N-233

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 114

ENSEMBLES ALEATOIRES et GEOMETRIE INTEGRALE

FEVRIER 1971

N-233

Note Gst N° 114

# Ensembles aléatoires et Géométrie Intégrale

# Note Géostatistique N° 114

## Ensembles aléatoires et Géométrie Intégrale

### Introduction

Le but de cette Note est de préciser les rapports existant entre la géométrie intégrale (conçue à la manière de Hadwiger) et la théorie des ensembles fermés aléatoires. Il se pourrait que ces rapports soient si étroits qu'une identification des deux théories devienne possible, et que chaque résultat de géométrie intégrale admette une interprétation probabiliste, et inversement. Nous n'en sommes peut-être pas encore là, mais les résultats que nous allons obtenir ci-dessous marquent sans doute une étape dans cette direction. Ces résultats sont exprimés, pour l'essentiel, par cinq théorèmes. Le premier permet d'identifier l'ensemble des fermés aléatoires d'un espace LCD donné E à une certaine classe de fonctionnelles définies sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts de E — à savoir l'ensemble des capacités de Choquet T alternées d'ordre infini vérifiant $T(\emptyset)=0$ et $T \leq 1$ sur $\mathcal{K}$. Le second théorème caractérise de même, en termes de géométrie intégrale, la classe des fermés aléatoires indéfiniment divisibles par réunion. Poursuivant l'analogie avec la théorie probabiliste des lois indéfiniment divisibles, j'introduis ensuite (dans le cas où l'espace E est l'espace euclidien $R^N$) la notion de fermé aléatoire stable, qui s'identifie à celle de capacité homogène — c'est le troisième théorème. D'un autre côté, la géométrie intégrale s'intéresse particulièrement aux fonctionnelles sur $\mathcal{K}(R^N)$ vérifiant la propriété dite de H-additivité (T est H-additive si $T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K')$ lorsque K, K' et la réunion $K \cup K'$ sont compacts et convexes dans $R^N$). Dans notre interprétation probabiliste de la géométrie intégrale, cette propriété de H-additivité caractérisera une classe particulière de fermés aléatoires (à savoir celle des fermés indéfiniment divisibles pour la réunion vérifiant de plus une propriété semi-markovienne). Le cinquième et dernier théorème que nous avons en vue énoncera alors que les seuls fermés aléatoires de $\mathbb{R}^N$ qui soient stables, stationnaires et semi-markoviens sont les variétés linéaires poissoniennes étudiées, entre autres, par R E Miles. Du point de vue de la géométrie intégrale, ce théorème conduit à prolonger naturellement les fonctionnelles de Minkowski sur l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ entier, et ces prolongements ne sont pas du tout identiques à ceux que l'on obtient (sur l'anneau convexe $\mathcal{G}$ seulement, i e la classe stable pour la réunion finie engendrée par les compacts convexes de $\mathbb{R}^N$) en utilisant la caractéristique d'Euler-Poincaré. Je ne prétends pas que ces prolongements soient intrinsèquement "meilleurs" que ceux de la géométrie intégrale (ce qui n'aurait d'ailleurs aucun sens). Mais ils admettent une interprétation probabiliste simple – ce qui n'est pas le cas des prolongements classiques.

## 1 – Définition des Capacités.

Donnons d'abord la définition la plus générale (cf. E. Meyer, [ ]). Soit $E$ un ensemble quelconque, et $\mathcal{K}$ une classe de parties de $E$ contenant l'ensemble vide $\emptyset$ et stable pour les réunions finies et les intersections dénombrables. Une capacité est alors une application $T$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ vérifiant les trois axiomes suivants :

1 – $A \subset A' \Rightarrow T(A) \leq T(A')$ $\qquad (A, A' \in \mathcal{P}(E))$

2 – $A_n \uparrow A \Rightarrow T(A_n) \uparrow T(A)$ $\qquad (A_n, A \in \mathcal{P}(E))$

3 – $K_n \downarrow K \Rightarrow T(K_n) \downarrow T(K)$ $\qquad (K_n, K \in \mathcal{K})$

Dans ce qui suit, $E$ sera toujours un espace localement compact de type dénombrable (LCD), et $\mathcal{K}$ sera toujours la famille $\mathcal{K}(E)$ des compacts de $E$. Dans ce cas, l'axiome 3 est vérifié si et seulement si la restriction de $T$ à $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E)$ est semi-continue supérieurement (SCS) pour la topologie myope. Cette remarque est importante dans la mesure où elle confère d'entrée de jeu une signification topologique à la continuité monotone séquentielle $\downarrow$ sur $\mathcal{K}(E)$.

On dit qu'un ensemble $B \subset E$ est capacitable (pour la capacité $T$) s'il vérifie la propriété d'approximation :

$$T(B) = \operatorname{Sup}\{T(K),\ K \subset B,\ K \in \mathcal{K}\}$$

Dans le cas qui nous intéresse ($E$ L.C.D., et $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E)$), on démontre que tous les boréliens de $E$ sont capacitables (théorème des capacités, [ ], [ ]...)

Capacité de Choquet. Soit $T$ une application croissante de $\mathcal{K} = \mathcal{K}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, s.c.s pour la topologie myope, c'est à dire vérifiant l'axiome 3. On dira que $T$ est une capacité de Choquet si elle vérifie de plus la propriété suivante : (sous additivité forte)

$$4-\quad T(K \cap K') + T(K \cup K') \leq T(K) + T(K') \qquad (K, K' \in \mathcal{K})$$

Toute capacité de Choquet $T$ se prolonge sur l'espace $\mathcal{G} = \mathcal{G}(E)$ des ouverts de $E$ selon la formule :

$$T(G) = \operatorname{Sup}\{T(K),\ K \subset G,\ K \in \mathcal{K}\} \qquad (G \in \mathcal{G}).$$

et ce prolongement est alors semi-continu inférieurement (s.c.i) sur $\mathcal{G}$.
Enfin, pour tout $B \subset E$, on pose :

$$T^*(B) = \operatorname{Inf}\{T(G),\ G \supset B,\ G \in \mathcal{G}\}$$

et on démontre (cf M. Brelot, [ ]) que $T^*$ est fortement sous-additive sur $\mathcal{P}(E)$ et vérifie l'axiome 2. De plus, $T$ étant s.c.s sur $\mathcal{K}(E)$, on vérifie que l'on a $T(K) = T^*(K)$ pour tout compact $K$. Autrement dit, $T^*$ est une capacité, au sens de la définition générale donnée plus haut.
D'après le théorème des capacités, tout borélien $B$ de $E$ vérifie :

$$T^*(B) = \operatorname{Inf}\{T(G),\ G \supset B, G \in \mathcal{G}\} = \operatorname{Sup}\{T(K),\ K \subset B,\ K \in \mathcal{K}\}$$

Dans ce qui suit, nous écrirons donc toujours $T(B)$ au lieu de $T^*(B)$.

Capacité alternée d'ordre infini. Soit $T$ une fonctionnelle sur $\mathcal{K}$, ou sur tout autre famille de parties de $E$ stable pour la réunion finie. On posera par récurrence :

$$(1)\quad \begin{cases} S_1(B;B_1) = T(B\cup B_1) - T(B) \\ S_n(B;B_1,B_2,\ldots B_n) = S_{n-1}(B;B_1,B_2,\ldots B_{n-1}) - S_{n-1}(B\cup B_n;B_1,\ldots B_{n-1}) \end{cases}$$

Soit, sous forme explicite :

$$(1')\quad \begin{cases} S_n(B;B_1,\ldots B_n) = -T(B) + \sum_{i=1}^{n} T(B\cup B_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} T(B\cup B_{i_1}\cup B_{i_2}) + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n+1}\, T(B\cup B_1\cup\cdots\cup B_n) \end{cases}$$

pour $B, B_1, \ldots B_n$ dans $\mathcal{K}$. Si $T$ est une capacité de Choquet, on dira que $T$ est une capacité alternée d'ordre infini si toutes les fonctions $S_n$ sont $\geq 0$ lorsque $B, B_1, \ldots$ sont dans $\mathcal{K}$. On montre qu'elles sont encore $\geq 0$ pour $B, B_1, \ldots$ quelconques dans $\mathcal{P}(E)$

Dans ce qui suit, et sauf mention explicite du contraire, le mot capacité désignera toujours une capacité de Choquet alternée d'ordre infini.

$\boxed{\text{Exemples}}$ - a/ Les mesures positives sur $E$ sont des capacités au sens ci-dessus.

b/ Les probabilités d'atteinte. Soit $X_t$ un processus prenant ses valeurs dans $E$. Moyennant des hypothèses peu restrictives, l'événement : « la trajectoire du processus $X_t$ rencontre l'ouvert $G$ », est mesurable pour tout $G\in\mathcal{G}$, et admet une probabilité $T(G)$. $T$ est une fonctionnelle s.c.i sur $\mathcal{G}$. En effet, si $G_n \uparrow G$ dans $\mathcal{G}$, la trajectoire du processus rencontre $G$ si et seulement si elle rencontre l'un des $G_n$, et par suite $T(G_n)\uparrow T(G)$. Si l'on désigne par $A$ l'adhérence de la trajectoire de $X_t$, $A$ rencontre un ouvert $G$ si et seulement si la trajectoire du processus rencontre $G$. Ainsi :

A est un fermé aléatoire, et la probabilité P sur $\sigma(\mathcal{O})$ associée à A vérifie $P(V_G) = T(G)$ sur $\mathcal{G}$. Il est clair que l'on a :

$$P(V^{B}_{B_1,\dots B_n}) = S_n(B; B_1, \dots B_n) \geq 0$$

pour $B, B_1, \dots \in \mathcal{G}$, de sorte que les fonctions $S_n$ sont $\geq 0$ sur $\mathcal{G}$. Pour $K$ compact, on pose $T(K) = P(V_K) = \operatorname{Inf}\{T(G), G \supset K, G \in \mathcal{G}\}$, et $T(K)$ est la probabilité pour que l'adhérence A de la trajectoire de $X_t$ rencontre le compact K. T est s.c.s. sur $\mathcal{K}$, et les fonctions $S_n$ sont encore $\geq 0$ pour $B, B_1, \dots \in \mathcal{K}$. T est donc une capacité (de Choquet, alternée d'ordre infini).

c/ La capacité newtonienne. À tout compact K de $\mathbb{R}^3$ est associée une mesure $\mu_K$ (d'ailleurs concentrée sur la frontière de K) dite mesure d'équilibre, dont le potentiel newtonien est égal à 1 quasi-partout sur K. La fonction T définie sur $\mathcal{K}$ par $T(K) = \int \mu_K(dx)$ est une capacité alternée d'ordre infini, dite capacité newtonienne. Il s'agit d'ailleurs effectivement de la capacité telle que la définissent les physiciens, c'est de cette notion empruntée à la physique que les mathématiciens ont tiré la définition générale donnée ci-dessus.

