N 252

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 117

LA THEORIE DES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES GENERALISEES

Par

G. MATHERON

Octobre 1971

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 117

LA THEORIE DES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES GENERALISEES

Table des Matières

LA THEORIE DES FONCTIONS ALEATOIRES INTRINSEQUES GENERALISEES

0 - INTRODUCTION

Je me propose dans cette Note de donner un statut mathématique précis aux ambiguités qui se manifestent lorsque l'on essaye d'interpréter en termes physiques les résultats du krigeage universel. Ces ambiguités sont liées à l'indétermination algébrique qui affecte le variogramme sous-jacent, ou (ce qui revient au même) au statut fonctionnel ou aléatoire que l'on peut, à volonté, attribuer à la dérive. Plutôt que par un variogramme sous-jacent, c'est par une classe de variogrammes équivalents, définis à un polynôme près, que l'on doit ici caractériser ou interpréter la réalité physique. Certaines propriétés des estimateurs qu'introduit le K.U. sont liées uniquement à cette classe d'équivalence, et non au choix particulier d'un variogramme dans cette classe. Nous dirons qu'il s'agit de propriétés intrinsèques. Ainsi, la forme de l'estimateur optimal de la dérive est une caractéristique intrinsèque de la F.A., mais non la variance qu'on lui attribue. Nous verrons que la krigeage, au contraire, possède le caractère intrinsèque à la fois dans sa forme et dans sa variance. Le but de cette Note est précisément l'étude de ces propriétés intrinsèques en tant que telles.

1 - DEFINITION DES F.A.I.

1-1 L'espace Λ des combinaisons linéaires finies.

Nous désignerons par Λ l'espace des mesures à support fini dans $\mathbb{R}^n$. Si f est une fonction quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et si $\lambda \in \Lambda$, l'expression $\int \lambda f = \int f(x)\ \lambda(dx)$ représente donc une combinaison linéaire finie de la forme $\sum_\alpha \lambda^\alpha f(x_\alpha)$.

Si $Z : \mathbb{R}^n \to H$ est une fonction aléatoire d'ordre deux, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^n$ dans un espace de Hilbert H de variables aléatoires, Z se prolonge immédiatement par une application linéaire de Λ dans H. Il suffit de poser :

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx)\ Z(x)$$

On peut alors définir sur Λ la fonction $\|\lambda\| = \|Z(\lambda)\|$. $\|Z\|$ est une norme si $\int \lambda(dx)\ Z(x) = 0$ entraîne $\lambda = 0$. Si l'on désigne par $\sigma(x,y)$ la fonction de covariance de $Z(x)$, cette condition équivaut à la positivité stricte de la matrice $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma(x_\alpha, x_\beta)$ pour tout ensemble fini de points x_α distincts dans $\mathbb{R}^n$. Moyennant cette condition, Λ muni de $\|\lambda\|$ est préhilbertien, et son complété $\tilde{\Lambda}$ s'identifie à l'espace de Hilbert H engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. On peut dire aussi que $\tilde{\Lambda}$ est l'espace des intégrales stochastiques (au sens large) de $Z(x)$.

Il y aura souvent intérêt à munir Λ d'une autre topologie. Désignons par M_c l'espace des mesures à support compact, dont Λ est un sous-vectoriel. M_c est le dual de l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Nous munissons M_c de sa topologie faible, et Λ de la topologie induite par la précédente. Pour cette topologie, la convergence $\mu_n \to \mu$ (c'est-à-dire $\int \mu_n \varphi \to \int \mu\varphi$ pour toute fonction continue φ) équivaut à l'ensemble des deux conditions suivantes :

- 1 : La suite μ_n converge vaguement vers μ.

- 2 : Les supports des μ_n restent contenus dans un compact fixe.

Pour que la F.A. $Z(x)$ soit fortement continue, il faut et il suffit que $Z(\lambda)$ soit fortement continue lorsque Λ est munie de la topologie faible de M_c . En effet, cette condition est évidemment suffisante. Inversement, si $Z(x)$ est fortement continue, la covariance $\sigma(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. La convergence faible $\lambda_n \to 0$ dans $\Lambda \subset M_c$ entraînant dans M_c celle des mesures-produit $\lambda_n \otimes \lambda_n \to 0$, on a alors $\int \lambda_n(dx)\ \sigma(x,y)\ \lambda_n(dy) = \|Z(\lambda_n)\|^2 \to 0$, et $Z(\lambda)$ est continue.

Lorsque cette condition est réalisée, on a $M_c \subset \tilde{\Lambda}$, et l'application de M_c dans H définie par $Z(\mu) = \int \mu(dx)\ Z(x)$ est continue pour la topologie faible de M_c. Cette application est injective pourvu que $\int \mu\sigma\mu = 0$ entraîne $\mu = 0$ dans M_c. Mais l'application réciproque n'est pas continue, et la topologie faible sur M_c est toujours plus forte que la topologie préhilbertienne induite par $\tilde{\Lambda}$.

1-2 Les F.A.S.T.

Soit Z une F.A. d'ordre 2, H l'espace de Hilbert engendré par les $Z(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. La translation $x \to x + h$ se prolonge sur H par un groupe U_h , avec en particulier $Z(\tau_h\ \lambda) = U_h\ Z(\lambda)$, τ_h désignant la translatée $\lambda(dx-h)$ de $\lambda \in \Lambda$, soit explicitement :

$$\int \lambda(dx)\ Z(x+h) = U_h \int \lambda(dx)\ Z_x$$

Lorsque le groupe U_h , $h \in \mathbb{R}^n$ est <u>unitaire</u>, on dit que la fonction aléatoire Z est <u>stationnaire</u> (F.A.S.T.). Dans ce qui suit, nous supposons que Z est une F.A.S.T. fortement continue.

Rappelons quelques résultats classiques. On désignera par H_o le sous-espace de H constitué des éléments invariants par U_h (c'est-à-dire vérifiant $U_h\ X = X$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$) et par E_o <u>le projecteur de H_o</u>. Si H_o se sompose uniquement des constantes, E_o s'identifie à l'espérance mathématique E définie par $EX = < 1, X >$ (cas dit ergodique). $E_o Z_x = m_o$ est une V.A. de H_o (une constante dans le cas ergodique). La covariance stationnaire

$$\sigma(h) = E(Z_x\ Z_{x+h})$$

se met sous la forme :

$$\sigma(h) = \sigma_o(h) + E(m_o^2)$$

où $\sigma_o(h)$ désigne la covariance centrée :

$$\sigma_o(h) = E[(Z_x - m_o)(Z_{x+h} - m_o)]$$

On sait que $\sigma_o(h)$ est de la forme :

$$\sigma_o(h) = \int_{R^n} \text{Cos}\ (2\pi\ u\ h)\ X_o(du)$$

où X_o est une mesure positive, symétrique et sommable <u>sans atome à l'origine</u>.

1-3 Les F.A.I.

Soit, maintenant, Λ' un sous-espace de Λ que nous supposerons fermé dans Λ (pour la topologie induite par la topologie faible de M_c). Nous dirons qu'une application linéaire Z de Λ' dans un espace de Hilbert H est une fonction aléatoire généralisée d'ordre 2 (F.A.G.) sur Λ'. Nous prendrons en général pour H l'espace de Hilbert engendré par les $Z(\lambda), \lambda \in \Lambda'$, et nous supposerons que Z est une application fortement continue de Λ' dans H pour la topologie induite par M_c sur Λ'. (F.A.G. continue). Nous supposerons également que $\|Z_\lambda\| = 0$ entraîne $\lambda = 0$ dans Λ' et nous désignerons par $\tilde{\Lambda}'$ le complété de Λ' pour la norme préhilbertienne définie sur Λ' par $\|\lambda\| = \|Z_\lambda\|$. Λ' est l'espace des combinaisons linéaires finies autorisées, $\tilde{\Lambda}'$ est l'espace des intégrales stochastiques autorisées, et peut être identifiée à H lui-même. Z étant fortement continue, la fermeture $\bar{\Lambda}'$ de Λ' dans M_c est contenue dans $\tilde{\Lambda}'$, et l'espace $M_c \cap \tilde{\Lambda}'$ coïncide alors avec $\bar{\Lambda}'$.

Comme Λ' est fermé dans Λ, il existe une famille $f^\ell, \ell \in L$ de fonctions continues telles que $\lambda \in \Lambda' \Leftrightarrow \int \lambda f^\ell = 0$ pour tout $\ell \in L$. De même :

$$\mu \in \bar{\Lambda}' = M_c \cap \tilde{\Lambda}' \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ i \in I\ , \int \mu\ f^\ell = 0$$

Ainsi $\bar{\Lambda}'$ est l'orthogonal dans M_c des fonctions $f^\ell, \ell \in L$.

Pour généraliser la notion de stationnarité, nous devons munir H du groupe (continu) U_h prolongeant sur $\tilde{\Lambda}'$ l'application définie par $U_h\ Z(\lambda) = Z(\tau_h\ \lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda'$ ($\tau_h\ \lambda = \lambda(dx-h)$ est la mesure translatée de λ). Nous dirons alors que Z est une <u>fonction aléatoire intrinsèque</u> (F.A.I.) sur Λ' si ce groupe U_h est <u>unitaire</u>, autrement dit si, pour tout $\lambda \in \Lambda'$, $Z(\tau_h \lambda)$ est une F.A.S.T. en $h \in \mathbb{R}^n$.

La définition du groupe U_h donnée ci-dessus n'a de sens que si Λ' est <u>stable pour les translations</u> , ce que nous supposerons évidemment. Mais Λ' est stable pour les translations si et seulement si son orthogonal possède la même propriété. Autrement dit, l'espace (fermé dans $\mathcal{E}$) engendré par les fonctions f^ℓ, $\ell \in L$ doit être lui-même invariant par translation. Si L <u>est fini</u> (ce que nous supposerons dans ce qui suit) ceci implique l'existence d'une matrice B(h) vérifiant :

$$f^\ell(x+h) = B_s^\ell(h)\ f^s(x)$$

On montre alors que les f sont nécessairement des exponentielles-polynomes. Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas le plus intéressant qui est celui où les $f^\ell(x)$ sont des <u>polynomes</u>. Plus précisément :

Pour k entier ≥ 0, nous désignerons par Λ_k le sous-espace de Λ constitué des mesures λ à support fini vérifiant :

$$\int x_1^{i_1}\ x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}\ \lambda(dx) = 0$$

pour $i_1, \dots i_n$ entiers ≥ 0 tels que $i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq k$. Pour abréger les notations, nous écrirons en général ℓ pour $(i_1, \dots i_n)$, $\ell \leq k$ pour $i_1 + \dots + i_n \leq k$ et $f^\ell(x)$ pour $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$. Nous dirons qu'une F.A.I. sur Λ_k est une <u>fonction aléatoire intrinsèque d'ordre k</u> (F.A.I.-k).

2 - REPRESENTATION DES F.A.I.

2-1 Formules de transformation.

Si Z est une F.A.I. sur un sous-espace Λ' de Λ, convenons de dire qu'une F.A. $Y(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ est une représentation de Z si pour tout $\lambda \in \Lambda'$ on a :

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx)\ Y(x)$$

Limitons-nous au cas où Z est une F.A.I.-k. Il est facile de trouver des mesures $\lambda_\ell \in \Lambda$ $(\ell = (i_1, \dots i_n),\ i_1 + \dots + i_n \leq k)$ telles que l'on ait :

$$\int \lambda_\ell(dx)\ f^s(x) = \delta_\ell^s \tag{2-1-1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $(\delta_x - f_x^\ell\ \lambda_\ell) \in \Lambda_k$. Considérons alors la F.A. définie par :

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell\ \lambda_\ell) \tag{2-1-2}$$

$Y(x)$ est une représentation de Z. En effet, soit $\lambda \in \Lambda_k$, c'est-à-dire vérifiant :

$$\int \lambda(dx)\ f^\ell(x) = 0 \qquad (\ell \leq k)$$

d'où aussi $\int \lambda(dx)\ [\delta_x - f_x^\ell\ \lambda_\ell] = \lambda$. Comme Z est par définition une application linéaire de Λ_k dans H, il en résulte :

$$Z(\lambda) = \int \lambda(dx)\ Z[\delta_x - f_x^\ell\ \lambda_\ell] = \int \lambda(dx)\ Y(x)$$

et $Y(x)$ est bien une représentation de Z.

Si $X(x)$ est une autre représentation de Z, on a par définition : $Z(\lambda) = \int \lambda(dx)\ Y(x) = \int \lambda(dx)\ X(x)$ pour tout $\lambda \in \Lambda_k$. En particulier, pour $\lambda = \delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell$, on trouve :

$$\begin{aligned} Y(x) &= Y(x) - f_x^\ell \int \lambda_\ell(dy)\ Y(y) \\ &= X(x) - f_x^\ell \int \lambda_\ell\ (dy)\ X(y) \end{aligned}$$

On en tire les conséquences suivantes :

~ La représentation introduite en 2-1-2 est <u>caractérisée</u> par les relations :

(2-1-3) $$\int \lambda_\ell(dx)\ Y(x) = 0$$

En effet, si une autre représentation $X(x)$ vérifie (2-1-3), on trouve $Y(x) = X(x) - f_x^\ell \int \lambda_\ell(dy)\ X(y) = X(x)$.

