Fontainebleau N-281

INFERENCE STATISTIQUE POUR LES COVARIANCES GENERALISEES (dans R^1)

Note Géostatistique N° 121

G. MATHERON

Mai 1972

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 121

INFERENCE STATISTIQUE POUR LES COVARIANCES GENERALISEES (dans R^1)

1 - INTRODUCTION.

Si $Z(x)$ est une F.A.I. généralisée sur R^1 d'ordre $\leq k$, et $K(h)$ une de ses covariances généralisées, la FAST :

$$Y_a(x) = (-1)^{k+1} \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \, C_{k+1}^p \; Z(x+pa)$$

admet la covariance :

$$(1) \qquad C_a(h) = (-1)^{k+1} \sum_{p=0}^{2k+2} (-1)^p C_{2k+2}^p \; K[h + (k+1-p)a]$$

En désignant par χ la mesure spectrale associée à K, on a aussi :

$$(1') \qquad C_a(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin \pi ua)^{2k+2}}{(\pi u)^{2k+2}} \cos 2\pi uh \; \chi(du)$$

Je me propose, dans ce qui suit, d'examiner les variances de fluctuation attachées à des expressions du type :

$$C_a^*(h) = \frac{1}{L} \int_0^L Y_a(x) \; Y_a(x+h) \, dx$$

pour le cas continu, ou

$$C_a^*(h) = \frac{1}{N} \Sigma_1^N \; Y_a(jb) \; Y_a(jb+h)$$

pour le cas discret. Je m'attacherai uniquement au cas où $K(h)$ est un polynome impair en $|h|$.

2 - EXEMPLE.

r^λ admet au sens des distributions la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}\, r^\lambda = -\,2 \sin \frac{\lambda\,\pi}{2} \quad \frac{\Gamma(1+\lambda)}{(2\pi\,|u|)^{\lambda+1}}$$

Pour λ différent d'un entier pair, $-\dfrac{|h|^\lambda}{\sin \lambda\pi/2}$ est donc une covariance généralisée d'ordre k pour $2\,k + 2 > \lambda$. A un polynome pair près de degré $\leq 2k$, on a alors :

$$-\frac{|h|^\lambda}{\sin \lambda\,\frac{\pi}{2}} = 2\,\Gamma(1+\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)}{(4\pi^2\,u^2)^{k+1}}\,(2\pi|u|)^{2k+1-\lambda}\,du$$

Soit

$$\chi(du) = 2\,\Gamma(1+\lambda)\,(2\pi|u|)^{2k+1-\lambda}\,du$$

Pour $\lambda = 2k+1$, en particulier, cette mesure spectrale est <u>proportionnelle à la mesure de Lebesgue</u>, soit (à un polynome pair près) :

$$(-1)^{k+1}\,|h|^{2k+1} = 2(2k+1)! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi u h - P_k(2\pi u h)}{(4\pi^2\,u^2)^{k+1}}\,du$$

La covariance $C_a(h)$ des accroissements d'ordre k ($2k+2 > \lambda$) de la F.A.I. admettant la covariance généralisée $K(h) = -\,|h|^\lambda/\sin \lambda\,\frac{\pi}{2}$ s'exprime donc ainsi :

$$C_a(h) = -\frac{(-1)^{k+1}}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}} \Sigma_0^{2k+2} (-1)^p C_{2k+2}^p |h + (k+1-p)a|^\lambda =$$

(2)
$$= 2^{2k+3-\lambda} \Gamma(1+\lambda) \int_0^\infty \frac{(\sin \pi ua)^{2k+2}}{(\pi u)^{1+\lambda}} \cos(2\pi uh) du$$

Pour h = 0, en particulier, on obtient le variogramme généralisé (variance des différences d'ordre k+1) :

(2')
$$\begin{cases} \Gamma(a) = C_a(o) = A(\lambda,k)\, a^\lambda \\ \\ A(\lambda,k) = -\frac{(-1)^{k+1}}{\sin\frac{\lambda\pi}{2}} \Sigma_0^{2k+2} (-1)^p C_{2k+2}^p |k+1-p|^\lambda = \\ \qquad = 2^{2k+3-\lambda}\, 2\, \Gamma(1+\lambda) \int_0^\infty \frac{(\sin \pi u)^{2k+2}}{(\pi u)^{1+\lambda}} du \end{cases}$$

Si λ est un entier impair $\leq 2k+1$, on sait que $C_a(h)$ s'annule pour h assez grand (à a fixé), de sorte que $|C_a(h)|$ est sommable. La transformée de Fourier de la fonction $C_a(h)$ est alors la fonction :

(2")
$$\mathfrak{F}\, C_a(h) = 2^{2k+2-\lambda} \Gamma(1+\lambda) \frac{(\sin \pi ua)^{2k+2}}{(\pi u)^{1+\lambda}}$$

Ainsi, l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_a(h)\, dh$$

est nulle pour λ impair $< 2k+1$, et vaut $2(2k+1)!\, a^{2k+2}$ pour $\lambda = 2k+1$. Autrement dit, pour $\lambda = 2k+1$, la portée intégrale est

$$\frac{2\,(2k+1)!}{A(2k+1,k)}\, a .$$

3 - INFERENCE STATISTIQUE - CAS CONTINU.