## 2 - Forme générale de la loi d'un fermé aléatoire

On sait que la probabilité P sur $\sigma(\mathcal{O})$ définissant un fermé aléatoire est déterminée par la donnée de la fonctionnelle T définie sur $\mathcal{K}$ par $T(K) = P(V_K)$. Le théorème suivant caractérise la classe de ces fonctionnelles T - et généralise de manière évidente l'exemple b/ donné ci-dessus. On notera aussi que ce théorème délimite d'entrée de jeu la classe des fonctionnelles de la géométrie intégrale qui admettent une interprétation probabiliste.

Théorème 1. Soit $E$ un espace LCD, et $T$ une fonction définie sur $\mathcal{K}(E)$. Pour qu'il existe une probabilité $P$ sur $\sigma(\mathcal{V})$, nécessairement unique, vérifiant $P(V_K) = T(K)$ pour tout compact $K$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

a/ $T(\emptyset) = 0$ et $T(K) \leq 1$ pour tout $K \in \mathcal{K}$

b/ $T$ est une capacité (de Choquet, alternée d'ordre infini)

Nous dirons souvent, pour abréger le langage, que $T$ est la fonctionnelle associée au fermé aléatoire $A$ défini par la probabilité $P$.

Montrons que ces conditions sont nécessaires. C'est évident pour les conditions a/. Si $P$ est une probabilité sur $\sigma(\mathcal{V})$ vérifiant $P(V_K) = T(K)$, $K \in \mathcal{K}$, on a d'abord :

$$P(V^K_{K_1,\dots K_n}) = S_n(K; K_1,\dots K_n) \geq 0$$

de sorte que les fonctions $S_n$ définies en (1') sont positives ou nulles. D'autre part $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$ entraîne $V_{K_n} \downarrow V_K$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, donc $T(K_n) \downarrow T(K)$, et $T$ est scs. Par suite $T$ est une capacité.

Montrons que les conditions sont suffisantes. Soit $T$ une capacité vérifiant la condition a/. $T$ se prolonge sur $\mathcal{P}(E)$ par une capacité que nous noterons encore $T$, et pour laquelle les boréliens sont capacitables. En particulier, $T$ est sci sur $\mathcal{G}$.

Considérons alors la semi-algèbre $\mathcal{S}$ constituée des parties de $\mathcal{F}$ de la forme $V^B$, $V_B$, $V^B_{B_1,\dots B_n}$, où $B, B_1, \dots B_n \dots$ sont compacts ou ouverts dans $E$. ~~Donc~~ $\mathcal{S}$ engendre $\sigma(\mathcal{V})$. Posons :

$$P(V_B) = T(B) \quad ; \quad P(V^B) = 1 - T(B)$$

$$P(V^B_{B_1,\dots B_n}) = S_n(B; B_1, \dots B_n)$$

P est une fonction additive sur $\mathcal{I}$, positive (d'après a/ et b/) et vérifie $P(\emptyset) = P(V_{\emptyset}) = T(\emptyset) = 0$. On a $P(V_B) \leq 1$ d'après a/, et de même $P(V^B) \leq 1$, puisque T est croissante. La relation de récurrence :

$$P(V^B_{B_1,\dots B_n}) = P(V^B_{B_1,\dots B_{n-1}}) - P(V^{B\cup B_n}_{B_1,\dots B_{n-1}})$$

montre ensuite :

$$P(V^B_{B_1,\dots B_n}) \leq P(V^B_{B_1,\dots B_{n-1}}) \leq \dots \leq P(V^B) \leq 1$$

puisque les $S_n$ sont $\geq 0$. Ainsi P applique $\mathcal{I}$ dans $[0,1]$. D'après J. Neveu, [ ], P sera $\sigma$-additive sur $\mathcal{I}$ et se prolongera sur $\sigma(\mathcal{U})$ par une probabilité nécessairement unique si l'on peut trouver une classe compacte $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{I}$ vérifiant pour tout $V \in \mathcal{I}$ la propriété d'approximation :

$$(2) \qquad P(V) = \operatorname{Sup}\{P(C),\ C \in \mathcal{C},\ C \subset V\}.$$

Considérons donc la classe $\mathcal{C}$ constituée des ensembles de la forme :

$$V^G,\ V_K,\ V^G_{K_1,K_2,\dots K_n} \qquad (K, K_1, \dots K_n \in \mathcal{K},\ G \in \mathcal{G})$$

qui sont des compacts de $\mathcal{F}(E)$. Comme $\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection, il s'agit bien d'une classe compacte dans $\mathcal{I}$. Il reste à établir la relation (2), ce qui achèvera la démonstration.

Soit donc $V = V^B_{B_1,\dots B_\ell}$ un élément de $\mathcal{I}$ ($B, B_1, \dots B_\ell$ ouverts ou compacts). Que B soit ouvert ou compact, on peut trouver une suite d'ouverts $G_n$ vérifiant $G_n \downarrow B$. De même, que $B_i$ ($i = 1, 2, \dots \ell$) soit ouvert ou compact, on peut trouver une suite de compacts $K_n(i)$ vérifiant $K_n(i) \uparrow B_i$. Posons :

$$V_n = V^{G_n}_{K_n(1),\dots K_n(\ell)}$$

On a $V_n \in \mathcal{C}$ et $V_n \uparrow V$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$. Tout se ramène donc à montrer $P(V_n) \uparrow P(V)$ –

Or $P(V)$ et $P(V_n)$ s'explicitent de la manière suivante :

$$P(V) = -T(B) + \sum_i T(B \cup B_i) - \sum_{i_1 < i_2} T(B \cup B_{i_1} \cup B_{i_2}) + \cdots$$

$$P(V_n) = -T(G_n) + \sum_i T(G_n \cup K_n(i)) - \sum_{i_1 < i_2} T(G_n \cup K_n(i_1) \cup K_n(i_2)) + \cdots$$

Comme il s'agit de sommes finies, il suffit de montrer que chacun des termes figurant dans l'expression de $P(V_n)$ converge numériquement vers le terme correspondant de $P(V)$. Mais cela découle du lemme ci-dessous qui achève donc la démonstration du théorème :

<u>Lemme 1</u>. – Soit $T$ une capacité, $G$ un ouvert, $K$ un compact, $G_n$ une suite d'ouverts et $K_n$ une suite de compacts telles que $K_n \uparrow G$ et $G_n \downarrow K$. Alors la suite $T(K_n \cup G_n)$ converge vers $T(G \cup K)$

En effet, $T$ étant croissante, on a :

$$T(G_n \cup G) \geq T(G_n \cup K_n) \geq T(K \cup K_n)$$

Or $T(G_n \cup G) \downarrow T(K \cup G)$, d'après la définition même d'une capacité de Choquet, et $T(K \cup K_n) \uparrow T(K \cup G)$ puisque $K \cup K_n \uparrow K \cup G$ et que $T$ vérifie l'axiome 2. Par suite $T(G_n \cup K_n)$ converge vers $T(K \cup G)$.

Le corollaire suivant nous sera utile dans la suite. Son intérêt provient de ce que ($E$ étant LCD) on peut toujours trouver une famille $\mathcal{B}$ <u>dénombrable</u> vérifiant les conditions de l'énoncé. Par exemple, pour $E = \mathbb{R}^n$, on pourra prendre pour $\mathcal{B}$ la la famille des réunions finies de boules ouvertes de rayons rationnels et dont les centres ont des coordonnées rationnelles.

Corollaire. Soit $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts relativement compacts dans $E$, et $\mathcal{B}' = \{\overline{B}, B \in \mathcal{B}\}$ la famille des adhérences des ensembles de $\mathcal{B}$. On suppose que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ vérifient les ~~deux~~ trois propriétés suivantes :

a/ $\mathcal{B}$ (donc aussi $\mathcal{B}'$) est stable pour la réunion finie

b/ Pour tout $K \in \mathcal{K}$, on a $K = \bigcap \{\overline{B} \,;\, B \in \mathcal{B}, B \supset K\}$

c/ Pour tout $G \in \mathcal{G}$, on a $G = \bigcup \{B \,;\, B \in \mathcal{B}, \overline{B} \subset G\}$

Soit alors $T$ une fonction définie sur $\mathcal{B}'$. Pour qu'il existe une probabilité $P$ sur $\sigma(\mathcal{O})$, nécessairement unique, vérifiant $T(B') = P(V_{B'})$ pour tout $B' \in \mathcal{B}'$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1 - $T(\emptyset) = 0$ et $T(B') \leq 1$ pour tout $B' \in \mathcal{B}'$

2. $T$ est scs sur $\mathcal{B}'$ (pour la topologie induite par la topologie myope) et les fonctions $S_n$ définies en (1') sont $\geq 0$ si $B, B_1, \dots$ appartiennent à $\mathcal{B}'$ –

On note que c/ entraine $\emptyset \in \mathcal{B}'$, de sorte que la condition $T(\emptyset) = 0$ a un sens. Il est clair que les conditions de l'énoncé sont nécessaires. Inversement, supposons les vérifiées. Pour tout compact $K$, posons $T^*(K) = \operatorname{Inf} \{T(\overline{B}), B \in \mathcal{B}, B \supset K\}$. Cette fonction $T^*$ est scs sur $\mathcal{K}$. En effet, $T(K) < a$ équivaut à : $\exists B \in \mathcal{B}$, $B \supset K$, $T^*(\overline{B}) < a$, donc aussi à $K \in \bigcup \{V^{B^c}, B \in \mathcal{B}, T(\overline{B}) < a\}$, ensemble ouvert dans $\mathcal{K}$. $T^*$ étant scs est un prolongement de $T$ d'après la condition b/ - Si $K, K_1, \dots K_n$ sont des compacts, on peut trouver dans $\mathcal{B}'$ des suites vérifiant $B'_k \downarrow K$, $B'_k(i) \downarrow K_i$, $i = 1, 2, \dots n$ (condition b/). Comme la réunion est continue dans $\mathcal{K}$, on en déduit que $S_n(B'_k ; B'_k(1) \dots B'_k(n))$ converge vers $S_n(K ; K_1, \dots K_n)$, et cette limite est $\geq 0$ d'après 2. Ainsi $T^*$ est une capacité et vérifie les conditions du théorème 1, d'où le corollaire.

