset{\circ}{F}} \psi(L \cap K_o) \subset \bigcap_{L \supset F}\ \bigcap_{G \supset \overset{\circ}{K_o}} \psi(L \cap G)$$

$$= \bigcap_{G \supset \overset{\circ}{\overline{F \cap K_o}}} \psi(G) = \overline{\psi}(F \cap K_o) = \psi(F \cap K_o)$$

De $K'_o \cap \psi_f(F) \subset \psi(F \cap K_o)$ résulte alors, lorsque K'_o décrit $\mathcal{K}(E')$

$$\psi_f(F) = \bigcup_{K'_o \in \mathcal{K}(E')} K'_o \cap \psi_f(F) \subset \bigcup \psi(F \cap K_o(K'_o)) \subset \bigcup_{K \subset F} \psi(K)$$

Par suite, l'inclusion inverse étant évidente, on a :

$$\psi_f(F) = \bigcup_{K \subset F} \psi(K)$$

Cet ensemble étant fermé, il en résulte $\psi_f = \underline{\psi}$ sur $\mathcal{F}(E)$, et $\underline{\psi}$ est s c s sur $\mathcal{F}(E)$. D'après la proposition 4, on a sur $\mathcal{F}$:

$$\psi_f(F) = \bigcap_{L \supset \overset{\circ}{F}} \psi(L) \supset \bigcap_{G \supset \overset{\circ}{F}} \psi(G) = \overline{\psi}(F)$$

Mais $\psi_f = \underline{\psi} \subset \overline{\psi}$ sur $\mathcal{F}$ montre que l'inclusion est une égalité, ce qui achève d'établir la proposition.

Examinons maintenant le cas particulier le plus intéressant pour les applications, celui où ψ est compatible avec les translations.

<u>Proposition 7</u> - Pour qu'une application ψ s c s de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ou de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ compatible avec les translations vérifie l'axiome du recollement, il faut et il suffit que son noyau $\mathcal{V}$ admette un générateur compact dans $\mathcal{K}(E)$.

On sait que $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$ est compact dans $\mathcal{K}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est fermé dans $\mathcal{K}$ et si tous les $B \in \mathcal{B}$ sont contenus dans un compact fixe K_o. Montrons que la condition est nécessaire. Si ψ vérifie l'axiome du recollement, soit K_o le compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $\{0\} \cap \psi(A) \subset \psi(A \cap K_o)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ $\big(\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)\big)$. Si l'on désigne par $\mathcal{V}$ le noyau de ψ($\mathcal{V} = \psi^{-1}(V_{\{o\}}) \cap \mathcal{A}$), on a donc $A \in \mathcal{V} \Rightarrow A \cap K_o \in \mathcal{V}$. La famille $\mathcal{B}_o = \{A \cap K_o \,,\, A \in \mathcal{V}\}$ est donc un générateur de $\mathcal{V}$ dont les éléments $A \cap K_o$ sont compacts et contenus dans le compact fixe K_o. Comme $\mathcal{V}$ est fermé dans $\mathcal{A}$ et contient $\mathcal{B}_o$, la fermeture $\mathcal{B}$ de $\mathcal{B}_o$ (prise indifféremment au sens de la topologie de $\mathcal{K}$ ou de celle de $\mathcal{F}$) est un générateur de $\mathcal{V}$ compact dans $\mathcal{K}$.

Inversement, si $\mathcal{V}$ admet un générateur $\mathcal{B}$ compact dans $\mathcal{K}$, soit K_o un compact contenant tous les $B \in \mathcal{B}$. Pour tout $A \in \mathcal{V}$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset A \cap K_o$, donc $A \cap K_o \in \mathcal{V}$. Autrement dit, on a :

$$\{0\} \cap \psi(A) \subset \psi(A \cap K_o)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on en déduit $\{0\} \cap \psi(A_{-x}) \subset \psi(A_{-x} \cap K_o)$, et, en utilisant l'invariance par translation, $\{x\} \cap \psi(A) \subset \psi(A \cap K_o \oplus x)$. Si K_o' est un compact de $\mathbb{R}^n$, on en tire, en prenant la réunion en $x \in K_o'$:

$$K_o' \cap \psi(A) \subset \bigcup_{x \in K_o'} \psi(A \cap K_o \oplus x) \subset \psi(A \cap \bigcup_{x \in K_o'} K_o \oplus x) =$$

$$= \psi(A \cap K_o \oplus K_o')$$

Par conséquent, ψ vérifie l'axiome du recollement, le compact associé à K_o' étant $K_o \oplus K_o'$.

<u>Corollaire</u> - Soient ψ_f et ψ_k deux applications compatibles avec les translations s c s de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ respectivement dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, dont les noyaux $\mathcal{V}_f$ et $\mathcal{V}_k$ sont associés par les formules réciproques

(a) $$\mathcal{V}_f = \bigcap_{K \in \mathcal{V}_k} V_K \cap \mathcal{F} \quad , \quad \mathcal{V}_k = \bigcap_{F \in \mathcal{V}_f} V_F \cap \mathcal{K}$$

Pour que ψ_f vérifie le principe du recollement, il faut et il suffit que ψ_k le vérifie. $\mathcal{V}_f$ admet un générateur compact dans $\mathcal{K}(E)$ si et seulement si $\mathcal{V}_k$ en admet un.

