Fontainebleau N-264

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 118

LES FERMES ALEATOIRES STATIONNAIRES ET SEMI-MARKOVIENS

G. MATHERON

Décembre 1971

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 118

LES FERMES ALEATOIRES STATIONNAIRES ET SEMI-MARKOVIENS

INTRODUCTION

Je me propose dans ce qui suit d'expliciter la structure des fermés aléatoires stationnaires semi-markoviens indéfiniment divisibles pour la réunion, soit en abrégé FASMID. Nous verrons, dans un dernier paragraphe, qu'il existe en fait des fermés aléatoires stationnaires et semi-markoviens qui ne sont pas indéfiniment divisibles. Je ne dispose pas à leur sujet de résultats généraux, encore que l'exemple que j'ai réussi à construire fasse lui aussi jouer un rôle important à la convexité. En ce qui concerne les FASMID proprement dits, deux types extrêmes sont connus depuis longtemps : les réseaux poissoniens de variétés linéaires, étudiés principalement par R.E. MILES, [2], [3], et les schémas booléens à grains primaires convexes introduits par G. Matheron [1] ..... Nous allons voir que ces deux prototypes permettent par combinaison de construire le FASMID le plus général. Tout FASMID, en effet, apparaît comme le résultat de la dilatation par des compacts convexes aléatoires de variétés linéaires constituant des réseaux poissoniens. Lorsque ces compacts convexes sont ponctuels, on retrouve les variétés linéaires ellesmêmes. Si au contraire on dilate par un compact convexe aléatoire un réseau constitué de variétés de dimension 0, c'est-à-dire un processus de Poisson ponctuel, on retrouve le schéma booléen. Dans le cas général, le FASMID est constitué d'un ou de plusieurs réseaux de cylindres à bases compactes convexes aléatoires. Nous introduisons ensuite la notion de fermé aléatoire stable pour la réunion, et nous caractériserons les réseaux milesiens comme fermés aléatoires stables stationnaires et semi-markoviens.

1 - LES FERMES ALEATOIRES CONDITIONNELS

Soit A un fermé aléatoire, défini par une probabilité P sur la tribu borélienne $\sigma(\mathcal{O})$ de l'espace $\mathcal{F}(E)$ des fermés d'un espace E localement compact à base dénombrable (LCD), et soit aussi u une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{H})$. Désignons par F la loi de la variable aléatoire u, définie par $F(H) = P(u^{-1}(H))$, $H \in \mathcal{H}$. Comme l'espace $\mathcal{F}$ est compact et admet une base dénombrable, on peut pour F - presque tout u définir une probabilité P_u sur $\sigma(\mathcal{O})$ telle que $P_u(V)$ soit intégrable pour F quel que soit $V \in \sigma(\mathcal{O})$ et vérifie pour tout $H \in \mathcal{H}$:

$$(1-1) \qquad P[V \cap u^{-1}(H)] = \int_H F(du)\, P_u(V)$$

Ainsi, pour F - presque tout u_o , se trouve défini un fermé aléatoire A_{u_o} dont la probabilité P_{u_o} vérifie par construction $P_{u_o}(u(A_{u_o}) = u_o) = 1$. Nous dirons que A_u est le fermé aléatoire A conditionnel en u. Les propriétés suivantes se démontrent immédiatement :

a/ Si $V \in \sigma(\mathcal{O})$ vérifie $P(V) = 1$, on a $P_u(V) = 1$ pour F - presque tout u.

b/ Soit φ une application mesurable de $\mathcal{F}$ dans lui-même vérifiant $u(\varphi(A)) = u(A)$ p.s. pour P. Alors $(\varphi(A))_u$ et $\varphi(A_u)$ sont équivalents pour F presque tout u.

2 - MESURES σ-FINIES SUR $\mathfrak{F}'$

Désignons par $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$ l'espace des fermés non vides d'un espace LCD E, qui est lui-même LCD pour la topologie induite par celle de $\mathfrak{F}$. Les voisinages de $\emptyset$ dans $\mathfrak{F}$ étant les V^K, $K \in \mathcal{K}$, tout compact de $\mathfrak{F}'$ est contenu dans V_K pour un $K \in \mathcal{K}$. Désignons par B_n une suite de compacts de E vérifiant $B_n \subset \mathring{B}_{n+1}$ et $E = \bigcup B_n$. Une mesure θ σ-finie sur $\mathfrak{F}'$ est alors définie par la donnée de sa restriction θ_n à chaque V_{B_n}. Inversement, si l'on se donne sur chaque V_{B_n} une mesure θ_n vérifiant $\theta_{n+m}(V) = \theta_n(V)$ dès que $V \in \sigma(\mathcal{O})$ est contenu dans V_{B_n}, la formule :

$$\theta(V) = \lim_n \uparrow \theta_n(V \cap V_{B_n}) \tag{2-1}$$

définit une mesure σ-finie sur $\mathfrak{F}'$.