~ Toute autre représentation $X(x)$ de Z est de la forme :

(2-1-4) $$X(x) = Y(x) + A_\ell\ f^\ell(x)$$

où les A_ℓ sont des V.A. vérifiant $A_\ell = \int \lambda_\ell(dy)\ X(y)$. Inversement, donnons-nous des variables aléatoires A_ℓ (non nécessairement dans H). La F.A. définie par (2-1-4) est alors manifestement une représentation de Z, puisque $\int \lambda\ X = \int \lambda\ Y$ pour $\lambda \in \Lambda_k$, et vérifie d'ailleurs :

(2-1-5) $$A_\ell = \int \lambda_\ell(dy)\ X(y)$$

comme il résulte aussitôt de (2-1-1) et (2-1-3). Ainsi, les relations (2-1-2) et (2-1-4) donnent la <u>forme générale de toutes les représentations de Z</u>.

Il est clair que, Z étant supposé fortement continu sur Λ muni de la topologie induite par M_c, toutes les représentations de Z sont des F.A. fortement continues (réciproquement d'ailleurs, Z est continue sur Λ dès qu'elle admet une représentation continue).

En ce qui concerne les covariances, posons

$$\sigma_y(x,y) = E(Y_x\, Y_y) \quad ; \quad \sigma_x(x,y) = E(X_x\, X_y)$$

Il résulte aussitôt de (2-1-4) et (2-1-5) les formules de transformation suivantes :

$$(2\text{-}1\text{-}6)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma_y(x,y) &= \sigma_x(x,y) - f_x^\ell \int\lambda_\ell(dz)\ \sigma_x(z,y) - f_y^\ell \int\lambda_\ell(dz)\ \sigma_x(x,z) \\ &\qquad + f_x^\ell\, f_y^s \iint\lambda_\ell(dz)\ \sigma_x(z,z')\ \lambda_s(dz') \\ \sigma_x(x,y) &= \sigma_y(x,y) + f_x^\ell < A_\ell\,, Y(y)> + f_y^\ell < A_\ell\,, Y(x) > \\ &\qquad + f_x^\ell\, f_y^s < A_\ell\,, A_s > \end{aligned}\right.$$

La seconde de ces relations se met sous la forme :

$$(2\text{-}1\text{-}7)\qquad \sigma_x(x,y) = \sigma_y(x,y) + f_x^\ell\, a_\ell(y) + f_y^\ell\, a_\ell(x) + T_{\ell s}\, f_x^\ell\, f_y^s$$

où les a_ℓ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ et $T_{\ell s}$ une matrice ≥ 0. Inversement, si l'on se donne des fonctions continues a_ℓ et une matrice ≥ 0 $T_{\ell s}$, il existera une représentation X(x) vérifiant (2-1-7) si et seulement si les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

1 - $\exists\, Y_\ell \in H$: $< Y_\ell\,,\ Y(x) > = a_\ell(x)$

2 - $T_{\ell s} \geq < Y_\ell\,,\ Y_s >$

Ces conditions sont nécessaires, comme on le voit en prenant pour Y_ℓ la projection de A_ℓ dans H, et il est facile de voir qu'elles sont suffisantes. La condition -1 équivaut à la continuité des formes $\lambda \to \int \lambda\ a_\ell$ sur Λ muni de la norme

$$\|\lambda\| = \left\| \int Y(x)\ \lambda(dx) \right\|$$

c'est-à-dire à l'existence de nombres B_ℓ tels que pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$$\left| \int \lambda(dx)\ a_\ell(x) \right|^2 \leq B_\ell \iint \lambda_\ell(dx)\ \sigma_y(x,y)\ \lambda_\ell(dy)$$

Nous avons déjà rencontré ces conditions dans la théorie du Krigeage Universel.

<u>2-2 Formule des translations et conséquences.</u>

Soit Z une F.A.I.-k continue. Ayant fait choix de mesures λ_ℓ vérifiant (2-1-1), considérons la représentation

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell\ \lambda_\ell)$$

Comme Z est une F.A.I., on a par définition :

$$U_h\ Y(x) = Z(\delta_{x+h} - f_x^\ell\ \tau_h\ \lambda_\ell)$$

Ceci peut s'écrire :

$$U_h\ Y(x) = Z(\delta_{x+h} - f_{x+h}^\ell\ \lambda_\ell) + Z(f_{x+h}^\ell\ \lambda_\ell - f_x^\ell\ \tau_h\ \lambda_\ell)$$

Or $Z(\delta_{x+h} - f_{x+h}^\ell\ \lambda_\ell) = Y(x+h)$ par définition, et, d'après (1-4-3), on a aussi :

$$Z(f^{\ell}_{x+h}\,\lambda_\ell - f^{\ell}_x\,\tau_h\,\lambda_\ell) = f^{\ell}_{x+h}\int\lambda_\ell(dz)\;Y(z) - f^{\ell}_x\int\lambda_\ell(dz)\;Y(z+h)$$

$$= - f^{\ell}_x\int\lambda_\ell(dz)\;Y(z+h)$$

On en déduit la formule des translations :

$$(2\text{-}2\text{-}1)\qquad \begin{cases} U_h\;Y(x) = Y(x+h) - A_\ell(h)\;f^{\ell}(x) \\ \\ A_\ell(h) = \int\lambda_\ell(dz)\;Y(z+h) \end{cases}$$

De cette relation va découler une majoration qui jouera un rôle capital dans la théorie des F.A.I.-k. Comme $\|Y_x\|$ est continue et que les $\lambda_\ell \in \Lambda$ ont leurs supports contenus dans un même compact, il existe $B > 0$ tel que :

$$|h| \leq 1 \quad\Rightarrow\quad \left\|\int\lambda_\ell(dy)\;Y_{y+h}\right\| \leq B$$

De la relation (1-5-1) mise sous la forme :

$$Y_{x+h} = U_h\;Y_x + f^{\ell}_x\int\lambda_\ell(dy)\;Y_{y+h}$$

et de $|f^{\ell}_x| \leq r^{\ell}$ avec $r = |x|$ et $\ell = i_1+\ldots+i_n$ degré du polynome f^{ℓ}, il résulte pour $|h| \leq 1$ une majoration de la forme :

$$\|Y_{x+h}\| \leq \|Y_x\| + \Sigma_0^k\;b_i\;r^i$$

Soit alors u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et ε un nombre compris entre 0 et 1. Par itération en $m = 0,1,2\ldots.$ on obtient :

$$\|Y_u\| \leq \|Y_o\| + b_o$$

$$\|Y_{2u}\| \leq \|Y_u\| + \sum_o^k \; b_i$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$\|Y_{mu}\| \leq \|Y_{(m-1)u}\| + \sum_o^k \; b_i(m-1)^i$$

$$\|Y_{(m+\varepsilon)u}\| \leq \|Y_{mu}\| + \sum_o^k \; b_i \; m^i$$

En sommant terme à terme, on en déduit une majoration de la forme :

$$\|Y_{(m+\varepsilon)u}\| \leq \sum_o^k \; B_i \; m^i \leq a + b(m+\varepsilon)^{k+1}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, si l'on pose $r = |x|$, la représentation $Y(x)$ vérifie l'inégalité :

(2-2-2) $$\|Y(x)\| \leq a + b \; r^{k+1}$$

Il résulte d'ailleurs de (2-1-4) que toute autre représentation $X(x)$ de Z vérifie une majoration de la même forme.

La majoration (2-1-2) jouera un rôle important dans la suite. Dès maintenant, nous en tirons l'importante conséquence suivante : l'intégrale stochastique $\int \mu(dx) \; Y(x)$ existe non seulement pour toute mesure $\mu \in M_c$ à support compact, mais pour toute mesure μ à décroissance suffisamment rapide à l'infini. Par exemple si $\varphi \in \mathcal{S}$ est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, la régularisée

$$Y_\varphi(x) = \int \varphi(y) \; Y(x+y)dy$$

existe toujours, et il est facile de vérifier que c'est alors une F.A. indéfiniment dérivable.

On note d'ailleurs que, pour $\lambda \in \Lambda_k$, l'intégrale $\int \lambda(dx)\ Y_\varphi(x)$ ne dépend pas du choix de la représentation Y de la F.A.I.-k Z, car on a :

$$\int \lambda(dx)\ Y_\varphi(x) = \int \varphi(y) \int \lambda(dx)\ Y(x+y)dy = \int \varphi(y)\ Z(\tau_y\ \lambda)dy$$
$$= \int \varphi(y)\ U_y\ Z(\lambda)dy$$

Autrement dit, Y_φ est une représentation de la F.A.I.-k Z_φ définie sur Λ_k par :

$$Z_\varphi(\lambda) = \int \varphi(y)\ U_y\ Z(\lambda)dy$$

Nous dirons que Z_φ est la régularisée de Z par φ. C'est une F.A.I.-k indéfiniment dérivable si $\varphi \in \mathcal{S}$ (c'est-à-dire dont toutes les représentations sont indéfiniment dérivable en moyenne quadratique). On notera que les dérivées d'ordre $p \leq k$ de Z_φ sont des F.A.I.-(k-p).

2-3 Le théorème de décomposition.

Si Y(x) est une F.A.S.T., l'application $\lambda \to \int \lambda(dx)\ Y(x)$ définit évidemment sur Λ_k une F.A.I.-k que l'on peut désigner par $Y(\lambda)$. On peut alors définir la somme d'une F.A.I.-k Z_c et de la F.A.S.T. Y(x) (considérée comme une F.A.I.-k) : c'est la F.A.I.-k Z définie pour $\lambda \in \Lambda_k$ par

$$Z(\lambda) = Z_c(\lambda) + \int \lambda(dx)\ Y(x)$$

On a alors le résultat suivant : Toute F.A.I.-k continue est somme d'une F.A.S.T. et d'une F.A.I.-k indéfiniment dérivable.

En effet, soit Z une F.A.I.-k continue. Considérons la fonction $p_a \in \mathcal{S}$ définie par sa transformée de Fourier

$$(2\text{-}3\text{-}1) \qquad \tilde{p}_a(u) = \left(1 + \frac{4\pi^2\ au^2}{2!} + \ldots + \frac{(4\pi 2\ au^2)^{k'}}{k'!}\right) e^{-4\pi^2 au^2}$$

(k' entier tel que 2 k' > k). Toutes les dérivées de $1 - \tilde{p}_a$ jusqu'a l'ordre 2 k' > k sont nulles en u = 0. Par conséquent la mesure $\delta - p_a(x)dx$ est dans Λ_k. D'après la définition des F.A.I., on a :

$$Y_a(x) = Z(\delta_x - \tau_x\, p_a) = U_x\, Z(\delta - p_a)$$

Autrement dit, $Y_a(x)$ est une F.A.S.T. D'après la définition même de la régularisée Z_{p_a}, on a alors :

$$(2\text{-}3\text{-}1) \qquad Z = Y_a + Z_{p_a}$$

où Y_a est l'application $\lambda \to \int Y_a(x)\ \lambda(dx)$ définie sur Λ_k à partir de la F.A.S.T. $Y_a(x)$, et où Z_{p_a} est une F.A.I.-k indéfiniment dérivable : ce qui constitue le résultat annoncé.

Si Y(x) est une représentation quelconque de Z, on a $Y_a(x) = Z(\delta_x - \tau_x\, p_a) = Y(x) - \int p_a(y)\ Y(x+y)dy$ puisque $\delta_x - \tau_x\, p_a$ est dans Λ_k ; et (2-3-1) s'écrit simplement :

$$(2\text{-}3\text{-}1') \qquad Y(x) = [Y(x) - Y_{p_a}(x)] + Y_{p_a}(x)$$

Notons encore le résultat suivant : <u>Toute F.A.I.-k Z est limite de F.A.S.T. $Y_n(x)$ en ce sens que pour tout $\lambda \in \Lambda_k$ la suite $\int \lambda(dx)\ Y_n(x)$ converge dans H vers $Z(\lambda)$</u>.

Cela résulte assez facilement de (2-3-1) ou (2-3-1'). Il suffit, en effet, de montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda_k$ la V.A.

$$Z_a(\lambda) - \int \lambda(dx)\ Y_{p_a}(x) = \int p_a(y)dy \int \lambda(dx)\ Y(x+y)$$

converge fortement vers 0 pour a infini. Comme $\lambda \in \Lambda_k$, $\int \lambda(dx)\ Y(x+y) = U_y\ Z(\lambda)$ est une F.A.S.T. Désignons par $\chi(du)$ la mesure spectrale associée à cette F.A.S.T. On a alors :

$$E[Z_a(\lambda)]^2 = \int |\tilde{p}_a(u)|^2\ \chi(du) = \int e^{-8\pi^2 au^2}\left(1+\ldots+\frac{(4\pi^2u^2)^{k'}}{k'!}\right)\chi(du)$$

Or $|\tilde{p}_a(u)|^2$ tend vers 0 pour a infini, et vérifie $|\tilde{p}_a(u)|^2 \leq 1$ pour a assez grand. Donc $E[Z_o(\lambda)]^2 = \|Z_a(\lambda)\|^2$ tend vers 0, et le résultat en découle.

<u>2-4 Dérive d'une F.A.I.</u>

Soit E_o le projecteur de l'espace H_o des éléments de H invariants pour U_h (E_o coïncide avec l'espérance dans le cas ergodique). Si Z est une F.A.I.-k, il en est de même de $m_o = E_o(Z)$, définie en posant $m_o(\lambda) = E_o(Z_\lambda)$ sur Λ_k , et m_o est continue dès que Z est continue (ce que nous supposerons).

Considérons la représentation de m_o définie par la formule habituelle :

$$(2\text{-}4\text{-}1) \qquad m_o(x) = m_o(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell) = E_o(Y_x)$$

Alors $m_o(x)$ est un polynome de degré $\leq k+1$ à coefficients dans H_o (constants dans le cas ergodique).