D'après la proposition, il suffit d'établir le dernier énoncé. On a vu que $\mathcal{V}_f$ a un générateur compact si et seulement si il existe $K_o \in \mathcal{K}$ tel que $A \in \mathcal{V}_f \Rightarrow A \cap K_o \in \mathcal{V}_f$, ce qui s'explicite :

$$\exists\ K_o \in \mathcal{K},\ \forall\ A \in \mathcal{V}_f\quad \forall\ K \in \mathcal{V}_k\ ,\ A \cap K \cap K_o \neq \emptyset$$

d'après la première relation (a). Cette écriture fait intervenir de manière symétrique les deux noyaux $\mathcal{V}_f$ et $\mathcal{V}_k$ et signifie donc aussi $K \in \mathcal{V}_k \Rightarrow K \cap K_o \in \mathcal{V}_k$, c'est-à-dire : $\mathcal{V}_k$ a un générateur compact dans $\mathcal{K}$.

<u>Exemple</u> - Considérons, dans $\mathbb{R}^n$, la granulométrie $\psi_\mu(A) = \bigcup_{\lambda \geq \mu} A_{\lambda B}$ selon un compact B de $\mathbb{R}^n$. Les Φ_μ vérifient la condition du recollement dès que $\psi_1 = \psi$ la vérifie. L'application $\psi(A) = \bigcup_{\lambda \geq 1} A_{\lambda B}$, pour $A \in \mathcal{K}$, doit donc avoir un noyau admettant un générateur compact dans $\mathcal{K}$. Il en est ainsi si et seulement si on peut trouver $\mu_o \geq 1$ tel que $\psi(A) = \bigcup_{1 \leq \lambda \leq \mu_o} A_{\lambda B}$. En effet, comme ψ est une ouverture, $\mathcal{V}$ admet un générateur compact si et seulement si il existe $\mathcal{B}_o \in \mathcal{K}(\mathcal{K})$ tel que la famille stable pour la réunion et les translations engendrée par $\mathcal{B}_o$ coïncide avec la famille $\mathcal{B}$ des invariants de ψ, constituée des translatés des λB, $\lambda \geq 1$. Les éléments de $\mathcal{B}_o$ sont alors contenus dans une boule fermée de rayon R_o . Si l'on désigne par μ_o le sup des $\lambda \geq 1$ tels qu'un translaté de λB soit dans $\mathcal{B}_o$, tout homothétique $\lambda' B$, $\lambda' \geq \mu_o$ est réunion de translatés d'éléments de $\mathcal{B}_o$, et par suite on a bien $\psi(A) = \bigcup_{1 \leq \lambda \leq \mu_o} A_{\lambda B}$. La réciproque est immédiate.

Si $\mu_o = 1$, on a vu dans la note 112 que le compact B est nécessairement convexe. Pour $\mu_o > 1$, il n'en est plus nécessairement ainsi, et il existe des compacts B non convexes tels que la granulométrie selon B vérifie la condition de recollement.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, prenons pour B la couronne fermée comprise entre les deux circonférences de centre O et de rayon R_0 et R_1 ($R_0 < R_1$). On vérifie sans peine que pour $\lambda \geq \frac{2(R_0+R_1)}{R_1-R_0}$, λB est réunion de translatés de B, et par suite :

$$\psi(A) = \bigcup_{1 \leq \lambda \leq \mu_0} A_{\lambda B} \quad , \quad \mu_0 = \frac{2(R_0+R_1)}{R_1-R_0}$$

On a vu les avantages qu'entraîne l'introduction du noyau $\mathcal{V}$ dans l'étude des applications compatibles avec les translations. Nous allons essayer de généraliser ce point de vue.

5 - LES ESPACES HOMEOMORPHES $\mathcal{F}_V(\mathcal{K})$ ET $\mathcal{F}_V(\mathcal{F})$