A toute mesure θ σ-finie sur $\mathfrak{F}'$ est associé un processus de Poisson ponctuel dans $\mathfrak{F}'$. La réunion dans E des fermés de ce processus de $\mathfrak{F}'$ est p.s. un fermé de E (puisque $\theta(V_{B_n}) < \infty$ implique que chaque B_n n'est p.s. rencontré que par un nombre fini de ces fermés). Désignons par A cette réunion. A est un fermé aléatoire, car $A \in V^K$, $K \in \mathcal{K}$ équivaut à : "aucun fermé du processus de Poisson dans $\mathfrak{F}'$ n'appartient à V_K" , évènement mesurable dont la probabilité est :

$$Q(K) = e^{-\theta(V_K)} \tag{2-2}$$

A est évidemment indéfiniment divisible pour la réunion, et sans point fixe puisque Q(K) ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$. Inversement, d'après [1], théorème 2, tout fermé indéfiniment divisible et sans point fixe est caractérisé par sa fonctionnelle $Q(K) = \exp\{-\psi(K)\}$ où ψ est une capacité alternée d'ordre infini vérifiant $\psi(\emptyset) = 0$ et $\psi < \infty$ sur $\mathcal{K}$. On déduit sans peine du théorème de Choquet, [1], qu'il existe alors une et une seule mesure σ-finie θ sur $\mathfrak{F}'$ vérifiant $\theta(V_K) = \psi(K)$. Ainsi, nous pouvons identifier l'ensemble des mesures σ-finies sur $\mathfrak{F}'$ avec l'ensemble des fermés aléatoires indéfiniment divisibles et sans point fixe – et aussi avec l'ensemble des processus de Poisson ponctuel de $\mathfrak{F}'$ tels que chaque V_K ne contienne p.s. qu'un nombre fini de fermés.

La formule (1-1) se généralise au cas des mesures σ-finies. En effet, soit θ une mesure σ-finie non nulle sur $\mathfrak{F}'$, ce qui implique déjà $\theta(V_{B_n}) = \psi(B_n) > 0$ pour n supérieur ou égal à un n_0 que nous pouvons toujours supposer égal à 1. Sur V_{B_n}, la formule

$$P_n(V) = \theta(V \cap V_{B_n})/\psi(B_n)$$

définit une probabilité. Il existe donc une probabilité F_n sur Ω et une probabilité conditionnelle $P_{u,n}$ sur $\sigma(\mathcal{O})$ vérifiant la formule (1-1), soit :

$$\text{(2-3)} \qquad \theta(V \cap u^{-1}(H)) = \psi(B_n) \int_H F_n(du)\, P_{u,n}(V) \qquad (V \subset V_{B_n})$$

Désignons par G la probabilité sur Ω définie comme suit :

$$G = \Sigma_1^\infty \frac{1}{2^n} F_n$$

Chaque F_n est absolument continue relativement à G. Il existe donc une suite $\varphi_n(u)$ de fonctions mesurables sur Ω telles que :

(2-4) $$F_n = \varphi_n\, G$$

Avec $V \subset V_{B_n}$, et $m > n$, la relation (2-3) donne

$$\psi(B_n)\; P_{u,n}(V)\; F_n(du) = \psi(B_m)\; P_{u,m}(V)\; F_m(du)$$

et, compte tenu de (2-4) :

$$\psi(B_n)\; \varphi_n(u)\; P_{u,n}(V) = \psi(B_m)\; P_{u,m}(V)\; \varphi_m(u) \qquad \text{(p.s. pour G)}$$

Ainsi, pour tout $V \in \sigma(\mathcal{O})$ relativement compact dans $\mathfrak{F}'$, on peut définir l'expression $\theta_u(V)$ (pour G presque tout u) en posant

$$\theta_u(V) = \psi(B_n)\; \varphi_n(u)\; P_{u,n}(V)$$

pour un entier n tel que $V \subset V_{B_n}$. La restriction à chaque V_{B_n} de $\theta_u(V)$ est une mesure finie. Pour $V \in \sigma(\mathcal{O})$ non relativement compact, on peut donc poser $\theta_u(V) = \lim \uparrow \theta_u(V \cap V_{B_n})$, et la fonction $\theta_u(.)$ ainsi définie sur $\sigma(\mathcal{O})$ est alors une mesure σ-finie. D'après (2-3) et (2-4), on a alors :

(2-5) $$\theta(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H G(du)\; \theta_u(V)$$

pour tout $V \in \sigma(\mathcal{O})$ et tout $H \in \mathcal{H}$. Telle est la généralisation cherchée de la relation (1-1). On note toutefois que la probabilité G et la mesure σ-finie θ_u ne sont définies qu'à un facteur près $\varphi(u)$, G-intégrable et vérifiant $G(\{\varphi(u) = 0\}) = 0$, puisqu'on peut remplacer G par φ G et θ_u par $\theta_u/\varphi(u)$.

Les remarques suivantes pourront être utiles :

a/ Si $V \in \sigma(\mathcal{O})$ vérifie $\theta(V) = 0$, on a $\theta_u(V) = 0$ pour G presque tout u.

b/ Pour G presque tout u_o, on a $u(F) = u_o$ θ_{u_o}-presque partout sur $\mathfrak{F}'$.

c/ Soit φ une application mesurable de $\mathfrak{F}'$ dans lui-même. Supposons de plus qu'il existe une application φ^* mesurable de Ω dans lui-même telle que l'on ait $u(\varphi(F)) = \varphi^*(u(F))$ θ presque partout dans $\mathfrak{F}'$. La relation (2-5) donne alors :

$$\theta(\{\varphi(A) \in V \cap u^{-1}(H)\}) = \int_{\varphi^{*-1}(H)} G(du)\ \theta_u(\varphi^{-1}(V)) =$$

$$= \int_H G \circ \varphi^{*-1}(du)\ \theta_{\varphi^{*-1}(u)}(\varphi^{-1}(V))$$

