N - 218

POLYEDRES POISSONIENS ET ENSEMBLES SEMI-MARKOVIENS

Par

G. MATHERON

Janvier 1971

POLYEDRES POISSONIENS ET ENSEMBLES SEMI-MARKOVIENS

TABLE DES MATIERES

POLYEDRES POISSONIENS ET ENSEMBLES SEMI-MARKOVIENS

0 - INTRODUCTION

Les ensembles aléatoires semi-markoviens constituent une assez large généralisation des variétés linéaires poissoniennes (Poisson flats) étudiés, en particulier, par R.E. MILES, [6], [7]. C'est la recherche de modèles mathématiques adaptés à une description probabiliste des milieux poreux qui m'a conduit à la notion d'ensemble semi-markovien et m'a permis d'en construire des exemples assez généraux. (G. MATHERON, [4]). C'est, d'autre part, le développement des techniques expérimentales de l'analyse des textures (J. SERRA, [9], [10]), qui m'a incité à redéfinir la notion même d'ensemble aléatoire à l'aide de σ-algèbres adaptées directement à ces techniques opératoires (G. MATHERON, [5]). Il se trouve que ces σ-algèbres s'identifient aux tribus boréliennes associées aux topologies dont il est naturel de munir les ensembles constitués des fermés, des ouverts ou des compacts de l'espace de départ. Le thème probabiliste initial s'infléchit alors en direction de la Géométrie Intégrale, mais d'une géométrie intégrale envisagée surtout, comme le notait également R.E. MILES, [6], du point de vue ensembliste qui est, par exemple, celui de H. HADWIGER [2]. C'est sans doute cette fusion progressive de la géométrie intégrale et de la théorie des probabilités qui confère leur intérêt mathématique (si elles en ont un) à des études de ce genre. Leur intérêt pratique a été suffisamment illustré par des applications déjà nombreuses à des domaines aussi variés que la géologie, la biologie, l'agriculture, le traitement des minerais, la métallurgie, etc....

Dans une première partie, je rappelle rapidement les définitions topologiques et probabilistes les plus utiles pour la suite, notamment celle de fermé aléatoire, en insistant surtout sur la fonctionnelle Q, qui joue pour un fermé aléatoire le même rôle qu'une fonction de répartition pour une variable aléatoire, et aussi sur l'espace vectoriel de MINKOWSKI, à cause d'un lemme de prolongement qui joue un rôle décisif au paragraphe 3-3. La seconde partie introduit la propriété semi-markovienne, et envisage ses conséquences pour la fonctionnelle Q: dans le cas stationnaire et isotrope, en particulier, Q est liée étroitement aux fonctionnelles de MINKOWSKI (Quermassintegrale). L'exemple des schémas booléens à grains primaires convexes montre qu'il existe effectivement des fermés semi-markoviens plus généraux que les variétés poissoniennes de MILES. La troisième partie caractérise les polyèdres poissoniens par une propriété d'invariance conditionnelle qui généralise exactement la propriété caractéristique bien connue des lois exponentielles. La dernière partie, consacrée à des applications, suggère que cette invariance conditionnelle pourrait fournir un instrument nouveau pour étudier les propriétés encore un peu énigmatiques des polyèdres poissoniens.

1 - DEFINITIONS GENERALES

1-1 Les Ensembles Fermés Aléatoires.

Désignons par $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien à n dimensions, et par $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ les familles constituées par les ensembles respectivement fermés, ouverts et compacts dans $\mathbb{R}^n$. Les définitions générales qui suivent (sauf, évidemment, celles qui font intervenir la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$) resteraient d'ailleurs valables si $\mathbb{R}^n$ était remplacé par un espace localement compact dénombrable. Pour un exposé systématique, on se reportera à G. MATHERON, [4].

Si E est un ensemble quelconque dans $\mathbb{R}^n$, on désignera par V^E la famille des fermés disjoints de E, et par V_E son complémentaire dans $\mathcal{F}$, soit :

$$V^E = \{F \in \mathcal{F},\ F \cap E = \emptyset\} \ ; \quad V_E = \{F \in \mathcal{F},\ F \cap E \neq \emptyset\}$$

Nous munirons $\mathcal{F}$ de la topologie engendrée par les V^K, $K \in \mathcal{K}$ et par les V_G, $G \in \mathcal{G}$, et l'espace $\mathcal{G}$ de la topologie déduite de la précédente par passage aux complémentaires. Munies de ces topologies, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont compactes et de type dénombrable. Une suite F_n converge vers F dans $\mathcal{F}$ si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1/ tout $x \in F$ est limite d'une suite $x_n \in F_n$, n prenant toutes les valeurs entières sauf en plus un nombre fini.

2/ pour toute suite partielle F_{n_k}, toute suite $x_{n_k} \in F_{n_k}$ a ses valeurs d'adhérence dans F.

De même, nous munirons $\mathcal{K}$ de la <u>topologie myope</u>, dont les ouverts sont engendrés par les familles de compacts de la forme $V^F \cap \mathcal{K}$, $F \in \mathcal{F}$ et $V_G \cap \mathcal{K}$, $G \in \mathcal{G}$. L'espace $\mathcal{K}$ est alors localement compact de type dénombrable. Une famille V de compacts fermée dans $\mathcal{K}$ est compacte dans $\mathcal{K}$ si et seulement si les compacts de V sont contenus dans un compact fixe. La topologie myope est plus fine que la topologie induite sur $\mathcal{K}$ par celle de $\mathcal{F}$, mais ces deux topologies coïncident sur les parties compactes de $\mathcal{K}$. Ainsi, une suite K_n converge vers K dans $\mathcal{K}$ si et seulement si les K_n convergent vers K dans $\mathcal{F}$ en restant contenus dans un compact fixe.

L'ensemble vide $\emptyset$ est un point isolé dans $\mathcal{K}$ pour la topologie myope (mais $\emptyset$ n'est pas un point isolé dans $\mathcal{F}$). Nous désignerons par $\mathcal{K}'$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{K}'$ est un espace LCD pour la topologie myope. Cette topologie sur $\mathcal{K}'$ est équivalente à la topologie métrique utilisée en géométrie intégrale, et qui est définie par la distance d suivante : soit $\oplus$ l'addition de MINKOWSKI (def : $A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ pour A et B sous-ensembles quelconques de $\mathbb{R}^n$) et B_ε la boule fermée de centre O et de rayon $\varepsilon \geq 0$. Pour K, K' compacts non vides, on pose :

$$d(K, K') = \mathrm{Inf}\{\varepsilon : K \subset K' \oplus B_\varepsilon \ , \ K' \subset K \oplus B_\varepsilon\}$$

Pour définir la notion d'ensemble fermé aléatoire, il convient de munir $\mathcal{F}$ de sa σ-algèbre borélienne, que nous désignerons par $\sigma(\mathcal{O})$. On vérifie que $\sigma(\mathcal{O})$ est engendrée par les seuls ouverts du type V^K, $K \in \mathcal{K}$, ou, aussi bien, par les seuls ouverts du type V_G, $G \in \mathcal{G}$. Un ensemble fermé aléatoire est alors une application mesurable A d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{O}))$. On se ramène facilement au cas où A est l'application identique sur $\mathcal{F}$, et le fermé aléatoire A est alors défini par la donnée d'une probabilité P sur $(\mathcal{F}, \sigma(\mathcal{O}))$. La compacité de $\mathcal{F}$ nous garantit qu'il existe effectivement de telles probabilités. On peut de même définir des familles $(A_i)_{i\in I}$ de fermés aléatoires sur les espaces-produits correspondants.

1-2 La Fonctionnelle Q.

Nous désignerons par Q la fonctionnelle associée à un fermé aléatoire A définie en posant $Q(K) = P(V^K) = P(A \cap K = \emptyset)$ pour $K \in \mathcal{K}$. On a toujours $Q(\emptyset) = 1$, et Q est semi-continue inférieurement (s c i) pour la topologie myope (mais, en général, elle n'est pas continue sur $\mathcal{K}$). On peut aussi poser $Q(G) = P(V^G)$ pour $G \in \mathcal{G}$, et Q est alors semi-continue supérieurement (s c s) sur $\mathcal{G}$. On vérifie sans peine les propriétés d'approximation :

$$Q(G) = \operatorname{Inf}\{Q(K),\ K \in \mathcal{K},\ K \subset G\} \ , \ Q(K) = \operatorname{Sup}\{Q(G),\ G \in \mathcal{G},\ G \supset K\}$$

Montrons que la donnée de la fonctionnelle Q sur $\mathcal{K}$ suffit pour déterminer la probabilité P sur $\sigma(\mathcal{O})$. En effet, considérons la classe $\mathcal{S}$ constituée des V^{K_o}, $K_o \in \mathcal{K}$, de leurs complémentaires V_{K_o}, et des parties de $\mathcal{F}$ de la forme $V = V^{K_o} \cap V_{K_1} \cap \dots \cap V_{K_k}$ (k entier > 0, K_o, K_1, ...$K_k \in \mathcal{K}$). La probabilité P(V) se déduit de façon élémentaire des $Q(K_i) = P(V^{K_i})$, de sorte que la donnée de Q sur $\mathcal{K}$ détermine P sur $\mathcal{S}$. Mais $\mathcal{S}$ est une semi-algèbre qui engendre $\sigma(\mathcal{O})$. Par suite (cf. J. NEVEU, [8], p. 25), P est déterminée sur $\sigma(\mathcal{O})$ dès que Q est connue sur $\mathcal{K}$.