Soit E un espace LCD (non compact en général), et $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$, qui sera toujours, dans ce qui suit, soit $\mathcal{F}(E)$, soit $\mathcal{K}(E)$. Nous dirons qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$ est permise dans $\mathcal{A}$ pour la réunion si $A' \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{V}$ et $A' \supset A$ entraîne $A' \in \mathcal{V}$. Notons que si $\mathcal{V}$ est permise pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$ son adhérence dans $\mathcal{A}$ est encore permise pour $\cup$. En effet, si une suite $A_n \in \mathcal{V}$ converge vers $A \in \overline{\mathcal{V}}$ dans $\mathcal{A}$ et si $A' \in \mathcal{A}$ contient A, on a $A_n \cup A \in \mathcal{V}$ (car $\mathcal{A}$ est stable pour la réunion, et $\mathcal{V}$ permis pour $\cup$) et $A_n \cup A$ converge vers $A \cup A' = A'$ dans $\mathcal{A}$ (à cause de la continuité de la réunion dans $\mathcal{A} = \mathcal{F}$ ou $\mathcal{K}$), et par suite $A' \in \overline{\mathcal{V}}$. De même, l'ensemble constitué des familles $\mathcal{V}$ permises pour $\cup$ et fermées dans $\mathcal{A}$ est un sous-espace fermé, donc compact, de $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$. En effet, soit $\mathcal{O}_n$ une suite de familles permises pour $\cup$ et fermées dans $\mathcal{A}$ convergeant vers $\mathcal{O}$ dans $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$, et soient $A \in \mathcal{O}$, $A' \in \mathcal{A}$, $A' \supset A$. On peut trouver une suite $A_n \in \mathcal{O}_n$ convergeant vers A dans $\mathcal{A}$. Comme $A_n \cup A' \in \mathcal{O}_n$ converge vers $A \cup A' = A'$ dans $\mathcal{A}$, on a $A' \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ est permis pour $\cup$. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à l'espace $\mathfrak{F}_V(\mathcal{A})$ constitué des familles $\mathcal{O}$ permises pour $\cup$ et fermées dans $\mathcal{A}$ qui ne sont ni vides ni identiques à $\mathcal{A}$, ou, ce qui revient au même, telles que $\mathcal{O} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{O}$. $\mathfrak{F}_V(\mathcal{A})$ est un espace localement compact (puisqu'il se déduit d'un espace compact par enlèvement des deux éléments $\emptyset$ et $\mathcal{A}$). Pour qu'il soit compact, il faut et il suffit que l'espace de départ E soit lui-même compact.

Nous allons maintenant construire un système de générateurs pour la topologie induite sur $\mathfrak{F}_V(\mathcal{A})$ par celle de $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ ou $\mathfrak{F}$, en nous appuyant sur le lemme suivant :

Lemme 2 - Soit E un espace LCD, $\mathcal{B}$ une base de la topologie de E, $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}(E)$ une classe de compacts stable pour l'intersection finie telle que la classe stable pour l'intersection infinie et la réunion finie engendrée par $\mathcal{C}$ coïncide avec $\mathcal{K}(E)$. Alors la topologie de $\mathfrak{F}(E)$ est engendrée par les V_B, $B \in \mathcal{B}$ et les V^C, $C \in \mathcal{C}$.

On sait que la topologie de $\mathfrak{F}(E)$ est engendrée par deux sortes d'ouverts : les ouverts de type s c i (qui engendrent la topologie de la semi-continuité inférieure), qui sont les V_G, $G \in \mathcal{G}(E)$; et les ouverts de type s c s (qui engendrent la topologie de la semi-continuité supérieure) qui sont les V^K, $K \in \mathcal{K}(E)$.

Tout $G \in \mathcal{G}$ est de la forme $G = \cup B_i$ pour des $B_i \in \mathcal{B}$, et on a

$V_g = V_{\cup B_i} = \bigcup V_{B_i}$. Par suite, les V_B , $B \in \mathcal{B}$ constituent une base pour la topologie s c i sur $\mathcal{F}(E)$.

Désignons par $\mathcal{C}'$ la classe stable pour la réunion et l'intersection finies engendrées par $\mathcal{C}$. Tout compact $K \in \mathcal{K}(E)$ est intersection d'éléments de $\mathcal{C}'$, soit $K = \bigcap_{i \in I} C'_i$. Si un fermé F est dans V^K , on a $\bigcap_{i \in I} (C'_i \cap F) = \emptyset$. Comme les C'_i sont compacts, on peut trouver un nombre fini d'indices $i_1, \ldots i_k$ dans I avec $F \cap C'_{i_1} \cap \ldots \cap C'_{i_k} = \emptyset$. D'ailleurs $C' = C'_{i_1} \cap \ldots \cap C'_{i_k}$ est dans $\mathcal{C}'$ et contient K . On a donc $F \in V^{C'} \subset V^K$. Etant dans $\mathcal{C}'$, C' est de la forme $C_1 \cup \ldots \cup C_n$, $C_j \in \mathcal{C}$ et $V^{C'} = V^{\cup C_j} = \bigcap_{j=1}^{n} V^{C_j}$. Par suite les ouverts V^C , $C \in \mathcal{C}$ engendrent la topologie s c s.

Appliquons ce lemme à l'espace LCD $\mathcal{A}$ (= $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{F}$).
Si $\mathcal{A} = \mathcal{F}(E)$, on peut prendre pour $\mathcal{B}$ la classe des $V^K_{G_1, \ldots G_k} \cap \mathcal{A}$ (avec $K \in \mathcal{K}$ et $G_i \in \mathcal{G}$), et pour $\mathcal{C}$ la classe des $V^G_{K_1, \ldots K_k} \cap \mathcal{A}$ (avec $G \in \mathcal{G}$ et $K_i \in \mathcal{K}$). De même, si $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)$, on peut prendre pour $\mathcal{B}$ la classe des $V^F_{G_1, \ldots G_k}$ ($F \in \mathcal{F}$ et $G_i \in \mathcal{G}$) et pour $\mathcal{C}$ la classe des $V^{K^c}_{F_1, \ldots F_k}$ ($K \in \mathcal{K}$, $F_i \in \mathcal{F}$). Dans ce dernier cas, on voit apparaître le complémentaire K^c d'un compact, au lieu d'un ouvert quelconque, parce que les ensembles d'une famille compacte dans $\mathcal{K}(E)$ sont toujours contenus dans un compact fixe.