Par suite :

d/ Si la mesure θ est invariante par φ (i.e. $\theta(V) = \theta(\varphi^{-1}(V))$ pour tout $V \in \sigma(\mathcal{O})$), alors G est invariante par φ^* ($G = G \circ \varphi^{*-1}$) et

$$\theta_u(V) = \theta_{\varphi^{*-1}(u)}(\varphi^{-1}(V))$$

En particulier :

e/ Si θ est invariante par φ, et si u est θ presque partout invariante par φ (soit $\theta(u \circ \varphi \neq u) = 0$), on peut prendre pour φ^* l'application identique sur Ω. Par suite, pour G presque tout u, θ_u est elle-même invariante par φ, soit :

$$\theta_u(V) = \theta_u(\varphi^{-1}(V))$$

f/ Si θ est invariante par une famille φ_i , $i \in I$ d'applications mesurables de $\mathfrak{F}'$ dans lui-même, les conclusions précédentes subsistent pour tout $i \in I$ et G presque tout u, (même si I n'est pas dénombrable).

Dans ce qui suit, nous prendrons comme espace E l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, et la famille φ_i , $i \in I$ sera souvent le groupe des translations de $\mathbb{R}^n$.

Dans la formule (2-5), on exprime la mesure σ-finie $\theta(dF)$ sur $\mathfrak{F}'$ à l'aide d'une probabilité G sur Ω et d'une mesure σ-finie "conditionnelle" θ_u sur $\mathfrak{F}'$. Il y aura parfois intérêt à faire l'inverse, c'est-à-dire à exprimer θ à l'aide d'une mesure σ-finie μ sur Ω et d'une probabilité conditionnelle P_u sur $\mathfrak{F}'$: supposons, en effet, qu'il existe une suite croissante $H_n \in \mathcal{H}$ telle que $\Omega = \bigcup H_n$ et :

$$(2\text{-}5) \qquad 0 < \theta(u^{-1}(H_n)) < \infty$$

Alors, en posant pour tout $V \in \sigma(\mathcal{O})$:

$$P_n(V) = \frac{\theta(V \cap u^{-1}(H_n))}{\theta(u^{-1}(H_n))}$$

on définit une probabilité sur $\sigma(\mathcal{O})$. D'après (1-1), il existe une probabilité F_n sur Ω et, pour F_n presque tout u, une probabilité $P_{u,n}$ sur $\mathfrak{F}'$ avec pour tout $V \in \mathcal{O}$ et tout $H \in \mathcal{H}$, $H \subset H_n$:

$$P_n(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H F_n(du)\; P_{n,u}(V)$$

Posons $\mu_n = \theta(u^{-1}(H_n))\, F_n$. Il vient :

$$\theta(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H \mu_n(du)\ P_{u,n}(V) \tag{2-6}$$

Comme $\mu_n(H) = \theta(u^{-1}(H))$ pour $H \subset H_n$, on voit que μ_n est la restriction à H_n de μ_{n+m} , $m > 0$. En posant pour tout $H \in \mathcal{H}$:

$$\mu(H) = \lim \uparrow \mu_n(H \cap H_n)$$

on définit donc sur $\mathcal{H}$ une mesure σ-finie, dont la restriction à chaque H_n est μ_n . D'après (2-6), on a :

$$\theta(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H \mu(du)\ P_{u,n}(V)$$

pour $H \subset H_n$. Il suit de là que la probabilité $P_{u,n}$ ne dépend pas de n, et que pour tout $H \in \mathcal{H}$ (contenu ou non dans un H_n , la formule suivante est valable :

$$\theta(V \cap u^{-1}(H)) = \int_H \mu(du)\ P_u(V) \tag{2-7}$$

Ainsi, pour tout u n'appartenant pas à un ensemble μ négligeable, il existe un fermé aléatoire A_u dont la probabilité P_u vérifie (2-7). On en déduit les remarques suivantes :

a'/ Si $V \in \sigma(\mathcal{O})$ vérifie $\theta(V) = 0$, on a $P_u(V) = 0$ μ -presque partout.

b'/ μ presque partout, on a $u(A_u) = u$ p.s. pour P_u.

d'/ Si θ est invariante par une application φ mesurable de $\mathfrak{F}'$ dans lui-même, et s'il existe $\varphi^* : \Omega \to \Omega$ mesurable telle que $u \circ \varphi = \varphi^* \circ u$ θ presque partout, la mesure μ est invariante par φ et :

$$P_u(V) = P_{\varphi^{*-1}(u)}\ (\varphi^{-1}(V))$$

e'/ Si de plus $\theta(u \circ \varphi \neq u) = 0$, P_u est elle-même invariante par φ.

f'/ Si φ_i , $i \in I$ est une famille d'applications mesurables $\mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}'$, les résultats précédents subsistent μ presque partout pour tout $i \in I$.