Fermés Aléatoires Indépendants. - Un couple (A_1, A_2) de fermés aléatoires est une application mesurable d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur l'espace produit $\left(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F},\ \sigma(\mathcal{O}) \otimes \sigma(\mathcal{O})\right)$. Les fonctionnelles Q_1 et Q_2 relatives à A_1 et A_2 sont définies pour tout $K \in \mathcal{K}$ par $Q_i(K) = P(A_i \in V^K)$ $i = 1, 2$. On montre alors, en raisonnant comme ci-dessus, que A_1 et A_2 sont indépendants dès que l'on a :

$$(1\text{-}1) \qquad P(V^{K_1} \times V^{K_2}) = Q_1(K_1)\, Q_2(K_2) \qquad (K_1, K_2 \in \mathcal{K})$$

1-3 Opérations Mesurables.

Tout fermé aléatoire A possède la propriété de mesurabilité. En particulier, si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^n$, $\mu(A)$ est une variable aléatoire et vérifie :

$$(1\text{-}2) \qquad E\left(\mu(A)\right) = \int P(x \in A)\, \mu(dx) = \int (1 - Q(\{x\}))\, \mu(dx)$$

Si α est une application mesurable de $\mathfrak{F}$ dans lui-même, $\alpha(A)$ est encore un fermé aléatoire, et vérifie donc aussi la relation (1-2).

Or, les applications suivantes sont continues :

$(F_1, F_2) \to F_1 \cup F_2$ de $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{F})$ dans $\mathfrak{F}$

$(F, K) \to F \oplus K = \{f + k,\ f \in F,\ k \in K\}$, de $\mathfrak{F} \times \mathcal{K}'$ dans $\mathfrak{F}$

Une application α d'un espace topologique E dans $\mathfrak{F}$ est s c s (resp. s c i) si l'image inverse d'un ouvert du type V^K, $K \in \mathcal{K}$ (resp. V_G, $G \in \mathcal{G}$) est un ouvert de E. Une application α s c s ou s c i est alors aussi mesurable pour la σ-algèbre borélienne de E. On vérifie que les applications suivantes sont s c s, donc mesurables.

$$(F_1 , F_2) \rightarrow F_1 \cap F_2 \qquad \text{de } (\mathcal{F} \times \mathcal{F}) \text{ dans } \mathcal{F}$$

$$(F, K) \rightarrow (F \ominus K) = (F^c \oplus K)^c \text{ , de } (\mathcal{F} \times \mathcal{K}') \text{ dans } \mathcal{F}$$

Ainsi, si A est un fermé aléatoire et K_o un compact non vide, $A \cap K_o$, $A \cup K_o$, $A \oplus K_o$, $A \ominus K_o$ sont des fermés aléatoires et vérifient la propriété (1-2).

Soit $K_o \in \mathcal{K}'$ un compact non vide, et $\check{K}_o = \{k, k \in K_o\}$ son transposé. On a $x \in A \oplus \check{K}_o$ si et seulement si le translaté $K_o \oplus \{x\}$ de K_o par x rencontre A. On dira que $A \oplus \check{K}_o$ est le <u>dilaté de A</u> par K_o . Par dualité, on voit que $x \in A \ominus \check{K}_o$ équivaut de même à $K_o \oplus \{x\} \subset A$, et on dit que $A \ominus \check{K}_o$ est <u>l'érodé de A</u> par K_o . Soit alors A un fermé aléatoire, Q sa fonctionnelle, $A \oplus \check{K}_o$ le dilaté de A par K_o et Q_{K_o} la fonctionnelle associée à ce fermé aléatoire. Pour $K \in \mathcal{K}$, K est disjoint de $A \oplus \check{K}_o$ si et seulement si $K \oplus K_o$ est disjoint de A. Autrement dit, la fonctionnelle associée au dilaté est définie par :

$$Q_{K_o}(K) = Q(K \oplus K_o) \tag{1-3}$$

En combinant érosion et dilatation, on obtient encore les opérations suivantes (qui permettent de définir la notion de granulométrie d'un fermé aléatoire, cf. paragraphe 4-2 ci-dessous) :

$$A^{K_o} = (A \oplus \check{K}_o) \ominus K_o \qquad \text{(fermeture de A selon } K_o)$$

$$A_{K_o} = (A \ominus \check{K}_o) \oplus K_o \qquad \text{(ouverture de A selon } K_o)$$

Ce sont des opérations croissantes, isotones (resp. anti-isotones) et idempotentes.

Il s'agit donc d'une fermeture (et d'une ouverture) au sens algébrique, d'ailleurs duales l'une de l'autre. Lorsque A est un fermé aléatoire et K_o un compact non vide, A^{K_o} et A_{K_o} sont encore des fermés aléatoires.

Si K et K_o sont compacts et non vides, K^{K_o} est contenu dans l'enveloppe convexe C(K) de K. De plus, si K_o est un compact convexe d'intérieur non vide, et $\rho\, K_o$ son homothétique dans une homothétie de module $\rho > 0$, on a :

$$C(K) = \overline{\bigcup_{\rho > 0} K^{\rho K_o}} = \lim_{\rho \to \infty} K^{\rho K_o}$$

De cette propriété, on déduit un lemme de géométrie intégrale, qui nous sera utile ultérieurement :

<u>Lemme 1-1</u> - Soit $K \in \mathcal{K}'$ un compact non vide, C(K) son enveloppe convexe, et B_r la boule de centre O et de rayon r. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver ρ_ε tel que l'on ait $K \oplus B_{r+\varepsilon} \supset C(K) \oplus B_r$ pour $r \geq \rho_\varepsilon$.

En effet, on a $C(K) = \overline{\bigcup K^{B_\rho}}$, et K^{B_ρ} converge dans $\mathcal{K}$ vers C(K) d'après le résultat rappelé ci-dessus. Il existe donc ρ_ε tel que $C(K) \subset K^{B_r} \oplus B_\varepsilon$ pour $r \geq \rho_\varepsilon$. Mais $K^{B_r} \oplus B_\varepsilon \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon}) \ominus B_r$ entraine alors $C(K) \oplus B_r \subset (K \oplus B_{r+\varepsilon})_{B_r} \subset K \oplus B_{r+\varepsilon}$, et le lemme en résulte.

<u>1-4 L'espace Vectoriel de MINKOWSKI.</u>

Désignons par $C_o(\mathcal{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ (fermé dans $\mathcal{K}$)

constitué des compacts convexes contenant l'origine. Tour $K \in C_0(\mathcal{K})$ est défini par sa <u>podaire</u> $r_K(u)$, fonction continue ≥ 0 sur la sphère unité S de $\mathbb{R}^n$ associant à chaque direction $u \in S$ la distance $r_K(u)$ à l'origine du plan d'appui dans la direction u. Désignons par $\mathcal{R}$ l'image de $C_0(\mathcal{K})$ par l'application $K \to r_K$ dans l'espace $\mathcal{C}(S)$ des fonctions continues sur S. L'application podaire $K \to r_K$ est un <u>homéomorphisme</u> de $C_0(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{R}$ muni de la topologie induite par la convergence uniforme. En effet, si B_ε est la boule de rayon ε, on a $\sup_{u \in S} |r_K(u) - r_{K'}(u)| \leq \varepsilon$ si et seulement si $K \subset K' \oplus B_\varepsilon$ et $K' \subset K \oplus B_\varepsilon$.
D'autre part les relations immédiates :

$$r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'} \;;\quad r_{\alpha K} = \alpha\, r_K \quad (\alpha \geq 0)\;;\; K \subset K' \Leftrightarrow r_K \leq r_{K'}$$

montrent que cette application est aussi un isomorphisme de $C_0(\mathcal{K})$ muni de l'addition de MINKOWSKI (pour laquelle il est un demi-groupe) des homothéties positives et de la relation d'ordre $\subset$ dans $\mathcal{R}$ muni de l'addition usuelle, de la multiplication par les constantes positives, et de la relation d'ordre $\leq$. Ainsi, $C_0(\mathcal{K})$ est identifiable à un cône convexe $\mathcal{R}$ fermé dans $\mathcal{C}(S)$ et admettant une base compacte.

Désignons alors par $\mathcal{M}(S)$, ou espace vectoriel de MINKOWSKI, le sous-vectoriel de $\mathcal{C}(S)$ engendré par $\mathcal{R}$, muni de la topologie induite par la convergence uniforme. $\mathcal{M}(S)$ est dense dans $\mathcal{C}(S)$, (mais ne coïncide pas avec $\mathcal{C}(S)$). Celà résulte du lemme suivant :

<u>Lemme 1-2</u> - Désignons par $\mathcal{C}_2(S)$ l'ensemble des fonctions deux fois continument différentiables sur la sphère unité S. Pour tout $f \in \mathcal{C}_2(S)$, on peut trouver une constante $C < \infty$ telle que $f + C \in \mathcal{R}$, et $\mathcal{C}_2(S)$ est contenu dans $\mathcal{M}(S)$.

Comme les constantes ≥ 0 sont dans $\mathcal{R}$, comme podaires des boules de centre O, il suffit de justifier le premier énoncé. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_2(S)$. $\nabla\varphi$ sa différentielle seconde continue sur S, et γ le tenseur métrique sur S. On sait que φ est dans $\mathcal{R}$ si et seulement si le tenseur $\gamma\varphi + \nabla\varphi$ est de type positif sur S. Pour $f \in \mathcal{C}_2(S)$, $\gamma f + \nabla f$ est continue sur l'espace compact S. On peut donc trouver $C < \infty$ telle que $\gamma(f+C) + \nabla f$ soit de type positif sur S, d'où le lemme.