## 3 - Limites Inductives de fermés aléatoires

Considérons dans $E$ une suite croissante d'ouverts relativement compacts $B_n$ recouvrant $E$ en vérifiant $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$. Donnons nous, pour chaque $n$, un fermé aléatoire $A_n \subset \overline{B}_n$, défini par la fonctionnelle $T_n$ telle que $T_n(K) = P(A_n \in V_K)$, $K \in \mathcal{K}(\overline{B}_n)$. On peut aussi bien, d'ailleurs, prolonger $T_n$ sur $\mathcal{K}(E)$ entier en posant $T_n(K) = T_n(K \cap \overline{B}_n)$ si $K \not\subset \overline{B}_n$. Si les fonctionnelles $T_n$ vérifient la condition :

$$(3) \qquad T_{n+m}(K) = T_n(K) \qquad (n, m > 0,\ K \in \mathcal{K},\ K \subset \overline{B}_n)$$

l'ensemble $A_{n+m} \cap \overline{B}_n$ est équivalent à $A_n$ (c.a.d. admet la même probabilité que lui). Il est alors possible de définir un fermé aléatoire $A$ de $\mathcal{F}(E)$ tel que, pour tout $n$, $A \cap \overline{B}_n$ soit équivalent à $A_n$. On dira que ce fermé aléatoire $A$ est la limite inductive des fermés aléatoires $A_n$ dont les fonctionnelles $T_n$ vérifient la condition (3).

Pour établir l'existence de $A$, considérons un compact $K \in \mathcal{K}$. Comme les ouverts $B_n$ recouvrent $E$, $K$ est contenu dans $\overline{B}_n$ dès que $n$ est supérieur à un $n_0$, et on a $T_n(K) = T_{n_0}(K)$ pour $n \geq n_0$ d'après la condition (3). On peut donc définir une fonctionnelle $T$ sur $\mathcal{K}$ entier en posant $T(K) = T_{n_0}(K)$. On a évidemment $T(\emptyset) = 0$ et $T \leq 1$ sur $\mathcal{K}$. $T$ est s.c.s, car si $K_n \downarrow K$ dans $\mathcal{K}$, les $K_n$ sont contenus dans un $\overline{B}_{n_0}$ et $T_{n_0}$ est s.c.s. De même, les fonctions $S_n$ associées à $T$ sont $\geq 0$, puisque toute famille finie de compacts est contenue dans un $\overline{B}_{n_0}$ et que $T_{n_0}$ est une capacité. D'après le théorème 1,

/.

il existe donc un fermé aléatoire $A$ dont la probabilité $P$ vérifie $P(V_K) = T(K)$ sur $\mathcal{K}$. Le fermé aléatoire $A \cap \overline{B}_n$ admet la fonctionnelle $T_{\overline{B}_n}$ définie par $T_{\overline{B}_n}(K) = T(K \cap \overline{B}_n) = T_n(K)$. Par suite, $A \cap \overline{B}_n$ est bien équivalent au fermé aléatoire $A_n$.

## 4- Les fermés aléatoires indéfiniment divisibles pour la réunion.

Soit $A$ un fermé aléatoire, $P$ sa probabilité sur $\sigma(\mathcal{G})$, et $\varphi$ la fonctionnelle s.c.i. sur $\mathcal{K}$ définie par $\varphi(K) = P(V^K)$ ($1-\varphi$ est une capacité sur $\mathcal{K}$ d'après le théorème 1). Nous dirons que $A$ est indéfiniment divisible (pour la réunion) si pour tout entier $n$ on peut trouver un fermé aléatoire $A_n$ tel que $A$ soit équivalent à la réunion de $n$ fermés aléatoires indépendants équivalents à $A_n$. C'est là une propriété de la seule fonctionnelle $\varphi$. En effet, si $\varphi_n$ est la fonctionnelle associée à $A_n$, celle de la réunion de $n$ fermés indépendants équivalents à $A_n$ est $(\varphi_n)^n$. Par suite, $A$ sera indéfiniment divisible si et seulement si, pour tout $n$, $\varphi^{\frac{1}{n}}$ est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, autrement dit, compte tenu du théorème 1, si et seulement si $1-\varphi^{1/n}$ est une capacité.

Nous allons expliciter la forme générale de ces fonctionnelles $\varphi$ indéfiniment divisibles. Il nous faut, auparavant, examiner le cas où $A$ admet des points fixes (Déf. : $x_0$ est un point fixe pour le fermé aléatoire $A$ si $P(x_0 \in A) = 1$, c.a.d. $\varphi(\{x_0\}) = 0$)

Proposition 1. Si $A$ est un fermé aléatoire indéfiniment divisible pour la réunion, l'ensemble des points fixes de $A$ est un fermé $F$, éventuellement vide, et la fonctionnelle $\varphi$ associée à $A$ ($\varphi(K) = P(A \cap K = \emptyset)$) vérifie $\varphi(K) > 0$ strictement pour tout compact $K$ disjoint de $F$.

Notons d'abord que, $\varphi$ étant sci sur $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \emptyset$, l'ensemble des compacts non vides $K \in \mathcal{K}'$ tels que $\varphi(K) = 0$ est inductif pour l'inclusion. D'après le théorème de Zorn, donc, si $\varphi(K) = 0$, il existe un compact minimal non vide $K_0 \subset K$ tel que $\varphi(K_0) = 0$. Si nous montrons que tout compact minimal $K_0$ est ponctuel, la proposition en découlera : en effet, la réunion de ces points fixes $x_0$ est un fermé $F$ (puisque $A$ est fermé) et si un compact $K$ vérifie $\varphi(K) = 0$, il contiendra un compact minimal, c'est-à-dire un point fixe $x_0 \in F$, donc ne sera pas disjoint de $F$.

Soit donc $K_0$ un compact minimal tel que $\varphi(K_0) = 0$. Montrons que $K_0$ est ponctuel. En effet, supposons que $K_0$ contienne deux points distincts. On peut alors trouver deux compacts $K_1$ et $K_2$ non vides et distincts de $K_0$ tels que $K_0 = K_1 \cup K_2$. Comme $K_0$ est minimal, on a

$$\varphi(K_1) > 0 \quad , \quad \varphi(K_2) > 0$$

et, puisque $V^{K_1 \cup K_2}$ est p.s vide, on a aussi :

$$P(V^{K_1} \cup V^{K_2}) = \varphi(K_1) + \varphi(K_2)$$

Mais $A$ est indéfiniment divisible, et $\varphi_n = \varphi^{1/n}$ est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire $A_n$ admettant évidemment les mêmes compacts minimaux que $A$ lui-même. Si $P_n$ est la probabilité de $A_n$, on a donc aussi :

$$P_n(V^{K_1} \cup V^{K_2}) = (\varphi(K_1))^{1/n} + (\varphi(K_2))^{1/n}$$

Or, $\varphi(K_1)$ et $\varphi(K_2)$ étant strictement positifs, le second membre de cette relation est $> 1$ pour $n$ assez grand, ce qui est impossible. Par suite $K_0$ est ponctuel, et la proposition est établie –

Quitte à remplacer l'espace $E$ initial par $E \cap F^c$ (qui est encore LCD), et le fermé aléatoire $A$ de $\mathcal{F}(E)$ par le fermé aléatoire $A \cap F^c$ de $\mathcal{F}(E \cap F^c)$, on peut toujours se ramener au cas où $A$ est sans point fixe. D'après la proposition, la fonctionnelle $\varphi$ d'un fermé aléatoire indéfiniment divisible et sans point fixe ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$ – Ce sont ces fonctionnelles que nous allons caractériser. Posons d'abord un lemme :

*Lemme 2* – Soit $T$ une capacité (alternée, d'ordre infini) vérifiant $T(\emptyset) = 0$ et $T \leq 1$ sur $\mathcal{K}$, et soit $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n$ la fonction génératrice d'une loi de probabilité discrète. Si l'on pose $\varphi = 1 - T$, $1 - G(\varphi)$ est encore une capacité alternée d'ordre infini, nulle en $\emptyset$ et majorée par 1 –

En effet, d'après le théorème 1, $\varphi$ est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire $A$, et $\varphi^N$ celle de la réunion de $N$ fermés aléatoires indépendants équivalents à $A$. Soient alors $A_1, A_2 \dots$ une suite de fermés aléatoires indépendants admettant la même fonctionnelle $\varphi$, et $N$ une variable aléatoire indépendante des $A_i$ et vérifiant $P(N = n) = p_n$. On vérifie que l'application $N \times \prod_{i=1}^{\infty} A_i \to A_1 \cup \dots \cup A_N$ de $\mathbb{N} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{F}$ est mesurable pour la σ-algèbre produit, et que $A' = A_1 \cup \dots \cup A_N$ est un fermé aléatoire dont la fonctionnelle est $\varphi' = G(\varphi)$ : d'après le théorème 1, le lemme en résulte.

*Corollaire* – Dans les mêmes conditions, pour $\lambda > 0$, $1 - e^{-\lambda T}$ est une capacité alternée d'ordre infini, nulle en $\emptyset$ et majorée par 1.

Il suffit, en effet, de prendre pour $G$ la fonction génératrice de la loi de Poisson, soit $G(s) = \exp\{-\lambda(1-s)\}$ –

Théorème 2 - Pour qu'une fonction $\varphi$ sur $\mathcal{K}$ soit la fonctionnelle associée à un fermé aléatoire A indéfiniment divisible et sans point fixe, il faut et il suffit que $\varphi$ soit de la forme :

$$\varphi(K) = e^{-T(K)} \qquad (K \in \mathcal{K})$$

pour une capacité T alternée d'ordre infini vérifiant $T(\phi) = 0$ et $T(K) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$.

Ces conditions sont nécessaires. En effet, si A est indéfiniment divisible et sans point fixe, $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$ (Prop. 1), et $T_n = 1 - \varphi^{1/n}$ est une capacité. Pour $K \in \mathcal{K}$, $n T_n(K)$ converge vers la limite :

$$T(K) = -\log \varphi(K)$$

avec $T(\phi) = 0$ et $T(K) < \infty$. Il reste à montrer que T est une capacité. Or T est scs sur $\mathcal{K}$, car $\varphi$ est sci et ne s'annule pas. D'autre part, les $T_n$ sont des capacités alternées d'ordre infini. Les fonctions $S_p$ construites à partir de T selon la relation (1') sont donc $\geq 0$ comme limites simples des fonctions positives correspondantes construites à partir des $n T_n$. Donc T est bien une capacité.