3 - LES SCHEMAS BOOLEENS STATIONNAIRES DANS $\mathbb{R}^n$

Considérons le cas où la mesure θ σ-finie sur $\mathfrak{F}'$ est concentrée sur l'espace $\mathcal{K}'$ des compacts non vide et invariante pour les translations. Pour $K \in \mathcal{K}'$ désignons par $x(K)$ le centre de la boule circonscrite à K. On vérifie sans peine que x est une application de $\mathcal{K}'$ dans $E = \mathbb{R}^n$ continue pour la topologie myope, donc sci pour la topologie induite sur $\mathcal{K}'$ par celle de $\mathfrak{F}'$. Prolongeons x sur $\mathfrak{F}'$, en posant par exemple $x(F) = 0$ pour F fermé non compact. x est une application mesurable de $\mathfrak{F}'$ dans $\mathbb{R}^n$. Si F_h désigne le translaté de F par h, on a $x(F_h) = x(F) + h$ pour $F \in \mathcal{K}'$, et par suite :

$$\theta[x(F_h) \neq x(F) + h] = 0 \tag{3-1}$$

Cette relation exprime que les translations de $\mathbb{R}^n$ vérifient la condition d'/ du paragraphe 1 (avec $\varphi^* \circ x = x+h$ si φ est la translation par h). Montrons que θ vérifie aussi la condition (2-5). En effet, soit B un borélien d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple un cube semi-ouvert) et y_k une suite de points tels que les $B \oplus \{y_k\} = B_k$, ou, aussi bien, les $B \oplus \{-y_k\} = B'_k$ réalisent une partition de $\mathbb{R}^n$. D'après l'invariance de θ par translation, on peut écrire :

$$\infty > \theta(V_B) = \sum_k \theta(x^{-1}(B_k) \cap V_B) =$$

$$= \sum_k \theta(x^{-1}(B) \cap V_{B'_k}) \geq \theta(x^{-1}(B) \cap \bigcup_k V_{B'_k}) = \theta(x^{-1}(B))$$

D'autre part, si $\theta(x^{-1}(B)) = 0$, on en déduit aussi

$$\theta(x^{-1}(\mathbb{R}^n)) = \sum_k \theta(x^{-1}(B_k)) = 0$$

soit $\theta = 0$. Donc, si θ n'est pas identiquement nulle, la condition (2-5) est vérifiée pour tout compact d'intérieur non vide.

Il existe donc une mesure μ σ-finie sur $\mathbb{R}^n$ et pour μ -presque tout x un compact aléatoire A_x dont la loi P_x vérifie :

$$\theta(V \cap x^{-1}(H)) = \int_H \mu(dx)\ P_x(V)$$

pour tout borélien H de $\mathbb{R}^n$ et tout $V \in \sigma(\mathcal{O})$. D'après d', la mesure σ-finie μ est invariante par translation, donc est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, et la probabilité conditionnelle P_x vérifie :

$$P_x(V) = P_o(V + x)$$

Soit A_o le compact aléatoire dont la loi est P_o. D'après (2-7), on trouve pour tout compact K :

$$\phi(K) = \theta(V_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(dx)\ P_o(V_{K_x}) = E(\mu(A_o \oplus \check{K})) \tag{3-2}$$

Ainsi, le fermé aléatoire associé à une mesure σ-finie invariante par translation et concentrée sur $\mathcal{K}'$ est un schéma booléen stationnaire.

Inversement, si A_o est un compact aléatoire tel que $E(\mu(A_o \oplus \check{K})) < \infty$ pour tout compact, la fonction $\psi(K)$ définie en (3-2) est une capacité alternée d'ordre infini et se prolonge par une mesure σ-finie sur $\mathfrak{F}'$. Il suffit même d'avoir $E(\mu(A_o)) < \infty$, car $\psi(K)$ est scs sur $\mathcal{K}'$ et invariante par translation : on en déduit que l'ensemble des compacts tels que $E(\mu(A_o \oplus \check{K})) = \infty$, s'il n'est pas vide, est inductif, et que les compacts minimaux vérifiant cette condition sont ponctuels, d'où $E(\mu(A_o)) = \infty$.

4 - LES FASMID

Si un FASMID admet des points fixes, il est p.s. égal à $\mathbb{R}^n$. C'est donc aux FASMID sans points fixes que nous allons exclusivement nous intéresser. D'après [1], théorème 3 et les résultats du paragraphe 2 ci-dessus, un fermé aléatoire A est un FASMID si et seulement si la fonctionnelle Q sur $\mathcal{K}$ définie par $Q(K) = P(A \cap K = \emptyset)$ est de la forme $Q(K) = \exp\{- \theta(V_K)\}$ où θ est une mesure σ-finie sur $\mathfrak{F}'$ invariante par translation et concentrée sur l'espace $C(\mathfrak{F})$ des fermés convexes non vide. ($C(\mathfrak{F}')$ est un sous-espace fermé, donc mesurable, de $\mathfrak{F}'$). C'est la structure de ces mesures que nous devons expliciter.

a/ La restriction de θ à $C(\mathcal{K}')$ est de la forme indiquée en (3-2) avec A_o compact aléatoire p.s. convexe. Il lui est associé un FASMID qui est un schéma booléen stationnaire à grain primaire convexe. Il reste à étudier la restriction de θ à $C(\mathfrak{F}) \setminus C(\mathcal{K}')$. Supposons donc la mesure θ concentrée sur les fermés convexes non compacts.

b/ Soit alors Ω l'ensemble constitué des cones convexes fermés de sommet 0, sous-espace compact de $C(\mathfrak{F}')$. Munissons-le de sa tribu borélienne $\mathcal{H}'$. Convenons de dire qu'un fermé convexe non vide $F \in C(\mathfrak{F}')$ contient un cone $H \in \Omega$ s'il existe un translaté de H contenu dans F. Lorsqu'il en est ainsi, on a $H \oplus x \subset F$ pour tout $x \in F$, comme on le vérifie sans peine, d'où $H \oplus F \subset F$ et $H \oplus F = F$. Inversement, cette relation caractérise les cones H contenus dans F.