En désignant par $\mathcal{A}'$ celui des deux espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}$ qui n'est pas $\mathcal{A}$, on voit que l'on a toujours :

$$\mathcal{B} = \left\{ V^{A'}_{G_1, \ldots G_k} \cap \mathcal{A} \ ; \ A' \in \mathcal{A}' \ , \ G_i \in \mathcal{G} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ V^{A_0^c}_{A'_1, \ldots A'_k} \cap \mathcal{A} ; \ A_0 \in \mathcal{A}, \ A'_i \in \mathcal{A}' \right\}$$

et les V_Γ, $\Gamma \in \mathcal{B}$ engendrent la topologie s c i sur $\mathfrak{F}(\mathcal{Q})$, tandis que les V^χ, $\chi \in \mathcal{C}$ engendrent la topologie s c s.

Examinons maintenant la topologie induite sur $\mathfrak{F}_U(\mathcal{Q})$ par celle de $\mathfrak{F}(\mathcal{Q})$, topologie localement compacte, rappelons-le. Soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{F}_U(\mathcal{Q})$ (c'est-à-dire : $\mathcal{O}$ fermé et permis pour $\cup$ dans $\mathcal{Q}$, $\mathcal{O} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{O}$). Soit $\chi \in \mathcal{C}$ un compact de la forme

$$\chi = V^{A_o^c}_{A'_1, \dots A'_k}$$

$\mathcal{O} \in V^\chi$, c'est-à-dire $\mathcal{O} \cap \chi = \emptyset$ signifie que tout $A \in \mathcal{O}$ rencontre A_o^c ou est disjoint de l'un des A'_i. Comme $\mathcal{O} \neq \emptyset$, soit A un élément de $\mathcal{O}$. Supposons $A \cap A_o^c = \emptyset$. A n'est pas vide (puisque $\emptyset \notin \mathcal{O}$) et est disjoint de l'un des A'_i, par exemple $A \cap A'_1 = \emptyset$. On peut toujours supposer $A'_1 \not\subset A_o^c$ (sinon A'_1 est superflu dans l' écriture de χ). Soit donc $x_1 \in A'_1$, $x_1 \notin A_o^c$. L'ensemble $A \cup \{x_1\}$ est dans $\mathcal{O}$, donc dans V^χ, et il est disjoint de A_o^c. Donc il est disjoint d'un autre A'_i, soit A'_2. En réitérant le raisonnement, on arrive à un ensemble $A \cup \{x_1, \dots x_l\}$ disjoint de A_o^c et rencontrant chacun des A'_i, appartenant à $\mathcal{O}$, donc à V^χ, ce qui est contradictoire. Par suite A rencontre A_o^c, et :

$$\mathcal{O} \in V^{V^{A_o^c}} \subset V^\chi$$

On peut donc remplacer V^χ par l'ensemble des $\mathcal{O}$ disjoint de $V^{A_o^c}$, c'est-à-dire par la famille $\left\{ \mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathfrak{F}_U(\mathcal{Q}),\ \mathcal{O} \subset V_{A_o^c} \right\}$

Soit, maintenant, $\Gamma = V^{A'}_{G_1, \dots G_k}$ un élément de $\mathcal{B}$. $\mathcal{O} \in V_\Gamma$ signifie que $\mathcal{O}$ rencontre $V^{A'}_{G_1, \dots G_k}$. Les G_i ne sont pas contenus dans A' (sinon $\Gamma = \emptyset$, et $V_\Gamma = \emptyset$). Soient $x_i \in G_i$, $x_i \notin A'$. Si $A_o \in V^{A'} \cap \mathcal{O}$, $A_o \cup \{x_i\} \in \mathcal{O} \cap \Gamma$ (puisque $\mathcal{O}$ est permis pour $\cup$). Inversement, si $\mathcal{O}$ rencontre Γ, $\mathcal{O}$ rencontre $V^{A'} \supset \Gamma$. Donc $\mathcal{O} \in V_\Gamma$ équivaut à $\mathcal{O} \cap V^{A'} \neq \emptyset$. Ainsi, on peut remplacer les V_Γ , $\Gamma \in \mathcal{B}$ par $\left\{\mathcal{O} : \mathcal{O} \in \mathfrak{F}_U(\mathcal{A}),\ \mathcal{O} \cap V^{A'} \neq \emptyset\right\}$. En résumé :