Soit Y(x) une FAST d'espérance nulle sur la droite, C(h) sa covariance et :

$$C^*(h) = \frac{1}{L}\int_0^L Y(x)\, Y(x+h)\, dx$$

un estimateur de C(h) (dont l'emploi suppose connue la réalisation sur le segment (O,L+h)). On a $E[C^*(h)] = C(h)$, puis :

$$[C^*(h)]^2 = \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L Y(x)\, Y(x+h)\, Y(y)\, Y(y+h)\, dx\, dy$$

Moyennant une hypothèse gaussienne, on trouve :

$$E[Y(x)\, Y(x+h)\, Y(y)\, Y(y+h)] = C^2(h) + C^2(x-y) + C(y-x+h)\, C(y-x-h)$$

Par suite

$$D^2[C^*(h)] = \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L [C^2(x-y) + C(y-x+h)\, C(y-x-h)]\, dx\, dy$$

Soit encore, en remarquant que la fonction à intégrer est symétrique en (x,y) :

$$D^2[C^*(h)] = \frac{2}{L^2}\int_0^L (L-\xi)\, [C^2(\xi) + C(\xi+h)\, C(\xi-h)]\, d\xi \tag{3}$$

En h = 0, on trouve :

$$D^2[C^*(o)] = \frac{4}{L^2}\int_0^L (L-\xi)\, C^2(\xi)\, d\xi \tag{3'}$$

Pour h supérieure à la portée b (c'est-à-dire $C(\xi) = 0$ pour $\xi \geq b$), on trouve :

$$D^2[C^*(h)] = \frac{2}{L^2}\int_0^L (L-\xi)\, C^2(\xi)\, d\xi \qquad (3'')$$

c'est-à-dire (pour une même longueur utile L), $\frac{1}{2}\ D^2[C^*(o)]$. Pour $0 < h < b$, on doit s'attendre à trouver des valeurs intermédiaires, de sorte qu'il est sans doute suffisant de connaître ces deux valeurs extrêmes.

4 - APPLICATION A $C_a(h)$ pour $K(h) = |h|^\lambda$.

Prenons $K(h) = -\ |h|^\lambda/\sin \lambda\pi/2$, λ entier impair $\leq 2k+1$, et désignons par $C_a(h)$ la covariance des accroissements d'ordre $2k+1$ pour le pas a. $C_a(h)$ est nulle pour $h \geq (2k+1)a$. Pour $L \geq (2k+1)a$, (2') se réduit donc à :

$$D^2[C_a^*(o)] = \frac{4}{L}\int_0^\infty C_a^2(\xi)d\xi - \frac{4}{L^2}\int_0^\infty \xi\ C_a^2(\xi)d\xi \qquad (4)$$

Essayons de calculer chacun de ces deux termes. On a vu que $C_a(h)$ admet la transformée de Fourier :

$$\tilde{C}_a(u) = 2^{2k+2-\lambda}\,\Gamma(1+\lambda)\,\frac{(\sin \pi ua)^{2k+2}}{(\pi u)^{1+\lambda}}$$

D'après la formule de Plancherel, donc, on trouve :

$$\int_0^\infty C_a^2(\xi)d\xi = 4^{2k+2-\lambda}\,[\Gamma(1+\lambda)]^2 \int_0^\infty \frac{(\sin \pi ua)^{4k+4}}{(\pi u)^{2+2\lambda}}\ du$$

Or la seconde formule (2') donne, en substituant $2k+1$ à k et $1+2\lambda$ à λ :

$$A(1+2\lambda,\ 2k+1) = -\frac{1}{\sin\frac{1+2\lambda}{2}\pi}\ \Sigma_0^{4k+4}(-1)^p\ C_{4k+4}^p\ |2k+1-p|^{1+2\lambda} =$$

$$= 2^{4k+4-2\lambda}\ \Gamma(2+2\lambda)\int_0^\infty \frac{(\sin \pi u)^{4k+4}}{(\pi u)^{2+2\lambda}}\, du$$