Montrons maintenant que les conditions de l'énoncé sont suffisantes. Soit donc T une capacité nulle en $\phi$ et $< \infty$ sur $\mathcal{K}$. Posons $\varphi = e^{-T}$. On a évidemment $\varphi(\phi) = 1$ et $\varphi(K) \geq 0$, de sorte que $1 - \varphi$ vérifie la première condition du théorème 1 - Pour montrer que $\varphi$ est bien la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, nous allons utiliser la notion de limite inductive introduite au paragraphe 3 - Soit donc $B_n$ une suite d'ouverts relativement compacts vérifiant $B_n \uparrow E$ et $\overline{B}_n \subset B_{n+1}$ - Pour chaque $n$, définissons une fonctionnelle $\varphi_n$ sur $\mathcal{K}(\overline{B}_n)$ en posant :

$$\varphi_n(K) = \varphi(K) = e^{-T(K)} \qquad (K \in \mathcal{K}, K \subset \overline{B}_n)$$

Sur $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$, $T(K)$ est majorée par $T(\bar{B}_n) < \infty$. Si les $T(\bar{B}_n)$ sont tous nuls, $\varphi = 1$ sur $\mathcal{K}$ est la fonctionnelle associée au fermé aléatoire p.s. vide, et le théorème est établi. Supposons donc $T(\bar{B}_n) > 0$ pour $n$ assez grand. La capacité $T(K)/T(\bar{B}_n)$ vérifie alors, sur $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$, les conditions du lemme 2, et, en appliquant le corollaire de ce lemme avec $\lambda = T(\bar{B}_n)$, on voit que $1 - e^{-T}$ est une capacité sur $\mathcal{K}(\bar{B}_n)$ nulle en $\emptyset$ et majorée par 1. Par suite, d'après le théorème 1, $\varphi_n = e^{-T}$ est la fonctionnelle d'un fermé aléatoire $A_n$ de $\mathcal{F}(B_n)$. Mais les $\varphi_n$ vérifient la condition (3) du paragraphe 3. Par suite, la fonctionnelle $\varphi = e^{-T}$ définie sur $\mathcal{K}(E)$ entier est associée au fermé aléatoire $A$, limite inductive des $A_n$. Comme $\frac{1}{n}T$ vérifie, pour tout $n > 0$, les mêmes hypothèses que $T$ elle-même, $\varphi^{1/n}$ est également la fonctionnelle d'un fermé aléatoire, et $A$ est donc indéfiniment divisible. Enfin, $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$, puisque $T$ reste finie, et par suite, d'après la Prop. 1, $A$ n'a pas de point fixe. QED.

<u>Corollaire</u> - Si $T$ est une capacité alternée d'ordre infini vérifiant $T(\emptyset) = 0$ et $T(K) < \infty$ pour tout $K \in \mathcal{K}$, $1 - e^{-T}$ est également une capacité alternée d'ordre infini -

## 5- Exemples de fermés aléatoires indéfiniment divisibles dans $\mathbb{R}^N$

<u>5-1- Les schémas booléens</u> - Ici, la capacité $T$ du Théorème 2 est de la forme :

$$T(K) = E(\mu(A' \oplus \check{K}))$$

où $\mu$ est une mesure (positive) sur $\mathbb{R}^N$ et $A'$ un fermé aléatoire primaire. La condition $T(K) < \infty$ est assurée, en particulier, si la mesure $\mu$ est sommable, ou encore si $A'$ est p.s. compact et vérifie une condition convenable. Lorsque $\mu$ est la mesure de Lebesgue, on obtient un fermé indéfiniment divisible et stationnaire -

5-2 - Comme second exemple, mentionnons les variétés linéaires poissoniennes, que nous étudierons en détail ci-dessous. Les capacités $T$ qui leur sont associées coïncident (dans le cas isotrope) sur l'espace $C(\mathcal{K})$ des compacts convexes avec les fonctionnelles de Minkowski classiques en géométrie intégrale.

5-3 - Le fermé aléatoire harmonique - La capacité newtonienne dans $\mathbb{R}^3$ vérifie les conditions du théorème 2 - Si $T$ désigne la capacité newtonienne, il existe donc un fermé aléatoire $A$ de $\mathbb{R}^3$ dont la fonctionnelle est $Q = e^{-T}$. Nous dirons que $A$ est le fermé aléatoire harmonique. Pour la boule $B_r$ de rayon $r$ et le disque $C_r$ de rayon $r$, on a $T(B_r) = r$, $T(C_r) = \frac{2}{\pi} r$. Les lois du premier point de contact dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}^2$ sont donc des lois exponentielles. Par contre, les segments de droite sont de capacité nulle, et ne sont donc pas rencontrés par le fermé harmonique $A$. $T$ est invariante pour les déplacements de $\mathbb{R}^3$, de sorte que $A$ est stationnaire et isotrope. De plus, $T$ est homogène de degré 1 ($T(\lambda K) = \lambda T(K)$, $\lambda > 0$, $K \in \mathcal{K}$), de sorte que $A$ est stable pour la réunion (voir ci-dessous).

En définissant $A$ comme limite inductive, on peut construire effectivement, localement au moins, des réalisations du fermé harmonique, et cette procédure montre que $A$ est lié de manière très étroite au mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $B$ un compact, par exemple une boule de rayon aussi grand que l'on veut. Comme $T(B)$ est fini et non nul, la fonctionnelle $1 - \frac{T(K)}{T(B)}$ $(K \in \mathcal{K}, K \subset B)$ est associée à un fermé aléatoire $A'$, et $A$ lui-même est équivalent à la réunion $A'_1 \cup \dots \cup A'_N$ avec des $A'_i$ équivalents à $A'$, mutuellement indépendants, et $N$ désignant une variable poissonienne d'espérance $T(B)$ indépendante des $A'_i$.

Or, on peut construire effectivement cet ensemble aléatoire $A'$. Désignons par $\mu_B$ la mesure positive de somme unité à support dans $B$ (ici, le support est en fait la frontière de $B$) réalisant un potentiel constant quasi-partout sur $B$. On sait que ce potentiel constant $U_B = 1/T(B)$ est l'inverse de la capacité de $B$. Soit alors $K$ un compact contenu dans $B$. La balayée $\mu_K$ de $\mu_B$ sur $K$ réalise sur $K$ le même potentiel constant (quasi partout) $U_B$ que $\mu_B$. L'intégrale de $\mu_K$ vaut donc :

$$\int \mu_K(dx) = \frac{U_B}{U_K} = \frac{T(K)}{T(B)}$$

Elle est donc égale à la probabilité pour que $K$ rencontre $A'$.

Mais cette balayée $\mu_K(dx)$ représente aussi la loi du premier point d'entrée dans $K$ d'un mouvement brownien dont la loi initiale est $\mu_B$. En particulier, l'intégrale $\int \mu_K(dx)$ donne la probabilité pour que ce processus rencontre le compact $K$. D'où ce procédé de construction : au temps $t=0$, on lâche un nombre aléatoire $N$ (poissonien, d'espérance $T(B)$) de particules browniennes indépendantes en $N$ points choisis indépendamment selon la loi $\mu_B$ ; et on prend l'adhérence $A$ de la réunion des trajectoires de ces particules. Pour $K \subset B$, la probabilité de $\{A \cap K = \emptyset\}$ est bien

$$Q(K) = e^{-T(B)\int \mu_K(dx)} = e^{-T(K)}$$

Autrement dit $A \cap B$ est équivalent sur $B$ au fermé harmonique.

## 6- Fermés aléatoires de $\mathbb{R}^N$ stables pour la réunion

Dans toute la suite de cette étude, l'espace $E$ sera l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ à $N$ dimensions. Nous dirons qu'un fermé aléatoire $A$ de $\mathbb{R}^N$ est stable pour la réunion si pour tout entier $n > 0$ on peut trouver une constante $\lambda_n$ positive telle que la réunion $A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n$ de $n$ fermés aléatoires indépendants équivalents à $A$ soit équivalente à l'homothétique $\lambda_n A$ de $A$. Si $\varphi$ est la fonctionnelle associée à $A$ ($\varphi(K) = P(A \in \mathcal{V}^K)$ pour $K \in \mathcal{K}$), la fonctionnelle $\varphi_\lambda$ associée à $\lambda A$ est évidemment définie par :

$$\varphi_\lambda(K) = \varphi\left(\frac{K}{\lambda}\right)$$

Pour que $A$ soit stable, donc, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\lambda_n > 0$ telle que l'on ait :

$$\left(\varphi(K)\right)^n = \varphi\left(\frac{K}{\lambda_n}\right) \qquad (n > 0,\ K \in \mathcal{K})$$

Si $A$ est stable, $A$ est équivalent pour tout $n$ à la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\lambda_n}$, donc $A$ est indéfiniment divisible, et sa fonctionnelle $\varphi$ est de la forme $\varphi = e^{-T}$ pour une capacité $T$ finie et nulle en $\emptyset$ (nous supposons que $A$ n'a pas de point fixe). Pour que $A$ soit stable et sans point fixe, il faut et il suffit donc que cette capacité $T$ vérifie

$$(4) \qquad n\,T(K) = T\left(\frac{K}{\lambda_n}\right) \qquad (n > 0,\ K \in \mathcal{K})$$

En remplaçant $K$ par $\lambda_n K$, on déduit de (4) $T(\lambda_n K) = \frac{1}{n} T(K)$, puis :

$$T\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m} K\right) = \frac{1}{n} T\left(\frac{K}{\lambda_m}\right) = \frac{m}{n} T(K)$$

Ainsi pour tout rationnel $r > 0$, il existe $\lambda_r$ tel que :

$$r\,T(K) = T\left(\frac{K}{\lambda_r}\right)$$

En remplaçant $K$ par $K/\lambda_r$, on en tire $T(K/\lambda_r \lambda_{r'}) = r\,T(K/\lambda_{r'}) = r r' T(K)$.