<u>Proposition 8</u> - Soient E un espace LCD, $\mathcal{A}$ l'espace $\mathfrak{F}(E)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$) et $\mathcal{A}'$ l'espace $\mathcal{K}(E)$ (resp. $\mathfrak{F}(E)$), et $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ le sous-espace de $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ constitué des parties $\mathcal{O}$ de $\mathcal{A}$ permises pour $\cup$ et fermées dans $\mathcal{A}$ vérifiant $\mathcal{O} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{O}$. La topologie induite sur $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ par celle de $\mathfrak{F}(\mathcal{A})$ est localement compacte. La topologie s c s sur $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ est engendrée par les ouverts de la forme $\left\{\mathcal{O} \subset V_{A^c}\right\}$, $A \in \mathcal{A}$, et la topologie s c i par les ouverts de la forme $\{\mathcal{O} \cap V^{A'} \neq \emptyset\}$, $A' \in \mathcal{A}'$. La réunion de ces deux familles d'ouverts engendre la topologie de $\mathfrak{F}_U$.

Nous allons maintenant montrer que ces deux espaces $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ et $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$ sont homéomorphes. A cette fin, donnons d'abord un procédé permettant de construire l'adhérence $\overline{\mathcal{O}} \in \mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ d'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{A}$ permise pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$.

<u>Proposition 9</u> - Soit $\mathcal{O}$ une partie de $\mathcal{A}$ permise pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$. Posons :

$$\mathcal{O}' = \bigcap_{A \in \mathcal{O}} V_A \cap \mathcal{A}' \ , \quad \overline{\mathcal{O}} = \bigcap_{A' \in \mathcal{O}'} (V_{A'} \cap \mathcal{A})$$

Alors $\overline{\mathcal{O}}$ est l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{A}$.

Si $\mathcal{O} = \emptyset$, $\mathcal{O}' = \mathcal{A}'$ et par suite $\overline{\mathcal{O}} = \emptyset$. Si $\mathcal{O} = \mathcal{A}$, $\mathcal{O}' = \emptyset$ et $\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{A}$. Dans le cas général, si $A \in \mathcal{O}$, A rencontre par définition tous les $A' \in \mathcal{O}'$, donc appartient à $\overline{\mathcal{O}}$, donc $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}}$. On vérifie immédiatement que $\overline{\mathcal{O}}$ est fermé dans $\mathcal{A}$, donc $\overline{\mathcal{O}}$ contient l'adhérence de $\mathcal{O}$. Inversement, si A n'appartient pas à l'adhérence de $\mathcal{O}$, $\exists$ A'$\in \mathcal{A}'$, $G_i \in \mathcal{G}$ tels que $A \in V_{G_i}^{A'}$ et $V_{G_i}^{A'}$ disjoint de $\mathcal{O}$. Comme le complémentaire de $\mathcal{O}$ est permis pour $\cap$, on a aussi $A \in V^{A'}$ et $\mathcal{O} \cap V^{A'} = \emptyset$. Mais $\mathcal{O} \cap V^{A'} = \emptyset$, équivaut à $\mathcal{O} \subset V_{A'}$, c'est-à-dire à $A' \in \mathcal{O}'$, et $A \in V^{A'}$, soit $A \cap A' = \emptyset$, entraîne alors $A \notin \overline{\mathcal{O}}$. Donc l'adhérence de $\mathcal{O}$ contient $\overline{\mathcal{O}}$, et par suite $\overline{\mathcal{O}}$ est l'adhérence de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{A}$.

<u>Corollaire 1</u> - L'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ dans $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$ définie par :

$$\mathcal{O}' = \bigcap_{A \in \mathcal{O}} (V_A \cap \mathcal{A}')$$

est une bijection de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ sur $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$ vérifiant la formule de réciprocité :

$$\mathcal{O} = \bigcap_{A \in \mathcal{O}'} (V_{A'} \cap \mathcal{A})$$

La proposition 9 que l'application $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ ainsi défini constitue une bijection de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}) \cup \emptyset \cup \{\mathcal{A}\}$ sur $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}') \cup \emptyset \cup \{\mathcal{A}'\}$ vérifiant la formule de réciprocité indiquée. Dans cette bijection $\emptyset$ et $\mathcal{A}$ ont respectivement pour images $\mathcal{A}'$ et $\emptyset$, d'où le corollaire

<u>Corollaire 2</u> - La bijection $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ du corollaire 1 est un homéomorphisme de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ sur $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$. Dans cet homéomorphisme, l'image de l'ouvert s c s $\left\{\mathcal{O} \subset V_{A^c}\right\}$ de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ $(A \in \mathcal{A})$ est l'ouvert s c i $\{\mathcal{O}' \cap V^A \neq \emptyset\}$ de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$. De même, l'image de l'ouvert s c i $\{\mathcal{O} \cap V^{A'} \neq \emptyset\}$ $(A' \in \mathcal{A}')$ de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ est l'ouvert s c s $\left\{\mathcal{O}' \subset V_{A'^c}\right\}$ de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$.