Par suite :

$$\int_0^\infty C_a^2(\xi)d\xi = \frac{A(1+2\lambda,\ 2k+1)\ [\Gamma(1+\lambda)]^2}{\Gamma(2+2\lambda)}\ a^{1+2\lambda}$$

Compte tenu de la valeur de $C_a(o)$ donnée en (2'), on voit que pour a petit devant L la partie principale de la variance d'estimation est en valeur relative :

$$(4')\qquad \frac{D^2[C_a^*(o)]}{[C_a(o)]^2} \simeq \frac{4\ A(1+2\lambda,\ 2k+1)\ [\Gamma(1+\lambda)]^2}{[A(\lambda,k)]^2\ \Gamma(2+2\lambda)}\ \frac{a}{L}$$

Il est plus délicat de calculer le second terme de la formule (4) car l'intégrale $\frac{2}{L^2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\xi|\ C_a^2(\xi)d\xi$ ne se laisse pas ramener à la forme de Plancherel. Mais il n'est peut- être pas très utile dans l'immédiat de faire ce calcul, car (toujours pour $L \geq (2k+1)a$), la relation (4') fournit en fait une majoration de la variance relative et non pas seulement une partie principale.

Revenone au second terme de la formule (3), qui est

$$\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-\xi)\ C_a(\xi+h)\ C_a(\xi-h)d\xi$$

et calculons sa partie principale pour L grand, soit :

$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} C_a(\xi+h)\ C_a(\xi-h)d\xi = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos 4\pi uh\ |\tilde{C}_a(u)|^2 du =$$

$$= \frac{1}{L}\ 4^{2k+2-\lambda}\ [\Gamma(1+\lambda)]^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin \pi ua)^{4k+4}}{(\pi u)^{2+2\lambda}}\ \cos 4\pi uh\ du$$

Ce terme s'exprime à l'aide de la covariance $C_a(h;1+2\lambda,\ 2k+1)$ des accroissements d'ordre 2k+2 de la F.A.I. dont la covariance généralisée est $-\ |h|^{1+2\lambda}/\sin(1+2\lambda)\ \frac{\pi}{2}$. On a, en effet :

$$C_a(h;1+2\lambda,\ 2k+1) = 2^{4k+3-2\lambda}\,\Gamma(2+2\lambda)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\sin \pi ua)^{4k+4}}{(\pi u)^{2+2\lambda}}\cos 2\pi uh\, du$$

Par suite, la partie principale cherchée est

$$\frac{1}{2L}\ \frac{[\Gamma(1+\lambda)]^2}{\Gamma(2+2\lambda)}\ C_a(2h;1+2\lambda,\ 2k+1)$$

En reportant dans (3), on trouve ainsi :

$$(4'')\quad D^2[C^*(h)] \simeq \frac{1}{2L}\ \frac{[\Gamma(1+2\lambda)]^2}{\Gamma(2+2\lambda)}\ [C_a(o;\ 1+2\lambda,\ 2k+1) + C_a(2h;\ 1+2\lambda, 2k+1)]$$

5 - INFERENCE STATISTIQUE SUR $\mathbb{R}^1$, CAS DISCRET.

La formulation est très analogue. Soit Y(x) une FAST d'espérance nulle sur $\mathbb{R}^1$, C(h) sa covariance, et

$$C^*(h\ b) = \frac{1}{N}\ \Sigma_1^N\ Y(jb)\ Y(jb + hb)$$

un estimateur. Pour abréger, nous prendrons b comme unité de longueur. On trouve $E\ C^*(h) = C(h)$ et, moyennant une hypothèse gaussienne :

$$D^2[C^*(h)] = \frac{1}{N^2}\Sigma_1^N\ \Sigma_1^N\ [C^2(j-s) + C(j-s+h)\ C(j-s-h)]$$

Si f(i) = f(-i), on établit la relation :

$$\sum_1^N \sum_1^N f(j-s) = 2 \sum_0^N (N-p)\, f(p) - N\, f(o) = N \sum_{p=-N}^{N} f(p) - \sum_{p=-N}^{N} p\, f(p)$$

Avec $f(p) = C^2(p) + C(p+h)\, C(p-h)$, cette formule donne :

$$(5) \quad \begin{aligned} D^2[C^*(h)] = \frac{1}{N} \sum_{-N}^{N} [C^2(p) + C(p+h)\, C(p-h)] - \\ - \frac{1}{N^2} \sum_{-N}^{N} p[C^2(p) + C(p+h)\, C(p-h)] \end{aligned}$$