Soit maintenant I une fonctionnelle définie sur $\mathcal{R}$ ou sur $C_o(\mathcal{K})$. On dira que I est croissante si $r \leq r'$ dans $\mathcal{R}$ entraîne $I(r) \leq I(r')$, et qu'elle est positivement linéaire si $I(r+r') = I(r) + I(r')$ et $I(\alpha\, r) = \alpha\, I(r)$, $r, r' \in \mathcal{R}$, $\alpha > 0$. Si I est croissante et positivement linéaire, on a $I(o) = 0$ et $I(r) \geq 0$ sur $\mathcal{R}$. Le lemme suivant nous sera utile dans la suite (paragraphe 3-3).

<u>Lemme 1-3</u> - (lemme de prolongement). Toute fonctionnelle I croissante et positivement linéaire sur $\mathcal{R}$ admet sur $\mathcal{C}(S)$ un et un seul prolongement linéaire et continu ; ou encore, il existe une et une seule mesure de Radon positive λ_I telle que l'on ait

$$I(r) = \int_S r(u)\ \lambda_I(du) \quad , \quad r \in \mathcal{R}$$

En effet, soit $f \in \mathcal{C}_2(S)$, et une constante $C \geq 0$ telle que $f + C \in \mathcal{R}$ (lemme 1-2). Comme I est linéaire, $I(f+C) - I(C)$ ne dépend pas du choix de cette constante C. On peut donc définir une fonctionnelle I_2 sur $\mathcal{C}_2(S)$ en posant $I_2(f) = I(f+C) - I(C)$, et I_2 coïncide avec I sur $\mathcal{R} \cap \mathcal{C}_2$. On voit sans peine que I_2 est additive, vérifie I $I_2(\alpha\, f) = \alpha\, I_2(f)$, $\alpha \geq 0$, et $I_2(-f) = -I_2(f)$, donc est linéaire sur $\mathcal{C}_2$. I_2 est croissante : si $f \leq f'$ dans $\mathcal{C}_2(S)$, soit $C < \infty$ telle que $f + C$ et $f' + C$ soient dans $\mathcal{R}$. On a alors $I_2(f+C) \leq I_2(f'+$

d'où $I_2(f) \le I_2(f')$. D'après une proposition de N. BOURBAKI, ([1], ch. III, § 1, Prop. 9, p. 56), I_2 se prolonge en une mesure positive λ_I sur S, d'ailleurs unique puisque $\mathcal{C}_2$ est dense dans $\mathcal{C}$, et la restriction à $\mathcal{R}$ de ce prolongement coïncide manifestement avec I.

2 - LA PROPRIETE SEMI-MARKOVIENNE

2-1 Définition.

Si C, K et K' sont trois compacts de $\mathbb{R}^n$, nous dirons que C sépare K et K' si pour tout $x \in K$ et tout $x' \in K'$ le segment $\{(1-\lambda)x + \lambda x' \ , \ 0 \le \lambda \le 1\}$ rencontre C. (En particulier, si K ou K' est vide, C sépare toujours K et K' ; si $C = \emptyset$, C ne sépare K et K' que si l'un de ces deux compacts est vide).

Dans ces conditions, nous dirons qu'un fermé aléatoire A est semi-markovien, si la fonctionnelle Q sur $\mathcal{K}$ qui lui est associée vérifie la relation

$$Q(K \cup K' \cup C)\ Q(C) = Q(K \cup C)\ Q(K' \cup C) \tag{2-1}$$

dès que le compact C sépare les compacts K et K' .

Examinons la signification de la relation (2-1). Pour $Q(C) = 0$, elle est toujours vérifiée. Si $Q(C) \neq 0$, elle signifie que les fermés aléatoires $A \cap K$ et $A \cap K'$ sont conditionnellement indépendants lorsque l'évènement $\{A \cap C = \emptyset\}$ est réalisé.

En effet, pour $Q(C) \neq 0$, la probabilité P' sur $\sigma(\mathcal{G})$ définie par $P'(V) = P(V \cap V^C)/Q(C)$ définit un fermé aléatoire A' presque sûrement disjoint de C, que l'on peut considérer comme représentant A conditionnellement si $A \cap C = \emptyset$. Soit Q' la fonctionnelle associée à A' définie par $Q'(K_1) = Q(K_1 \cup C)/Q(C)$, $K_1 \in \mathcal{K}$. La relation (2-1) s'écrit :

$$Q'(K \cup K') = Q'(K)\ Q'(K')$$

Comme $A' \cap K \cap K_1 = \emptyset$ équivaut à $A' \in V^{K \cap K_1}$, les fonctionnelles Q'_K et $Q'_{K'}$ attachées respectivement aux fermés aléatoires $A' \cap K$ et $A' \cap K'$ sont définies par :

$$Q'_K(K_1) = Q'(K \cap K_1) \quad ; \quad Q'_{K'}(K'_1) = Q'(K' \cap K'_1)$$

Or C, séparant K et K', sépare aussi $K \cap K_1$ et $K' \cap K'_1$, quels que soient les compacts K_1 et K'_1. La relation (2-1) leur est donc applicable, soit :

$$Q'[(K \cap K_1) \cup (K' \cap K'_1)] = Q'(K \cap K_1)\ Q'(K' \cap K'_1)$$

Au premier membre, figure la probabilité pour que A' soit disjoint de $K \cap K_1$ et de $K' \cap K'_1$, c'est-à-dire $P(A' \cap K \in V^{K_1}$ et $A' \cap K' \in V^{K'_1})$. Le second membre est le produit $Q'_K(K_1)\ Q'_{K'}(K'_1)$. D'après (1-1), cette relation signifie donc bien que $A' \cap K$ et $A' \cap K'$ sont indépendants.

<u>Dilaté d'un Fermé Semi-Markovien</u>. - Si A est un fermé aléatoire semi-markovien, le <u>dilaté</u> $A \oplus \check{K}_0$ de A par un <u>convexe</u> compact non vide $K_0 \in C(\mathcal{K}')$ est encore semi-markovien.

Pour le voir, on établit d'abord la propriété élémentaire suivante : Si C sépare K et K' et si K_o est convexe, $C \oplus K_o$ sépare $K \oplus K_o$ et $K' \oplus K_o$. On note ensuite la relation de distributivité :

$$(K \cup K' \cup C) \oplus K_o = K \oplus K_o \cup K' \oplus K_o \cup C \oplus K_o$$

et on applique la relation (1-3), d'où :

$$Q_{K_o}(K \cup K' \cup C)\, Q_{K_o}(C) = Q_{K_o}(K \cup C)\, Q_{K_o}(K' \cup C)$$

dès que C sépare K et K', et $A \oplus \check{K}_o$ est encore semi-markovien.

2-2 La fonctionnelle $\psi = - \log Q$.

Soit A un fermé aléatoire semi-markovien, et Q sa fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ vérifiant la relation (2-1). Posons $\psi(K) = - \log Q(K)$ pour $K \in \mathcal{K}$ ($\psi(K) = \infty$ si $Q(K) = 0$). La restriction de ψ au sous-espace $C(\mathcal{K})$ des compacts convexes est H-additive (c'est-à-dire additive au sens que HADWIGER, [2], donne à cet adjectif). Pour le voir, posons d'abord un lemme :

Lemme 2-1 - Soient K et K' deux compacts tels que $K \cup K'$ soit convexe. Alors $K \cap K'$ sépare K et K'.

En effet, soient $x \in K$ et $x' \in K'$. Posons $x(\alpha) = (1-\alpha)\, x + \alpha x'$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). On a $x(\alpha) \in K \cup K'$, puisque $K \cup K'$ est convexe. Désignons par α_o le Sup. des α tels que $x(\alpha) \in K$. On a $x(\alpha_o) \in K$, puisque K est compact. Si $\alpha_o = 1$, il en résulte $x' \in K$ et le lemme est établi. Si $\alpha_0 < 1$, on a $x(\alpha_0+\varepsilon) \in K \cup K'$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, donc $x(\alpha_0+\varepsilon) \in K'$, puis $x(\alpha_0) \in K'$, puisque K' est compact. Ainsi $x(\alpha_0) \in K \cap K'$, d'où le lemme.

Ainsi, la fonctionnelle Q du fermé aléatoire A semi-markovien vérifie la propriété suivante : <u>si K et K' sont deux compacts dont la réunion est convexe</u>, on a :

$$(2\text{-}2) \qquad Q(K \cup K')\, Q(K \cap K') = Q(K)\, Q(K')$$

Cette relation découle, en effet, du lemme ci-dessus et de (2-1). On note qu'il n'est pas nécessaire de supposer K et K' convexes. La fonctionnelle ψ, positive, croissante et s c s sur $\mathcal{K}$, vérifie donc dans les mêmes conditions la relation :

$$(2\text{-}2') \qquad \psi(K \cup K') + \psi(K \cap K') = \psi(K) + \psi(K')$$

Nous dirons que le fermé aléatoire A est <u>stationnaire</u> si sa probabilité P (ou, ce qui revient au même, sa fonctionnelle Q) est invariante par translation ; qu'il est <u>isotrope</u>, si Q est invariante pour les rotations de centre O. A est donc stationnaire et isotrope si et seulement si la fonctionnelle Q est invariante pour les déplacements dans $\mathbb{R}^n$. Si A est semi-markovien et stationnaire, Q ne s'annule sur $\mathcal{K}$ que si A est presque sûrement égal à $\mathbb{R}^n$ (on le vérifie immédiatement à partir de (2-2)) : si $Q(K_0) = 0$, il existe nécessairement $x_0 \in K_0$ tel que $x_0 \in A$ presque sûrement. Par translation, on a $P(x \in A) = 1$ pour tout x de $\mathbb{R}^n$, donc le fermé A contient presque sûrement toute partie dénombrable dense dans $\mathbb{R}^n$, et $A = \mathbb{R}^n$ presque sûrement). On obtient alors l'énoncé suivant :

Si A est un fermé aléatoire <u>semi-markovien</u>, <u>stationnaire</u> et <u>isotrope</u> non p.s. égal à $\mathbb{R}^n$, et si de plus sa fonctionnelle Q est <u>continue</u> sur l'espace $C(\mathcal{K}')$ des compacts convexes non vides, alors il existe n + 1 constantes $\beta_i \geq 0$, $i = 0, 1, \ldots n$ telles que l'on ait :

$$(2\text{-}3) \qquad \psi(K) = -\log Q(K) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, W_i(K) \qquad \big(K \in C(\mathcal{K}')\big) \quad .$$

les $W_i(K)$ désignant les <u>fonctionnelles de MINKOWSKI</u> (Quermassintegrale) de la géométrie intégrale.