En effet, soit $\mathcal{O} \in \mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$. $\mathcal{O} \not\subset V_{A^c}$ équivaut à $\exists$ $A_o \in \mathcal{O}$, $A_o \subset A$, donc à $A \in \mathcal{O}$, puisque $\mathcal{O}$ est permis pour U. Mais A appartient à $\mathcal{O}$, d'après la proposition, si et seulement si A rencontre tous les $A' \in \mathcal{O}'$, ou, ce qui revient au même, si et seulement si $\mathcal{O}' \cap V^A = \emptyset$. On a donc

$$\mathcal{O} \subset V_{A^c} \Leftrightarrow \mathcal{O}' \cap V^A \neq \emptyset$$

et de même

$$\mathcal{O}' \subset V_{A'^c} \Rightarrow \mathcal{O} \cap V^{A'} \neq \emptyset$$

La bijection $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ échange donc les ouverts s c s et s c i, et constitue par suite un homéomorphisme.

<u>Corollaire 3</u> - Désignons par $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$ l'espace compact $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}) \cup \{\emptyset\} \cup \{\mathcal{A}\}$. La bijection $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ du corollaire 1 est un homéomorphisme de $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$ sur $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A}')$.

Dans cette bijection, $\emptyset$ a pour image $\mathcal{A}'$, et $\mathcal{A}$ a pour image $\emptyset$. La famille vide $\mathcal{O} = \emptyset$ est un point isolé de $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$, et la famille $\mathcal{K}$ un point isolé de $\mathfrak{F}(\mathcal{K})$. (En effet, $E \in \mathfrak{F}$ montre que $\{ \mathcal{O} \subset V_{E^c} \} = \{\emptyset\}$ est ouvert dans $\mathfrak{F}(\mathfrak{F})$, et $\{ \mathcal{O}' \cap V^E \neq \emptyset\} = \{ \mathcal{O}' : \emptyset \in \mathcal{O}'\}$ est ouvert dans $\mathfrak{F}(\mathcal{K})$ et se réduit à $\{\mathcal{K}\}$ dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{K})$.

Pour achever la démonstration, il faut montrer que $\mathcal{O}_n \to \mathfrak{F}$ dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathfrak{F})$ équivaut à $\mathcal{O}'_n \to \emptyset$ dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{K})$.

Si $\mathcal{O}_n \to \mathfrak{F}$, on a $\emptyset \in \mathfrak{F}$, donc il existe une suite $F_n \in \mathcal{O}_n$, $F_n \to \emptyset$ dans $\mathfrak{F}$. Soit $\mathcal{O}'$ une valeur d'adhérence de $\mathcal{O}'_n$. On a $\mathcal{O}' = \emptyset$. En effet, si $K \in \mathcal{O}'$, soit $K'_{n_k} \in \mathcal{O}'_{n_k}$ telle que $K'_{n_k} \to K$. Les K'_{n_k} sont contenus dans un compact K_o fixe. Comme $F_n \to \emptyset$ dans $\mathfrak{F}$, on a $F_n \cap K_o =$ $= \emptyset$ pour n assez grand, donc $F_{n_k} \cap K_{n_k} = \emptyset$, mais celà contredit

$K_{n_k} \in \mathcal{O}'_{n_k}$. Donc $\mathcal{O}' = \emptyset$ et $\mathcal{O}'_n \to \emptyset$.

Inversement, si $\mathcal{O}'_n \to \emptyset$, il faut montrer $\mathcal{O}_n \to \mathfrak{F}$, soit $\emptyset \in \mathcal{O}$ si $\mathcal{O}$ est une valeur d'adhérence de $\mathcal{O}_n$. Il suffit pour celà que tout voisinage V^K, $K \in \mathcal{K}$ de $\emptyset$ rencontre une infinité de $\mathcal{O}_n$. S'il n'en est pas ainsi, $\exists\ K_o \in \mathcal{K}$ tel que V^{K_o} soit disjoint de $\mathcal{O}_n$ pour n assez grand, soit $\mathcal{O}_n \subset V_{K_o}$. Mais ceci équivaut à $K_o \in \mathcal{O}'_n$ et contredit $\mathcal{O}'_n \to \emptyset$. Donc $\mathcal{O}_n \to \mathfrak{F}$.

6 - LE POINT DE VUE DES APPLICATIONS INVERSES

Soient E et E' deux espaces LCD, $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ et ψ une application croissante de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$. Pour chaque $x \in E'$, posons :

$$\mathcal{V}(x) = \psi^{-1}(V_{\{x\}}) = \{A : A \in \mathcal{A},\ x \in \psi(A)\}$$

$\mathcal{O}$ est une application de E' dans $\mathcal{P}(E)$. Pour chaque $x \in E'$, $\mathcal{O}(x)$ est permise pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$. Inversement, toute application $\mathcal{O}$ de E' dans l'espace $\mathcal{P}_U(\mathcal{A})$ des parties de $\mathcal{A}$ permises pour $\cup$ dans $\mathcal{A}$ vérifie $\mathcal{O}(x) = \psi^{-1}(V_x)$ pour l'application ψ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$ définie par $\psi(A) = \{x : A \in \mathcal{O}(x)\}$.