Pour qu'il existe effectivement un $H \in \Omega$ tel que $H \oplus F = F$, il faut et il suffit que le fermé convexe F ne soit pas compact. La réunion des cones convexes vérifiant cette propriété est encore un cone convexe $H(F)$ vérifiant $F \oplus H(F) = F$, et, plus précisément, $H(F)$ est le plus grand élément de Ω vérifiant cette propriété. Complétons la définition de H en posant $H(F) = \emptyset$ si $F \in C(\mathcal{K}')$. L'application $F \to H(F)$ de $C(\mathfrak{F})$ dans $\Omega \cup \{\emptyset\}$ est scs, donc mesurable, et de plus manifestement invariante par translation. Si donc θ est une mesure σ-finie sur $C(\mathfrak{F}')$ invariante par translation et concentrée sur $C(\mathfrak{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$, les résultats du paragraphe 2-e/ sont applicables : il existe une probabilité $F(dH)$ sur l'ensemble Ω des cones convexes fermés non vides, et, pour presque tout $H_0 \in \Omega$, une mesure θ_{H_0} σ-finie sur $C(\mathfrak{F}')$ vérifiant $\theta'_{H_0}(H(F) \neq H_0) = 0$ et

$$(4-1) \qquad \theta(V) = \int_{\Omega} F(dH)\ \theta_H(V) \qquad (V \in \sigma(\mathcal{O}))$$

De plus, $\theta_H(V)$ est <u>invariante par translation</u>.

c/ Désignons par S_k l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de dimension k, $(0 < k \leq n)$, qui est un sous-espace compact de Ω. Montrons que <u>la mesure F est concentrée</u> sur $\bigcup_{k=1}^{n} S_k$.

En effet, soit B un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $H \in \Omega$ un cone convexe et $h \in H$ un point de H. Comme $F \oplus H \in V_B$ équivaut à $F \in V_{B\oplus\check{H}}$, la relation $\theta_H(F \neq F \oplus H)$ entraîne $V_B = V_{B\oplus\check{H}}$ à un ensemble θ_H négligeable près. Pour $h \in H$, on a donc, toujours à des ensembles θ_H-négligeables près :

$$V_{B\oplus\{h\}} = V_{B\oplus\check{H}\oplus\{h\}} \supset V_{B\oplus\check{H}} = V_B$$

Mais $\theta(V_{B\oplus\{h\}}) = \theta(V_B)$ entraîne alors l'égalité $V_{B\oplus\{h\}} = V_B$ θ_H presque partout, puis

$$V_B = \lim_n \uparrow V_{B\oplus\{nh\}\oplus\check{H}} \quad (\theta_H \text{ p.p.})$$

Ceci ayant lieu pour tous les ouverts B d'une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}^n$, on en conclut que $h \in H$ entraîne que la droite $D_h \in H$ (sous-espace à 1 dimension contenant h) est contenue dans H. Il en résulte aussitôt que H est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, autrement dit que la mesure F(dH) est concentrée sur la réunion des S_k , comme annoncé.

d/ Désignons par F_k la restriction de F à S_k . Pour F_k presque tout $s \in S_k$ il existe une mesure σ-finie θ_s sur $C(\mathfrak{F}')$ vérifiant $\theta_s(H(F) \neq s) = 0$. Autrement dit, θ_s est concentrée sur l'ensemble des cylindres à base compacte convexe et à génératrices parallèles à s, c'est-à-dire sur l'ensemble des fermés de la forme $K \oplus s$, où K est un compact convexe contenu dans l'orthogonal $s^\perp$ de s. De plus, θ_s est invariante par translation. Les résultats du paragraphe 3 s'appliquent donc à θ_s . Si nous désignons par μ_{n-k} la mesure de Lebesgue dans $s^\perp$ identifié à $\mathbb{R}^{n-k}$, il existe une fonction $\varphi_k(s)$ intégrable pour F_k et un compact aléatoire A_s dans s dont la loi P_s vérifie :

$$\theta_s(V_K) = \int_{s^\perp} P_s(V_{\Pi_{s^\perp} K})\ \varphi_k(s)dx = \varphi_k(s)\ E[\mu_{n-k}\ (A_s \oplus \Pi_{s^\perp}\check{K})]$$

$\Pi_{s^\perp} K$ désigne la projection du compact K dans l'orthogonal $s^\perp$ du sous-espace $s \in S_k$). En posant

$$G_k(ds) = \varphi_k(s)\ F_k(ds)$$

on obtient ainsi la relation :

$$\text{(4-2)} \qquad \theta(V_K) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} G_k(ds)\ E[\mu_{n-k}\ (A_s \oplus \Pi_{s^\perp} \check{K})]$$

Telle est la forme générale d'une mesure σ-finie invariante par translation et concentrée sur $C(\mathcal{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$. Pour $k = n$, $S_n = \{\mathbb{R}^n\}$ est ponctuel et son orthogonal est $\{0\}$. Ainsi $p_n = \int G_n(ds)$ est $\theta(F = \mathbb{R}^n)$. La mesure conditionnelle associée est $\theta_n(V) = 1$. Dans le cas général où θ n'est pas concentrée sur $C(\mathcal{F}')\setminus C(\mathcal{K}')$ on doit tenir compte aussi de la restriction de θ à $C(\mathcal{K}')$, dont la forme générale a été donnée dans le paragraphe 3.

