

Fontainebleau

N-285

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 122

COMPLEMENTS SUR LES F.A.I.G.

-----

G. MATHERON

Mai 1972

Fontainebleau CG

N-285

**Compléments sur les F.A.I.G**

---

*(Note Géostatistique N° 122)*

**G. MATHERON**

**Mai 1972**

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 122

COMPLEMENTS SUR LES F.A.I.G.

=====

1 - RAPPELS.

Je me propose dans ce qui suit de simplifier quelque peu la démonstration de la note 117 concernant l'existence des covariances généralisées. Soit donc  $Z : \Lambda_k \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  une F.A.I.- $k$  continue. Du fait que les représentations  $Y(x)$  de  $Z$  vérifient des majorations du type  $\|Y(x)\| \leq a + b|x|^{k+1}$ , l'intégrale stochastique  $\int \mu(dx) Y(x)$  existe pour toute mesure  $\mu$  telle que  $\int |\mu|(dx) |x|^{k+1} < \infty$ , et ne dépend pas du choix de la représentation  $Y(x)$  si de plus  $\mu$  appartient à l'espace  $M_k$  des mesures vérifiant les conditions d'universalité d'ordre  $k$ . En posant  $Z(\mu) = \int \mu(dx) Y(x)$  pour  $\mu \in M_k$ ,  $\int |\mu| |x|^{k+1} < \infty$ , on prolonge donc  $Z$  sur un sous-espace  $M'_k$  de  $M_k$ .

Désignons d'autre part par  $H$  l'espace de Hilbert engendré par les  $Z(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Lambda_k$ , et par  $U_h$  le groupe continu d'opérateurs unitaires prolongeant sur  $H$  les translations  $Z(\lambda) \rightarrow Z(\tau_h \lambda)$ . Soit  $X \in H$ ,  $\chi$  la mesure spectrale de  $X$ ,  $H(X)$  le sous-espace fermé de  $H$  engendré par les  $U_h X$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ , et  $\zeta_X : L^2(\mathbb{R}^n, \chi) \rightarrow H(X)$  l'isomorphisme canonique tel que  $\zeta_X(e^{-2i\pi(h \cdot)}) = U_h X$ . A toute fonction  $\varphi$  mesurable et bornée sur  $\mathbb{R}^n$  est associé l'opérateur linéaire continu  $E(\varphi)$  défini par

$$E(\varphi) X = \zeta_X(\varphi)$$

vérifiant les règles de calcul  $E(\varphi) E(\varphi') = E(\varphi'') E(\varphi) = E(\varphi \varphi')$ .

Pour  $\varphi = 1_{\{0\}}$ ,  $E(\varphi)$  est le projecteur  $E_0$  de l'espace des invariants de  $H$ . Dans ce qui suit, nous supposons  $Z$  sans dérive, donc  $E_0 = 0$ , ou encore  $1_{\{0\}} = 0$   $\chi$ - presque partout pour la mesure spectrale  $\chi$  de chaque  $X \in H$ .

On a vu dans la note 117 qu'il existe dans  $H$  une suite  $X_n$  telle que l'on ait  $X_n(\mu) = \int \mu(dx) U_x X_n \rightarrow Z(\mu)$  fortement pour toute mesure  $\mu \in M'_k$ . Pour toute fonction  $\varphi$  mesurable et bornée, on a donc  $E(\varphi) X_n(\mu) = E(\varphi \tilde{\mu}) X_n \rightarrow E(\varphi) Z(\mu)$  ( $\tilde{\mu}$  est la transformée de Fourier de  $\mu$ ). Ainsi, si l'on désigne par  $\chi_n$  la mesure spectrale de  $X_n$  et par  $\chi_\mu$  celle de  $Z(\mu)$ , on a :

$$(1) \quad \int |\varphi|^2 |\tilde{\mu}|^2 \chi_n \rightarrow \int |\varphi|^2 \chi_\mu$$

Notons aussi que ces mesures spectrales sont toutes sans atome à l'origine (puisque  $Z$  est sans dérive).