En effet, comme A n'est pas égal à $\mathbb{R}^n$, Q ne s'annule pas sur $\mathcal{K}$, comme on vient de le voir, et ψ est donc continue sur $C(\mathcal{K}')$. Or ψ est invariante pour les déplacements, et vérifie la relation (2-2'). Il résulte alors de HADWIGER, [2] (théorème V, p. 222) que ψ est bien de la forme (2-3) sur $C(\mathcal{K}')$.

<u>2-3 Les Schémas Booléens à Grains Primaires Convexes.</u>

Pour construire un schéma booléen sur $\mathbb{R}^n$, nous procédons en deux étapes. Soit, tout d'abord, A' un fermé aléatoire presque sûrement compact (ou, si l'on préfère, un compact aléatoire), et Q' la fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ qui lui est associée. Il n'y a aucune difficulté à définir le translaté $A' \oplus \{\xi\}$ de A' dans la translation ξ et sa fonctionnelle $Q'_\xi(K) = Q'(K \oplus \{-\xi\})$. Soit, ensuite, un processus de Poisson ponctuel dans $\mathbb{R}^n$, et $\theta(dx)$ la mesure qui lui est associée. A chacun des points ξ_i de ce processus ponctuel, on associe un fermé aléatoire A'_i admettant la fonctionnelle Q'_{ξ_i} , et on suppose les A'_i mutuellement indépendants. On prend ensuite la réunion A des A'_i , et on dit que A se déduit de A' par passage en booléen selon le processus de Poisson de densité $\theta(dx)$. On vérifie sans peine que la fonctionnelle Q associée à A est définie par :

$$Q(K) = \exp \{- \int [1-Q'_\xi(K)]\ \theta(d\xi)\} \tag{2-4}$$

Mais $1 - Q'_\xi(K) = P'(-\xi \in A' \oplus \check{K})$, et, d'après (1-2), on trouve :

$$Q(K) = E[\theta(\check{A}' \oplus K)] \tag{2-4'}$$

Le cas le plus intéressant est celui où la mesure $\theta(dx) = \theta\ dx$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue. A est alors stationnaire.

Si le "grain primaire" A' est presque sûrement <u>convexe</u>, alors A est <u>semi-markovien</u>. En effet, si un compact C sépare deux compacts K et K', on a $V^c \cap V_K \cap V_{K'} = \emptyset$ p.s. pour A' et pour chacun des A'_i . On en déduit :

$$Q'(C) = Q'(C \cup K \cup K') + P'(V^c \cap V_K) + P'(V^c \cap V_{K'})$$

Mais on a aussi :

$$Q'(C) = Q'(K \cup C) + P'(V^c \cap V_K)$$

$$Q'(C) = Q'(K' \cup C) + P'(V^c \cap V_{K'})$$

Par différence, on en déduit :

$$Q'(C \cup K \cup K') + Q'(C) = Q'(K \cup C) + Q'(K' \cup C)$$

En portant ce résultat dans (2-4), on en déduit la relation

$$Q(C \cup K \cup K')\ Q(C) = Q(K \cup C)\ Q(K \cup C')$$

et A est semi-markovien.

Plaçons-nous dans le cas <u>stationnaire</u> $\theta(dx) = \theta\, dx$. On sait que la mesure de Lebesgue est continue sur $C(\mathcal{K}')$. Il résulte alors de (2-4') que la fonctionnelle Q est <u>continue</u> sur $C(\mathcal{K}')$. En effet, si K_n converge vers K dans $C(\mathcal{K}')$ et si $K' \in C(\mathcal{K}')$, $K' \oplus K_n$ converge vers $K' \oplus K$ dans $\mathcal{K}$ et $\theta(K' \oplus K_n)$ vers $\theta(K' \oplus K)$. De plus, les K_n étant contenus dans un compact K_o fixe, on a $K' \oplus K_n \subset K' \oplus K_o$ et $\theta(K' \oplus K_n) \leq \theta(K' \oplus K_o)$. Le théorème de convergence dominée montre alors que le compact aléatoire A' p.s. convexe vérifie :

$$E\, \theta(\check{A}' \oplus K_n) \to E\, \theta(\check{A}' \oplus K)$$

Donc, d'après (2-4'), Q est continue sur $C(\mathcal{K}')$ (il n'en résulte pas que Q soit continue sur $\mathcal{K}$ entier). Si A' est de plus <u>isotrope</u>, il en est de même de A, et la fonctionnelle Q vérifie une relation de la forme (2-3).

On peut, d'ailleurs, déduire directement ce résultat de la formule de STEINER et obtenir ainsi l'interprétation des coefficients β_i de la relation (2-3). En effet, si K est convexe et A' isotrope, le volume $V(\check{A}' \oplus K)$ est une variable aléatoire et vérifie :

$$E\, V(\check{A}' \oplus K) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{k=0}^{n} W_{n-k}(K)\; E\, W_k(A')$$

ω_n désignant le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, et les W_k les fonctionnelles de MINKOWSKI sur $C(\mathcal{K}')$. Pour $\theta(dx) = \theta\, dx$, on a donc la relation :

$$(2\text{-}5) \qquad Q(K) = \exp\left\{-\frac{\theta}{\omega_n}\sum_{k=0}^{n} W_{n-k}(K)\, E\, W_k(A')\right\} \qquad [K \in C(\mathcal{K}')]$$

Remarque - La donnée de Q sur l'espace $C(\mathcal{K})$ des compacts convexes ne suffit pas pour déterminer Q sur $\mathcal{K}$ tout entier. En effet, il est facile de former n variétés linéaires poissoniennes indépendantes les unes des autres dont la réunion A_1 admette une fonctionnelle Q_1 coïncidant sur $C(\mathcal{K}')$ avec la fonctionnelle Q du schéma booléen vérifiant (2-5).

3 - LES POLYEDRES POISSONIENS ET L'INVARIANCE CONDITIONNELLE

3-1 Définition des Polyèdres Poissoniens.

Désignons par S la sphère unité de l'espace $\mathbb{R}^n$, et par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs. A tout point (u,r) de l'espace produit $S \times \mathbb{R}_+$ associons l'hyperplan H(u,r) de $\mathbb{R}^n$, défini par l'équation $< u,x > = r$. L'application $H : S \times \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{F}$ ainsi définie est manifestement continue. Donnons-nous alors un processus de Poisson ponctuel dans $S \times \mathbb{R}_+$ dont la densité soit de la forme $\lambda(du)\, dx$, où λ est une mesure de Radon positive sur S et dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. L'image par H de ce processus constitue un réseau d'hyperplans aléatoires de $\mathbb{R}^n$, appelé réseau poissonien. Désignons par A la réunion des hyperplans de ce réseau. Alors A est un fermé aléatoire. En effet, on a $A \in V^K$, pour $K \in \mathcal{K}$, si et seulement si l'ensemble $H^{-1}(V_K)$ fermé, donc mesurable, dans $S \times \mathbb{R}_+$, ne contient aucun point du processus ponctuel. Cet évènement est donc mesurable, et sa probabilité $Q(K) = P(V^K)$ est donnée par :

$$(3\text{-}1) \qquad \begin{cases} Q(K) = e^{-\psi(K)} & (K \in \mathcal{K}) \\ \psi(K) = \displaystyle\int_{H^{-1}(V_K)} \lambda(du)\, dx & \end{cases}$$

Le même raisonnement montre d'ailleurs aussi que le nombre $N(K)$ des hyperplans du réseau qui rencontrent le compact K est une variable aléatoire obéissant à la loi de Poisson d'espérance $\psi(K)$.

Montrons que A est semi-markovien. Soient C, K et K' trois compacts. Si C sépare K et K', un hyperplan disjoint de C ne peut rencontrer à la fois K et K'. Autrement dit, on a :

$$H^{-1}(V_K) \cap H^{-1}(V_{K'}) \cap H^{-1}(V^c) = \emptyset$$

Les nombres N et N' des points du processus de $S \times \mathbb{R}^+$ tombant respectivement dans $H^{-1}(V_K)$ et $H^{-1}(V_{K'})$ sont donc indépendants conditionnellement si aucun point de Poisson n'est tombé dans $H^{-1}(V^c)$. Ainsi, les évènements $\{A \in V^K\}$ et $\{A \in V^{K'}\}$ sont conditionnellement indépendants si $\{A \in V^c\}$ est réalisé, ce qui constitue la définition même de la propriété semi-markovienne.