En effet, quitte à remplacer Z par une régularisée, supposons d'abord Z indéfiniment dérivable. m_o et sa représentation $m_o(x)$ sont également indéfiniment dérivables. Comme $m_o(x) \in H_o$, la formule des translations (2-2-1) donne :

$$m_o(x) = m_o(x+h) - A_\ell(h)\, f^\ell(x)$$

En dérivant k+1 fois en x, ce qui élimine les termes en $A_\ell(h)\, f^\ell(x)$, puis une fois en h, ce qui fait disparaître $m_o(x)$, on constate que toutes les dérivées d'ordre k+2 de $m_o(x)$ sont identiquement nulles, ce qui établit le résultat. Le théorème de décomposition montre que ce résultat subsiste lorsque Z n'est pas dérivable.

Le polynome $m_o(x)$ à coefficients invariants dépend du choix de la représentation. Mais on vérifie sans peine, à l'aide des formules de transformation, que les termes de degré k+1 n'en dépendent pas, et constituent donc une caractéristique de la F.A.I. elle-même. Par définition, nous dirons que ces termes de degré k+1 constituent la dérive de Z. Ainsi, la dérive d'une F.A.I.-k est un polynome homogène de degré k+1 à coefficients invariants (constants dans le cas ergodique).

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons surtout aux F.A.I. sans dérive, puisqu'on peut toujours se ramener à ce cas en remplaçant Z par Z - m_o. Pour toute représentation Y(x), E_oY_x est alors un polynome de degré $\leq$ k à coefficients invariants.

2-5 Théorème limite pour les F.A.I. sans dérive.

Si Z est une F.A.I.-k sans dérive et Y(x) une représentation quelconque de Z, en posant $r = |x|$, on a au sens fort :

$$\lim_{r \to \infty} \frac{Y_x}{r^{k+1}} = 0 \tag{2-5-1}$$

D'après le théorème de désomposition, il suffit d'établir le théorème dans le cas où Z est indéfiniment dérivable, donc aussi la représentation Y(x). La théorème est vrai pour k = 0 (fonctiona aléatoires intrinsèques au sens ordinaire). Supposons-le établi pour k-1. Comme Z est supposé dérivable, on peut choisir pour Y(x) la représentation qui s'annule en x = 0 ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leq$ k. Si α et r désignent le vecteur unitaire et le module de $x \in \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$Y(x) = \alpha^i \int_0^r \partial_i \, Y(\alpha\rho) d\rho$$

et par suite :

$$\|Y_x\| \leq \sum_i \int_0^r \|\partial_i \, Y(\alpha\rho)\| d\rho$$

Mais ∂_i Y(x) est une F.A.I.-(k-1), et, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1}{\rho^k} \sum_i \|\partial_i \, Y(\alpha\rho)\|$$

tend vers 0 pour ρ infini. On en tire :

$$\frac{1}{r^{k+1}} \|Y_x\| = \frac{1}{r^{k+1}} \int_0^r \rho^k \varepsilon(\rho)d\rho \leq \frac{1}{r} \int_0^r \varepsilon(\rho)d\rho$$

et cette expression tend vers 0 pour r infini. Le théorème est donc vrai pour la représentation choisie, et il résulte des formules de transformation qu'il est alors vérifié pour toute autre représentation.

3 - LES COVARIANCES GENERALISEES

3-1 La classe des covariances associées à une F.A.I.

Dans ce qui suit, Z désignera une F.A.I.-k continue sur $\mathbb{R}^n$. Nous dirons qu'une fonction K continue et symétrique sur $\mathbb{R}^n$ (ces deux restrictions ne sont pas essentielles) est <u>une</u> covariance pour Z si l'on a :

$$(3\text{-}1\text{-}1) \qquad \iint \lambda(dx)\ K(x-y)\ \mu(dy) = E[Z(\lambda)\ Z(\mu)]$$

pour $\lambda, \mu \in \Lambda_k$. (E désigne l'espérance mathématique). Il suffit d'ailleurs pour cela que l'on ait :

$$(3\text{-}1\text{-}1') \qquad \iint \lambda(dx)\ K(x-y)\ \lambda(dy) = E(Z_\lambda^2) \qquad (\lambda \in \Lambda_k)$$

Nous dirons que la famille des fonctions K symétriques et continues vérifiant cette propriété constitue <u>la classe des covariances</u> associées à Z. Nous allons montrer qu'il existe toujours de telles covariances, et que, si l'on en connaît une, toutes les autres s'en déduisent par addition d'un polynome pair de degré $\leq 2k$ à coefficients quelconques. Il y aura donc <u>un théorème d'existence et un théorème d'unicité à une équivalence près</u> (équivalence définie par $K_1 \equiv K_2$ si $K_1 - K_2$ est un polynome de degré $\leq 2k$).

Par définition, nous dirons qu'une fonction K continue et symétrique sur $\mathbb{R}^n$ est de <u>type positif conditionnel d'ordre k</u> si l'on a $\iint \lambda(dx)\ K(x-y)\ \lambda(dy) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda_k$.

Il résulte de la définition (3-1-1') que les covariances d'une

F.A.I.-k, s'il y en a, sont de type positif conditionnel d'ordre K. Inversement, si K est une fonction de ce type, on peut construire une F.A.I.-k Z telle que les $Z(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_k$ soient des gaussiennes vérifiant (3-1-1'). Il y aura ainsi identification entre les covariances des F.A.I.-k continues et les fonctions continues symétriques de type positif conditionnel d'ordre k.

3-2 Le théorème d'unicité.

Si K_o est une covariance de la F.A.I.-k Z, il en sera de même de toute fonction de la forme $K_o + K$ si et seulement si K vérifie $\int \lambda(dx)\ K(x-y)\ \mu(dy) = 0$ pour $\lambda, \mu \in \Lambda_k$, ou, ce qui revient au même, si :

$$(3\text{-}2\text{-}1) \qquad \forall\ \lambda \in \Lambda_k \quad , \quad \int \lambda(dx)\ K(x-y)\ \lambda(dy) = 0$$

Le théorème d'unicité à une équivalence près annoncé ci-dessus peut donc s'énoncer sous la forme :

<u>Une fonction K continue et symétrique sur $\mathbb{R}^n$ vérifie la relation (3-2-1) si et seulement si c'est un polynome pair de degré $\leq 2k$.</u>

On vérifie sans difficulté que les polynomes de degré $\leq 2k$ satisfont à (3-2-1), car $K(x-y)$ se met alors sous la forme $K_{ij}\ f^i(x)\ f^j(y)$, les $f^i(x)$ désignant des monomes et la sommation étant étendue aux couples d'indices (i,j) tels que $i + j \leq 2k$ (donc l'un des deux est toujours $\leq k$). Pour démontrer la réciproque, nous établirons le lemme un peu plus général suivant (que l'on pourra comparer à la relation (2-2-7)).

<u>Lemme</u> - Pour qu'une fonction Φ continue et symétrique (c'est-à-dire telle que $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifie la relation

$$(3\text{-}2\text{-}2) \qquad \forall\ \lambda \in \Lambda_k \quad , \quad \iint \lambda(dx)\ \Phi(x,y)\ \lambda(dy) = 0$$

il faut et il suffit que Φ soit de la forme :

$$(3\text{-}2\text{-}3) \qquad \Phi(x,y) = a_\ell(y)\ f^\ell(x) + a_\ell(x)\ f^\ell(y) - T_{\ell s}\ f^\ell(x)\ f^s(y)$$

pour des constantes $T_{\ell s}$ et des fonctions continues a_ℓ .

Il est clair que (3-2-3) entraîne (3-2-2). Inversement, supposons (3-2-2) vérifiée, donc aussi $\iint \lambda\ \Phi\ \mu = 0$ pour $\lambda,\ \mu \in \Lambda_k$. Pour $\lambda \in \Lambda_k$, posons sur $\mathbb{R}^n$:

$$(3\text{-}2\text{-}4) \qquad \psi_\lambda(x) = \int \lambda(dy)\ \Phi(x,y)$$

Cette fonction ψ_λ vérifie donc $\int \mu\ \psi_\lambda = 0$ pour tout $\mu \in \Lambda_k$. Comme ψ_λ est une fonction continue, elle appartient à l'orthogonal $\Lambda_k^\perp$ dans $\mathcal{C}$ de l'espace Λ_k , qui est par définition l'espace vectoriel des polynomes de degré $\leq k$. Il existe donc des coefficients $a_\ell(\lambda)$ tels que l'on ait :

$$(3\text{-}2\text{-}4') \qquad \psi_\lambda(x) = a_\ell(\lambda)\ f^\ell(x)$$

Il est clair que les $a_\ell(\lambda)$ constituent des formes linéaires sur Λ_k . Nous pouvons prolonger ces formes sur Λ entier en posant pour $x \in \mathbb{R}^n$:

$$a_\ell(x) = a_\ell(\delta_x - f_x^s\ \lambda_s) + D_{\ell s}\ f^s(x)$$

pour des mesures λ_s vérifiant les relations habituelles $\int \lambda_s\ f^{s'} = \delta_s^{s'}$

et des coefficients $D_{\ell s}$ quelconques. On obtient le prolongement annoncé en écrivant :

$$(3\text{-}2\text{-}5) \qquad a_\ell(\lambda) = \int \lambda(dx)\ a_\ell(x) \qquad (\lambda \in \Lambda)$$

Soit alors λ quelconque dans Λ. Pour calculer l'intégrale

$$\psi_\lambda(x) = \int \lambda(dy)\ \Phi(x,y)$$

nous pouvons utiliser la décomposition :

$$\begin{cases} \lambda = (\lambda - C^\ell \lambda_\ell) + C^\ell \lambda_\ell \\ C^\ell = \int \lambda\ f^\ell \end{cases}$$

Comme $(\lambda - C^\ell \lambda_\ell)$ est dans Λ_k, on trouve, d'après (3-2-4') :

$$\int [\lambda(dy) - C^\ell \lambda_\ell(dy)]\ \Phi(x,y) = a_\ell\ (\lambda - C^s\ \lambda_s)\ f^\ell(x)$$

puis, d'après (3-2-5)

$$a_\ell(\lambda - C^s\ \lambda_s) = \int \lambda(dy)\ a_\ell(y) - \left(\int \lambda_s\ a_\ell\right) \int \lambda(dy)\ f^s(y)$$

La relation :

$$\int \lambda(dy)\ \Phi(x,y) = \int \Big[f_x^\ell\ a_\ell(y) - f_x^\ell \left(\int \lambda_s\ a_\ell\right) f^s(y) + \\ + \left(\int \lambda_\ell(dz)\ \Phi(x,z)\right) f^\ell(y)\Big]\ \lambda(dy)$$

étant vérifiée pour tout $\lambda \in \Lambda_k$, la fonction $\Phi(x,.) \in \mathcal{C}$ pour x fixé est donnée par :

$$(3\text{-}2\text{-}6) \quad \Phi(x,y) = a_\ell(y)\ f^\ell(x) - f^\ell(x)\ f^s(y) \int \lambda_s\ a_\ell + f^\ell(y) \int \lambda_\ell(dz)\ \Phi(x,z)$$

Mais d'autre part Φ est symétrique en x,y. Par suite, d'après (3-2-4') on a pour tout $\lambda \in \Lambda_k$:

$$\int \lambda(dx)\ \Phi(x,y) = a_\ell(\lambda)\ f^\ell(y)$$

Compte tenu de (3-2-6), ceci donne :

$$a_\ell(\lambda) = \int \lambda_\ell(dz)\ \Phi(x,z)\ \lambda(dx)$$

et l'on peut choisir comme fonctions $a_\ell(x)$ prolongeant $a_\ell(\lambda)$ les fonctions définies par :

$$a_\ell(x) = \int \lambda_\ell(dz)\ \Phi(x,z)$$

La relation (3-2-6) s'écrit alors :

$$\Phi(x,y) = f^\ell(x)\ a_\ell(y) + f^\ell(y)\ a_\ell(x) - T_{\ell s}\ f^\ell(x)\ f^s(y)$$

$$T_{\ell s} = \iint \lambda_\ell(dx)\ \Phi(x,y)\ \lambda_s(dy)$$

Le lemme est ainsi démontré.

Pour établir le théorème d'unicité, il reste à caractériser parmi les fonctions continues symétriques $\Phi(x,y)$ vérifiant (3-2-3) celles qui se mettent sous la forme $K(x-y)$. Si Φ est dérivable, et si D est une dérivation d'ordre k+1 en x, et k+1 en y, on a $D\Phi = 0$ d'après (3-2-3). La fonction $K(h)$, si elle existe, a donc toutes ses dérivées d'ordre 2k+2 identiquement nulles, donc $K(h)$, fonction paire, est un polynome pair d'ordre 2k. Inversement, si K est un tel polynome, $K(x-y)$ vérifie bien (3-2-3).

Si maintenant Φ n'est pas dérivable, ses régularisées du type

$$\int \varphi(x+z)\ \varphi(y+z')\ \Phi(z,z')\ dz\ dz'$$

par des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}$ (indéfiniment dérivables à support compact) sont indéfiniment dérivables. Si Φ est de la forme $K(x-y)$, ces régularisées sont de la forme $K_{\varphi * \check{\varphi}}(x-y)$, où $K_{\varphi * \check{\varphi}}$ est la régularisée de $K(h)$ par $\varphi * \check{\varphi}$ dans $\mathbb{R}^n$. Mais ces régularisées vérifient encore (3-2-2), de sorte que $K_{\varphi * \check{\varphi}}$ est un polynome pair de degré $\leq 2k$. Il suffit ensuite de choisir une suite de régularisées convergeant vers δ dans M_c pour voir que $K(h)$ est limite uniforme sur tout compact de tels polynomes, donc est lui-même un polynome pair de degré $\leq 2k$. Le théorème d'unicité est ainsi établi.