## 2 - EXISTENCE DE LA COVARIANCE GENERALISEE.

a/ Désignons par  $j = (j_1, j_2, \dots, j_{k+1})$  un ensemble de  $k+1$  entiers  $\in [0, n]$ , par  $J$  l'ensemble des  $j$  ainsi définis, et posons :

$$\phi_j(u) = (2i\pi)^{k+1} u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_{k+1}} e^{-2\pi^2 a u^2}$$

$\phi_j$  est la transformée de Fourier de la dérivée  $D_j f_a \in M'_k$  de la densité gaussienne  $f_a(u) = 1/(2\pi a)^{n/2} \exp\{-u^2/2a\}$ . La relation (1) est donc applicable avec  $\tilde{\mu} = \phi_j$ . Compte tenu de la relation

$$\sum_{j \in J} |\psi_j(u)|^2 = (4\pi^2 u^2)^{k+1} e^{-4\pi^2 au^2}$$

on voit qu'il existe une mesure  $\chi_a$  (positive, sommable, sans atome à l'origine) vérifiant :

$$(2) \quad \int |\varphi|^2 (4\pi^2 u^2)^{k+1} e^{-4\pi^2 au^2} \chi_n(du) \rightarrow \int |\varphi|^2 \chi_a$$

Soit alors  $B$  un voisinage borné de 0,  $1_B$  son indicatrice. Posons :

$$\chi_1 = 1_B e^{4\pi^2 au^2} \chi_a$$

Pour  $\mu \in M'_k$ , appliquons la relation (2) à la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\varphi = 1_B \frac{\tilde{\mu}}{(4\pi^2 u^2)^{\frac{k+1}{2}}} e^{4\pi^2 au^2}$$

(mesurable et bornée puisque  $\mu \in M'_k$ ). On trouve :

$$(3) \quad \int_B |\tilde{\mu}|^2 \chi_n \rightarrow \int \frac{|\tilde{\mu}|^2}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_1$$

b/ Soit maintenant  $B^c$  le complémentaire de ce même voisinage borné de  $B$  à l'origine. Considérons la mesure  $\mu_b \in M'_k$  définie par sa transformée de Fourier :

$$\tilde{\mu}_b(u) = 1 - \left( 1 + \frac{4\pi^2 bu^2}{1!} + \dots + \frac{(4\pi^2 bu^2)^{k'}}{k'!} \right) e^{-4\pi^2 bu^2}$$

( $2k' > k$ )

Il existe  $\alpha > 0$  tel que l'on ait :

$$0 < \alpha \leq |\tilde{\mu}_b(u)|^2 \leq 1 \quad \text{pour } u \in B^c$$

de sorte que si  $\varphi$  est mesurable et bornée, il en est de même de  $1_{B^c} \varphi / \tilde{\mu}_b$ . Si donc nous posons :

$$\chi_2 = 1_{B^c} \frac{\chi_{u_b}}{|\tilde{\mu}_b|^2}$$

la relation (1) donne :

$$\int 1_{B^c} \frac{|\varphi|^2}{|\tilde{\mu}_b|^2} |\tilde{\mu}_b|^2 \chi_n \rightarrow \int 1_{B^c} \frac{|\varphi|^2}{|\tilde{\mu}_b|^2} \chi_{\mu_b}$$

c'est-à-dire :

$$(4) \quad \int_{B^c} |\varphi|^2 \chi_n \rightarrow \int |\varphi|^2 \chi_2$$

c/ Les mesures  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont positives, sommables, sans atome à l'origine et concentrées respectivement sur  $B$  et  $B^c$ . Posons :

$$(5) \quad \chi_0 = \chi_1 + (4\pi^2 u^2)^{k+1} \chi_2$$

Cette mesure positive  $\chi_0$  est sans atome en 0 et vérifie :

$$(6) \quad \int \frac{\chi_0(du)}{(1+4\pi^2 u^2)^{k+1}} < \infty$$

D'après (3) et (4), pour tout  $\mu \in M'_k$ , on trouve :

$$\int |\tilde{\mu}|^2 \chi_n \rightarrow \int \frac{|\tilde{\mu}|^2}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_0(du)$$