Le complémentaire A^c de A est p.s. constitué de polyèdres ouverts convexes disjoints, et on a aussi $P(0 \in A^c) = 1$. Parmi ces polyèdres, nous allons nous intéresser à celui qui contient le point 0, dont l'existence p.s. est ainsi établie. Nous le désignerons par Π_0, et nous dirons que Π_0 est un <u>polyèdre poissonien</u>. Π_0 est un ouvert aléatoire p.s. convexe et contenant p.s. le point 0. Si K est un compact, on a $K \subset \Pi_0$ si et seulement si l'enveloppe convexe C de $\{0\} \cup K$ est disjointe de A, c'est-à-dire si $A \in V^c$, et ceci a lieu avec la probabilité $Q(C)$. La probabilité de l'ouvert aléatoire Π_o est donc parfaitement définie par la donnée de la fonctionnelle $P(K \subset \Pi_o)$ sur l'ensemble $C_o(\mathcal{K})$ des compacts convexes contenant l'origine, fonctionnelle identique sur $C_o(\mathcal{K})$ à la fonctionnelle Q du réseau A lui-même.

Explicitons cette fonctionnelle. Soit $K \in C_o(\mathcal{K})$, et $r_K \in \mathcal{R}$ son image dans $\mathcal{C}(S)$ par l'application podaire (paragraphe 1-4). L'ensemble $H^{-1}(V_K)$ de $S \times \mathbb{R}_+$ est ici $\{(u,r) : r \leq r_K(u)\}$, et la formule (3-1) donne alors :

$$(3\text{-}2) \qquad \begin{cases} Q(K) = e^{-\psi(K)} \\ \psi(K) = \int_S \lambda(du)\ r_K(u) \end{cases} \qquad \left(K \in C_o(\mathcal{K})\right)$$

D'après ce qui précède, cette relation (3-2) prolongée sur $\mathcal{K}$ entier en posant :

$$(3\text{-}3) \qquad Q(K) = Q(C) \qquad (K \in \mathcal{K})$$

C désignant l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup K$ peut servir à <u>définir</u> la notion de polyèdre poissonien Π_o. En particulier, il y a autant de polyèdres poissoniens que de mesures de Radon λ positives sur la sphère unité. Lorsque la mesure λ sur S est <u>symétrique</u> par rapport à l'origine 0, le polyèdre Π_o correspondant peut être associé à un réseau A <u>stationnaire</u> d'hyperplans dans $\mathbb{R}^n$. Lorsque λ est proportionnelle à la mesure du sur S invariante par rotation, le polyèdre Π_o est dit <u>isotrope</u> (sa probabilité est alors invariante par rotation).

<u>3-2 L'Invariance Conditionnelle.</u>

On a vu au paragraphe 1-4 que l'application podaire est un homéomorphisme de $C_o(\mathcal{K})$ sur le cône $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(S)$. Comme λ est une mesure de Radon, il en résulte que ψ et Q sont <u>continues</u> sur $C_o(\mathcal{K})$, d'après (3-2), et aussi sur $\mathcal{K}$ tout entier, d'après (3-3). La relation $r_{K \oplus K'} = r_K + r_{K'}$ dans $C_o(\mathcal{K})$ donne ensuite $\psi(K \oplus K') = \psi(K) + \psi(K')$ et, compte tenu de la continuité, $\psi(\alpha K) = \alpha\, \psi(K)$, $\alpha \geq 0$, pour K et K' $\in C_o(\mathcal{K})$. Ces résultats subsistent lorsque K et K' sont des compacts quelconques contenant l'origine. Ainsi, en désignant par $\mathcal{K}_o$ l'ensemble des compacts <u>contenant l'origine O</u>, la fonctionnelle $Q_o(K) = P(K \subset \Pi_o)$ vérifie :

$$\begin{cases} Q_o(\alpha K) = \left(Q_o(K)\right)^\alpha & (\alpha \geq 0,\ K,\ K' \in \mathcal{K}_o) \\ Q_o(K \oplus K') = Q_o(K)\, Q_o(K') \end{cases}$$

La seconde de ces relations est la relation des <u>demi-groupes</u>. Elle exprime une propriété de type markovien que nous allons expliciter, et nous verrons au paragraphe suivant qu'elle suffit pour caractériser les polyèdres poissoniens. Pour dégager cette interprétation, notons d'abord que $K \subset \Pi_o$ équivaut à $0 \in \Pi_o \ominus \check{K}$. De même, $K \oplus K' \subset \Pi_o$ équivaut à $K' \subset \Pi_o \ominus \check{K}$. Ainsi, la relation des demi-groupes $Q(K \oplus K') = Q(K)\, Q(K')$ s'écrit :

$$P(K' \subset \Pi_o \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_o)\ P(K \subset \Pi_o)$$

Or, K et K' contenant l'origine, $K' \subset \Pi_o \ominus \check{K}$ implique $K \subset \Pi_o$, et $P(K \subset \Pi_o)$ n'est jamais nul. On peut donc écrire la relation des demi-groupes en termes de probabilités conditionnelles :

$$P(K' \subset \Pi_o \ominus \check{K} \mid 0 \in \Pi_o \ominus \check{K}) = P(K' \subset \Pi_o)$$

Ainsi, <u>conditionnellement dans l'hypothèse où 0 appartient à l'érodé $\Pi_0 \ominus \check{K}$, cet érodé $\Pi_0 \ominus \check{K}$ est un polyèdre poissonien admettant la même loi de probabilité que le polyèdre Π_0 initial</u>. Nous exprimerons cette propriété en disant que <u>les polyèdres poissoniens sont conditionnellement invariants pour les érosions</u> par des compacts contenant l'origine. On trouvera au paragraphe 3-4 une interprétation légèrement différente de cette invariance conditionnelle.

<u>3-3 Réciproque</u>.

Montrons maintenant que cette invariance conditionnelle est une propriété <u>caractéristique</u> des polyèdres poissoniens. Plus précisément, démontrons l'énoncé suivant, où l'on pose $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$:

<u>Pour qu'un ouvert aléatoire Π_0 contenant p.s. le point 0 vérifie la relation</u> $Q(K \oplus K') = Q(K)\,Q(K')$ <u>pour K, K' compacts contenant 0, il faut et il suffit que Π_0 soit un polyèdre poissonien</u>.

On vient de voir que cette condition est suffisante. Inversement, soit Π_0 un ouvert aléatoire vérifiant $P(0 \in \Pi_0) = 1$ et :

$$Q(K \oplus K') = Q(K)\,Q(K') \qquad (K, K' \in \mathcal{K}_0) \tag{3-4}$$

avec $Q(K) = P(K \subset \Pi_0)$. Dans tout ce qui suit, B_r désigne la boule de centre 0 et de rayon r. Procédons par étapes.

a/ On a $Q(B_\varepsilon) \uparrow 1$ pour $\varepsilon \downarrow 0$. En effet, la fonctionnelle Q est toujours s c i sur $\mathcal{K}$, et $B_\varepsilon \to \{0\}$ dans $\mathcal{K}$ si $\varepsilon \to 0$.

b/ Q est <u>continue</u> sur $\mathcal{K}$. Comme $Q(K) = Q(K \cup \{0\})$, et que la réunion est continue, il suffit de vérifier que Q est continu sur $\mathcal{K}_0$.

Soit donc K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}_o$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on a $K \subset K_n \oplus B_\varepsilon$ et $K_n \subset K \oplus B_\varepsilon$ dès que n est assez grand. La relation (3-4) donne alors

$$Q(K) \geq Q(B_\varepsilon)\ \overline{\lim}\ Q(K_n)\ ,\quad \underline{\lim}\ Q(K_n) \geq Q(K)\ Q(B_\varepsilon)$$

Compte tenu de a/, on en déduit $\lim Q(K_n) = Q(K)$, et Q est continue.

c/ Si $K \in \mathcal{K}$, et si C_o est l'enveloppe convexe de $\{0\} \cup K$, on a $Q(K) = Q(C_o)$.

Comme $0 \in \Pi_o$ p.s., il suffit de montrer $Q(K) = Q(C)$, C désignant l'enveloppe convexe de K. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme 1-1, on peut trouver $r > 0$ tel que $C \oplus B_r \subset K \oplus B_r \oplus B_\varepsilon$, d'où $Q(K)\ Q(B_\varepsilon) \leq Q(C)$ d'après la relation (3-4), puis $Q(K) \leq Q(C)$ d'après a/ . L'inégalité inverse étant évidente, on a bien $Q(K) = Q(C)$.

d/ De la relation (3-4) et de la continuité de Q résulte aussitôt :

$$Q(\alpha K) = [Q(K)]^\alpha \quad , \quad \alpha \geq 0 \quad , \quad K \in \mathcal{K}$$

Notons d'ailleurs que Q ne peut pas s'annuler sur $\mathcal{K}$. En effet, si $Q(K_o) = 0$ pour un compact K_o, prenons une boule $B_{\rho_o} \supset K_o$. On a $Q(B_{\rho_o}) = \left(Q(B_1)\right)^{\rho_o} = 0$. Par suite $Q(B_\rho) = 0$ pour tout $\rho > 0$, mais celà contredit a/ . Donc Q ne s'annule pas, et par suite $\psi = -\log Q$ est continue sur $\mathcal{K}$.

e/ La fonctionnelle ψ est donc continue, croissante et positivement linéaire sur $\mathcal{K}_o$, et a fortiori sur $C_o(\mathcal{K})$. D'après le lemme de prolongement 1-3, il existe donc une mesure de Radon λ positive sur la sphère unité telle que l'on ait :

$$\psi(K) = \int_S r_K(u)\ \lambda(du) \qquad K \in C_0(\mathcal{K})$$

Compte tenu de c/ , et de la définition (3-2) - 3-3) des polyèdres poissoniens, Π_0 est donc le polyèdre poissonien associé à la mesure λ.

3-4 Point de Vue de la Loi en Nombre.