3-3 Le Théorème d'existence.

Nous allons procéder par étapes, en considérant d'abord le cas d'une F.A.I. sans dérive k+1 fois dérivable, puis d'une F.A.I. sans dérive quelconque, enfin le cas d'une F.A.I. avec dérive.

3-3-1 F.A.I.-k (k+1) fois dérivable et sans dérive.

Soit Z une F.A.I.-k (k+1) fois dérivable et sans dérive, et $Y(x)$ une représentation de Z vérifiant $E_o(Y_x) = 0$ (par exemple, $Y_x = Z(\delta_x - f_x^{\ell}\ \lambda_{\ell}))$. On désignera par I l'ensemble des indices $i = (i_1,\ldots i_n)$ tels que $i_1,\ldots i_n$ soient des entiers ≥ 0 vérifiant

$$i_1 + \ldots + i_n = k + 1$$

Alors les dérivées $D_i\ Y_x = \partial_{i_1,\ldots i_n} Y_x$ pour $i \in I$ sont des F.A.S.T.

$Y_i(x)$ orthogonales à H_o $[E_o\, Y_i(x) = 0]$. Nous désignerons par K_i la covariance de Y_i , et χ_i la mesure spectrale associée à K_i, qui est une mesure positive sommable et <u>sans atome à l'origine</u> (puisque $E_o\, Y_i = 0$) telle que l'on ait :

$$K_i(h) = \int \cos 2\pi\, u\, h\, \chi_i(du)$$

($u_h = u_1 h_1 + \ldots + u_n h_n$ désigne le produit scalaire). La relation

$$\sum_{i\in I} K_i(x-y) = E(\sum_{i\in I} D_i\, Z_x\, D_i\, Z_y)$$

montre que la fonction :

$$K_o(h) = \sum_{i\in I} K_i(h)$$

est associée à la mesure positive sommable $\chi_o = \sum \chi_i$ qui est également <u>sans atome à l'origine</u>, soit :

(3-3-1) $$K_o(h) = \int \cos 2\pi\, u\, h\, \chi_o(du)$$

Montrons qu'il existe une fonction K sur $\mathbb{R}^n$ (2k+2) fois dérivables vérifiant la relation :

(3-3-2) $$\Delta^{k+1} K = (-1)^{k+1} K_o$$

En effet, considérons la fonction définie par :

(3-3-3) $$\begin{cases} K(h) = \displaystyle\int \frac{\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h)}{(4\pi^2\, u^2)^{k+1}}\, \chi_o(du) \\ \\ P_k(2\pi\, u\, h) = 1 - \dfrac{(2\pi\, u\, h)^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{(2\pi\, u\, h)^{2k}}{(2k)!} \end{cases}$$

La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. La majoration

$$(3\text{-}3\text{-}3') \qquad |\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h)| \leq \frac{(2\pi\, u\, h)^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

montre qu'elle est également bornée. La valeur en 0 n'est pas définie, mais χ_0 n'ayant pas d'atome en 0, l'intégrale existe et la relation (3-3-3) a un sens.

Montrons que K(h) est dérivable et que l'on peut effectuer les dérivations sous le signe somme dans la formule (3-3-3). Pour cela, donnons au vecteur h un accroissement δh et évaluons l'accroissement de K(h). Si nous posons pour abréger :

$$x = 2\pi\, u\, h \quad , \quad \delta x = 2\pi\, u\, \delta h$$

nous voyons que le numérateur de l'expression à intégrer dans (3-3-3), qui est :

$$f(x) = \sum_{k+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

admet l'accroissement :

$$f(x+\delta x) - f(x) = \sum_{k+1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \left[(x+\delta x)^{2p} - x^{2p}\right]$$

Il s'agit du reste d'une série alternée. On a donc :

$$|f(x+\delta x) - f(x)| \leq \frac{1}{(2k+2)!} \left|(x+\delta x)^{2k+2} - x^{2k+2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(2k+2)!} \sum_{1}^{2k+2} C_{2k+2}^{p} \; |\delta x|^p \; |x|^{2k+2-p}$$

Mais on a aussi :

$$|x| \leq 2\pi \ |u| \ |h|$$

$$|\delta x| \leq 2\pi \ |u| \ |\delta h|$$

On en déduit :

$$\left| \frac{f(2\pi \ u(h+\delta h) - f(2\pi \ u \ h)}{(4\pi^2 \ u^2)^{k+1}} \right| \leq \frac{1}{(2k+2)!} \ \Sigma_1^{2k+2} \ |\delta h|^p \ |h|^{2k+2-p}$$

Il en résulte facilement que K est 2k+2 fois dérivable et que les dérivations peuvent se faire sous le signe somme dans l'expression (3-3-3). En particulier, la fonction K(h) ainsi définie vérifie bien la relation (3-3-2).

Montrons maintenant que cette fonction K(h) vérifie :

$$E(Z_\lambda \ Z_\mu) = \iint \lambda(dx) \ K(x-y) \ \lambda(dy) \qquad (\lambda, \ \mu \in \Lambda_k)$$

ce qui établira le théorème d'existence. En fait, tout $\lambda \in \Lambda_k$ est limite dans M_c de ses régularisées par des fonctions $\varphi \in \mathcal{S}$, et ces régularisées $\lambda * \check{\varphi}$ sont dans $\mathcal{S}_k = \mathcal{S} \cap \tilde{\Lambda}_k$, c'est-à-dire vérifient $\int (\lambda * \check{\varphi}) \ f^\ell = 0$. On en déduit facilement qu'il suffit d'établir la relation

$$\iint \varphi(x) \ K(x-y) \ \psi(y) \ dx \ dy = E(Z_\varphi \ Z_\psi)$$

pour φ, $\psi \in \mathcal{S}_k$. Enfin, pour $i \in I$ et $\varphi \in \mathcal{S}$, les dérivées d'ordre k+1, $D_i \ \varphi$ engendrent $\mathcal{S}_k$. Ainsi, il suffit finalement d'établir la relation :

$$(3\text{-}3\text{-}4) \qquad E[Z(D_i\varphi) \ Z(D_j\psi)] = \iint D_i \ \varphi(x) \ K(x-y) \ D_j \ \psi(y) \ dx \ dy$$

pour φ, $\psi \in \mathcal{S}$ et i, $j \in I$. Au premier membre, la relation

$$Z(D_i\varphi) = (-1)^{k+1} \int \varphi(x)\ D_i\ Y(x)\ dx$$

montre que l'on a :

$$E[Z(D_i\varphi)\ D(D_j\psi)] = \int\int \varphi(x)\ K_{ij}(x-y)\ \varphi(y)\ dy$$

K_{ij} désignant la covariance rectangle des F.A.S.T. $Y_i = D_i Y$ et $Y_j = D_j Y$, soit :

$$K_{ij}(x-y) = E(D_i\ Z_x\ D_j\ Z_y)$$

D'autre part, le second membre de (3-3-4) se met sous la forme $(-1)^{k+1} \int\int \varphi(x)\ D_{ij}\ K(x-y)\ \psi(y)\ dx\ dy$, où $D_{ij}\ K$ désigne la dérivée d'ordre $2k+2$ de la fonction $K(h)$. Ainsi, (3-3-4) équivaut à la relation :

$$D_{ij}\ K = (-1)^{k+1}\ K_{ij} \qquad (i,\ j \in I) \tag{3-3-5}$$

qu'il suffit donc d'établir pour achever la démonstration.

Or, en dérivant (3-3-3) sous le signe somme (ce qui est légitime, comme on l'a vu), on trouve tout d'abord :

$$D_{ij}\ K(h) = (-1)^{k+1} \int \frac{u_i\ u_j}{|u|^{2k+2}}\ \cos 2\pi\ u\ h\ \chi_o(du)$$

(avec $u_i = u_{i_1}\ u_{i_2} \dots u_{i_n}$). D'autre part, les covariances rectangles K_{ij} sont elles-mêmes transformées de Fourier de mesures χ_{ij} sommables et sans atome à l'origine. Il en résulte que (3-3-5) est équivalent à la relation :

$$u_i\ u_j\ \chi_o = (u^2)^{k+1}\ \chi_{ij} \tag{3-3-5'}$$

Si Z est indéfiniment dérivable, pour i, j, $m \in I$ on a

$$D_{mm} K_{ij} = E(D_m D_i Y_x D_m D_j Y_{x+h})$$

$$= E(D_i D_m Y_x D_j D_m Y_{x+h}) = D_{ij} K_{mm}$$

Par suite

$$u_m^2 \chi_{ij} = u_i u_j \chi_{mm}$$

En sommant en $m \in I$, on trouve $\sum u_m^2 = (u^2)^{k+1}$ et par suite :

$$(u^2)^{k+1} \chi_{ij} = u_i u_j \chi_o$$

et (3-3-5') est vérifiée. Si maintenant Z est k+1 fois seulement dérivable, (3-3-5') subsiste comme on le voit facilement à l'aide de régularisées.

Nous avons ainsi établi l'existence d'une covariance généralisée K(h) dans le cas d'une F.A.I. sans dérive k+1 fois dérivable, et nous avons même obtenu la représentation explicite (3-3-3).

3-3-2 Caractérisation faible.

En vue de nous affranchir de l'hypothèse de dérivabilité, examinons la caractérisation faible d'une F.A.I.-k Z sans dérive. Supposons en premier lieu Z indéfiniment dérivable et $X(x) = U_x X$ une F.A.S.T. quelconque dans H. Alors, il existe une fonction continue C(h) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \Lambda_k$ on ait :

$$E[X_x Z(\lambda)] = \int \lambda(dy) C(x-y) \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

En effet, si $Y(x)$ est une représentation de Z, $D_i\, Y(x)$ est une F.A.S.T. pour $i \in I$ (c'est-à-dire $i_1 + \ldots + i_n = k+1$), et il existe une fonction $C_i(h)$ vérifiant :

$$E(X_x\, D_i\, Y_y) = (-1)^{k+1}\, C_i(x-y)$$

$Y(x)$ étant indéfiniment dérivable, on a $D_{ij}\, Z_x = D_{i'j'}\, Z_x$ dès que les suites (i,j) et $(i'j')$ se déduisent l'une de l'autre par permutation. Il en résulte $E(X_x\, D_{ij}\, Z_y) = E(X_x\, D_{i'j'}\, Z_y)$, c'est-à-dire :

$$D_i\, C_j = D_{i'}\, C_{j'}$$

On en déduit l'existence d'une fonction $C(h)$, d'ailleurs définie à un polynome près de degré $k+1$, telle que l'on ait :

$$C_i(h) = D_i\, C(h)$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}$, on a alors

$$E[X_x\, Z(D_i\varphi)] = (-1)^{k+1}\, E(X_x \int \varphi(y)\, D_i\, Y_y\, dy)$$

$$= \int C_i(x-y)\, \varphi(y)\, dy = \int C(x-y)\, D_i\, \varphi(y)\, dy$$

On en déduit facilement la validité de (3-3-6).

Notons en passant la <u>majoration</u> suivante qui nous sera utile ultérieurement : pour $X(x)$ donné, les covariances $C_i(h)$ vérifient une majoration du type :

$$|C_i(h)| \leq B < \infty$$

puisque les $D_i Y_x$ sont des F.A.S.T. Si l'on choisit pour C(h) la solution nulle en 0 ainsi que ses k premières dérivées, on en déduit une majoration du type

(3-3-7) $$|C(h)| \leq B' |h|^{k+1}$$

les autres solutions ne différant de celle-là que par un polynome de degré k vérifiant encore une majoration du même type.

Si maintenant Z n'est pas dérivable, le théorème de décomposition permet d'écrire

$$Z = Y_a + Z_a$$

Z_a désignant une F.A.I.-k indéfiniment dérivable et Y_a une F.A.S.T. Si X(x) désigne une autre F.A.S.T., le résultat obtenu ci-dessus appliqué à Z_a montre qu'il existe encore une fonction continue C(h) vérifiant (3-3-6). Compte tenu de (3-3-7), on voit de même que C vérifie une majoration de la forme

(3-3-8) $$|C(h)| \leq a + b |h|^{k+1}$$

3-3-3 F.A.I.-k quelconque sans dérive.

Soit maintenant Z une F.A.I. quelconque sans dérive. D'après le théorème de décomposition, on peut écrire :

$$Z = Y_a + Z_a$$

où Z_a est une F.A.I. indéfiniment dérivable sans dérive et Y_a une

F.A.S.T. admettant une covariance stationnaire $C_a(h)$. Pour $\lambda \in \Lambda_k$, il résulte de (3-3-1) que Z_a admet une covariance K_a vérifiant

$$E[Z_a(\lambda)]^2 = \iint \lambda(dx)\ K_a(x-y)\ \lambda(dy)$$

et de (3-3-2) qu'il existe une fonction continue C(h) vérifiant :

$$E[Y_a(\lambda)\ Z_a(\lambda)] = \iint \lambda(dx)\ C(x-y)\ \lambda(dy)$$

Par suite la fonction continue définie par

$$K = C_a + 2C + K_a$$

vérifie :

$$E[Z(\lambda)^2] = \iint \lambda(dx)\ K(x-y)\ \lambda(dy)$$

et constitue donc une covariance pour Z. La théorème d'existence est ainsi établi pour les F.A.I. sans dérive.