Mais cette limite est  $\|Z(\mu)\|^2$ . Par suite :

$$(7) \quad \|Z(\mu)\|^2 = \int \frac{|\tilde{\mu}|^2}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_0(du) \quad (\mu \in M'_k)$$

d/ Unicité de  $\chi_0$ . Si une autre mesure  $\chi'_0$  sans atome en 0 vérifie la relation (7), on trouve pour  $|\tilde{\mu}|^2 = (4\pi^2 u^2)^{k+1} e^{-4\pi^2 au^2} |\varphi|^2$  :

$$\int |\varphi|^2 e^{-4\pi^2 au^2} \chi_0 = \int |\varphi|^2 e^{-4\pi^2 au^2} \chi'_0$$

d'où  $\chi'_0 = \chi_0$ .

e/ La covariance  $K(h)$ .

Désignons par  $P_k(2\pi uh) = 1 - \frac{(2\pi uh)^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{(2\pi uh)^{2k}}{(2k)!}$

les  $k+1$  premiers termes du développement de  $\cos 2\pi uh$ , et posons :

$$(8) \quad K(h) = \int \frac{\cos 2\pi uh - 1_B(u) P_k(2\pi uh)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_0(du)$$

Cette intégrale existe, puisque  $\chi_0$  est sans atome à l'origine et vérifie (6), et la fonction  $K(h)$  est continue. Pour tout  $\mu \in M'_k$ , on a

$$\iint \mu(dx) P_k[2\pi u(x-y)] \mu(dy) = 0$$

et par suite :

$$\iint \mu(dx) K(x-y) \mu(dy) = \int \frac{|\tilde{\mu}(u)|^2}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_0(du)$$

D'après (7), donc, il en résulte :

$$(9) \quad \|Z(\mu)\|^2 = \iint \mu(dx) K(x-y) \mu(dy)$$

et K est une covariance généralisée de Z.

f/ Unicité de K à un polynôme près.

Si l'on remplace le voisinage B de 0 qui figure dans (8) par un autre voisinage, on obtient une autre covariance généralisée qui ne diffère de K que par un polynôme pair de degré  $\leq 2k$ . Il est clair d'ailleurs que toute fonction qui diffère de K par un tel polynôme vérifie encore la relation (9).

Montrons la réciproque : si K' est une autre fonction continue symétrique vérifiant (9), K'-K est un polynôme pair de degré  $\leq 2k$ .

Supposons d'abord que K et K' soient indéfiniment dérivables. La relation :

$$\langle Z(\lambda), Z(\lambda') \rangle = \int \lambda(dx) K(x-y) \lambda'(dy) = \int \lambda(dx) K'(x-y) \lambda'(dy)$$

pour  $\lambda, \lambda' \in \Lambda_k$  passe à la limite et donne :

$$\langle D_j Y(x), D_{j'} Y(y) \rangle = (-1)^{k+1} D_j D_{j'} K(x-y) = (-1)^{k+1} D_j D_{j'} K'(x-y)$$

pour  $j, j' \in J$  : ayant mêmes dérivées d'ordre  $2k+2$ , les fonctions paires K et K' sont égales à un polynôme près de degré  $\leq 2k$ .

Plaçons-nous maintenant dans le cas général où K et K' ne sont

pas indéfiniment dérivables. On peut choisir dans l'espace  $\mathcal{D}$  des fonctions indéfiniment dérivables à support compact une suite  $f_n$  telle que pour toute fonction  $\Phi$  continue la suite  $\Phi * f_n * \check{f}_n$  converge uniformément sur les compacts vers la limite  $\Phi$ . Les régularisées  $Z_n$  définies par  $Z_n(\lambda) = Z_n(\lambda * f_n)$  admettent les covariances indéfiniment dérivables  $K * f_n * \check{f}_n$  et  $K' * f_n * \check{f}_n$ , d'où  $K * f_n * \check{f}_n = K' * f_n * \check{f}_n + P_n$  où  $P_n$  est un polynôme pair de degré  $\leq 2k$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini, la suite  $P_n$  converge uniformément sur tout compact vers une limite  $P$ , qui est donc un polynôme pair de degré  $\leq 2k$ , et on trouve ainsi  $K - K' = P$ .