Ainsi, tout FASMID est défini par une fonctionnelle Q(K) de la forme :

$$\text{(4-3)} \qquad \begin{cases} Q(K) = e^{-\psi(K)} \\ \\ \psi(K) = p_o\ \psi_o(K) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{S_k} G_k(ds)\ \psi_s^k(K) + p_n \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \psi_o(K) = E[\mu_n(A_o \oplus \check{K})] \\ \\ \psi_s^k(K) = E[\mu_{n-k}(A_s \oplus \Pi_{s^\perp} \check{K})] \end{cases}$$

A_s désignant un compact aléatoire de $s^\perp$ identifié à $\mathbb{R}^{n-k}$ et G_k une mesure sur S_k. On voit que exp $\{-\psi_s^k(K)\}$ est associée à un FASMID qui est p.s. un réseau poissonien de cylindres à génératrices parallèles à $s \in S_k'$ et à base compacte convexe aléatoire A_s dans $s^\perp$. De plus, $p_o = \theta(C(\mathcal{K}))$ et $p_n = \theta(\{\mathbb{R}^n\})$.

Si pour G_k presque tout s on a $A_s = \{0\}$ p.s., il en résulte

$$\psi_s^k = \mu_{n-k}\,(\Pi_{s^\perp}\check{K})$$

Donc, si $p_o = p_n = 0$ et si $G_{k'} = 0$ sauf pour $k' = k$ $(0 < k < n)$, la formule (4-3) se réduit à :

$$\psi(K) = \int_{S_k} G_k(ds)\ \mu_{n-k}\,(\Pi_{s^\perp}\check{K}) \tag{4-4}$$

Le FASMID correspondant est un réseau poissonien stationnaire de variétés linéaires de dimension k. Si l'on dilate les variétés de direction s de ce réseau par des compacts convexes aléatoires indépendants équivalents à un même compact A_s, on doit remplacer $\mu_{n-k}\,(\Pi_{s^\perp}\check{K})$ par $E[\mu_{n-k}\,(A_s \oplus \Pi_{s^\perp}\check{K})]$ dans l'argument de (4-4). Ainsi, la formule générale (4-3) exprime que tout FASMID est obtenu en dilatant par des compacts convexes aléatoires les variétés linéaires de réseaux poissonniens.

Pour qu'un FASMID soit équivalent à un réseau poissonien, il faut et il suffit que pour $\lambda > 0$ la boule B_λ de rayon λ vérifie

$$\psi(B_\lambda) = \lambda^\alpha\ \psi(B_1) \tag{4-5}$$

α est alors nécessairement un entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, et n-k est égal à la dimension des variétés linéaires du réseau.

Il résulte de (4-4) que la condition (4-5) est nécessaire. Inversement, supposons-la vérifiée, et montrons que $\phi(K)$ est de la forme (4-4). Pour celà, nous utiliserons la formule de Steiner, d'après laquelle tout compact A convexe non vide dans $\mathbb{R}^{n-k}$ vérifie :

$$\mu_{n-k}\,(A \oplus B_r^{n-k}) = \sum_{p=0}^{n-k} b_p(A)\, r^p$$

(B_r^{n-k} est la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^{n-k}$) avec $b_p(A) \geq 0$ et $b_p(A) = 0$ si et seulement si le compact A est contenu dans une variété linéaire de dimension $< n - k - p$. En particulier, cette expression se réduit à un monome, nécessairement de degré n-k, soit :

$$\mu_{n-k}\,(A \oplus B_r^{n-k}) = \omega_{n-k}\, r^{n-k}$$

si et seulement si le compact A est réduit à un point.

D'après la formule générale, donc, pour tout FASMID, $\phi(B_r)$ est un polynome de degré $\leq n$. Pour que ce polynome soit un monome de degré $\alpha = k$ nécessairement entier compris entre 0 et n, il faut et il suffit que toutes les mesures $G_{k'}$ soient nulles sauf G_{n-k} et que pour G_{n-k} presque tout $s \in S_{n-k}$ A_s soit p.s. ponctuel dans $s^{\perp}$. On a alors

$$\phi(K) = \int_{S_{n-k}} G_{n-k}(ds)\ \mu_k\,(\Pi_{s^{\perp}} K)$$

et le FASMID est un réseau poissonien de variétés linéaires dont la dimension est n-k.