Notons en passant que les covariances K vérifient des majorations de la forme :

(3-3-9) $$|K(h)| \leq a + b\ |h|^{2k+2}$$

Lorsque Z est k+1 fois dérivable, cela résulte des relations (3-3-3) et (3-3-3'). A dire vrai, onntrouve même dans ce cas une majoration de la forme :

(3-3-9') $$|K(h)| \leq b\ |h|^{2k+2}$$

On peut d'ailleurs vérifier que (3-3-9') constitue une <u>condition</u>

<u>nécessaire et suffisante pour que Z soit k+1 fois dérivable</u>. Dans le cas où Z est une F.A.I. quelconque sans dérive, les relations (3-3-9'), (3-3-7) et le théorème de décomposition entraînent l'existence d'une majoration de la forme (3-3-9). Nous verrons dans un instant que la présence d'une dérive se manifeste par l'addition d'un polynome de degré 2k+2 aux covariances de $Z - E_0 Z$, de sorte que (3-3-9) restera valable dans le cas le plus général. Il est facile de voir que la condition plus forte :

$$(3\text{-}3\text{-}10) \qquad \lim_{|h| \to \infty} \frac{|K(h)|}{|h|^{2k+2}} = 0$$

<u>est nécessaire et suffisante pour que la F.A.I. Z soit sans dérive</u>.

En effet, la relation (2-5-1) caractérise les F.A.I.-k sans dérive : si Z est sans dérive, ses représentations vérifient (2-5-1). Inversement, si Z a une dérive non nulle, ses représentations Y(x) admettent des dérives $E_0\, Y_x$ qui sont des polynomes à coefficients invariants de degré strictement égal à k+1. Par suite (2-5-1) n'est pas vérifiée.

Il est immédiat que (3-3-10) entraîne (2-5-1) et constitue donc une condition suffisante pour que Z soit sans dérive. Réciproquement supposons Z sans dérive. D'après le théorème de décomposition, et la majoration (3-3-8), il suffit d'établir (3-3-10) dans le cas où Z est indéfiniment dérivable. D'après (3-3-3) et la majoration

$$\frac{|\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h)|}{(4\pi^2\, u^2\, h^2)^{k+1}} \leq \frac{1}{(2k+2)\,!}$$

il suffit d'établir que le premier membre de cette inégalité converge vers 0 pour $u \neq 0$ fixé lorsque $|h| \to \infty$ (χ_o étant sans atome à l'origine).

Or les relations

$$\begin{cases} \dfrac{d^{2k+2}}{dx^{2k+2}} f(x) = (-1)^{k+1} \cos x \\ \\ f(o) = f'(o) = \dots = f^{(2k+1)}(o) = 0 \end{cases}$$

caractérisent la fonction :

$$f(x) = \cos x - P_k(x)$$

et entraînent par conséquent

(3-3-11) $$f(x) = (-1)^{k+1} \int_o^x \frac{(x-\xi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \cos \xi \, d\xi$$

ou, aussi bien pour $k \geq 1$:

(3-3-12) $$f(x) = (-1)^{k+1} \int_o^x \frac{(x-\xi)^{2k-1}}{(2k-1)!} (1 - \cos \xi) \, d\xi$$

Cette dernière relation entraîne à son tour :

$$|f(x)| \leq \frac{2}{(2k)!} x^{2k}$$

et $f(x)/x^{2k+2} \to 0$ pour $|x| \to \infty$, ce qui établit le résultat cherché. Si $k = 0$, on trouve directement $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \to 0$, et la conclusion subsiste.

3-3-4 Cas où il y a une dérive.

Si maintenant la F.A.I.-k admet une dérive $m_o = E_o Z$, on a pour tout $\lambda \in \Lambda_k$:

$$E(Z_\lambda)^2 = E[Z_\lambda - m_o(\lambda)]^2 + E[m_o(\lambda)^2]$$

Il suffit donc de démontrer le théorème d'existence pour la F.A.I.-k m_o à valeurs dans H_o (c'est-à-dire invariantes pour U_h). On a vu que toute représentation $m_o(x)$ de m_o est un polynome de degré k+1 à coefficients invariants, dont les termes de degré k+1 ont signification intrinsèque et ne sont donc nuls que si $m_o = 0$. En particulier, donc, m_o est dérivable. Pour $i \in I$ (c'est-à-dire $i = i_1 + \ldots + i_n$, $i_1 + \ldots + i_n = k+1$) $D_i\, m_o(x)$ est une F.A.S.T. à valeur dans H_o, donc un élément invariant $A_i \in H_o$ indépendant de x. Mais les F.A.S.T. $D_i\, m_o(x)$ vérifient

$$E[D_i\, m_o(x)\, D_j\, m_o(y)] = E[D_{i'}\, m_o(x)\, D_{j'}\, m_o(y)]$$

pour $(i,j) \equiv i',j')$, c'est-à-dire lorsque les suites (i,j) et (i',j') se déduisent l'une de l'autre par permutation, c'est-à-dire

$$E(A_i\, A_j) = E(A_{i'}\, A_{j'})$$

Il existe alors un polynome $K_o(h)$ que l'on peut toujours supposer pair, de degré 2k+2 et vérifiant :

$$D_{ij}\, K_o(h) = (-1)^{k+1}\, E(A_i\, A_j)$$

Il est ensuite immédiat de vérifier que ce polynome (nécessairement de type positif conditionnel d'ordre k) constitue une covariance pour m_o. Le théorème d'existence est ainsi complètement établi.

4 - LES FONCTIONS DE TYPE POSITIF CONDITIONNEL

Nous avons vu au paragraphe 3-1 qu'il y a identité entre les fonctions de type positif conditionnel d'ordre K et les covariances généralisées des F.A.I.-k. Les résultats précédents permettent donc de caractériser cette classe de fonctions. Nous allons maintenant regrouper ces résultats et les améliorer.

4-1 Condition pour que γ soit un variogramme.

Présentons d'abord (d'après Landkoff), un résultat particulier relatif aux F.A.I. d'ordre 0. Si Z est une F.A.I.-0, ses covariances sont déterminées à une constante arbitraire près, et l'on désigne par $-\gamma$ la covariance de Z nulle en h = 0, soit :

$$-\gamma(h) = K(h) - K(o)$$

Les quatre propositions suivantes sont alors équivalentes :

1 - γ est un variogramme continu (c'est-à-dire $\gamma(o) = 0$ et $-\gamma$ est une fonction continue de type positif conditionnel d'ordre 0).

2 - $\forall\ t \geq 0$, $e^{-t\gamma}$ est une fonction continue de type positif et $\gamma(o) = 0$.

3 - $e^{-\gamma}$ est la transformée de Fourier d'une loi de probabilité symétrique et indéfiniment divisible.

4 - Il existe une forme quadratique positive Q(h) et une mesure positive χ_0 symétrique, sans atome à l'origine telle que $\chi_0(du)/1 + 4\pi^2\ u^2$ soit sommable et que l'on ait :

$$\gamma(h) = Q(h) + \int \frac{1 - \cos 2\pi\ uh}{4\pi^2\ u^2}\ \chi_0(du) \qquad (4\text{-}1\text{-}1)$$

L'équivalence de 2/, 3/ et 4/ résulte des théorèmes classiques sur les lois indéfiniment divisibles. On vérifie immédiatement que 4/ entraîne 1/. Il reste à montrer que 1/ entraîne 2/. Soit donc γ un variogramme continu et Z une F.A.I.-0 admettant $-\gamma$ comme covariance. Considérons la représentation de Z définie par

$$Y(x) = Z(\delta_x - \delta_o)$$

(caractérisée par la condition $Z_o = 0$). Elle admet la covariance :

$$E(Y_x \ Y_y) = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y)$$

Soit alors N une variable poissonienne d'espérance $t > 0$, et Y_i, $i = 0, 1 \ldots.$ une suite de F.A. indépendantes admettant la même covariance que Y. Posons :

$$X(x) = \prod_{i=1}^{N} Y_i(x)$$

Cette nouvelle F.A. admet la covariance :

$$E(X_x \ X_y) = e^{t[\gamma(x)+\gamma(y)-\gamma(x-y)]-t}$$

En particulier :

$$\|X_x\| = e^{\frac{t}{2}[2\gamma(x)-1]}$$

La F.A. normée $X_x/\|X_x\|$ admet donc la covariance :

$$\frac{E(X_x \ X_y)}{\|X_x\| \|X_y\|} = e^{-t\gamma(x-y)}$$

Par suite, $e^{-t\gamma}$ est une fonction de type positif et 2/ est démontré.

On notera le sens de la forme quadratique positive $Q(h)$ qui figure dans la relation (3-3-1). Elle représente aussi bien :

~ la covariance de la dérive $E_0 Z$ de la F.A.I.-0 dont le variogramme est γ.

~ la composante gaussienne de la loi indéfiniment divisible dont la fonction caractéristique est $e^{-\gamma}$.

En particulier, on peut identifier la classe des variogrammes des F.A.I.-0 sans dérive et la classe des lois de probabilités symétriques indéfiniment divisibles et sans composante gaussienne.

4-2 Forme générale des fonctions de type positif conditionnel.

D'après les résultats du paragraphe 3, nous savons déjà qu'une fonction K continue et symétrique est de type positif conditionnel si et seulement si elle est de la forme

$$K(h) = Q_0(h) + K_0(h) \tag{4-2-1}$$

où $Q_0(h)$ est un polynome pair de degré $\leq 2k+2$ et de type ≥ 0 conditionnel d'ordre k, et $K_0(h)$ est une covariance d'une F.A.I.-k <u>sans dérive</u> que nous désignerons par Z. Caractérisons $K_0(h)$. D'après (3-3-10) nous savons déjà que :

$$\lim_{|h| \to \infty} \frac{|K_0(h)|}{|h|^{2k+2}} = 0 \tag{4-2-2}$$

Dans le cas où Z est k+1 fois dérivable, K_0 est 2k+2 fois dérivable, et on a alors (à un polynome pair près) :

$$(4\text{-}2\text{-}3)\quad \begin{cases} K_o(h) = \displaystyle\int \frac{\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h)}{(4\pi^2\, u^2)^{k+1}}\, \chi_o\,(du) \\ \\ P_k(2\pi\, u\, h) = \displaystyle\sum_o^k \frac{(-1)^p}{(2p)!}\,(2\pi\, u\, h)^{2p} \end{cases}$$

pour une mesure positive sommable symétrique et <u>sans atome en $u = 0$</u> χ_o qui est la transformée de Fourier de la <u>fonction</u> $(-1)^{k+1}\,\Delta^{k+1} K_o$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où K_o n'est pas $2k+2$ fois dérivable, et désignons encore le laplacien itéré de K_o (pris au sens des <u>distributions</u>) par $\Delta^{k+1}\, K_o$. Alors la <u>distribution</u> $(-1)^{k+1}$ $\Delta^{k+1}\, K_o$ <u>est de type positif</u>.

En effet, on remarque d'abord que la relation (4-2-2) implique que K_o est une fonction à croissance lente. Par suite $(-1)^{k+1}\,\Delta^{k+1}\, K_o$ appartient à l'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées, et, en particulier, admet une transformée de Fourier, qui est une distribution $\chi_o \in \mathcal{S}'$. Soit alors $\varphi \in \mathcal{S}$ une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide ainsi que ses dérivées. On a :

$$(-1)^{k+1} < \Delta^{k+1}\, K_o\,,\ \varphi * \check{\varphi} > \, = (-1)^{k+1} < K_o\,,\ \Delta^{k+1}\,(\varphi * \check{\varphi}) >$$

Désignons par I l'ensemble des $i = (i_1, \ldots i_n)$ où les i_p sont des entiers ≥ 0 vérifiant $\sum i_p = k+1$, et par D_i le symbole de dérivation correspondant. On a :

$$\Delta^{k+1} = \sum_{i \in I} D_i^2$$

et par suite

$$(-1)^{k+1}\,\Delta^{k+1}(\varphi * \check{\varphi}) = (-1)^{k+1} \sum_{i\in I} D_i^2(\varphi * \check{\varphi}) = \sum_{i\in I} (D_i\varphi) * (\check{D_i\varphi})$$

Or $D_i\varphi \in \tilde{\Lambda}_k \cap \mathscr{S} = \mathscr{S}_k$. Comme K_o est de type ≥ 0 conditionnel, on a donc :

$$(-1)^{k+1} < \Delta^{k+1}\, K_o,\ \varphi * \check{\varphi} > \; = \; < K_o\ ,\ \sum_{i\in I} (D_i\varphi) * (\check{D_i\varphi}) > \;\geq 0$$

Mais cette relation signifie, par définition, que la distribution $(-1)^{k+1}\,\Delta^{k+1}\,K_o$ est de type positif. Sa transformée de Fourier est donc une distribution positive χ_o , c'est-à-dire nécessairement une <u>mesure positive</u>. $\chi_o(du)$ (L. Schwartz). En général, χ_o n'est pas sommable. Mais on a nécessairement :

(4-2-4)
$$\int \frac{\chi_o(du)}{(1 + 4\pi^2\, u^2)^{k+1}} < \infty$$

En effet, désignons par $L_p = (I-\Delta)^{-p}$ la distribution dont la transformée de Fourier est $(1 + 4\pi^2\, u^2)^{-p}$. Pour $p = 0$, on a $L_p = \delta$, et pour $2p > 1$, L_p est <u>une fonction</u> de Bessel de $r = |h|$ qui se comporte en r^{2p-n} au voisinage de $r = 0$ et décroit exponentiellement à l'infini. Pour p entier ≥ 0, les produits de convolution $L_p * K_o$ existent donc et sont des fonctions.