Soit maintenant λ une mesure positive symétrique sur S, et A le réseau stationnaire d'hyperplans poissoniens de $\mathbb{R}^n$ associé au processus de Poisson de densité $\lambda(du)\ dx$ dans $S \times \mathbb{R}_+$. Le complémentaire A^c de A est réunion de polyèdres ouverts convexes disjoints Π_i dont l'un, soit Π_0, contient l'origine O. Dans un langage intuitif, on peut envisager la "population" constituée par les polyèdres Π_i considérés comme des individus, en attribuant à chacun d'eux le même poids, et définir ainsi la loi en nombre du polyèdre Poissonien Π (on trouvera dans les travaux de MILES, [6], [7] une justification rigoureuse de ce point de vue). On peut, au contraire, attribuer à chacun des Π_i un poids proportionnel à son volume $V(\Pi_i)$ dans $\mathbb{R}^n$ et considérer la loi en volume de ce même polyèdre Poissonien. Le polyèdre Poissonien Π_0 tel que nous l'avons défini au paragraphe 3-1 doit correspondre au point de vue de la loi en volume, car (dans un langage intuitif), l'origine O a plus de chances de tomber dans un grand polyèdre que dans un petit. De fait, MILES [7], s'appuyant sur un théorème ergodique, a établi le résultat suivant : soient X une caractéristique d'un polyèdre Π, V son volume, $F_0(dX, dV)$ la loi de (X,V) pour le polyèdre poissonien Π_0 du paragraphe 3-1, $F(dX, dV)$ la loi de (X,V) pour le polyèdre poissonien considéré du point de vue de la loi en nombre, E_o et E enfin, les espérances attachées à ces lois. On a alors :

$$F_o(dX, dV) = \frac{V}{E(V)} \; F(dX, dV)$$

Soit alors K un compact contenant l'origine. Le même théorème ergodique montre que la probabilité $Q(K) = P(0 \in \Pi_o \ominus \check{K})$ pour que le polyèdre Π_o contienne K (point de vue de la loi en volume) est identique à la probabilité pour que l'érodé $\Pi \ominus \check{K}$ d'un polyèdre Π (point de vue de la loi en nombre) ne soit pas vide. $P(\Pi \ominus \check{K} \neq \emptyset)$ est évidemment invariante pour toutes les translations,(tandis que l'invariance de $Q(K)$ est limitée aux translatés de K contenant l'origine). La propriété d'invariance conditionnelle de Π_o vis-à-vis des érosions s'étend alors aux polyèdres considérés en nombre :

Si Π désigne un polyèdre poissonien du point de vue de la loi en nombre, et K un compact non vide, conditionnellement dans l'hypothèse où l'érodé $\Pi \ominus \check{K}$ n'est pas vide, cet érodé est équivalent à Π en probabilité (c'ést-à-dire admet la même loi que Π).

Nous allons consacrer le reste de cette étude à quelques applications de la propriété d'invariance conditionnelle caractéristique des polyèdres poissoniens.

4 - APPLICATIONS

4-1 Relation entre la Loi du Volume V et l'Espérance conditionnelle de la Surface S.

Soit Π le polyèdre poissonien de $\mathbb{R}^n$ (point de vue de la loi en nombre) associé à une mesure symétrique et positive λ donnée sur la sphère unité. Nous supposerons essentiellement que Π est p.s. compact, donc que le support de λ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ n'est pas contenu dans un sous-vectoriel strict de $\mathbb{R}^n$. Selon les notations de HADWIGER [2], nous désignerons par W_k $(k = 0,1,\dots n)$ les fonctionnelles de MINKOWSKI (Quermassintegrale) définies sur l'espace $C(\mathcal{K}')$ des convexes compacts non vides. Comme ces fonctionnelles sont continues sur $C(\mathcal{K}')$ et que Π appartient p.s. à $C(\mathcal{K}')$, les $W_k(\Pi)$ sont des variables aléatoires et admettent des espérances finies. Nous nous intéresserons surtout aux deux fonctionnelles W_0 et W_1, donc au volume $V = W_0(\Pi)$ et à la surface $S = n\, W_1(\Pi)$ du polyèdre poissonien.

Désignons par B_r la boule de rayon r et de centre O, et par $V(r) = V(\Pi \ominus B_r)$ la variable aléatoire égale au volume de l'érodé de Π par B_r. Les évènements $\{V(r) = 0\}$ et $\{\Pi \ominus B_r = \emptyset\}$ sont p.s. identiques et admettent la probabilité :

$$Q(B_r) = e^{-ar} \qquad \left(a = \psi(B_1) = \int \lambda(du)\right)$$

Si f est une fonction mesurable sur R_+ nulle en $x = 0$, il résulte alors de la propriété d'invariance conditionnelle que l'on a :

$$E[f(V(r))] = e^{-ar}\, E(f(V))$$

Avec $f(x) = e^{-\mu x} - 1$, on voit que les transformées de Laplace $\Phi(\mu)$ et $\Phi_r(\mu)$ de V et V(r) vérifient la relation :

$$\Phi_r(\mu) = 1 - e^{-ar} + e^{-ar}\, \Phi(\mu)$$

Or V(r) est p.s. dérivable à droite, et cette dérivée V'(r) vérifie p.s. $V'(o) = - S$ puisque Π est p.s. convexe. La relation précédente entraîne donc :

$$(4\text{-}1) \qquad E(S\, e^{-\mu V}) = a\, \frac{1 - \Phi(\mu)}{\mu}$$

Désignons alors par $h(V) = E(S|V)$ l'espérance conditionnelle de S relativement à V, et par F(dV) la loi du volume. Dans la relation (4-1), figure à gauche la transformée de la mesure h(V) F(dV), à droite celle de la fonction $a[1 - F(V)]$. Par suite, la loi du volume admet une densité f(V) qui vérifie la relation :

$$f(V)\, h(V) = a\left(1 - F(V)\right)$$

On en tire aussitôt l'expression de la loi du volume V en fonction de l'espérance conditionnelle h(V) de la surface.

$$(4\text{-}2) \qquad 1 - F(V) = \exp\left\{- a \int_0^V \frac{dv}{h(v)}\right\} \qquad \left(h(V) = E(S|V)\right)$$

Ainsi, $a/h(V) = a/E(S|V)$ est la "densité de mort" associée à la loi du volume, autrement dit $a\, dx/h(x)$ est la probabilité conditionnelle d'avoir $V \in (x, x+dx)$ lorsque $V \geq x$.

On note que cette relation (4-2) est valable pour tous les polyèdres poissoniens stationnaires (mesure symétrique λ quelconque sur la sphère unité).

4-2 Granulométries des Polyèdres Poissoniens selon les Boules.

Rappelons d'abord la définition des granulométries d'un ensemble

<u>aléatoire</u>. Les applications $(F,K) \to F_K = (F \ominus \check{K}) \oplus K$ et $(F,K) \to (F \oplus K) \ominus \check{K}$ de $\mathcal{F} \times \mathcal{K}'$ dans $\mathcal{F}$ sont semi-continues supérieurement et mesurables. Si A est un fermé aléatoire et K un compact non vide, A^K et A_K sont donc des fermés aléatoires. Pour K compact et <u>convexe</u>, et α, $\alpha' \geq 0$, $\alpha \leq \alpha'$ entraîne

$$A_{\alpha' K} \subset A_{\alpha K} \subset A \subset A^{\alpha K} \subset A^{\alpha' K}$$

et les familles $A^{\alpha K}$ et $A_{\alpha K}$ sont continues à droite et à gauche respectivement ($\alpha \downarrow \alpha_0$ et $\alpha \uparrow \alpha'_0$ dans $\mathbb{R}_+$ entraînent respectivement la convergence de $A^{\alpha K}$ vers $A^{\alpha_0 K}$ et de $A_{\alpha' K}$ vers $A_{\alpha'_0 K}$ dans $\mathcal{F}$). Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut alors définir les variables aléatoires $\Lambda(x)$ et $\Lambda(x')$ en posant :

$$\Lambda(x) = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in R_+} \left\{\alpha : x \notin A^{\alpha K}\right\}, \quad \Lambda'(x) = \operatorname*{Sup}_{\alpha \in R_+} \left\{\alpha : x \in A_{\alpha K}\right\}$$

et $\Lambda(x)$ ou $\Lambda'(x) = 0$ lorsque les ensembles correspondants sont vides (soit $\Lambda(x) = 0$ pour $x \in A^{\alpha K}$ et $\Lambda'(x) = 0$ pour $x \in A_{\alpha K}$). D'après les propriétés de semi-continuité rappelées ci-dessus, on a $\Lambda'(x) \geq \alpha$ si et seulement si $x \in A_{\alpha K}$, et $\Lambda(x) \leq \alpha$ si et seulement si $x \in A^{\alpha K}$. Les fonctions non décroissantes $P(\Lambda'(x) < \alpha) = P(x \notin A_{\alpha K})$ et $P(\Lambda(x) \leq \alpha) : P(x \in A^{\alpha K})$, continues en α respectivement à droite et à gauche, servent à définir les granulométries au point x du fermé aléatoire A et de son complémentaire A^c. Plus précisément, lorsque $P(\Lambda(x) \neq 0 = P(x \in A^c)$ n'est pas nul, on définit <u>la granulométrie de A^c en x selon les homothétiques de K par la formule</u> :

$$G_K(\alpha) = \frac{P(\Lambda(x) \leq \alpha)}{P(\Lambda(x) \neq 0)} = P(x \in A^{\alpha K} \mid x \in A)$$

$G_K(\alpha)$ représente donc la probabilité de $x \in A^{\alpha K}$ conditionnellement, si x $\in A^c$. On a une définition analogue pour la granulométrie de A. Lorsque A est stationnaire, cette granulométrie ne dépend pas du point x. (G. MATHERON, [4] et [5]).