Nous prendrons toujours $\mathcal{A} = \mathfrak{F}(E)$ ou $\mathcal{K}(E)$ et nous poserons, respectivement, $\mathcal{B} = \mathcal{G}(E)$ ou $\mathfrak{C}(E)$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}^c = \mathcal{K}(E)$ ou $\mathfrak{F}(E)$. Comme dans la Note 112, nous désignerons par ψ_b le plus petit prolongement (non fermé) de ψ sur $\mathcal{B}$, et par ψ_a le plus grand prolongement de ψ_b sur $\mathcal{A}$, d'où $\psi_a \supset \psi$. Explicitement :

$$\psi_a(A) = \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \in \mathcal{B}}} \bigcup_{\substack{A' \subset B \\ A' \in \mathcal{A}}} \psi(A')$$

On aura l'égalité si et seulement si $x \notin \psi(A)$ entraine $x \notin \psi_a(A)$, c'est-à-dire si pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$x \notin \psi(A) \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B},\ B \supset A,\ \forall\, A' \subset B,\ A' \in \mathcal{A} : x \notin \psi(A')$$

donc si :

$$A \notin \mathcal{O}(x) \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B},\ B \supset A : \mathcal{O}(x) \subset V_{B^c}$$

Comme $B^c \in \mathcal{A}'$, V^{B^c} est un voisinage ouvert de A disjoint de $\mathcal{O}(x)$, et cette relation entraîne $\mathcal{O}(x) \in \mathfrak{F}(\mathcal{A})$. Inversement, si $\mathcal{O}(x)$ est fermé et permis pour $\cup$, son complémentaire est permis pour $\cap$ et la relation ci-dessus est vérifiée. D'où un premier résultat :

<u>On a $\psi = \psi_a$ si et seulement si $\mathcal{O}$ applique E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$</u>

En second lieu, cherchons à quelle condition ψ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$: pour que $\psi(A)$ soit fermé pour $A \in \mathcal{A}$, il faut et il suffit que $x_n \in \psi(A)$ et $x_n \to x$ entraîne $x \in \psi(A)$, autrement dit, on doit avoir :

$$A \in \mathcal{O}(x_n) \text{ et } x_n \to x \Rightarrow A \in \mathcal{O}(x)$$

Plaçons-nous dans le cas où $\mathcal{O}(x) \in \tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$, c'est-à-dire le cas $\psi = \psi_a$. La condition exprimant que $\psi(A)$ est fermée s'écrit :

$$\mathcal{O}(x_n) \not\subset V_{A^c} \text{ et } x_n \to x \Rightarrow \mathcal{O}(x) \not\subset V_{A^c}$$

Comme les ouverts s c s de $\mathfrak{F}_U$ sont du type $\{\mathcal{O} \subset V_{A^c}\}$, cette condition est satisfaite si et seulement si $\mathcal{O}$ est une application s c s de E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U$. On a donc montré : $\psi = \psi_a$ et $\psi(A)$ fermé pour $A \in \mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}(x)$ fermé pour $x \in E'$ et $\psi(A)$ fermé pour $A \in \mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}$ est une application s c s de E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$.

Montrons que ceci équivaut encore à ψ s c s de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$. En effet, si ψ est s c s, on vérifie immédiatement que l'on a $\psi = \psi_a$. Inversement, si $\mathcal{O}$ est s c s, les équivalences ci-dessus montrent d'abord que ψ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$. Soit $K \in \mathcal{K}(E')$. ψ sera s c s si $\psi^{-1}(V_{K'})$ est fermé. Or $\psi^{-1}(V_{K'}) = \bigcup_{x \in K'} \mathcal{O}(x)$. Soit $A_n \in \psi^{-1}(V_{K'})$ telle que $A_n \to A$ dans $\mathcal{A}$. Pour chaque n, il existe $x_n \in K'$ tel que $A_n \in \mathcal{O}(x_n)$. Soit x_o une valeur d'adhérence de la suite x_n dans K'. Comme $\mathcal{O}$ est s c s, on trouve $A \in \mathcal{O}(x_o)$, soit, puisque $x_o \in K'$, $A \in \psi^{-1}(V_{K'})$: $\psi^{-1}(V_{K'})$ est fermé, et ψ est s c s.

En résumé :

<u>Proposition 10</u> - Soit ψ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$, et $\mathcal{O}$ l'application de E' dans $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ définie par $\mathcal{O}(x) = \psi^{-1}(V_{\{x\}})$. Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - ψ est une application s c s de $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$.

2 - $\mathcal{O}$ est une application s c s de E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$.

3 - Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\psi(A)$ est fermé, et pour tout $x \in E'$, $\mathcal{O}(x)$ est fermé.

4 - ψ applique $\mathcal{A}$ dans $\mathfrak{F}(E')$ et coïncide avec le plus grand prolongement sur $\mathcal{A}$ de son plus petit prolongement sur $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B} = \mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A} = \mathfrak{F}(E)$, et $\mathcal{B} = \mathcal{G}(E)$ si $\mathcal{A} = \mathcal{K}(E)$).