La relation

$$\Delta^{k+1} * L_{k+1} = \sum_{p=o}^{k+1} C_{k+1}^{p}\,(-1)^p\,(I-\Delta)^p * L_{k+1}$$

$$= \sum_{p=o}^{k+1} C_{k+1}^{p}\,(-1)^p\,L_{k+1-p}$$

montre alors que $(-1)^{k+1}\,\Delta^{k+1} * L_{k+1} * K_o$ est <u>une fonction</u>, d'ailleurs de type positif puisque sa transformée de Fourier est la mesure positive

$\chi_o/(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1}$. K_o étant une fonction, cette mesure est sommable, et par suite (4-2-4) est vérifiée.

D'autre part, la mesure χ_o est sans atome à l'origine. En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}$, la régularisée Z_φ est indéfiniment dérivable, et sa covariance admet une représentation du type (4-2-3) à l'aide d'une mesure positive sans atome en u = 0 qui est la transformée de $(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K_o * \varphi * \check{\varphi}$, c'est-à-dire $|\tilde{\varphi}|^{2k+2} \chi_o$. Pour que cette mesure soit sans atome à l'origine, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour χ_o.

Dans ces conditions, la fonction K_k définie par :

$$(4\text{-}2\text{-}5) \qquad K_k(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \; \frac{\chi_o(du)}{(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1}}$$

existe, et, comme on l'a vu au paragraphe 3, admet des dérivées jusqu'à l'ordre 2k+2 calculables par dérivation formelle sous le signe somme. En particulier, on trouve :

$$(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K_k = \int \frac{\cos 2\pi u h}{(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_o(du)$$

c'est-à-dire :

$$(-1)^{k+1} \Delta^{k+1} K_k = (-1)^{k+1} \Delta^{k+1} * L_{k+1} * K_o$$

Du fait que K_o et K_k admettent des majorations du type (4-2-2), il en résulte que l'on a :

$$K_k = L_{k+1} * K_o$$

à un polynome près de degré $\leq 2k$, donc aussi :

$$K_o = (I-\Delta)^{k+1} K_k$$

également à un polynome près de degré $\leq 2k$. Or, on peut calculer $(I-\Delta)^{k+1} K_k$ par dérivation formelle sous le signe somme dans (4-2-5). On obtient donc, toujours à un polynome près de degré $\leq 2k$:

$$(4\text{-}2\text{-}6) \quad K_o(h) = \int \frac{1}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \left[\cos 2\pi u h - \frac{(I-\Delta_k)^{k+1} P_k(2\pi u h)}{(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1}} \right] \chi_o(du)$$

Réciproquement, si X_o est une mesure positive vérifiant :

$$(4\text{-}2\text{-}6') \qquad \int \frac{\chi_o(du)}{(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1}} < \infty$$

et sans atome à l'origine, la formule (4-2-6) définit une fonction continue de type positif conditionnel d'ordre k. Autrement dit, (4-2-6) constitue la forme générale de ces fonctions (à un polynome pair près de degré $\leq 2k$ et à une forme positive conditionnelle d'ordre k et de degré 2k+2 près s'il y a une dérive).

Cette relation constitue manifestement une généralisation des résultats classiques sur les lois indéfiniment divisibles. On peut la présenter sous d'autres formes équivalentes. En effet, si $g(u)$ est une fonction ≥ 0 symétrique telle que $g(u)/(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1}$ soit bornée et que $g(u)$ soit développable en série de Taylor au voisinage de $u = 0$, désignons par $\Phi_k(u,h)$ le développement de Taylor de $g(u) \cos 2\pi u h$ arrêté à son terme en u^{2k}. $\Phi_k(uh)$ est un polynome pair de degré 2k en h. La représentation :

$$K_o(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h - \Phi_k(u,h)/g(u)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_o(du)$$

est équivalente à (4-2-6) à un polynome près de degré $\leq 2k$. On note par contre que la mesure spectrale χ_o ne dépend pas du choix de cette représentation. On peut noter aussi la représentation très simple :

$$(4\text{-}2\text{-}7)\quad K_o(h) = \int_{|u|\leq 1} \frac{\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h)}{(4\pi^2\, u^2)^{k+1}}\, \chi_o(du) + \int_{|u|>1} \frac{\cos 2\pi\, u\, h}{(4\pi^2\, u^2)^{k+1}}\, \chi_o(du)$$

On lit, en particulier, sur (4-2-7) que toute covariance d'ordre k est la somme d'une fonction de type positif (intégrale sur $|u| > 1$) et d' une covariance d'ordre k, 2k+2 fois dérivable (intégrale sur $|u| \leq 1$).

4-3 Exemples.

<u>La fonction r^λ</u> pour $\lambda > 0$ a pour transformée dans $\mathbb{R}^n$ la distribution

$$\pi^{-\lambda-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\lambda)} \rho^{-\lambda-n} \qquad (\rho = |u|)$$

et par conséquent $(-1)^{k+1}\, \Delta^{k+1}\, r^\lambda$ admet la transformée

$$2^{2k+2}\, \pi^{2k+2+\lambda-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+n}{2})}{\Gamma(-\lambda)} \rho^{2k+2-\lambda-n}$$

Pour $2k+2 - \lambda-n + n > 0$, c'est-à-dire :

$$\lambda < 2k+2$$

cette distribution est une mesure de signe constant. Ainsi :

<u>Pour $0 < \lambda < 2k+2$, la fonction</u> $K(r) = \Gamma(-\lambda)\, r^\lambda$

est de type positif conditionnel d'ordre k.

Voici un autre exemple. Si C(h) est une covariance dans l'espace à une dimension, alors la primitive d'ordre 2k+2, définie par

$$K(h) = (-1)^{h+1} \int_0^h \frac{(h-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} C(x)dx \tag{4-3-1}$$

est une fonction de type positif conditionnel d'ordre k dans $\mathbb{R}^1$:

Ce résultat est immédiat. En effet, soit X(x) une F.A.S.T. de $\mathbb{R}^1$ admettant la covariance C(h). La fonction aléatoire définie par :

$$Y(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^k}{k!} X(\xi)d\xi$$

est une représentation d'une F.A.I. Z d'ordre k et vérifie

$$\frac{d^{k+1} Y(x)}{dx^{k+1}} = X(x)$$

Par suite les covariances K(h) de Z sont les solutions de

$$\frac{d^{2k+2}}{d h^{2k}} K(h) = (-1)^{k+1} C(h)$$

qui sont données par (4-3-1) à un polynome près de degré ≤ 2k.

4-4 Signe d'une covariance dérivable.

Soit K une fonction de type positif conditionnel d'ordre k associée à une F.A.I.-k sans dérive et k+1 fois dérivable. K est de la forme (4-2-3) à un polynome pair près de degré ≤ 2k. Plus précisément, la fonction :

$$K_o(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_o(du)$$

est celle des covariances de la F.A.I.-k dont toutes les dérivées d'ordre $\leq 2k$ sont nulles en $h = 0$. Montrons que cette fonction à <u>un signe constant</u> :

(4-4-1) $$(-1)^{k+1} K_o(h) \geq 0$$

Pour $k = 0$, celà résulte immédiatement de (4-1-1). Pour $k \geq 1$, la relation (3-3-12) donne immédiatement

$$(-1)^{k+1} [\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)] \geq 0$$

et (4-4-1) en résulte.

Il ne semble pas y avoir de résultat équivalent dans le cas des covariances non dérivables.

5 - APPLICATIONS

5-1 L'équation $X(x) = \frac{1}{2} \Delta Y(x)$.

Si $X(x)$ est une F.A.S.T., il existe une F.A.I. d'ordre 1 et une seule dont les représentations Y vérifient $\Delta Y = X$. Plus généralement, si $X(x)$ est une représentation d'une F.A.I.-k, il existe une F.A.I.-(K+2p) et une seule dont les représentations vérifient $\Delta^p Y = X$.

Δ désigne ici l'opérateur laplacien de $\mathbb{R}^n$. On sait que, si A désigne l'opérateur infinitésimal du groupe U_h, on a

$$\Delta U_x Z = - A^* A U_x Z \qquad (Z \in \mathcal{D}_{A^*A} \subset H)$$

et que $- \frac{1}{2} A^*A$ est l'opérateur infinitésimal du demi-groupe contractant St défini dans H par :

$$S_t Z = \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) U_x Z \, dx$$

avec

$$f_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Pour t infini, $S_t Z$ converge fortement vers $E_0 Z$. Enfin, l'équation $- \frac{1}{2} A^*A Z = X$ a une solution (unique à un invariant près) si et seulement si $E_0 X = 0$ et si $\int_0^t S_\tau X \, d\tau$ converge fortement pour t infini vers une limite qui est alors nécessairement $E_0 Z - Z$.

De ces résultats, nous allons déduire le premier énoncé : Soit $X(x) = U_x X$ une F.A.S.T. dans H. Alors, il existe une F.A.I.-1 et une seule Z dont les représentations vérifient :

$$\frac{1}{2} \Delta Y(x) = X(x) \tag{5-1-1}$$

Pour établir l'existence de Z, montrons d'abord qu'il existe pour chaque $\lambda \in \Lambda_1$ une V.A. $Z(\lambda)$ vérifiant :

$$-\frac{1}{2} A^*A\, Z_\lambda = \int \lambda(dx)\, U_x X \tag{5-1-2}$$

Nous supposons $E_o X = 0$ (si $E_o X \neq 0$ il suffira d'ajouter à Y un polynome de second degré à coefficients invariants). Z_λ existe donc si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^t d\tau \int f_\tau(y)\, dy \int \lambda(dx)\, U_{x+y}\, X = \int_0^t d\tau \int (\lambda * f_\tau)(x)\, U_x\, X\, dx$$

est fortement convergente. D'après le critère de Cauchy, il faut établir la convergence pour $t, t' \to \infty$ de l'expression :

$$\int_0^t d\tau \int_0^{t'} d\tau' \iint (\lambda * f_\tau)(x)\, (\lambda * f_{\tau'})(y)\, C(x-y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^{t'} d\tau' \int |\tilde{\lambda}|^2\, e^{-2\pi^2 u^2 (t+t')}\, \tilde{C}(u)\, du =$$

$$= 4 \int \frac{(1-e^{-2\pi^2 u^2 t})(1-e^{-2\pi^2 u^2 t})}{(4\pi^2 u^2)^2}\, |\tilde{\lambda}(u)|^2\, \tilde{C}(du)$$

C désigne la covariance de $U_x X$, $\tilde{C}(du)$ la mesure spectrale sans atome correspondante, et $\tilde{\lambda}(u)$ la transformée de Fourier de $\lambda \in \Lambda_1$. Or $\lambda \in \Lambda_1$ signifie que $\tilde{\lambda}$ est nulle en 0 ainsi que ses dérivées premières. Par suite $|\tilde{\lambda}|^2/u^4$ est continu et borné par un nombre B sur $\mathbb{R}^n - 0$, c'est-à-dire p.p. pour la mesure $\tilde{C}(du)$ sans atome à l'origine. Le théorème de convergence dominée autorise donc le passage à la limite sous le signe somme. Ainsi, Z_λ solution de (5-1-2) existe, et vérifie :

$$E(Z_\lambda^2) = 4 \int \frac{|\tilde{\lambda}(u)|^2}{(4\pi^2 u^2)^2} \tilde{C}(du)$$

Z_λ dépend linéairemant de $\lambda \in \Lambda_1$ et constitue donc une F.A.I.-1. Montrons qu'il s'agit d'une F.A.I. continue deux fois dérivable. Si λ_n est une suite convergeant vers 0 dans M_c, il en est de même de $P(x)\ \lambda_n$ pour tout polynome $P(x)$. $\tilde{\lambda}_n(u)$ converge alors vers 0 uniformément sur tout compact, et il en est de même de toutes ses dérivées. Par suite $|\tilde{\lambda}_n|^2$ et ses dérivées vérifient la même propriété. Il est alors facile de majorer la suite

$$\frac{|\tilde{\lambda}_n|^2}{u^4}$$

sur $\mathbb{R}^n \setminus 0$. Dès lors on a :

$$\lim_n E(Z_{\lambda n}^2) = 4 \int \lim_n \frac{|\tilde{\lambda}_n(u)|^2}{(4\pi^2 u^2)^2} \tilde{C}(du) = 0$$

Donc Z_λ est continue sur M_c . Elle est deux fois dérivable parce que la mesure spectrale $\chi_0 = 4\ \tilde{C}$ associée à Z est sommable.

Soit alors $Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell)$ une représentation de Z. C'est une F.A. deux fois dérivable. D'après la formule (2-1-1), on a :

$$\Delta\ Y(x+h) = \Delta_h\ U_h\ Y(x) = -\ A^*A\ U_h\ Z(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell)$$

Mais par construction, pour $\lambda \in \Lambda_1$, $Z(\lambda)$ vérifie :

$$\frac{1}{2} \Delta_h\ U_h\ Z(\lambda) = -\frac{1}{2} AA^*\ U_h\ Z(\lambda) = U_h \int \lambda(dx)\ U_x\ X$$

Par suite, pour $\lambda = \delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell$

$$\frac{1}{2} \Delta \, Y(x+h) = U_{h+x} \, X$$

et l'équation (5-1-1) est bien vérifiée.

On établit de la même manière l'existence et l'unicité de la F.A.I.-(k+2p) Z vérifiant $\Delta^p Z = Y$ où Y est une F.A.I.-k donnée. Voyons maintenant sous quelles conditions cette solution est en réalité une F.A.I. d'ordre k + 2p.