Soit alors A un réseau d'hyperplans poissoniens stationnaires dans R^n, et $\lambda(du)$ la mesure symétrique sur la sphère unité qui fixe la loi de A. Nous allons établir l'expression de la granulométrie $G_B(\alpha)$ de A^c selon les homothétiques de la <u>boule</u> B de rayon unité dans R^n. Il s'agit donc ici de la granulométrie du polyèdre poissonien Π_0 considéré selon le point de vue de la loi en <u>volume</u> (qui a seul, ici, une signification expérimentale possible). Nous devons calculer l'expression :

$$1 - G_K(\alpha) = P(0 \in (\Pi_0 \ominus \alpha B) \oplus \alpha B)$$

D'après le théorème ergodique de R.E. MILES, cette probabilité se déduit de la loi en <u>nombre</u> des polyèdres Π selon la formule

$$1 - G_K(\alpha) = \frac{E\big(V(\Pi_{\alpha\beta})\big)}{E\big(V(\Pi)\big)}$$

Mais, d'après l'invariance conditionnelle, l'érodé $\Pi \ominus \alpha B$ a même loi conditionnelle que Π lui-même s'il n'est pas vide, ce qui a lieu avec la probabilité $Q(B) = \exp\{\alpha\, \psi(B)\}$, $\psi(B) = \int \lambda(du)$. On en déduit aussitôt :

$$1 - G_K(\alpha) = \frac{E\big(V(\Pi \oplus \alpha\beta)\big)}{E\big(V(\Pi)\big)}\; e^{-\alpha\psi(B)}$$

Mais, d'après la formule de STEINER, on a aussi :

$$V(\Pi \oplus \alpha B) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, W_k(\Pi) \, \alpha^k$$

les variables aléatoires $W_k(\Pi)$ désignant les valeurs pour Π des fonctionnelles de MINKOWSKI . D'où l'expression cherchée de la granulométrie :

$$(4\text{-}3) \qquad 1 - G_K(\alpha) = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, E(W_k) \, \alpha^k \, e^{-\alpha\psi(B)}}{E(W_o)} .$$

Cette loi est toujours une <u>exponentielle polynome</u> de degré n égal au nombre des dimensions de l'espace. Pour $n = 1$, on trouve en particulier pour les traversées linéaires une <u>loi gamma</u> de densité $a^2 \, \alpha \, e^{-a\alpha}$. Il s'agit de la loi où "chacune" des traversées est comptée pour un poids proportionel à sa longueur. La loi en nombre correspondante est évidemment la loi exponentielle de densité $a \, e^{-ax}$ $\left(a = \psi(B)\right)$.

<u>Exemple</u> - Considérons le cas des polyèdres poissoniens <u>isotropes</u>, c'est-à-dire le cas où la mesure λ sur la sphère unité est invariante pour les rotations. Nous désignerons, suivant l'usage, par :

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, et nous achèverons de déterminer la mesure λ (unique à un facteur constant près) en nous donnant le paramètre $\lambda_n > 0$ défini par :

$$(4\text{-}4) \qquad \lambda_n = \frac{1}{n \, \omega_n} \int \lambda(du)$$

($n \, \omega_n$ est la surface de la sphère unité).

Pour $K \in C_o(\mathcal{K})$, on a alors :

$$\int \lambda(du)\; r_K(u) = \lambda_n\; N(K) = n\; \lambda_n\; W_{n-1}(K)$$

$N(K) = n\; W_{n-1}(K)$ est la fonctionnelle bien connue en géométrie intégrale sous le nom de <u>norme</u> (pour $n = 2$, N est le périmètre ; pour $n = 3$, N généralise l'intégrale de la courbure moyenne). Ainsi la fonctionnelle Q du polyèdre poissonien Π_o contenant O (loi en volume) est définie par :

$$Q(K) = e^{-\lambda_n\; N(K)} \qquad \left(K \in C_o(\mathcal{K})\right) \tag{4-5}$$

Ce réseau isotrope d'hyperplans poissoniens de $\mathbb{R}^n$ induit évidemment sur chaque variété linéaire à k dimensions $(0 < k < n)$ un réseau isotrope d'hyperplans poissoniens de $\mathbb{R}^k$. Soit λ_k le paramètre (4-4) caractérisant ce schéma induit. De (4-5) et des formules de la géométrie intégrale exprimant la norme dans $\mathbb{R}^n$ d'un convexe compact de $\mathbb{R}^k$, on déduit aisément les formules de transformations :

$$\lambda_k\; \omega_{k-1} = \lambda_n\; \omega_{n-1}$$

Dans ce qui suit, il sera souvent commode de désigner par $\lambda = \lambda_2$ le paramètre du schéma induit dans $\mathbb{R}^2$. La loi précédente s'écrit alors :

$$\lambda_k = \frac{2\lambda}{\omega_{k-1}} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

Avec cette notation $\lambda = \lambda_2$, des raisonnements simples de géométrie intégrale conduisent - compte tenu du théorème ergodique habituel - à l'expression suivante pour les espérances des $W_k(\Pi)$ du polyèdre Π (en nombre) de l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$(4\text{-}6) \qquad E(W_k) = \frac{\omega_k}{\omega_{n-k}} \; \lambda^{k-n}$$

En reportant ce résultat dans (4-3), on spécifie ainsi complètement la granulométrie de Π_o selon les boules des espaces à 1,2,...n dimensions. En particulier, les granulométries selon les disques (boules de $\mathbb{R}^2$) et les boules de $\mathbb{R}^3$ sont, respectivement (avec $\lambda = \lambda_2 = \frac{\pi}{2}\lambda_3$)

$$1 - G_2(r) = (1 + 2\lambda\pi r + \pi^2\lambda^2 r^2)\, e^{-2\lambda\pi r}$$

$$1 - G_3(r) = (1 + 8\lambda r + \frac{2}{3}\pi^2\lambda^2 r^2 + \frac{16}{9}\pi^2\lambda^3 r^3)\, e^{-8\lambda r}$$

4-3 Les premiers moments du Volume V et du contour apparent V'.

Considérons à nouveau le réseau isotrope A d'hyperplans poissonniens de $\mathbb{R}^n$ défini par le paramètre $\lambda = \lambda_2$ du réseau induit dans $\mathbb{R}^2$, et soient x et x+h deux points de $\mathbb{R}^n$. D'après (4-5), la probabilité d'avoir x et x+h dans Π_o (point de vue de la loi en volume) est $e^{-2\lambda\mathcal{L}}$ où $2\mathcal{L} = |x| + |x+h| + h$ est le périmètre du triangle défini par les trois points 0, x et x+h, soit

$$(4\text{-}7) \qquad Q(x, x+h) = e^{-\lambda|x| - \lambda|x+h| - \lambda|h|}$$

Mais, si l'on désigne par k(x) l'indicatrice (aléatoire) de Π_9, on a aussi

$$Q(x, x+h) = E(k(x)\, k(x+h))$$

Désignons par g(h) l'intégrale dans $\mathbb{R}^n$ de cette expression :

$$g(h) = \int_{\mathbb{R}^n} Q(x,x+h)\, dx$$

g(h) est l'espérance (pour la loi en volume) du volume de l'intersection de Π_o et de son translaté par h. Or cette intégrale représente, au facteur $e^{-\lambda|h|}$ près, le produit de convolution de la fonction $e^{-\lambda|x|}$ par elle-même. En utilisant la transformation de Fourier, on obtient l'expression suivante, où figure la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice $1 + \frac{n}{2}$, et où on a écrit r au lieu de $|h|$.

$$(4\text{-}8) \qquad g(r) = \frac{1}{\lambda^n} \frac{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}-1}}{n!} \left(\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)^2 e^{-\lambda r} \quad (\lambda r)^{1+\frac{n}{2}} K_{1+\frac{n}{2}}(\lambda r)$$

Pour r = 0, on obtient l'espérance (en volume) de $V(\Pi_o)$. En intégrant en h (dans $\mathbb{R}^n$), on obtient de même l'espérance du carré de ce volume. L'intégrale de g(h) dans $\mathbb{R}^n$ est d'ailleurs égale à la valeur en 0 du produit de convolution $e^{-\lambda|x|} * e^{-\lambda|x|} * e^{-\lambda|x|}$, et se calcule à l'aide d'une transformation de Fourier. On trouve ainsi :

$$(4\text{-}9) \quad \begin{cases} E_o(V) = 2^{-n}\, \omega_n\, n!\, \lambda^{-n} \\ E_o(V^2) = 2^{2n}\, \pi^{n-\frac{3}{2}} \dfrac{\Gamma(n+\frac{3}{2}) \left(\Gamma(\frac{n+1}{2})\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}(n+1)\right)} \lambda^{-2n} \end{cases}$$

L'indice o dans E_o rappelle qu'il s'agit d'espérances relatives à la loi <u>en volume</u> . D'après le théorème ergodique, ces espérances E_o se déduisent des espérances E relatives à la loi <u>en nombre</u> selon la règle

$$E_o(V^k) = E(V^{k+1})/E(V)$$

On a déjà calculé $E(V) = E(W_o) = 1/\omega_n \lambda^n$. Les formules (4-9) donnent donc les <u>trois premiers moments</u> de la loi (en nombre) du volume V. On trouve ainsi dans $\mathbb{R}^2$:

$$E(V) = \frac{1}{\pi \lambda^2} \quad , \quad E(V^2) = \frac{1}{2 \lambda^4} \quad , \quad E(V^3) = \frac{4}{7} \frac{\pi}{\lambda^6}$$

et dans $\mathbb{R}^3$ (avec $\lambda = \lambda_2 = \frac{\pi}{2} \lambda_3$)

$$E(V) = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\lambda^3} \quad , \quad E(V^2) = \frac{3}{4} \frac{1}{\lambda^6} \quad , \quad E(V^3) = \frac{21}{8} \frac{\pi}{\lambda^9}$$

Désignons maintenant par $V'(\Pi) = V'$ le volume (à n-1 dimension) du <u>contour apparent</u> du polyèdre Π, c'est-à-dire de la projection de Π sur un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Le point de vue est ici, obligatoirement, celui de la <u>loi en nombre</u>. Nous allons calculer les <u>deux premiers moments</u> de la loi (en nombre) de V', en nous appuyant sur l'invariance conditionnelle de Π.