Par suite, la fonction $\lambda_r$ définie sur l'ensemble des rationnels $>0$ vérifie :

(5) $$\lambda_{rr'} = \lambda_r \lambda_{r'}$$

Soit alors $K$ un compact convexe contenant l'origine $O$ des coordonnées. Pour $r$ et $r'$ donnés, avec par exemple $r \geq r'$, on a soit $K/\lambda_r \supset K/\lambda_{r'}$, soit l'inclusion inverse. Or $r \geq r'$ entraîne :

$$\varphi\left(\frac{K}{\lambda_r}\right) = (\varphi(K))^r \leq (\varphi(K))^{r'} = \varphi\left(\frac{K}{\lambda_{r'}}\right)$$

C'est donc l'inclusion $K/\lambda_r \supset K/\lambda_{r'}$ qui est réalisée, et $\lambda_r$ est une fonction non croissante du rationnel $r$, d'ailleurs continue à droite puisque $T$ est scs (si $r \downarrow r_0$, on a $\lambda_r \uparrow \lambda'$, mais $K/\lambda_r \downarrow K/\lambda'$, car $K$ est convexe et contient $O$, d'où $T(K/\lambda_r) \downarrow T(K/\lambda')$ et $\lambda' = \lambda_{r_0}$). On déduit alors de (5) que $\lambda_r$ est de la forme

$$\lambda_r = r^{-1/\alpha}$$

pour un $\alpha > 0$, et par suite (4) s'écrit

(6) $$T(rK) = r^\alpha T(K) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

avec $r$ rationnel $\geq 0$. Si $K$ est convexe et contient $O$, cette relation subsiste pour $r$ réel $\geq 0$ (car $r_n \downarrow r$ entraîne $r_n K \downarrow rK$, et $T$ est scs). Pour $K$ compact non convexe, ou convexe et ne contenant pas $O$, $r_n K$ converge vers $xK$ (dans $\mathcal{K}$) lorsque la suite $r_n$ converge vers $x$. Comme $T$ est scs, on trouve donc

$$x^\alpha T(K) \leq T(xK) \qquad , x \in \mathbb{R}^+, \; K \in \mathcal{K}$$

avec égalité lorsque $x$ est rationnel. Montrons qu'en fait on a l'égalité pour $x$ réel $\geq 0$. Soit, en effet, $x_0$ un réel $>0$, et $x_n$ une suite de rationnels positifs telle que $x_n \uparrow x_0$. Soit alors $\varepsilon > 0$, et $B_\varepsilon$ la boule de centre $O$ et de rayon $\varepsilon$. Comme $x_n K$ converge dans $\mathcal{K}$ vers $x_0 K$, on a, pour $n$ assez grand :

$$x_0 K \subset x_n K \oplus B_\varepsilon = x_n (K \oplus B_{\frac{\varepsilon}{x_n}})$$

Comme $\varepsilon / x_n$ converge vers $\varepsilon / x_0$, pour $\varepsilon' > 0$ donné on a aussi $\frac{\varepsilon}{x_n} \leq \frac{\varepsilon}{x_0} + \varepsilon'$ pour $n$ assez grand, donc $x_0 K \subset x_n (K \oplus B_{\frac{\varepsilon}{x_0} + \varepsilon'})$. Comme $T$ est croissante, et $x_n$ rationnel, on déduit alors de (6) :

$$T(x_0 K) \leq (x_n)^\alpha \, T(K \oplus B_{\frac{\varepsilon}{x_0} + \varepsilon'})$$

En passant à la limite d'abord en $n \to \infty$, puis ($T$ étant s.c.s) en $\varepsilon' \downarrow 0$ et $\varepsilon \downarrow 0$, on en déduit $T(x_0 K) \leq (x_0)^\alpha T(K)$, d'où l'égalité, puisque l'inégalité inverse a déjà été établie. Nous pouvons donc énoncer :

<u>Théorème 3</u>. Un fermé aléatoire $A$ sans point fixe est stable pour la réunion si et seulement si sa fonctionnelle $Q$ sur $\mathcal{K}$ est de la forme $Q = e^{-T}$ pour une capacité $T$ finie, nulle en $\emptyset$ et homogène de degré $\alpha > 0$, c'est-à-dire vérifiant :

$$T(\lambda K) = \lambda^\alpha T(K) \qquad (\lambda \geq 0,\ K \in \mathcal{K})$$

<u>Corollaire</u>. Un fermé aléatoire stationnaire, sans point fixe et stable pour la réunion est p.s négligeable pour toute mesure sur $\mathbb{R}^N$.

En effet, on a $T(\{0\}) = 0$, et, si $A$ est stationnaire, $P(x \in A) = 0$ pour tout point $x$, d'où $E(\mu(A)) = 0$ pour toute mesure positive sur $\mathbb{R}^N$.

Le fermé harmonique et les variétés poissoniennes constituent des exemples de fermés aléatoires stables et stationnaires dans $\mathbb{R}^N$.

<u>Surface spécifique</u>. Si $G$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, le corollaire du théorème 3 nous indique que le volume de $G \cap A$ est p.s nulle. On peut alors chercher à quelle condition $G \cap A$ admet une surface, autrement dit, dans le cas où $A$ est <u>stationnaire</u>, examiner sous quelles conditions il est possible de parler de la <u>surface</u> spécifique de $A$.

Nous ne ferons ici qu'effleurer ce problème difficile.

Soit A un fermé aléatoire stationnaire p.s. négligeable dans $\mathbb{R}^N$, G un ouvert borné et B la boule unité. Considérons la variable aléatoire :

$$V(\lambda) = \frac{\mu(G \cap A \oplus \lambda B)}{\mu(G)} \qquad (\lambda > 0)$$

Pour $\lambda \downarrow 0$, on a p.s. $V(\lambda) \downarrow 0$. Posons, pour $\lambda \downarrow 0$ :

$$S^+ = \overline{\lim} \frac{V(\lambda)}{\lambda} \quad , \quad S^- = \underline{\lim} \frac{V(\lambda)}{\lambda}$$

Si $S^+ = S^-$ p.s., la notion de surface spécifique aura un sens. D'après le lemme de Fatou, on a, en effet :

(7) $$E(S^+) \geq \overline{\lim}\, E\left(\frac{V(\lambda)}{\lambda}\right) \quad ; \quad E(S^-) \leq \underline{\lim}\, E\left(\frac{V(\lambda)}{\lambda}\right)$$

Or, A étant stationnaire, on trouve :

$$E(V(\lambda)) = \frac{1}{\mu(G)} \int_G P(x \in A \oplus \lambda B)\, \mu(dx) = 1 - Q(\lambda B)$$

Cette espérance ne dépend pas du choix de l'ouvert G. Si $S^+ = S^-$ p.s, $Q(\lambda B)$ est nécessairement dérivable à droite en $\lambda = 0$, et la valeur $\sigma$ de cette dérivée constituera, par définition, la surface spécifique de A :

$$\sigma = E(S^+) = E(S^-) = -\frac{d^+}{d\lambda} Q(\lambda B) \Big|_{\lambda = 0}$$

Plaçons-nous dans le cas où A est stationnaire, stable et sans point fixe. D'après le théorème 3, on a $Q(\lambda B) = (Q(B))^{\lambda^\alpha}$ pour un $\alpha > 0$ et $Q(B) > 0$, donc $Q(\lambda B)$ est dérivable en tout $\lambda > 0$. Pour $\alpha < 1$, on trouve $E(S^+) = \infty$ d'après (7), et pour $\alpha > 1$, au contraire, $E(S^-) = 0$. Le seul cas où il puisse exister une surface spécifique $\sigma$ vérifiant $0 < \sigma < \infty$ est donc le cas linéaire $\alpha = 1$. Dans ce cas, la dérivée à droite de $Q(\lambda B)$ est $\log Q(B) = -T(B)$. Donc, si la surface spécifique existe, elle vaut dans ce cas :

$$\sigma = T(B)$$

Si l'on n'est pas certain de l'égalité p.s. $S^+ = S^-$, on peut seulement conclure

$$E(S^+) \geq T(B) \geq E(S^-)$$

Dans le cas des hyperplans poissoniens, on a effectivement $S^+ = S^-$ p.s, et la surface spécifique existe. Il n'est pas du tout certain qu'il en soit de même dans le cas du fermé harmonique (le fait que la capacité newtonienne soit nulle pour les segments de droite constitue, à tout le moins, une présomption défavorable).

## 7- Continuité sur $C(\mathcal{K})$

Dans tout ce qui suit, $C(\mathcal{K})$ désignera l'ensemble des compacts convexes, qui est un sous espace compact de $\mathcal{K}$, et $C(\overset{\circ}{\mathcal{K}})$ l'ensemble des compacts convexes d'intérieur non vide, qui est ouvert dans $C(\mathcal{K})$. On sait que la géométrie intégrale attache une grande importance aux fonctionnelles continues sur $C(\mathcal{K})$, comme le sont par exemple les célèbres fonctionnelles de Minkowski. Je donne ici quelques résultats qui pourront être utiles ultérieurement.

**Proposition 2.** Soit $T$ une fonctionnelle positive, croissante, invariante par translation et s.c.s sur $\mathcal{K}(R^N)$. Pour que $T$ soit continue sur l'ensemble $C(\overset{\circ}{\mathcal{K}})$ des compacts convexes d'intérieur non vide, il faut et il suffit que l'application $x \to T(xK)$ de $R^+$ dans lui-même soit continue pour tout $K \in C(\overset{\circ}{\mathcal{K}})$. Pour tout $K \in C(\overset{\circ}{\mathcal{K}})$, on a alors $T(K) = T(\overset{\circ}{K}) = \sup\{T(K'), K' \subset \overset{\circ}{K}, K' \in$

Cette condition est évidemment nécessaire. Inversement, supposons la vérifiée, et montrons que $T$ est continue sur $C(\overset{\circ}{\mathcal{K}})$.

a/ Pour $K \in C(\overset{\circ}{\mathcal{K}})$, on a $T(K) = T(\overset{\circ}{K})$. En effet, compte tenu de l'invariance par translation, on peut supposer $0 \in \overset{\circ}{K}$. Pour $\lambda < 1$, on a alors $\lambda K \subset \overset{\circ}{K}$, donc $T(\lambda K) \leq T(\overset{\circ}{K})$. Pour $\lambda \uparrow 1$, on a $T(\lambda K) \uparrow T(K)$, d'après l'hypothèse de l'énoncé, donc $T(K) = T(\overset{\circ}{K})$.

b/ Montrons maintenant la continuité de T. Si une suite $K_n$ converge vers K dans $C(\mathcal{K})$, les ouverts $\mathring{K}_n$ convergent vers $\mathring{K}$ dans $\mathcal{G}$ (pour le voir, on remarque que la convergence des $K_n$ vers K dans $C(\mathcal{K})$ est équivalente à la convergence dans $\mathcal{F}$ de chacun des hyperplans d'appui de $K_n$ vers l'hyperplan d'appui correspondant de K, et que cela entraine la convergence de $\mathring{K}_n$ vers $\mathring{K}$. C'est là un résultat valable seulement dans $C(\mathcal{K})$, et faux, en général, dans $\mathcal{K}$)

Si la limite K est dans $C(\mathring{\mathcal{K}})$, les $\mathring{K}_n$ sont donc non vides pour n assez grand et vérifient $T(K_n) = T(\mathring{K}_n)$ d'après a/. Mais T est s.c.i. sur $\mathcal{G}$, ~~...~~ et s.c.s sur $\mathcal{K}$, d'où :

$$T(\mathring{K}) \leq \underline{\lim}\, T(\mathring{K}_n) = \underline{\lim}\, T(K_n) \leq \overline{\lim}\, T(K_n) \leq T(K)$$

Comme $T(\mathring{K}) = T(K)$, d'après a/, il en résulte que $T(K_n)$ converge vers $T(K)$, ce qui établit la proposition.