5 - LES FERMES ALEATOIRES STABLES POUR LA REUNION

Nous dirons qu'un fermé aléatoire A dans $\mathbb{R}^n$ est stable pour la réunion si pour tout entier k il existe une constante $\lambda_k > 0$ telle que la réunion $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ de k fermés indépendants équivalents à A soit équivalente à l'homothétique $\lambda_k A$ de A. Si l'on pose $Q(K) = P(A \in V^K)$ pour $K \in \mathcal{K}$, la fonctionnelle Q_λ associée à λA est évidemment $Q_\lambda(K) = Q(K/\lambda)$. Ainsi, pour que A soit stable, il faut et il suffit qu'il existe une suite $\lambda_k > 0$ telle que l'on ait :

$$(5\text{-}1) \qquad (Q(K))^k = Q\left(\frac{K}{\lambda_k}\right) \qquad (k > 0,\ K \in \mathcal{K})$$

Si A est stable, il est équivalent à la réunion $\bigcup_{i=1}^{k} \frac{A_i}{\lambda_k}$, donc est indéfiniment divisible pour la réunion. Limitons-nous au cas où A n'admet pas de point fixe. Alors, Q est de la forme :

$$Q(K) = e^{-\psi(K)}$$

pour une capacité $\psi < \infty$ alternée d'ordre infini et nulle en $\emptyset$. Pour que A soit stable, d'après (5-1), il faut et il suffit que l'on ait :

$$(5\text{-}2) \qquad \psi\left(\frac{K}{\lambda_k}\right) = k\,\psi(K)$$

Montrons qu'il en est ainsi si et seulement si il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$(5\text{-}3) \qquad \psi(\lambda K) = \lambda^\alpha\,\psi(K) \qquad (\lambda \geq 0\ ,\ K \in \mathcal{K})$$

a/ Il est clair que (5-3) entraîne (5-2), avec $\lambda_k = k^{-1/\alpha}$

b/ Inversement, supposons (5-2) vérifiée, et montrons que (5-3) en résulte. Pour $K = \{0\}$, on trouve $\psi(\{0\}) = k\,\psi(\{0\})$ pour tout entier k, soit (puisque $\psi < \infty$) :

$$\psi(\{0\}) = 0, \text{ soit } P(0 \in A) = 0$$

Si ψ est identiquement nulle, (5-3) est vraie. Nous supposerons donc $\psi \neq 0$; c'est-à-dire A non p.s. vide. On a alors le lemme suivant :

c/ Si $\psi(a\,B) = \psi(B)$ pour toute boule B de centre 0, alors $a = 1$. En effet, par itération, on trouve $\psi(B) = \psi(a^k\,B) = \psi(B/a^k)$, k entier > 0. Supposons $a \neq 1$, soit par exemple $a > 1$, d'où $a^k\,B \uparrow \mathbb{R}^n$ et $B/a^k \downarrow \{0\}$. Comme ψ est scs, il en résulte $\psi(B) = \psi(\{0\}) = 0$ d'après b/ pour toute boule B, donc $\psi = 0$ contrairement à notre hypothèse.

d/ D'après (5-2), pour tout rationnel $r \geq 0$, il existe λ_r telle que

$$r\,\psi(K) = \psi\left(\frac{K}{\lambda_r}\right) \qquad (K \in \mathcal{K},\ r \text{ rationnel } \geq 0)$$

On en déduit $\psi(K/\lambda_r\,\lambda_{r'}) = r\,\psi(K/\lambda_{r'}) = r\,r'\,\psi(K)$, donc, d'après le lemme c/ :

$$(5\text{-}4) \qquad \lambda_{rr'} = \lambda_r\,\lambda_{r'}$$

e/ la fonction λ_r, définie sur les rationnels positifs, est non croissante et continue à droite.

En effet, si B est une boule de centre 0, on a $B/\lambda_r \subset B$ si $\lambda_r \geq 1$ et $B/\lambda_r \supset B$ si $\lambda_r \leq 1$. Pour r rationnel > 1, la relation $\psi(B/\lambda_r) = r\,\psi(B) > \psi(B)$ montre, puisque ψ est croissante, que c'est l'éventualité $\lambda_r \leq 1$ qui est réalisée. D'après (5-4), λ_r est donc non croissante.

La continuité à droite résulte ensuite du fait que ψ est scs.

f/ D'après e/ et la relation (5-4), λ_r est nécessairement de la forme :

$$\lambda_r = r^{-1/\alpha}$$

pour un $\alpha > 0$. Montrons que la relation :

$$\psi(r^{1/\alpha} K) = r\, \psi(K)$$

établie pour r rationnel ≥ 0 reste valable pour r réel ≥ 0.

Soit, en effet, x réel > 0, et r_n une suite de rationnels > 0 convergeant vers x. Comme l'homothétie est une opération continue dans $\mathcal{K}$, $r_n^{1/\alpha} K$ converge vers $x^{1/\alpha} K$ pour tout $K \in \mathcal{K}'$. Comme ψ est scs, on en déduit :

$$x\, \psi(K) = \lim \psi\, (r_n^{1/\alpha} K) \leq \psi\, (x^{1/\alpha} K)$$

Il reste à établir l'inégalité inverse. Soit $\varepsilon > 0$, et εB la boule de centre 0 et de rayon ε. Comme $r_n^{1/\alpha} K$ converge vers $x^{1/\alpha} K$, on a, pour n assez grand :

$$x^{1/\alpha} K \subset (r_n^{1/\alpha} K) \oplus \varepsilon B = r_n^{1/\alpha} (K \oplus \frac{\varepsilon}{r_n^{1/\alpha}} B)$$

D'autre part, pour $\varepsilon' > 0$ donné, on a $r_n^{-1/\alpha} \leq x^{-1/\alpha} + \varepsilon'$ pour n assez grand, donc :

$$x^{1/\alpha} K \subset r_n^{1/\alpha} \; [K \oplus (\frac{\varepsilon}{x^{1/\alpha}} + \varepsilon')\, B]$$

et par suite :

$$\psi\, (x^{1/\alpha} K) \leq r_n\, \psi\, [K \oplus (\frac{\varepsilon}{x^{1/\alpha}} + \varepsilon')\, B]$$

/

Passant à la limite d'abord en $n \uparrow \infty$, puis en $\varepsilon \downarrow 0$ et $\varepsilon' \downarrow 0$, et tenant compte du fait que ψ est scs, on en déduit :

$$\psi\ (x^{1/\alpha}\ K) \leq x\ \psi(K)$$

On a par suite l'égalité, et le résultat annoncé en résulte.