### 3 - DECOMPOSITION ORTHOGONALE D'UNE F.A.I.

Soit  $B$  un voisinage borné de l'origine, et  $\mu_b \in M'_k$  la mesure définie en b/ ci dessus, qui vérifie  $0 < \alpha \leq \tilde{\mu}_b \leq 1$  sur  $B^c$ , de sorte que  $1_{B^c}/\tilde{\mu}_b$  est mesurable et borné. La suite :

$$E(1_{B^c}) X_n = E\left(\frac{1_{B^c}}{\tilde{\mu}_b}\right) \int \mu_b(dx) U_x X_n$$

converge donc dans  $H$  vers la limite :

$$Z(B^c) = E\left(\frac{1_{B^c}}{\tilde{\mu}_b}\right) Z(\mu_b)$$

La mesure spectrale de  $Z(B^c)$  est  $(1_{B^c}/|\tilde{\mu}_b|^2) \chi_{\mu_b}$ , c'est-à-dire d'après 2-e/,  $1_{B^c} \chi_0 / (4\pi^2 u^2)^{k+1}$ . La FAST correspondante, soit  $U_x Z(B^c)$  vérifie :

$$(10) \quad E(1_{B^c}) Z(\mu) = \int \mu(dx) U_x Z(B^c)$$

pour tout  $\mu \in M'_k$ , car  $E(1_{B^c}) X_n(\mu) = E(\tilde{\mu}) E(1_{B^c}) X_n$ , et le premier terme converge vers  $E(1_{B^c}) Z(\mu)$ , tandis que le second admet la limite  $E(\tilde{\mu}) Z(B^c)$ .

Pour tout  $\mu \in M'_k$ , on peut écrire :

$$Z(\mu) = E(1_B) Z(\mu) + E(1_{B^c}) Z(\mu)$$

Désignons par  $Z_B$  la F.A.I.-k définie par  $Z_B(\mu) = E(1_B) Z(\mu)$ . La relation ci-dessus s'écrit :

$$(11) \quad Z(\mu) = Z_B(\mu) + \int \mu(dx) U_x Z(B^c)$$

et la relation  $E(1_B) E(1_{B^c}) = 0$  montre que la F.A.S.T.  $U_x Z(B^c)$  est orthogonale à la F.A.I.  $Z_B$ .

Montrons de plus que  $Z_B$  est indéfiniment dérivable : en effet, pour tout  $\mu \in M'_k$ , l'élément  $Z_B(\mu) \in H$  admet la mesure spectrale  $1_B \chi_\mu$  qui est à support compact, de sorte que  $U_x Z_B(\mu)$  est indéfiniment dérivable. Ainsi :

Toute F.A.I.-k est somme de deux F.A.I.-k orthogonales dont la première est indéfiniment dérivable et dont la seconde est la restriction d'une F.A.S.T. à  $\Lambda_k$ .

#### 4 - DIFFERENTIABILITE D'UNE F.A.I.

Comme corollaire, notons le résultat suivant :

La F.A.I.-k Z est différentiable jusqu'à l'ordre p si et seulement si la mesure  $\chi_0$  vérifie :

$$(12) \quad \int \frac{\chi_0(du)}{(1 + 4\pi^2 u^2)^{k+1-p}} < \infty$$

En effet, d'après (11),  $U_x Z(\mu)$  est différentiable au même ordre que  $U_x \int \mu(dy) U_y Z(B^c) = U_x E(\tilde{\mu}) Z(B^c)$ . Pour  $\mu = \mu_b \in M'_k$ , on a  $E(\tilde{\mu}_b) Z(B^c) = E(1_{B^c}) Z(\mu_b)$  et la mesure spectrale de cet élément est  $1_{B^c} |\tilde{\mu}_b|^2 \chi_0 / (4\pi^2 u^2)^{k+1}$ , avec  $0 < \alpha \leq \tilde{\mu}_b \leq 1$  sur  $B^c$ .  $U_x Z(\mu_b)$  est donc différentiable au même ordre que  $U_x Z(B^c)$ . Ainsi, l'ordre de différentiabilité de la F.A.S.T.  $U_x Z(B^c)$  est identique à celui de sa restriction à  $\Lambda_k$ . Cet ordre est au moins p si et seulement si la mesure spectrale de  $Z(B^c)$ , qui est  $1_{B^c} \chi_0 / (4\pi^2 u^2)^{k+1}$  vérifie :

$$\int_{B^c} \frac{\chi_0(du)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1-p}} < \infty$$

relation équivalente à (12).