Remarque. Les conditions de l'énoncé n'entrainent probablement pas la continuité sur $C(\mathcal{K})$ tout entier (bien que je ne sois pas arrivé à trouver de contre exemple), parce que $\mathring{K}_n \to \emptyset$ dans $\mathcal{G}$ n'entraine pas $K_n \to \emptyset$ dans $\mathcal{K}$ (ce qui est impossible, $\emptyset$ étant un point isolé de $\mathcal{K}$), mais seulement que les valeurs d'adhérence de la suite $K_n$ (s'il en existe) sont des compacts convexes sous-dimensionnels. Toutefois, la continuité sur $C(\mathcal{K})$ est assurée dans le cas particulier (intéressant en géométrie intégrale) où T est H-additive :

Définition. Une fonctionnelle T sur $C(\mathcal{K})$ est H-additive si l'on a :

$$T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K')$$

lorsque $K \in C(\mathcal{K})$ et $K' \in C(\mathcal{K})$ ont une réunion convexe $K \cup K' \in C(\mathcal{K})$

Proposition 3. Une fonctionnelle T s.c.s et H-additive sur $C(\mathcal{K})$ est continue sur $C(\mathcal{K})$ si elle est continue sur $C(\mathring{\mathcal{K}})$.

Si $K$ est convexe compact dans $\mathbb{R}^N$, nous dirons que $K$ est de dimension $k \leq N$ si $K$ est contenu dans une variété linéaire de dimension $k$ et d'intérieur non vide pour la topologie induite sur cette variété. Raisonnons par récurrence sur $k$.

Si $k = N$, et si une suite $K_n$ converge vers $K$ dans $C(\mathcal{K})$, on a $\mathring{K}_n \neq \emptyset$ pour $n$ assez grand, comme on l'a déjà remarqué plus haut, donc $T(K_n)$ converge vers $T(K)$ puisque $T$ est continue sur $C(\mathring{\mathcal{K}})$. Supposons établi l'implication $K_n \to K \Rightarrow T(K_n) \to T(K)$ lorsque la dimension de $K$ est $k$, et montrons qu'elle est encore vraie si cette dimension est $k-1$. Soit donc $K_n$ une suite convergeant dans $C(\mathcal{K})$ vers un $K$ de dimension $k-1$. Soit $H$ un segment de droite $[0,x]$ non parallèle à la variété contenant $K$, et $\check{H}$ son symétrique $[0,-x]$. On a :

$$(K_n \oplus H) \cap (K_n \oplus \check{H}) = K_n \quad ; \qquad (K_n \oplus H) \cup (K_n \oplus \check{H}) = K_n \oplus (H \cup \check{H}) \in C(\mathcal{K})$$

Comme $T$ est $H$-additive, il en résulte :

$$T(K_n \oplus (H \cup \check{H})) + T(K_n) = T(K_n \oplus H) + T(K_n \oplus \check{H})$$

~~Remplaçons $H$ par $\lambda H$ et faisons $\lambda \downarrow 0$. Comme $T$ est scs, le second membre~~

Or, les compacts $K_n \oplus H$, $K_n \oplus \check{H}$, $K_n \oplus H \cup H'$ sont de dimension $k$ pour $n$ assez grand (car $K_n$ est de dimension $k-1$ pour $n$ assez grand). L'hypothèse de récurrence montre donc que $T(K_n)$ admet la limite :

$$\lim T(K_n) = T(K \oplus H) + T(K \oplus \check{H}) - T(K \oplus (H \cup \check{H}))$$

Il suffit ensuite de remplacer $H$ par $\lambda H$ et de faire $\lambda \downarrow 0$ pour obtenir,

$$\lim T(K_n) = T(K)$$ , compte tenu du fait que $T$ est scs.

Corollaire – Si une fonctionnelle $T$ est homogène, invariante par déplacement, $H$-additive et SCS sur $C(\mathcal{K})$, elle est continue sur $C(\mathcal{K})$.

Étant homogène, en effet, cette fonctionnelle vérifie les conditions de Prop. 2, donc est continue sur $C(\mathring{\mathcal{K}})$, et par suite aussi sur $C(\mathcal{K})$, d'après Prop. 3, puisqu'elle est $H$-additive –

## 8- La propriété semi-markovienne

Nous allons maintenant donner l'interprétation probabiliste de la propriété d'<u>H-additivité sur $C(\mathcal{K})$</u>. Examinons d'abord la notion de fermé aléatoire p.s. convexe dans $\mathbb{R}^N$ (les fermés convexes constituent un sous espace compact, donc mesurable, de $\mathcal{F}$, de sorte que cette notion a un sens)

<u>Proposition 4</u>. Soit $A$ un fermé aléatoire dans $\mathbb{R}^N$ et $T$ la fonctionnelle définie sur $\mathcal{K}$ par $T(K) = P(A \cap K \neq \emptyset)$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ $A$ est p.s. convexe

b/ Si $K$, $K'$ et $C$ sont trois compacts tels que $C$ sépare $K$ et $K'$, on a :

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C)$$

c/ $T$ est H-additive sur $C(\mathcal{K})$, c'est à dire vérifie :

$$T(K \cup K') + T(K \cap K') = T(K) + T(K') \quad (K, K' \text{ et } K \cup K' \in C(\mathcal{K}))$$

La relation b/ équivaut à $V^C_{K,K'} = \emptyset$ p.s, de sorte que a/ entraîne b/, et b/ entraîne c/, car $K \cap K'$ sépare $K$ et $K'$ dès que $K \cup K'$ est convexe. Il reste à montrer que c/ entraîne a/.

Si un fermé $F$ n'est pas convexe, on peut trouver $x \in F$, $x' \in F$ et $\lambda$ compris entre 0 et 1 tel que $y = \lambda x + (1-\lambda) x' \notin F$. $F$ étant fermé, il existe une boule $B_\varepsilon(y_0)$ de centre $y_0$ et de rayon $\varepsilon > 0$ rationnels contenant $y$ et disjointe de $F$. On peut ensuite trouver deux points $x_0$ et $x'_0$ de coordonnées rationnelles tels que $y_0$ soit sur le segment $(x_0, x'_0)$ et que l'on ait $x \in B_\varepsilon(x_0)$ et $x' \in B_\varepsilon(x'_0)$.

Désignons alors par $C$ l'enveloppe convexe de $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$ et par $C'$ celle de $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(y_0)$. On vérifie sans peine que $C \cup C'$ est alors l'enveloppe convexe de $B_\varepsilon(x_0) \cup B_\varepsilon(x'_0)$. On a donc $C, C'$ et $C \cup C' \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, $C \cap F \neq \emptyset$, $C' \cap F \neq \emptyset$ tandis que $C \cap C' = B_\varepsilon(y_0)$ est disjoint de $F$. Si $T$ est H additive, l'hypothèse c/ entraîne :

$$V_{C,C'}^{C \cap C'} = \emptyset \quad (p.s.)$$

Or, l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples $(C, C')$ construits selon le procédé que nous venons de décrire est dénombrable. On a donc aussi $\bigcup_{(C,C') \in \mathcal{C}} V_{C,C'}^{C \cap C'} = \emptyset$ (p.s), Par suite, le fermé aléatoire $A$ est p.s convexe, et la proposition en résulte.

Passons maintenant à la propriété semi-markovienne. Un fermé aléatoire $A$ est semi-markovien si la fonctionnelle $\varphi$ définie sur $\mathcal{K}$ par $\varphi(K) = P(A \cap K = \emptyset)$ vérifie la relation ;

$$(8) \qquad \varphi(K \cup K' \cup C)\, \varphi(C) = \varphi(K \cup C)\, \varphi(K' \cup C)$$

dès que le compact $C$ sépare les compacts $K$ et $K'$. On sait (pour $\varphi(C) \neq 0$) que cette propriété exprime que les fermés aléatoires $A \cap K$ et $A \cap K'$ sont conditionnellement indépendants lorsque l'événement $A \cap C = \emptyset$ est réalisé. Le théorème suivant permet d'identifier la propriété semi-markovienne et la H-additivité de la géométrie intégrale :

**Théorème 4.** - Soit $A$ un fermé aléatoire indéfiniment divisible pour la réunion, et $\varphi = e^{-T}$ la fonction définie sur $\mathcal{K}$ par $\varphi(K) = P(A \cap K = \emptyset)$. Les trois propriétés suivantes sont alors équivalentes :

a/ Le fermé aléatoire $A$ est semi-markovien

b/ $A$ est limite inductive d'une suite $A_n$ déduite par poissonisation d'une suite $A'_n$ de fermés aléatoires p.s convexes.

c/ La fonctionnelle $T$ est H-additive sur $\mathcal{C}(\mathcal{K})$

Montrons a/ $\Rightarrow$ b/. Soit $B_r$ la suite des boules de centre O et de rayon $r$. A est limite inductive des $A_n = A \cap B_r$. Si $T(B_n) = 0$ pour tout $n$, on a $Q = 1$ sur $\mathcal{K}$, A est p.s vide, et b/ est trivialement vérifiée. Supposons donc $T(B_n) > 0$ pour $n$ assez grand. $A_n$ est alors équivalent à la réunion $A'_1 \cup \dots \cup A'_N$ d'un nombre poissonien $N$ d'espérance $T(B_n)$ d'ensembles aléatoires indépendants $A'_i$ définis par $P(A'_i \cap K \neq \emptyset) = T(K)/T(B_n)$, $K \in \mathcal{K}$, $K \subset B_n$. Si A est semi-markovien, il résulte de la relation (8) ~~que~~ que chaque $A'_i$ vérifie la condition b/ de la Proposition 4, donc est p.s convexe.

Les implications b/ $\Rightarrow$ a/ et a/ $\Rightarrow$ c résultent immédiatement de la proposition 4. Si c/ est vérifiée, la fonction $T_n$ définie sur $\mathcal{K}$ par $T_n(K) = T(K \cap B_n)/T(B_n)$ est encore H-additive. ~~D'après la proposition 4~~, $A_n = A \cap B_n$ est donc équivalent à la réunion $\bigcup_{i=1}^{N} A'_i$ d'un nombre poissonien de fermés aléatoires $A'_i$ indépendants admettant la loi $T_n$, donc p.s convexes d'après la proposition 4. Par suite, b/ est vérifiée, et le théorème en résulte.