5-2 Condition pour qu'une F.A.I.-k soit d'ordre k-1.

Soit Z une F.A.I.-k. Nous nous proposons de chercher à quelle condition Z est la restriction à Λ_k d'une F.A.I.-(k-1) (ou se prolonge sur Λ_{k-1}, par une F.A.I. d'ordre (k-1)). Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que toute représentation Y(x) de Z vérifie une majoration de la forme

$$\|Y_x\| \leq a + b \, r^k$$

ou, ce qui revient au même, que les covariances K de Z vérifient une majoration du type

$$|K(h)| \leq a + b \, |h|^{2k} \tag{5-2-1}$$

En particulier Z ne peut pas avoir de dérive d'ordre k. Nous allons voir que ces conditions équivalentes sont nécessaires et suffisantes.

Dans le cas k = 0, on sait qu'une F.A.I.-0 sans dérive est la restriction à Λ_0 d'une F.A.S.T. si et seulement si son variogramme est <u>borné</u>. (Note Gst. N° 116). D'après (4-1-1), il en est ainsi si et seulement si il existe une mesure positive sommable χ telle que l'on ait :

(5-2-2) $$\chi_o = 4\pi^2 u^2 \chi$$

Dans le cas général, nous allons établir la proposition suivante : Si Z est une F.A.I.-k sans dérive, <u>les trois conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1 - Z est la restriction à Λ_k d'une F.A.I.-(k-1).

2 - Il existe une mesure positive χ telle que

$$4\pi^2 u^2 \chi = \chi_o \ , \ \int \frac{\chi(du)}{(1 + 4\pi^2 u^2)^k} < \infty$$

χ_o désignant la mesure spectrale associée à Z.

3 - Les covariances de Z vérifient des majorations de la forme

(5-2-1) $$|K(h)| \leq a + b\ |h|^{2k}$$

D'après le paragraphe 4, il est immédiat que 1 entraîne 2 et 3. On déduit également sans peine de (4-2-7) par exemple que 2 entraîne 3. Il reste à montrer l'implication 3 ⇒ 1. Il suffit d'ailleurs d'établir ce résultat dans le cas d'une F.A.I. dérivable. En effet, Z est de la forme $Z = Y + Z'$ où Y est une F.A.S.T. et Z' une F.A.I.-k indéfiniment dérivable. On a alors, comme on l'a vu :

$$K = C_o + 2\ C + K_o$$

avec des majorations du type :

$$|C_o(h)| \leq C_o(0) \quad , \quad |C(h)| \leq A\ |h|^{k+1} \quad , \quad |K_o(h)| \leq B\ |h|^{2k+2}$$

Pour $2k \geq k+1$, soit $k \geq 1$, K vérifie (5-2-1) si et seulement si K_o vérifie une majoration du même type. Pour $k = 0$, on sait déjà que le théorème est vrai). Il suffit donc de considérer le cas d'une F.A.I.-k dérivable. Nous allons, dans ce cas particulier, établir les implications $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$.

Soit donc Z une F.A.I.-k sans dérive, k+1 fois dérivable, et

$$(5\text{-}2\text{-}2) \qquad K_o(h) = \int \frac{\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h)}{(4\pi^2\, u^2)^{k+1}}\, \chi_o\,(du)$$

celles de ses covariances qui s'annulent en 0 ainsi que ses premières dérivées. La mesure spectrale χ_o est sommable et sans atome à l'origine. Si $K_o(h)$ vérifie une majoration de type (5-2-1), comme on a également $|K_o(h)| \leq A\, |h|^{2k+2}$, il en résulte même :

$$(5\text{-}2\text{-}3) \qquad |K_o(h)| \leq B\, |h|^{2k}$$

Montrons que (5-2-3) entraîne le deuxième énoncé. Pour $k \geq 1$, on a déjà rencontré la relation :

$$\cos x - P_k(x) = (-1)^{k+1} \int_0^x \frac{(x-\xi)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,(1-\cos\xi)\,d\xi$$

Désignons par α le vecteur unitaire de h et par r son module. On a :

$$\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h) = \int_0^{2\pi(u\alpha)r} \frac{(2\pi\, u\alpha\, r-\xi)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,(1-\cos\xi)\,d\xi$$

soit

$$\cos 2\pi\, u\, h - P_k(2\pi\, u\, h) = (2\pi\, u\alpha)^{2k} \int_0^r \frac{(r-\rho)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,(1-\cos 2\pi\, u\alpha\,\rho)\,d\rho$$

En portant ce résultat dans (5-2-7), il vient :

$$(5\text{-}2\text{-}3)\quad (-1)^{k+1}K_o(\alpha r) = \int_0^r \frac{(r-\rho)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,d\rho \int \frac{(u\alpha)^{2k}}{(u^2)^k}\,\frac{1-\cos 2\pi u\alpha\rho}{4\pi^2 u^2}\,\chi_o(du)$$

Désignons alors par $\Phi_\alpha(\lambda)$ la transformée de Laplace de $(-1)^{k+1}K_o(\alpha r)$ considéré comme fonction de r, soit

$$\Phi_\alpha(\lambda) = (-1)^{k+1}\int_0^\infty K_o(\alpha r)\; e^{-\lambda r}dr$$

D'après (5-2-3), $(-1)^{k+1}$ K (αr) est le produit de convolution dans R_+ de $r^{2k-1}/(2k-1)!$ par la fonction

$$\int \frac{(u\alpha)^{2k}}{(u^2)^k}\;\frac{1-\cos 2\pi u\alpha r}{4\pi^2 u^2}\;\chi_o(du)$$

dont la transformée de Laplace est :

$$\int \frac{(u\alpha)^{2k}}{(u^2)^k}\;\frac{\chi_o(du)}{\lambda(\lambda^2 + (2\pi u\alpha)^2)}$$

Par suite, on obtient :

$$(5\text{-}2\text{-}4)\qquad \Phi_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{2k+1}}\int \frac{(u\alpha)^{2k}}{(u^2)^k}\;\frac{\chi_o(du)}{\lambda^2 + (2\pi u\alpha)^2}$$

D'autre part, la fonction $(-1)^{k+1}$ $K_o(\alpha r)$ est ≥ 0. On déduit donc de (5-2-3) la majoration :

$$\Phi_\alpha(x) \leq \frac{B\,(2k)!}{\lambda^{2k+1}}$$

et par suite (5-2-4) entraîne :

$$\int \frac{(u\alpha)^{2k}}{(u^2)^k} \; \frac{\chi_o(du)}{\lambda^2 + (2\pi \; u\alpha)^2} \leq B(2k)!$$

et a fortiori :

$$\int \frac{(u\alpha)^{2k}}{(u^2)^k} \; \frac{\chi_o(du)}{\lambda^2 + 4\pi^2 \; u^2} \leq B(2k)!$$

Si α est le vecteur unitaire de l'axe des u_i, ceci s'écrit :

$$(5\text{-}2\text{-}5) \qquad \int \frac{u_i^{2k}}{(\Sigma \, u_j^2)^k} \; \frac{\chi_o(du)}{\lambda^2 + 4\pi^2 \; u^2} \leq B(2k)!$$

Mais pour x_i et $p \geq 0$ on a la relation de convexité :

$$\Sigma_1^n \; x_i^p \geq n(\tfrac{1}{n} \; \Sigma \, x_i)^p$$

D'où ici :

$$(\Sigma \; u_i^2)^k \leq n^{k-1} \, \Sigma \; u_i^{2k}$$

En portant ce résultat dans (5-2-5) et en sommant sur i, il vient ainsi :

$$(5\text{-}2\text{-}6) \qquad \int \frac{\chi_o(du)}{\lambda^2 + 4\pi^2 \; u^2} \leq n^k \; (2k)! \; B$$

Les $\chi_\lambda = \chi_o/(\lambda^2 + 4\pi^2 \; u^2)$ constituent une famille décroissante de mesures positives sommables bornées en norme. Donc, pour $\lambda \downarrow 0$, les χ_λ convergent étroitement vers une mesure positive sommable χ. Mais la relation

$$4\pi^2 \; u^2 \; \chi_\lambda = \chi_o - \lambda^2 \; \chi_\lambda$$

montre alors que $4\pi^2 u^2 \chi_\lambda$ converge vers χ_o. Par suite, on a

(5-2-7) $$\chi_o = 4 \pi^2 u^2$$

et le deuxième énoncé est démontré.

Il reste à montrer que 2 entraîne 1, toujours dans le cas de la F.A.I.-k dérivable et sans dérive. Z sera une F.A.I.-(k-1) si et seulement si ses dérivées d'ordre k sont des F.A.S.T. (et non pas seulement des F.A.I.0). Or la F.A.I.-0 $D_i Z$ $(i = (i_1+\ldots+i_n)\ i_1+\ldots+i_n = k)$ admet la covariance généralisée :

$$K_i(h) = - \int \frac{1 - \cos 2\pi\, u\, h}{4\, \pi^2\, u^2} \; \frac{(u_{i_1} \ldots u_{i_n})^2}{(4\pi^2\, u^2)^k} \; \chi_o(du)$$

Mais par hypothèse χ_o est de la forme (5-2-7). On a donc :

$$K_i(h) = \int (1 - \cos 2\pi\, u\, h)\; \frac{(u_{i_1} \ldots u_{i_n})^2}{(4\pi^2\, u^2)^k} \;\; \chi(du)$$

et

$$|K_i(h)| \leq 2 \int \chi(du) < \infty$$

Comme le théorème est vrai pour les F.A.I.-0, on en déduit que toutes les dérivées d'ordre k sont des F.A.S.T. Par suite Z elle-même est une F.A.I. d'ordre (k-1), ce qui achève la démonstration.

5-3 Interprétation physique de la théorie.

Les réalités physiques auxquelles on peut penser appliquer la théorie des F.A.I. sont représentables par des variables régionalisées - c'est-à-dire des fonctions (ordinaires) définies sur $\mathbb{R}^n$. Or l'interprétation d'une V.R. en termes probabilistes consiste en général à considérer cette V.R. comme une réalisation d'une F.A. (stationnaire ou non), donc une fonction $Y : \mathbb{R}^n \to H$ définie sur l'espace $\mathbb{R}^n$ lui-même, et non sur un sous-espace Λ_k de Λ. Si donc nous voulons utiliser la théorie des F.A.I. pour interpréter une V.R. donnée, l'hypothèse qu'il sera nécessaire d'introduire est la suivante : notre V.R. peut être considérée comme une réalisation d'une <u>représentation</u> $Y(x)$ d'une certaine F.A.I.-k Z, autrement dit d'une F.A. <u>non stationnaire</u> $Y(x)$ telle que l'on ait pour tout $\lambda \in \Lambda_k$

$$\int \lambda(dx)\ Y(x) = Z(\lambda)$$

Quitte à remplacer k par k+1, on peut toujours supposer Z <u>sans dérive</u>. En tant que F.A. non stationnaire d'ordre 2, $Y(x)$ est caractérisée par une espérance :

$$E(Y_x) = m(x)$$

et une covariance centrée

$$E(Y_x\ Y_y) - m(x)\ m(y) = C(x,y)$$

Le problème est ici de voir dans quelle mesure l'hypothèse que $Y(x)$ est une représentation d'une F.A.I. est à même de simplifier le problème de l'inférence statistique pour $m(x)$ et $C(x,y)$ à partir d'une réalisation unique de $Y(x)$.

Notre hypothèse se traduit par une relation du type :

$$(5\text{-}3\text{-}1) \qquad Y(x) = Z(\delta_x - f_x^{\ell}\ \lambda_{\ell}) + A_{\ell}\ f^{\ell}(x)$$

avec des mesures λ_{ℓ} (choisies par nous) vérifiant $\int \lambda_{\ell} f^s = \delta_{\ell}^s$ et des

V.A. A_ℓ sur lesquelles, a priori, nous ne pouvons rien dire. Toutefois, si nous désignons par H l'espace de Hilbert engendré par les $Z(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_k$, A_ℓ est de la forme :

$$A_\ell = \Pi_H A_\ell + a_\ell$$

où $\Pi_H A_\ell$ est la projection de A_ℓ dans H, et a_ℓ la composante orthogonale. En tant qu'élément de H, $\Pi_H A_\ell$ est de la forme $Z(\lambda'_\ell)$ pour un $\lambda'_\ell \in \tilde{\Lambda}_k$ (qui n'est pas forcément une mesure), et (5-3-1) peut s'écrire :

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell(\lambda_\ell - \lambda'_\ell)) + a_\ell f_x^\ell$$

Pour abréger, nous poserons :

$$\tilde{\lambda}_\ell = \lambda_\ell - \lambda'_\ell$$

étant entendu que $\tilde{\lambda}_\ell$ n'est pas forcément une mesure, mais est tel que $\delta_x - f_x^\ell \tilde{\lambda}_\ell \in \Lambda_k$. Ainsi, la formule :

(5-3-2) $$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell \tilde{\lambda}_\ell) + a_\ell f_x^\ell$$

réalise la décomposition orthogonale de la F.A. Y(x). Le premier terme est lié uniquement à la F.A.I. Z à valeurs dans H ; le second, orthogonal au premier, ne doit pas jouer un rôle fondamental. En effet, dans la réalité physique la réalisation de Y(x) est fixée, et les V.A. a_ℓ sont remplacées par leurs réalisations $a_\ell(\omega_0)$ pour $\omega = \omega_0$ fixé, c'est-à-dire par des nombres. Il n'y a aucun espoir de remonter de ces valeurs numériques à la loi des V.A. dont elles sont des réalisations, et, à dire vrai, on voit mal quelle interprétation physique on pourrait attribuer à ces lois. Par conséquent, la manière la plus simple d'interpréter en termes physiques la relation (5-3-2) consiste à admettre que ces $a_\ell \in H^+$ sont de <u>simples constantes numériques</u> (évidemment inconnues), orthogonales à l'espace H des valeurs de la F.A.I. sans dérive Z.