En particulier, Z est k+1 fois différentiable si et seulement si on a :

$$\int \chi_0(du) < \infty$$

Dans ce cas, d'après (8), la fonction définie par :

$$(13) \quad K_0(h) = \int \frac{\cos 2\pi uh - P_k(2\pi uh)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} \chi_0(du)$$

est une covariance généralisée de Z : plus précisément,  $K_0$  est celle

de ces covariances qui s'annule en  $h = 0$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $2k$ .

En ce qui concerne la représentation (13), où l'indicatrice  $1_B$  a disparu, on voit immédiatement que cette intégrale a un sens si et seulement si

$$\int \frac{\chi_0}{1 + 4\pi^2 u^2} < \infty$$

donc si et seulement si  $Z$  est  $k$  fois différentiable. Pour  $k = 0$ , en particulier, on voit que le variogramme  $\gamma$  d'une F.A.I.-0 sans dérive est toujours de la forme

$$\gamma(h) = \int \frac{1 - \cos 2\pi u h}{4\pi^2 u^2} \chi_0(du)$$

pour une mesure  $\chi_0 \geq 0$  sans atome en 0 telle que  $\int \chi_0 / (1 + 4\pi^2 u^2) < \infty$ .

On peut améliorer le critère de différentiabilité :

Toute covariance généralisée  $K(h)$  vérifie une majoration de la forme

$$(14) \quad |K(0) - K(h)| \leq a + b|h|^{2k+2}$$

Pour que  $Z$  soit différentiable, il faut et il suffit que ses covariances vérifient une majoration du type :

$$(14') \quad |K(0) - K(h)| \leq \alpha|h|^2 + b|h|^{2k+2}$$

( $a, b$ , et  $\alpha \geq 0$ )

Les diverses covariances de  $Z$  ne diffèrent que par des polynômes pairs de degré  $< 2k$  de sorte qu'il suffit d'établir l'énoncé pour l'une d'elles.

Reportons-nous à la décomposition orthogonale (11). La F.A.I.  $Z_B$ , indéfiniment différentiable, admet la covariance généralisée :

$$K_B(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} 1_B(u) \chi_0(du)$$

D'après l'inégalité :

$$|\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)| \leq \frac{(4\pi^2 |u|^2 |h|^2)^{k+1}}{(2k+2)!}$$

on a toujours une majoration de la forme

$$|K_B(0) - K_B(h)| = |K_B(h)| \leq b|h|^{2k+2}$$

La F.A.S.T.  $Z_{B^c}$ , de son côté, admet la covariance (ordinaire)

$$K_{B^c}(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h}{(4\pi^2 u^2)^{k+1}} 1_{B^c}(u) \chi_0(du)$$

donc vérifie toujours une majoration du type  $|K_{B^c}(0) - K_{B^c}(h)| \leq 0$ . Comme  $K_B + K_{B^c}$  est une covariance de  $Z$ , (14) en résulte. De plus,  $Z$  est une fois différentiable si et seulement si  $Z_{B^c}$  est différentiable, et il en est ainsi si et seulement si la covariance de cette F.A.S.T. vérifie une majoration du type  $|K_{B^c}(0) - K_{B^c}(h)| \leq \alpha|h|^2$ , d'où (14').