Soit maintenant $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E')$ telle que $\psi = \psi_a$, c'est-à-dire telle que $\mathcal{O}$ applique E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$. Cherchons à quelle condition $\mathcal{O}$ est s c i. $\mathcal{O}$ s c i équivaut, d'après la proposition 10, à la condition : $\forall A' \in \mathcal{A}'$, l'ensemble des x tels que $\mathcal{O}(x) \cap V^{A'} \neq \emptyset$

est ouvert dans E' , soit $\exists\ A \in \mathcal{O}(x)$, $A \cap A' = \emptyset$. Or $A \cap A' = \emptyset$ équivaut à $A \subset A'^{c}$ et $A'^{c} \in \mathcal{B}$. Ainsi, $\mathcal{O}$ s c i équivaut à : $\forall\ B \in \mathcal{B}$, $\bigcup_{A \subset B} \psi(A)$ est ouvert dans E'. Finalement :

$\mathcal{O}$ est s c i si et seulement si ψ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$.

On en déduit la proposition suivante :

<u>Proposition 11</u> - Soit ψ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$, ψ_b son plus petit prolongement sur $\mathcal{B}$, ψ_a le plus grand prolongement de ψ_b sur $\mathcal{A}$. Pour que ψ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$ et que $\psi = \psi_a$, il faut et il suffit que $\mathcal{O}$ soit une application s c i de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A})$.

<u>Corollaire</u> - Pour que ψ soit une application s c s de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(E')$ et que son plus petit prolongement ψ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$, il faut et il suffit que $\mathcal{O}$ soit une application continue de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A})$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et que ψ est compatible avec les translations, $\mathcal{O}(x)$ est le translaté $\mathcal{O}_x$ du noyau $\mathcal{O}$. Dès que $\mathcal{O}$ est fermé dans $\mathcal{A}$, l'application $x \to \mathcal{O}_x$ est continue, et les conditions du corollaire sont remplies.

Considérons maintenant l'homéomorphisme $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ du corollaire 3 de la proposition 9. A toute application $\mathcal{O}$ de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A})$, cet homéomorphisme associe l'application $\mathcal{O}'$ de E' dans $\tilde{\mathcal{F}}_U(\mathcal{A}')$ définie par :

$$\mathcal{O}'(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{O}(x)} V_A \cap \mathcal{A}'$$

A ces applications $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont associées les applications $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(E')$ et $\psi' : \mathcal{A}' \to \mathcal{P}(E')$ respectivement, qui vérifient $\psi = \psi_a$ et $\psi' = \psi'_{a'}$. Il est clair d'ailleurs que ψ' est duale de ψ_b et ψ duale de $\psi'_{b'}$.

On a vu dans le corollaire 2 que cet homéomorphisme $\mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ échange les ouverts s c s et s c i de $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ et $\mathfrak{F}_U(\mathcal{A}')$. Autrement dit l'application $\mathcal{O} : E' \to \mathfrak{F}_U(\mathcal{A})$ est s c s (s c i) si et seulement si $\mathcal{O}'$ est s c i (s c s). D'après les propositions 10 et 11, il en résulte que ψ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$ si et seulement si ψ' est s c s, et de même ψ est s c s si et seulement si ψ'_b applique $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{G}(E')$. Pour que ψ et ψ' soient toutes deux s c s, il faut et il suffit que ψ soit s c s et ψ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$, ou encore que $\mathcal{O}$ soit continu. Ainsi :

<u>Proposition 12</u> - Soit ψ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{P}(E')$ vérifiant $\psi = \psi_a$ sur $\mathcal{A}$, et $\mathcal{O}$ l'application de E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$ associée à ψ. L'application ψ' de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{P}(E')$ associée à $\mathcal{O}' : E' \to \tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A}')$, $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ étant liées par les formules réciproques :

$$\mathcal{O}'(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{O}(x)} V_A \cap \mathcal{A}' \quad , \quad \mathcal{O}(x) = \bigcap_{A' \in \mathcal{O}'(x)} V_{A'} \cap \mathcal{A}$$

vérifie également la condition $\psi' = \psi'_{a'}$. Les quatre propriétés suivantes sont alors équivalentes :

1 - $\mathcal{O}$ est une application s c s (resp. s c i) de E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A})$.

2 - $\mathcal{O}'$ est une application s c i (resp. s c s) de E' dans $\tilde{\mathfrak{F}}_U(\mathcal{A}')$

3 - ψ (resp. ψ') est une application s c s de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}'$) dans $\mathfrak{F}(E')$.

4 - $\psi'_{b'}$ (resp. ψ_b) applique $\mathcal{B}'$ (resp. $\mathcal{B}$) dans $\mathcal{G}(E')$.

De même encore les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

1 - ψ et ψ' sont s c s.

2 - σ est continue.

3 - σ' est continue.

4 - ψ est s c s et ψ_b applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{G}(E')$.

5 - ψ' est s c s et $\psi'_{b'}$ applique $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{G}(E')$.

G. MATHERON

Janvier 1971