Remarque Ce théorème caractérise les ensembles semi-markoviens indéfiniment divisibles. J'ignore s'il existe des fermés semi-markoviens qui ne soient pas indéfiniment divisibles –

Passons maintenant à la dernière partie de cette étude, qui concerne les variétés linéaires poissoniennes de R.E. Miles, et pose, entre autres, le problème du prolongement sur $\mathcal{K}$ des fonctionnelles de Minkowski de la géométrie intégrale –

## 9. Les réseaux poissoniens de variétés linéaires dans $\mathbb{R}^N$

Soit $\mathbb{R}^N$ l'espace euclidien à $N$ dimensions, et $S_k$ l'ensemble des sous-vectoriels de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ $(0 \leq k \leq N)$. $S_k$ est un sous espace compact de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$, d'ailleurs réduit à un unique élément dans les cas triviaux $k=0$ ou $k=N$. Dans le cas général, les éléments de $S_k$ dépendent de $N(N-k)$ paramètres. Pour $0<k<N$, on démontre qu'il existe sur $S_k$ une mesure de Radon, unique à un facteur près, invariante pour les rotations. Cette mesure invariante joue un rôle majeur en géométrie intégrale. Pour définir une variété linéaire de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$ $(0<k<N)$, on doit se donner d'une part sa « direction », c'est à dire le sous vectoriel de $\mathbb{R}^N$ qui lui est parallèle : c'est un point $u$ de $S_k$ ; d'autre part, le point où cette variété coupe le sous-vectoriel $u' \in S_{N-k}$ orthogonal à $u \in S_k$. On peut trouver une rotation dépendant continûment de $u$ et appliquant $u'$ sur un $u'_0 \in S_{N-k}$ fixe, c'est à dire sur $\mathbb{R}^{N-k}$. En définitive, une variété $H = H(u,x)$ de dimension $k$ se trouve définie par la donnée d'un point $(u,x)$ de l'espace produit $S_k \times \mathbb{R}^{N-k}$, et l'application $H : (u,x) \to H(u,x)$ de $S_k \times \mathbb{R}^{N-k}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ est injective et bicontinue.

Considérons alors un processus de Poisson ponctuel sur $S_k \times \mathbb{R}^{N-k}$, dont la densité soit de la forme $\lambda_k(du)\,\mu_{N-k}(dx)$, où $\lambda_k$ est une mesure de Radon positive sur $S_k$ et $\mu_{N-k}$ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^{N-k}$. L'image par $H$ des points de ce processus est un réseau de variétés linéaires de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$, que nous appellerons réseau poissonien

Désignons par A la réunion dans $\mathbb{R}^N$ des variétés du réseau. Nous verrons dans un instant que A est p.s fermé dans $\mathbb{R}^N$ (ce qui est du reste à peu près évident). Pour $u \in S_k$, désignons par $\Pi_u B$ la projection dans l'orthogonal de $u$ d'un ensemble $B \subset \mathbb{R}^N$. On vérifie que $\Pi_u$ est s.c.i sur $\mathcal{F}$, s.c.s sur $\mathcal{G}$, et continue sur $\mathcal{K}$. Montrons que $\{A \cap G = \emptyset\}$ est mesurable pour le processus ponctuel si $G$ est un ouvert. En effet, cet événement est réalisé si et seulement si l'ensemble $H^{-1}(V_G) \subset S_k \times \mathbb{R}^{N-k}$ ne contient aucun point du processus ponctuel, et cet ensemble est ouvert, donc mesurable, puisque l'application $H$ est continue. On en déduit aussitôt :

$$\begin{cases} P(A \cap G = \emptyset) = e^{-T(G)} \\ T(G) = \int_{H^{-1}(V_G)} \lambda_k(du)\, \mu_{N-k}(dx) = \int_{S_k} \lambda_k(du)\, \mu_{N-k}(\Pi_u G) \end{cases}$$

Plus généralement, ce même raisonnement montre que le nombre des variétés du réseau qui rencontrent l'ouvert $G$ est une variable aléatoire Poissonienne d'espérance $T(G)$ -

Cette fonctionnelle $T$ est nécessairement s.c.i sur $\mathcal{G}$. Pour $K \in \mathcal{K}$, on pose $T^*(K) = \operatorname{Inf}\{T(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$. $T^*$ est alors s.c.s sur $\mathcal{K}$, et $e^{-T^*}$ est la loi du fermé aléatoire $\bar{A}$, adhérence dans $\mathbb{R}^N$ de la réunion $A$ des variétés du réseau.

D'autre part, on peut poser directement pour $K \in \mathcal{K}$ :

(9) $$T(K) = \int_{H^{-1}(V_K)} \lambda_k(du)\, \mu_{N-k}(dx) = \int_{S_k} \lambda_k(du)\, \mu_{N-k}(\Pi_u K)$$

On voit, comme dans le cas d'un ouvert $G$, que $T(K)$ est la probabilité de $\{A \cap K = \emptyset\}$. En fait, on a $T = T^*$ sur $\mathcal{K}$, ce qui implique

$P(\bar{A} \in V^K) = P(A \cap K = \phi)$ et signifie donc que l'on a p.s $A = \bar{A}$. Pour le voir, on remarque que $K \in \mathcal{K}$, $G_n \in \mathcal{G}$ et $G_n \downarrow K$ entraîne $V_{G_n} \downarrow V_K$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, puis $H^{-1}(V_{G_n}) \downarrow H^{-1}(V_K)$, d'où la convergence $T(G_n) \downarrow T(K)$ des intégrales de la mesure $\lambda_k \mu_{N-k}$ sur ces boréliens. On a donc bien $\bar{T}(K) = T(K)$.

Ainsi $A$ est un fermé aléatoire, et la fonctionnelle $\rho = e^{-T}$ sur $\mathcal{K}$ vérifie $P(A \in V^K) = \rho(K)$. Il résulte immédiatement de (9) que $T$ est homogène de degré $N-k$ et invariante par translation. Ainsi, $A$ est stable et stationnaire. Montrons que $A$ est aussi semi-markovien. En effet, soient $K$, $K'$ et $C$ trois compacts tels que $C$ sépare $K$ et $K'$. Une variété linéaire ne peut pas rencontrer $K$ et $K'$ sans rencontrer aussi $C$. On a donc $H^{-1}(V_K) \cap H^{-1}(V_{K'}) \cap H^{-1}(V^C) = \phi$, c'est-à-dire :

$$H^{-1}(V_K \cup V_C) \cap H^{-1}(V_{K'} \cup V_C) = H^{-1}(V_C)$$

D'après la relation (9), il en résulte :

$$T(K \cup K' \cup C) + T(C) = T(K \cup C) + T(K' \cup C)$$

et par suite $A$ est semi-markovien.

Prolongement des fonctionnelles de Minkowski

Dans le cas où la mesure $\lambda_k$ est la mesure invariante sur $S_k$, $T$ est invariante par rotation, et $A$ est donc stationnaire et isotrope. Il résulte de la formule (9) que $T$ est, dans ce cas, proportionnelle sur $C(\mathcal{K})$ à la fonctionnelle $W_k$ de Minkowski. Nous voyons ainsi qu'il existe une capacité $T_k$ alternée, d'ordre infini prolongeant sur $\mathcal{K}(R^N)$ entier chacune des fonctionnelles de Minkowski définies sur $C(\mathcal{K})$. Ce prolongement ne coïncide pas sur l'anneau convexe $\mathcal{G}$ (classe stable pour la réunion finie engendrée par $C(\mathcal{K})$) avec le prolongement $\bar{W}_k$ que l'on construit classiquement sur $\mathcal{G}$ à l'aide de la caractéristique d'Euler Poincaré. En effet, ce dernier prolongement est fortement additif, soit :

$$\bar{W}_k(K \cup K') + \bar{W}_k(K \cap K') = \bar{W}_k(K) + \bar{W}_k(K') \qquad (K, K' \in \mathfrak{S})$$

Or, sauf pour $k=0$ (cas d'un processus de Poisson ponctuel) la capacité $T_k$ ne peut pas être ~~~~ additive sur $\mathfrak{S}$. En effet, si $K$ et $K'$ sont deux compacts convexes disjoints, leur réunion $K \cup K'$ est dans $\mathfrak{S}$. Or la relation $T_k(K \cup K') = T_k(K) + T_k(K')$ entraînerait $Q(K \cup K') = Q(K)Q(K')$ et signifierait que les fermés aléatoires $A \cap K$ et $A \cap K'$ sont indépendants, ce qui est manifestement faux pour $k \neq 0$. Comme $T_k$ est sous-additive, on en en fait l'inégalité stricte :

$$Q(K \cup K') > Q(K)\, Q(K')$$

On peut d'ailleurs montrer ~~l~~ que ce prolongement ~~~~ de la fonctionnelle de Minkowski par une capacité sur $\mathcal{K}$ n'est pas unique.

Passons maintenant à notre dernier théorème, celui qui caractérise les variétés linéaires poissoniennes.

## 10- Caractérisation des Variétés linéaires poissoniennes dans $\mathbb{R}^N$

Nous allons pour terminer établir le théorème suivant :

**Théorème 5.** Un fermé aléatoire $A$ est stable, stationnaire et semi-markovien dans $\mathbb{R}^N$ si et seulement si c'est un réseau poissonien de variétés linéaires.

On a vu au paragraphe précédent que les réseaux poissoniens sont stables, stationnaires et semi-markoviens. Inversement, soit $A$ un fermé aléatoire vérifiant ces trois propriétés. Soit $Q = e^{-T}$ la fonctionnelle définie sur $\mathcal{K}$ par $Q(K) = P(A \in V^K)$. Il faut montrer que $T$ est de la forme (9). Nous procéderons par étape.

a/ Si $A$ admet des points fixes, on a p.s. $A = R^N$, puisque $A$ est stationnaire, et $A$ est un réseau poissonien trivial. Supposons donc $A$ sans point fixe. D'après le théorème 3, $T$ vérifie $T(\lambda K) = \lambda^\alpha T(K)$ sur $\mathcal{K}$ pour un $\alpha > 0$, et reste fini sur $\mathcal{K}$. D'après le théorème 4, $T$ est H-additive sur $C(\mathcal{K})$, donc continue sur $C(\mathcal{K})$ d'après le corollaire de la proposition 3. D'après le corollaire du théorème 3, $A$ est p.s. négligeable pour la mesure de Lebesgue. Soit $B_n$ la boule de centre $O$ et de rayon $n$. On peut supposer $T(B_n) > 0$ pour $n$ assez grand (sinon $A = \emptyset$ p.s.). D'après le théorème 4, ~~Ak~~ $A_n = A \cap B_n$ se déduit par poissonisation d'un fermé aléatoire convexe, $A'_n$ que nous appellerons le fermé primaire. $A'_n$ est p.s. négligeable pour la mesure de Lebesgue, puisque $A$ et $A_n$ le sont. ~~Ak~~ $A'_n$ est donc p.s. un convexe sous dimensionnel. Soit $k < N$ la dimension de $A'_n$, c.à.d. le plus petit entier tel que $A'_n$ soit p.s. contenu dans une variété de dimension $k$. Cet entier $k$ ne dépend pas de l'entier $n$, comme on le voit en utilisant la continuité de $T$ sur $C(\mathcal{K})$. Si $k = 0$, $A'_n$ est p.s. ponctuel, donc $A_n$ est un processus de Poisson ponctuel de densité constante dans $B_n$, et la limite inductive $A$ des $A_n$ est un processus de Poisson ponctuel et homogène, et, dans ce cas, le théorème est établi.