##### 5 - CONDITION POUR QU'UNE F.A.I.-k SOIT D'ORDRE k-1.

Si  $Z$  est une F.A.I.-k, les trois énoncés suivants sont équivalents:-

a/  $Z$  est la restriction à  $\Lambda_k$  d'une F.A.I.-(k-1)  $\bar{Z}$  (et dans ce cas  $Z$  est sans dérive et  $\bar{Z}$  est unique à une dérive près).

b/  $Z$  est sans dérive, et admet une mesure spectrale  $\chi_0$  de la forme  $\chi_0 = (4\pi^2 u^2) \chi'_0$  pour une mesure positive  $\chi'_0$  sans atome en 0 (et  $\chi'_0$  est alors la mesure spectrale de l'unique F.A.I.- $k-1$  sans dérive dont  $Z$  est la restriction à  $\Lambda_k$ ).

c/ Les covariances de  $Z$  vérifient des majorations du type

$$|K(h)| \leq a + b|h|^{2k}$$

Notons que les mesures  $\tau_h \lambda - \lambda$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \Lambda_{k-1}$  sont denses dans  $\Lambda_k$  (pour la topologie induite par  $M_c$ ). En effet, si une fonction continue  $f$  est orthogonale à ces mesures, on a  $\int [f(x+h) - f(x)] \lambda(dx) = 0$  pour tout  $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ . Par suite,  $f(x+h) - f(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré  $\leq k-1$ . Choisissons une suite  $f_n$  de régularisées indéfiniment dérivables de  $f$  convergeant vers  $f$  uniformément sur tout compact. Ces régularisées sont encore orthogonales aux  $\tau_h \lambda - \lambda$ , et les  $f_n(x+h) - f_n(x)$  sont des polynômes de degré  $k-1$  au plus. On a donc  $D f_n(x) = C^{ste}$  pour toute dérivation d'ordre  $k-1$ , et  $f_n$  est un polynôme de degré  $\leq k$ . Il en est de même de  $f$ , limite uniforme sur tout compact de la suite  $f_n$ . Par suite l'orthogonal de  $\{\tau_h \lambda - \lambda\}$  est identique à celui de  $\Lambda_k$ , d'où la propriété annoncée.

Si  $\bar{Z}$  est une F.A.I.- $(k-1)$ , pour tout  $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ ,  $\bar{Z}(\tau_h \lambda - \lambda) = (U_h - I) \bar{Z}(\lambda)$  est manifestement orthogonal à l'espace des invariants. D'après la propriété de densité énoncée ci-dessus, la restriction  $Z$  de  $\bar{Z}$  à  $\Lambda_k$  est donc sans dérive. Si  $\bar{Z}'$  est une autre F.A.I.- $(k-1)$  dont la restriction à  $\Lambda_k$  coïncide avec  $Z$ , on a pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$  et tout  $\lambda \in \Lambda_k$  :  $(U_h - I) \bar{Z}'(\lambda) = (U_h - I) \bar{Z}(\lambda)$ . Ainsi,  $\bar{Z}(\lambda)$  et  $\bar{Z}'(\lambda)$  sont égales à un invariant près, et  $\bar{Z}' = \bar{Z}$  à une dérive près.

Il est clair que  $a/ \Rightarrow b/$ ,  $\chi'_0$  désignant la mesure spectrale de l'unique F.A.I.-(k-1)  $\bar{Z}$  sans dérive vérifiant  $a/$ . Si  $b/$  est vrai, la fonction :

$$K(h) = \int \frac{\cos 2\pi u h - 1_B(u) P_{k-1}(2\pi u h)}{(4\pi^2 u^2)^k} \chi'_0(du)$$

est une covariance généralisée de  $Z$  et vérifie  $c/$ . Toute autre covariance de  $Z$  ne diffère de  $K$  que par un polynôme de degré  $\leq 2k$  et vérifie donc également  $c/$ .