On en déduit l'énoncé suivant :

Pour qu'un fermé aléatoire A soit p.s. un réseau poissonien de variétés linéaires, il faut et il suffit que A soit stable, stationnaire et semi-markovien.

On a vu que cette condition est nécessaire. Inversement, si elle est vérifiée, A est un FASMID dont la fonctionnelle ψ vérifie $\psi(B_r) = r^\alpha\ \psi(B_1)$. D'après la condition (4-5), A est alors un réseau poissonien de variétés linéaires.

6 - FORME GENERALE DES FERMES ALEATOIRES STABLES POUR $\cup$

Soit A un fermé stable, et ψ la fonctionnelle associée à A , $[P(A \in V^K) = e^{-\psi(K)}]$ vérifiant

(6-1) $$\psi(\lambda K) = \lambda^\alpha\ \psi(K) \qquad (\lambda \geq 0,\ K \in \mathcal{K})$$

pour un $\alpha > 0$, et soit θ la mesure σ-finie sur $\mathcal{F}'$ vérifiant $\theta(V_K) = \psi(K)$.

A tout $F \in \mathcal{F}'$ associons sa distance $r(F) = \operatorname{Inf}_{x \in F} |x|$ à l'origine.

Il est facile de voir que $r : \mathcal{F}' \to \mathbb{R}_+$ est continue, donc mesurable. Pour $r_0 > 0$, on a $\theta\ (r(F) \leq r_0) = \theta\ (V_{B_{r_0}}) < \infty$ et, pour r_0 assez grand, cette quantité est > 0. D'après (2-7), il existe donc une mesure μ σ-finie sur $\mathbb{R}_+$, et, μ presque partout sur $\mathbb{R}_+$, une probabilité P_r sur $\sigma(\mathcal{G})$ avec :

$$\theta(V) = \int_0^\infty \mu(dr)\ P_r(V)$$

et $P_r(r(F) = r) = 1$. D'après (6-1), d'autre part, on a :

$$\phi(B_r) = \theta(V_{B_r}) = r^\alpha\ \phi(B_1)$$

Comme $\phi(B_r) = \theta(V_{B_r}) = \theta(r(F) \leq r)$, on en déduit que la mesure μ admet la densité

$$\frac{\mu(dr)}{d\,r} = \alpha\ \phi(B_1)\ r^{\alpha-1} \tag{6-2}$$

D'autre part, l'homothétie $F \to \lambda F$ change $r(F)$ en $r(\lambda F) = \lambda r(F)$ et $\mu(dr)$ en $\mu(dr)/\lambda^\alpha$. On en déduit (comme en 2 - d'/) que P_r vérifie :

$$P_r(V) = P_{\lambda r}\ (\lambda V)$$

Autrement dit, l'ensemble aléatoire $A_{\lambda r}$ de loi $P_{\lambda r}$ est équivalent à l'homothétique $\lambda\ A_r$. Posons $P(V)$ au lieu de $P_1(V)$. La relation précédente donne

$$P_r(V) = P\ (\frac{V}{r})$$

et par suite :

$$\theta(V) = \alpha\ \phi(B) \int_0^\infty r^{\alpha-1}\ P\ (\frac{V}{r})\ dr$$

Inversement, soit P une probabilité quelconque que $\sigma(\mathcal{O})$. Posons pour tout compact K :

$$\psi(K) = b \int_0^\infty P\,(V_{\frac{K}{r}}) \quad r^{\alpha-1}\,dr \tag{6-3}$$

(cette intégrale existe, finie ou non, car $P(V_K)$ est scs sur $\mathcal{K}$, et l'homothétie continue, elle est finie pour tout compact dès qu'elle est finie pour la boule unité). On a clairement :

$$\psi\,(\lambda K) = \lambda^\alpha\,\psi(K)$$

Si $\psi(B) < \infty$, ψ est une capacité alternée d'ordre infini nulle en $\emptyset$ et $< \infty$ sur $\mathcal{K}$, et il existe une mesure σ-finie θ vérifiant $\psi(K) =$ $= \theta(V_K)$. Donc, il existe bien un fermé aléatoire A stable pour la réunion et tel que $P(A \in V^K) = \exp\{-\,\psi(K)\}$. Ainsi, (6-3) donne la forme générale des fermés stables. (Il resterait à caractériser la classe des fermés aléatoires stables et stationnaires).

- BIBLIOGRAPHY -

[1] G. MATHERON - (1971) - Ensembles fermés aléatoires, ensembles semi-markoviens et polyèdres poissoniens (à paraître en 1972 dans "Advances in Applied Probability).

[2] R.E. MILES - (1969) - Poisson flats in Euclidean spaces - Part I : a finite number of random uniform flats (Advances in Applied Probability, 1, 1969, p. 211-237).

[3] R.E. MILES - (1970) - A synopsis of Poisson flats in Euclidean spaces, Izv. Akad. Nauk armianskoï SSR, 3, 263-285.