Supposons donc $k > 0$. Soit $H$ une variété linéaire de dimension $h$ rencontrant la boule $B_n$. $A'_n \oplus (H \cap B_n)$ est p.s. contenu dans une variété de dimension $\leq h + k$. Ainsi $H \cap B_n \cap A'_n$ est p.s. vide si $h < N - k$, tandis que, pour $h = N - k$, on voit comme ci-dessus que $A \cap H$ est un processus de Poisson ponctuel de densité constante sur H. Cette densité dépend de l'orientation $u \in S_{N-k}$ de H, mais n'est pas identiquement nulle. On en déduit que le degré de la fonctionnelle homogène T est l'entier

$$\alpha = N-k.$$

Il reste à montrer que A est un réseau poissonien de variétés de dimension k.

b/- Examinons d'abord le cas très particulier où le fermé primaire $A'_n$ est p.s contenu dans une variété de direction fixe $u_0 \in S_k$. La relation $T(\lambda K) = \lambda^{N-k} T(K)$ permet de vérifier que cette propriété est indépendante de n - Désignons par E le sous vectoriel de direction $u_0 \in S_k$ et par E' son orthogonal, et considérons la classe $\mathcal{C}_n$ des compacts de $\mathbb{R}^N$ de la forme : $C \times C'$, $C \in \mathcal{K}(E)$, $C' \in \mathcal{K}(E')$ contenus dans $B_n$. Si $C'_1$ et $C'_2$ sont disjoints dans E', on a pour tous $C_1, C_2 \in E$ :

(10)
$$P(A'_n \in V_{C_1 \times C'_1} \cup V_{C_2 \times C'_2}) = P(A'_n \in V_{C_1 \times C'_1}) + P(A'_n \in V_{C_2 \times C'_2})$$

puisque $A'_n$ est p.s contenu dans une variété parallèle à E'. On en déduit que la fonctionnelle T vérifie la relation d'additivité :

(10)
$$T(C_1 \times C'_1 \cup C_2 \times C'_2) = T(C_1 \times C'_1) + T(C_2 \times C'_2)$$

dès que $C'_1 \cap C'_2 = \emptyset$ ($C_1, C_2 \in \mathcal{K}(E)$, $C'_1, C'_2 \in \mathcal{K}(E')$). Pour $C_1 = C$ fixé, on en déduit que $T(C \times C')$ est une mesure sur l'espace E' à N-k dimensions, d'ailleurs proportionnelle à la mesure de Lebesgue $\mu_{N-k}$ de $\mathbb{R}^{N-k}$, puisque T est invariante par translation. Il existe donc une fonction $\tau$ définie sur $\mathcal{K}(E)$ telle que l'on ait :

$$T(C \times C') = \tau(C)\, \mu_{N-k}(C') \qquad (C \in \mathcal{K}(E),\ C' \in \mathcal{K}(E'))$$

Montrons que $\tau$ est, en réalité, une constante. En effet, pour $\lambda > 0$, on a :

$$T(\lambda C \times \lambda C') = \lambda^{N-k}\, T(C \times C') = \lambda^{N-k}\, \tau(C)\, \mu_{N-k}(C')$$

puisque T est homogène de degré $N-k$. Mais on a aussi :

$$T(\lambda C \times \lambda C') = \tau(\lambda C)\, \mu_{N-k}(\lambda C') = \tau(\lambda C)\, \lambda^{N-k}\, \mu_{N-k}(C')$$

Par suite $\tau(\lambda C) = \tau(C)$. La fonction $\tau$, croissante et s.c.s sur $\mathcal{K}(E)$, est donc invariante pour les homothéties et les translations. On en déduit facilement que cette fonction est une constante, que nous désignerons encore par $\tau$.

La relation (10) s'écrit maintenant :

$$T(C_1 \times C'_1 \cup C_2 \times C'_2) = \tau\left[\mu_{N-k}(C'_1) + \mu_{N-k}(C'_2)\right]$$

pour $C'_1 \cap C'_2 = \emptyset$, $C_1, C_2 \in \mathcal{K}(E)$, $C'_1, C'_2 \in \mathcal{K}(E')$. Compte tenu du fait que T est s.c.s sur $\mathcal{K}$, on en déduit pour tout $K \in \mathcal{K}$ :

$$T(K) = \tau\, \mu_{N-k}(K')$$

$K'$ désignant la projection de K dans $E'$, soit $K' = \Pi_{u_0}(K)$. En comparant avec (~~10~~ 9), on voit que A est un réseau poissonien de variétés p.s parallèles.

c/ Plaçons-nous maintenant dans le cas général, et considérons à nouveau le fermé primaire $A'_n$ associé à la boule $B_n$. $A'_n$ est p.s contenu dans une variété linéaire de dimension k indépendante de n (paragraphe c/ ci-dessus). La ~~tan~~ direction $U(A'_n) \in S_k$ est p.s. définie et continue en $A'_n$. C'est donc une variable aléatoire. Soit $F(du)$ sa probabilité, qui est une mesure de Radon positive sur $S_k$, d'ailleurs indépendante de n, comme on le déduit aussitôt de l'homogénéité de T. Pour un compact $K \subset B_n$

donné, la probabilité conditionnelle :

$$\theta_u^{(n)}(K) = P(A'_n \in V_K \mid u)$$

est donc définie $F$ presque partout sur $S_k$. Soit alors $\overline{\mathcal{B}}_n$ l'ensemble dénombrable des réunions finies de boules de centres et de rayons rationnels contenus dans $B_n$. La fonction $\theta_u^{(n)}(\cdot)$ est définie sur $\overline{\mathcal{B}}_n$ pour presque tout $u$.

Mais la relation :

$$(11) \qquad \frac{T(K)}{T(B_n)} = \int_{S_k} F(du)\, \theta_u^{(n)}(K) \qquad (K \in \overline{\mathcal{B}}_n)$$

montre que les propriétés suivantes sont encore vérifiées pour presque tout $u \in S_k$ : La fonction $\theta_u^{(n)}(\cdot)$ est invariante sur $\overline{\mathcal{B}}_n$ pour les translations rationnelles qui ne font pas sortir de $\overline{\mathcal{B}}_n$ ; est scs sur $\overline{\mathcal{B}}_n$ ; vérifie pour tout $\lambda > 0$ rationnel la relation :

$$(12). \qquad \theta_u^{(n)}(\lambda B) = \lambda^{N-k}\, \theta_u^{(n)}(B) \qquad (B, \lambda B \in \overline{\mathcal{B}}_n)$$

enfin, les fonctions $S$ construites à partir de $\theta_u^{(n)}$ sont $\geq 0$ pour $B, B_1, B_2 \dots$ dans $\overline{\mathcal{B}}_n$, et la relation markovienne est vérifiée sur $\overline{\mathcal{B}}_n$ par $\theta_u^{(n)}$.

D'après le corollaire du théorème 1, il existe donc pour presque tout $u$ un fermé aléatoire $A'_n(u)$ vérifiant

$$P(A'_n(u) \in V_B) = \theta_u^{(n)}(B) \qquad (B \in \overline{\mathcal{B}}_n)$$

et $\theta_u^{(n)}$ se prolonge sur $\mathcal{K}(B_n)$. Soit $r_n$ le rayon de la boule $B_n$. Posons :

$$T_u^{(n)}(B_n) = (r_n)^{N-k} \quad ; \quad T_u^{(n)}(K) = T_u^{(n)}(B_n)\, \theta_u^{(n)}(K) \qquad (K \subset B_n)$$

et désignons par $A_n(u)$ le fermé aléatoire défini (pour presque tout $u$) par :

$$P(A_n(u) \in V^K) = e^{-T_u^{(n)}(K)} \qquad (K \in \mathcal{K}, K \subset B_n)$$

Pour $n > n'$, et $K \subset B_n$, la relation (11) donne (pour presque tout $u$) :

$$\theta_u^{(n)}(K) = \left(\frac{r_{n'}}{r_n}\right)^{N-k} \theta_u^{(n')}(K) \qquad (K \in \mathfrak{B}_n)$$

On a donc $T_u^n = T_u^{n'}$ sur $\mathcal{K}(B_n)$. Par suite, toujours pour presque tout $u$, il existe un fermé aléatoire $A(u)$, limite inductive des $A_n(u)$, et ce fermé vérifie

$$P(A(u) \in \mathcal{V}^K) = e^{-T_u(K)} \qquad (K \in \mathcal{K})$$

avec $T_u(K) = T_u^{(n)}(K)$ pour $K \subset B_n$.

D'après la relation (12), $T_u$ est homogène de degré $N-k$, et invariante par translation, et vérifie la relation semi-markovienne. Donc, d'après le paragraphe B/, il existe pour presque tout $u$ une constante $\tau_u$ telle que l'on ait

$$T_u(K) = \tau_u \, \mu_{N-k}(\Pi_u K) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

On en déduit

$$\theta_u^{(n)}(K) = \frac{\mu_{N-k}(\Pi_u K)}{\mu_{N-k}(\Pi_u B_n)}$$

En reportant ce résultat dans la relation (11), et en notant que le rapport

$$a = \frac{T(B_n)}{\mu_{N-k}(\Pi_u B_n)}$$

est une constante indépendante de $n$ et de $u$, on obtient pour tout compact $K \subset B_n$ :

$$T(K) = a \int F(du)\, \mu_{N-k}(\Pi_u K)$$

Cette relation, vraie pour tout $n$, s'applique donc à tout compact $K \in \mathcal{K}$. Comme $F$ est une mesure de Radon sur $S_k$, l'expression obtenue est bien de la forme (9), et $A$ est ~~~~ un réseau poissonien de variétés linéaires de dimension $k$ —