On montre  $c/ \Rightarrow b/$  comme dans la Note 117 (à l'aide d'une transformation de Laplace). Montrons  $b/ \Rightarrow a/$ . Soit  $\lambda \in \Lambda_{k-1}$ . Posons pour  $x \in \mathbb{R}^n$

$$Y_\lambda(x) = Z(\tau_x \lambda - \lambda)$$

$Y_\lambda(x)$  est une représentation d'une F.A.I. d'ordre 0 et vérifie :

$$\|Y_\lambda(x)\|^2 = \int \frac{|e^{-2i\pi u x} - 1|^2 |\tilde{\lambda}|^2}{(4\pi^2 u^2)^k} \chi'_0(du)$$

Comme  $|\tilde{\lambda}|^2/(4\pi^2 u^2)^k$  est borné sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $\chi'_0$  sans atome en 0, le variogramme  $\|Y_\lambda(x)\|^2$  est borné. D'après le théorème sur les F.A.I. d'ordre 0, on en déduit l'existence d'un élément unique  $Y_\lambda \in H$  tel que  $Y_\lambda(x) = (U_x - I)Y_\lambda$ , et  $E_0 Y_\lambda = 0$ . La mesure spectrale associée à  $Y_\lambda$  est alors  $|\tilde{\lambda}|^2/(4\pi^2 u^2)^k \chi'_0$ . On en déduit que l'application linéaire  $\lambda \rightarrow Y_\lambda$  de  $\Lambda_{k-1}$  dans  $H$  est continue (pour la topologie induite par  $M_c$  sur  $\Lambda_{k-1}$ ), c'est-à-dire est une F.A.I.-(k-1). Si maintenant  $\lambda \in \Lambda_k$ , on a :

$$(U_x - I)Y_\lambda = Z(\tau_x \lambda) - Z(\lambda) = (U_x - I) Z(\lambda)$$

donc  $Y_\lambda = Z(\lambda)$  à un invariant près. Comme de plus  $E_0 Y_\lambda = E_0 Z(\lambda) = 0$ , on a bien l'égalité  $Y_\lambda = Z(\lambda)$ , et la restriction de  $Y$  à  $\Lambda_k$  coïncide avec  $Z$ .

## 6 - L'EQUATION $\Delta Y(x) = U_x X$ .

Si  $U_x X$  est une F.A.S.T., il existe une et une seule F.A.I.-(2k-1) dont les représentations  $Y(x)$  vérifient  $\Delta^k Y(x) = U_x X$ .

Si  $Z$  est une F.A.I.-(2k-1) 2k fois différentiable,  $\chi_0$  sa mesure spectrale et  $Y(x)$  une représentation de  $Z$ ,  $\Delta^k Y(x)$  est une F.A.S.T. dont la mesure spectrale est  $\chi_0$ , d'où l'unicité.

Inversement, soit  $X \in H$  tel que  $E_0 X = 0$ ,  $\chi$  sa mesure spectrale (sans atome en 0),  $H(X)$  le sous-espace fermé de  $H$  engendré par les  $U_x X$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , et  $\alpha : H(X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$  l'isomorphisme canonique. Soit  $\lambda \in \Lambda_{2k-1}$  et  $\tilde{\lambda}$  sa transformée de Fourier. On a  $\tilde{\lambda}/(4\pi^2 u^2)^k \in L^2(\mathbb{R}^n, \chi)$ . Posons :

$$Z(\lambda) = \alpha^{-1} \left( \frac{(-1)^k \tilde{\lambda}}{(4\pi^2 u^2)^k} \right)$$

L'application  $Z : \Lambda_{2k-1} \rightarrow L^2$  ainsi définie est linéaire et continue comme on le vérifie sans difficulté. C'est donc une F.A.I.-(2k-1) 2k fois différentiable. Soit  $Y(x)$  une représentation de  $Z$  de la forme :

$$Y(x) = Z(\delta_x - \lambda_\ell f^\ell(x)) = \alpha^{-1} \left( (-1)^k \frac{e^{-2i\pi u x} - f^\ell(x) \tilde{\lambda}_\ell}{(4\pi^2 u^2)^k} \right)$$

$\alpha$  étant un isomorphisme, il vient :

$$\begin{aligned} \Delta^k Y(x) &= \alpha^{-1} \left[ (-1)^k \Delta^k \frac{e^{-2i\pi ux} - f^{\ell}(x) \tilde{\lambda}_{\ell}}{(4\pi^2 u^2)^k} \right] = \\ &= \alpha^{-1} (e^{-2i\pi ux}) = U_x X \end{aligned}$$


---