Il résulte déjà de cette première hypothèse que l'espérance de la F.A. Y(x) est de la forme

$$Y(x) = m(x) = a_\ell \, f^\ell(x) \tag{5-3-3}$$

En second lieu, si l'on désigne par K(h) l'une (quelconque) des covariances généralisées de la F.A.I. Z, la covariance centrée de Y(x) est

$$C(x,y) = E[Z(\delta_x - \tilde{\lambda}_\ell \, f_x^\ell) \; Z(\delta_y - \tilde{\lambda}_s \, f_y^s)]$$

soit explicitement :

$$\left\{\begin{aligned} C(x,y) &= K(x-y) - f_x^\ell \int \tilde{\lambda}_\ell(dz) \; K(z-y) - f_y^\ell \int \tilde{\lambda}_\ell(dz) \; K(z-x) \\ &\quad + f_x^\ell \, f_y^s \iint \tilde{\lambda}_\ell(dz) \; K(z-z') \; \tilde{\lambda}_s(dz') \end{aligned}\right. \tag{5-3-4}$$

En l'absence d'hypothèses particulières sur $\tilde{\lambda}_\ell$ (c'est-à-dire sur la structure de la représentation de Z à laquelle on a identifié Y(x), cette expression est de la forme trop générale :

$$C(x,y) = K(x-y) - f_x^\ell \, C_\ell(y) - f_y^\ell \, C_\ell(x) + T_{\ell s} \, f_x^\ell \, f_x^s$$

où les $C_\ell(x)$ sont des fonctions a priori quelconques. L'inférence statistique pour C(x,y) ne sera donc pas possible en général. Deux remarques, pourtant, viennent corriger cette conclusion décourageante :

a/ L'inférence statistique pour $K(h)$ - ou, plus exactement, pour la classe de covariances associées à la F.A.I. Z, car rien ne permettra de sélectionner un représentant de cette classe - restera possible dans le cas général, et les caractéristiques qui ne dépendent que de cette covariance (on peut les appeler caractéristiques intrinsèques) seront expérimentalement accessibles. Le krigeage fournit un exemple de telles caractéristiques intrinsèques.

b/ Si l'on fait sur $\tilde{\lambda}_\ell$ des hypothèses physiquement plausibles qui confèrent à cet opérateur le sens d'une grande moyenne mobile, alors certaines caractéristiques non intrinsèques deviennent, au moins partiellement, accessibles à l'inférence statistique.

Examinons rapidement ces deux points :

a/ Pour tout $\lambda \in \tilde{\Lambda}_k$, on a :

$$\int \lambda(dx)\ Y(x) = Z(\lambda)$$
$$E[(\int \lambda(dx)\ Y_x)^2] = \int\int \lambda(dx)\ K(x-y)\ \lambda(dy)$$

Autrement dit, les combinaisons linéaires autorisées dépendent uniquement de la F.A.I. Z, et non de la structure de la représentation Y_x (de $\tilde{\lambda}_\ell$). Leurs variances, en particulier, dépendent uniquement de la classe des covariances de K.

Or l'inférence statistique doit être raisonnablement possible pour la classe des covariances K.

A une dimension, par exemple, supposons connue la réalisation aux points o, a,...pa d'une maille régulière a. Considérons la différence d'ordre k+1 :

$$X_a(x) = Y[x+(k+1)a] - C^1_{k+1}\ Y(x+ka) + \ldots$$

$$+ (-1)^q\ C^q_{k+1}\ Y[x+(k+1-q)a] + \ldots + (-1)^{k+1}\ Y(x)$$

C'est une F.A.S.T. d'espérance nulle dont la covariance $C_a(h)$ est accessible expérimentalement. Or on a :

$$X_a(x) = \int \lambda_a(dx)\ Y(x)$$

avec un $\lambda_a \in \Lambda_k$ dont la transformée de Fourier est $\tilde{\lambda}_a = (e^{-2i\pi ua} - 1)^{k+1}$. La transformée de Fourier de C_a est donc :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_a(du) &= 2^{k+1}\ \frac{(1-\cos 2\pi\ u\ a)^{k+1}}{(4\pi^2\ u^2)^{k+1}}\ \chi_o(du) \\ &= \frac{(\sin \pi\ u\ a)^{2k+2}}{(\pi u)^{2k+2}}\ \chi_o(du)\end{aligned}$$

Ainsi, $C_o(h)$ est le produit de convolution de K par la mesure dont la transformée est l'opérateur des différences finies d'ordre 2k+2. Autrement dit

$$C_a(h) = \Sigma_o^{2k+2}\ (-1)^p\ C^p_{2k+2}\ K(h + (k+1-p)a)$$

Les $C_a(h)$ étant accessibles expérimentalement, ces relations permettent d'identifier la classe de K (c'est-à-dire la fonction K à un polynome pair près de degré $\leq 2k$).

Un bon exemple de propriété intrinsèque est donné par le krigeage un universel lui-même. Soit à estimer Y(x) en un point x n'appartenant pas au domaine $S = \{x_\alpha\}$ des données expérimentales. Les a_ℓ de (5-3-7) étant inconnus, on impose aux coefficients λ^α de l'estimateur $\lambda^\alpha\ Y_\alpha$

de vérifier la condition d'universalité :

(5-3-3) $$\lambda^\alpha f_\alpha^\ell = f_x^\ell$$

Mais alors l'erreur est de la forme:

$$Y(x) - \lambda^\alpha Y_\alpha = \int [\delta_x(dz) - \lambda^\alpha \delta_{x_\alpha}(dz)]\, Y(z)$$

Mais la condition d'universalité (5-3-3) exprime justement que l'on a :

$$\delta_x - \lambda^\alpha \delta_{x_\alpha} \in \Lambda_k$$

L'erreur est une combinaison linéaire autorisée. Elle est de la forme :

$$Y_x - \lambda^\alpha Y_\alpha = Z(\delta_x - \lambda^\alpha \delta_{x_\alpha})$$

donc ne dépend que de la F.A.I. Z (et non de la représentation $\tilde{\lambda}_\ell$). La variance de cette erreur, en particulier, ne dépend que de la classe des covariances K :

$$E(Y_x - \lambda^\alpha Y_\alpha)^2 = K(o) - 2\lambda^\alpha K(x-x_\alpha) + \lambda^\alpha \lambda^\beta K(x_\alpha - x_\beta)$$

En choisissant les λ^α de manière à minimiser cette variance compte tenu des contraintes (5-3-3), on obtient le système habituel :

$$\begin{cases} \lambda^\alpha K_{\alpha\beta} = K(x - x_\beta) + \mu_\ell f_\beta^\ell \\ \lambda^\alpha f_\alpha^\ell = f_x^\ell \end{cases}$$

et la variance correspondante est :

$$\sigma_U^2 = K(o) - \lambda^\alpha K(x - x_\alpha) + \mu_\ell f_x^\ell$$

Elle ne dépend que de la classe des covariances de Z (et non du choix du représentant K de cette classe utilisé pour écrire le système). Ainsi, l'estimateur du krigeage et sa variance sont des propriétés intrinsèques accessibles expérimentalement.

b/ Pour donner un sens aux estimateurs habituels de la dérive, il faut maintenant introduire des hypothèses supplémentaires sur la structure de la représentation Y(x), c'est-à-dire sur les $\tilde{\lambda}_\ell$ de la formule (5-3-2). L'hypothèse la plus simple est celle qui confère aux opérateurs $\tilde{\lambda}_\ell$ le sens de grandes moyennes mobiles. Soient donc $\tilde{\lambda}_\ell(x)$ des fonctions très régulières et très lentement variables à l'échelle de travail, c'est-à-dire à l'échelle du domaine S des données expérimentales. Considérons alors la formule (5-3-4). On y voit figurer l' expression :

$$\int \tilde{\lambda}_\ell(dz)\ K(z-y) = \int \tilde{\lambda}_\ell(z+y)\ K(z)\ dz$$

Or $\tilde{\lambda}_\ell(x)$ étant très régulière peut être approchée avec une très bonne précision par une expression de la forme :

$$\tilde{\lambda}_\ell(z+y) = \tilde{\lambda}_{\ell s}(z)\ f^s(y) \qquad (y \in S)$$

valable sur le domaine de travail S. Posons alors :

$$D_{\ell s} = \int \tilde{\lambda}_{\ell s}(z)\ K(z)\ dz$$

$$T_{\ell s} = \iint \tilde{\lambda}_\ell(z)\ K(z-z')\ \tilde{\lambda}_s(z')\ dz\ dz'$$

Les $D_{\ell s}$ et les $T_{\ell s}$ sont des coefficients inconnus, mais constants, qui restent les seuls paramètres ayant vocation à représenter le choix de $\tilde{\lambda}_\ell$, c'est-à-dire de la grande moyenne mobile. La covariance $C(x,y)$ de $Y(x)$ s'écrit alors, pour x et $y \in S$:

$$(5\text{-}3\text{-}5) \qquad C(x,y) = K(x-y) - 2\, D_{\ell s}\, f_x^\ell\, f_y^s + T_{\ell s}\, f_x^\ell\, f_y^s$$

Proposons-nous maintenant d'estimer la dérive $a_\ell\, f^\ell(x)$ en un point x donné à l'aide d'un estimateur $\lambda^\alpha\, Y_\alpha$ vérifiant la condition d'universalité (puisque les a_ℓ sont inconnus) :

$$\lambda^\alpha\, f_\alpha^\ell = f_x^\ell$$

D'après (5-3-2), l'erreur est :

$$\lambda^\alpha\, Y_\alpha - a_\ell\, f^\ell(x) = Z(\lambda^\alpha\, \delta_{x_\alpha} - f_x^\ell\, \tilde{\lambda}_\ell)$$

donc d'espérance nulle. Sa variance est alors $\lambda^\alpha\, \lambda^\beta\, C_{\alpha\beta}$, soit, d'après (5-3-5) et la condition d'universalité :

$$\lambda^\alpha\, \lambda^\beta\, C_{\alpha\beta} = \lambda^\alpha\, \lambda^\beta\, K_{\alpha\beta} + (T_{\ell s} - 2\, D_{\ell s})\, f_x^\ell\, f_x^s$$

D'ailleurs, pour $x = y$, (5-3-5) donne :

$$C(x,x) = K(o) + (T_{\ell s} - 2\, D_{\ell s})\, f_x^\ell\, f_x^s$$

et par suite :

$$\lambda^\alpha\, \lambda^\beta\, C_{\alpha\beta} = \lambda^\alpha\, \lambda^\beta\, K_{\alpha\beta} + C(x,x) - K(o)$$

$C(x,x)$ est la variance (inconnue) de $Y(x)$. L'estimation optimale de $m(x) = a_\ell\, f_x^\ell$ conduit alors au système :

$$\left(\begin{array}{l} \lambda^{\beta} K_{\alpha\beta} = \mu_{\ell} f_{\alpha}^{\ell} \\ \\ \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{\ell} = f_{x}^{\ell} \end{array}\right.$$

avec la variance :

$$D^2(m_x^*) = C(x,x) - K(o) + \mu_{\ell} f_x^{\ell}$$

En délinéarisant, on obtient pour les estimateurs $A_{\ell} = \lambda_{\ell}^{\alpha} Y_{\alpha}$ des coefficients inconnus a_{ℓ} le système :

$$\lambda_{\ell}^{\beta} K_{\alpha\beta} = \mu_{\ell s} f_{\alpha}^{s}$$

$$\lambda_{\ell}^{\alpha} f_{\alpha}^{s} = \delta_{\ell}^{s}$$

avec comme matrice de covariance :

$$\mathrm{Cov}\,(A_{\ell}\, A_s) = \mu_{\ell s} + T_{\ell s} - 2\, D_{\ell s}$$

Ainsi, l'estimateur lui-même est de caractère intrinsèque, puisque les coefficients λ_{ℓ}^{α} ne dépendent que de la fonction K (plus précisément, de la classe de la fonction K). Par contre, leurs variances et covariances dépendent de $T_{\ell s}$ et $D_{\ell s}$, c'est-à-dire du choix de la grande moyenne mobile $\tilde{\lambda}_{\ell}$ qui a servi à construire la représentation de Z assimilée à Y(x). Ces covariances ne sont donc pas des propriétés intrinsèques, et le problème que pose leur inférence statistique n'est pas forcément soluble : en particulier, si le domaine S des données expérimentales est petit vis-à-vis de la "portée" des $\tilde{\lambda}_{\ell}$ il ne sera en général pas possible d'estimer les $T_{\ell s}$ et $D_{\ell s}$.

Ainsi, en ce qui concerne l'estimation de la dérive, nous aboutissons aux mêmes conclusions que dans la théorie habituelle du K.U., où les indéterminations du variogramme sous-jacent ne se répercutaient pas sur la forme des estimateurs mais seulement sur les variances qu'on leur attribuait. L'élément vraiment nouveau qu'apporte la présente théorie, du point de vue des applications, est, semble-t-il, qu'elle réussit à rendre le krigeage entièrement indépendent de ces indéterminations, en ce qui concerne aussi bien la forme des estimateurs que la variance qu'on leur attribue : ce que l'on exprime ici en parlant du caractère intrinsèque du krigeage.