Du point de vue de la loi en nombre, le g(r) calculé en (4-8) représente la quantité :

$$g(r) = E(V\ V(r))/E(V)$$

où $V(r) = V(\Pi \cap \Pi_r)$ représente le volume de l'intersection du polyèdre Π par son translaté Π_r dans une translation de module r et de direction u_o. Soit ρ un réel ≥ 0, et $\Pi_{r+\rho}$ le translaté de Π dans la translation de module $r + \rho$ et de <u>même direction</u> u_o. L'invariance conditionnelle de Π pour les érosions montre que l'on a ici :

$$(4\text{-}10) \qquad E\big(V(r)\ V(r+\rho)\big) = e^{-2\lambda r}\ E\big(V\ V(\rho)\big) = e^{-2\lambda r}\ E(V)\ g(r)$$

Comme Π est p.s. ouvert et convexe, $V(r)$ est dérivable à droite, et la valeur en $r = 0$ de cette dérivée $V'(r)$ est $V'(o) = - V'$, V' désignant le n-1 - volume du contour apparent dans la direction u_o.
Dérivons (4-10) une fois en r et une fois en ρ avant de faire $\rho = 0$.
Il vient :

$$(4\text{-}11) \qquad E(V'^2) + E\big(V\ V''(o)\big) = - 2\ \lambda\ E\big(V\ V'(o)\big)$$

Or de l'expression (4-8) de g(r), on déduit (pour $n > 1$) :

$$E\big(V\ V(r)\big) = E(V^2)\ [1 - \lambda\ r + \frac{n-1}{2n}\ \lambda^2\ r^2 - \ldots]$$

On a déjà calculé $E(V^2) = n!/2^n\ \lambda^{2n}$. On déduit ainsi de cette relation :

$$E\big(V\ V'(o)\big) = - \lambda\ E(V^2) = - n!/2^n\ \lambda^{2n-1}$$

$$E\big(V\ V''(o)\big) = \frac{n-1}{n}\ \lambda^2\ E(V^2) = \frac{(n-1)(n-1)!}{2^n}\ \frac{1}{\lambda^{2n-2}}$$

puis, en portant ces résultats dans (4-11)

$$E(V'^2) = \frac{n+1}{n}\ \lambda^2\ E(V^2) = \frac{(n+1)(n-1)!}{2^n}\ \frac{1}{\lambda^{2n-2}}$$

Le calcul de $E(V')$ s'effectue de même à partir de $E\big(V(r)\big) = e^{-2\lambda r}E(V)$, et donne

$$E(V') = 2\ \lambda\ E(V) = \frac{2}{\omega_n}\ \frac{1}{\lambda^{n-1}}$$

Tels sont les <u>deux premiers moments</u> (<u>en nombre</u>) <u>de la loi du contour apparent</u>. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on trouve explicitement :

$$E(V') = \frac{2}{\lambda\,\pi} \quad , \quad E(V'^2) = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\lambda^2} \quad , \quad E(V\,V') = \frac{1}{2\,\lambda^3}$$

et dans R^3 :

$$E(V') = \frac{3}{2\,\pi}\,\frac{1}{\lambda^2} \quad , \quad E(V'^2) = \frac{1}{\lambda^4} \quad , \quad E(V\,V') = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\lambda^5}$$

4-4 Cas des Polygones Poissoniens Isotropes.

Dans le cas du plan $\mathbb{R}^2$, il est d'ailleurs possible de calculer explicitement la loi du diamètre apparent du polygone poissonien (en nombre), loi d'ailleurs identique à celle des traversées linéaires des contours apparents (projection dans $\mathbb{R}^2$) des polyèdres de $\mathbb{R}^3$ pris en nombre. Cette loi admet une densité liée à la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'indice 1, dont l'expression est :

$$f(x) = \frac{4\,\lambda}{\pi}\,(2\,\lambda\,x)\,K_{-1}\,(2\,\lambda\,x) \qquad (x \geq 0)$$

et dont le moment d'ordre n est :

$$m_n = \frac{\Gamma(n+2)}{\sqrt{\pi}}\;\frac{\Gamma(\frac{1+n}{2})}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}\;\frac{1}{(2\lambda)^n}$$

Désignons, maintenant, par S le périmètre du polygone poissonien, et par N le nombre de ses côtés, et cherchons quelques informations sur les lois de ces deux variables.

En premier lieu, puisque le polygone est isotrope, la géométrie intégrale donne :

$$E(S) = \pi\, E(V') \quad , \quad E(VS) = \pi\, E(V\, V')$$

Des valeurs calculées plus haut, on déduit donc les espérances $E(S)$ et $E_o(S)$ du périmètre S prises, respectivement, selon la loi en nombre et la loi en volume :

$$(4\text{-}12) \qquad E(S) = \frac{2}{\lambda} \quad , \quad E_o(S) = \frac{\pi^2}{2}\,\frac{1}{\lambda}$$

Désignons par P_n la probabilité d'avoir $N = n$ pour la loi en <u>volume</u>. P_n ne dépend pas du paramètre λ. Or, on peut considérer le réseau d'hyperplans poissoniens de paramètre $(\lambda + \mu)$ comme la réunion de deux réseaux indépendants de paramètres λ et μ. La probabilité pour que le polyèdre du réseau $(\lambda + \mu)$ contenant l'origine O ait n côtés appartenant tous au réseau λ est alors $P_n(\lambda/\lambda+\mu)^n$. On peut aussi évaluer différemment cette probabilité, en écrivant d'abord que le polyèdre du réseau λ contenant O possède n côtés (probabilité P_n) , puis que ce polyèdre est disjoint du second réseau (probabilité $E(e^{-\mu S}|n)$, S désignant le périmètre de ce polyèdre). On en déduit :

$$E_o(e^{-\mu S}|N) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^N$$

La loi conditionnelle en N du périmètre S est donc <u>une loi gamma à N degrés de liberté</u>. On retrouve ici dans un cas simple une propriété générale établie par MILES. Si X est une caractéristique sans dimension du polyèdre Π (par exemple, $X = S^2/V$), c'est-à-dire une caractéristique dont la loi ne dépend pas de λ, le même raisonnement que ci-dessus donne

$$E_o(e^{-\mu S}|N,X) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^N$$

Par conséquent, à N fixé, le périmètre est conditionnellement indépendant de toutes les caractéristiques sans dimension. On en déduit facilement la loi en nombre du périmètre conditionnelle en N :

$$E(e^{-\mu S}|N) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{N-2}$$

C'est une loi gamma à N-2 degrés de liberté. On tire ensuite de ces résultats les valeurs $E_o(S|N) = N/\lambda$ et $E(S|N) = (N-2)/\lambda$, puis, en comparant avec (4-12), on obtient :

$$E(N) = 4 \quad , \quad E_o(N) = \frac{\pi^2}{2}$$

Or, il existe une relation simple entre $E_o(N)$ et $E(N^2)$. Plaçons-nous, en effet, conditionnellement dans l'hypothèse où O est un sommet du réseau, et soit N_1, N_2, N_3, N_4 les nombres des sommets des quatre polygones contenant O. Ces variables vérifient $E(N_i) = E(N^2)/E(N)$, comme on peut le voir en utilisant le théorème ergodique de MILES. D'autre part, abstraction faite des deux droites poissoniennes passant par O, le polyèdre contenant O possède $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - 12$ côtés, et ne diffère pas du polyèdre poissonien Π_o (point de vue de la loi en volume). On en déduit $4\, E(N^2)/E(N) = E_o(N) + 12$, d'où $E(N^2) = E_o(N) + 12$.

Nous avons ainsi obtenu les deux premiers moments (pour la loi en nombre) du nombre N des côtés du polygone poissonien isotrope, soit une espérance égale à 4 et une variance égale à $\frac{\pi^2}{2} - 4$:

$$E(N) = 4 \quad , \quad D^2(N) = \frac{\pi^2}{2} - 4$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, N. - (1965) Eléments de Mathématiques, fascicule XIII, Intégration - Hermann, Paris.

[2] HADWIGER, H. - (1957) Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie - Springer, Berlin.

[3] KENDALL, M.G., et MORAN, P.A. - (1963) Geometrical Probability. Hafner, New York.

[4] MATHERON, G. - (1967) Eléments pour une théorie des milieux Poreux - Masson, Paris.

[5] MATHERON, G. - (1969) Théorie des Ensembles Aléatoires - Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fascicule 4, Fontainebleau.

[6] MILES, R.E. - (1969) Poisson flats in euclidean space - Advances in Applied Probability, 1, 211-237.

[7] MILES, R.E. - (1970) A synopsis of Poisson flats in euclidean spaces - Izv. Akad. Nauk armianskoi SSR, 3, 263-285.

[8] NEVEU, J. - (1964) Bases mathématiques du calcul des probabilités - Masson, Paris.

[9] SERRA, J. - (1967) But et Réalisation de l'analyseur de textures - Revue de l'Industrie Minérale, 49, p. 9-33.

[10] SERRA, J. - (1969) Introduction à la Morphologie Mathématique - Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fascicule 3, Fontainebleau