Lorsque Nb est supérieur à la portée de $C(h)$, on peut sommer de $-\infty + +\infty$. De plus, si <u>Nb est grand vis-à-vis de la portée</u>, le terme en $1/N^2$ devient négligeable, et il reste :

$$D^2[C^*(h)] = \frac{1}{N} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [C^2(p) + C(p+h)\, C(p-h)]$$

Pour $h = 0$ on trouve (en réintroduisant la maille b)

$$(5') \qquad D^2[C^*(o)] = \frac{2}{N} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C^2(pb)$$

Pour h supérieur à la portée, on trouve $\frac{1}{2}\, D^2[C^*(o)]$, de sorte qu'il n'est pas très utile de calculer explicitement cette variance pour h quelconque.

Or, dans les mêmes conditions d'approximation, la formule (3') donne dans le cas continu :

$$(5'') \qquad D^2_{cont.}[C^*(o)] = \frac{2}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} C^2(x)\, dx$$

La différence entre (5') et (5") va donc pouvoir s'évaluer à l'aide de techniques dérivées de la formule d'Euler-Mac Laurin. On sait que les discontinuités de la fonction à intégrer et de ses dérivées successives jouent un rôle majeur dans l'application de cette formule, et il va donc falloir introduire des hypothèses précises sur les irrégularités de $C(h)$.

6 - LES IRREGULARITES DE $C(h;k)$ ET DE $C^2(h;k)$.

Désignons par $C_a(h;k) = C(h;k)$ la covariance des accroissements d'ordre $k+1$ (pour un pas a) d'une F.A.I. d'ordre $\leq k$. Autrement dit, si $K(h)$ est une covariance généralisée de cette F.A.I., on a :

$$(6) \qquad C(h,k) = (-1)^{k+1} \sum_{0}^{2k+2} (-1)^p \, C^p_{2k+2} \, K[h + (k+1-p)a] =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p \, C^{p+k+1}_{2k+2} \, K(h-pa)$$

(avec la convention $C^k_n = 0$ pour $k < 0$ ou $k > n$).

Nous supposons K continu ainsi que ses $\lambda-1$ premières dérivées (λ entier impair). De plus, nous supposons que les dérivées d'ordre λ et $\lambda+1$ existent et sont continues sur $\mathbb{R} - \{o\}$. En $h = 0$, par contre, $K^{(\lambda)}(o)$ n'existe pas, mais les dérivées à droite et à gauche $K^{(\lambda)}_+(o)$ et $K^{(\lambda)}_-(o)$ existent. Nous désignerons par δ le saut correspondant :

$$\delta = K^{(\lambda)}_+(o) - K^{(\lambda)}_-(o)$$

Il en résulte que la covariance $C(h)$ définie en (6) admet elle aussi des dérivées continues jusqu'à l'ordre $\lambda-1$ en tout $h \in \mathbb{R}$, et aussi des dérivées continues d'ordre λ et $\lambda+1$ sauf aux points pa, $p = 0, \pm 1, \ldots \pm (2k+2)$. En ces points, cependant, les dérivées à droite et à gauche, $C_+^{(\lambda)}$ et $C_-^{(\lambda)}$ existent encore. Nous désignerons par δ_p le saut correspondant :

$$\delta_p = C_+^{(\lambda)}(pa) - C_-^{(\lambda)}(pa)$$

Comme λ est impair, on a $\delta_{-p} = \delta_p$, et il suffit d'évaluer δ_p en $p = 0, 1, \ldots (2k+2)$. Soit donc p un entier positif. Dans l'expression de $C^{(\lambda)}(h)$ déduite de (6), le seul terme présentant une discontinuité est le terme $(-1)^p C_{2k+2}^{p+k+1} K^{(\lambda)}(h-pa)$. On en déduit aussitôt :

$$(6') \qquad \delta_p = (-1)^p \, C_{2k+2}^{p+k+1} \, \delta$$

Ainsi, pour λ entier impair et $K(h) = (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} |h|^\lambda$, on a

$$\begin{cases} \delta = (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \, 2\,\lambda! \\ \\ \delta_p = (-1)^{p+\frac{\lambda+1}{2}} \, 2\,\lambda! \, C_{2k+2}^{p+k+1} \end{cases}$$

Examinons dans les mêmes conditions les discontinuités de $C^2(h)$. La formule de Leibniz :

$$\frac{d^\lambda C^2(h)}{dh^\lambda} = \sum_q C_\lambda^q \; C^{(q)}(h) \; C^{(\lambda-q)}(h)$$

montre que cette dérivée d'ordre λ a les mêmes discontinuités que la fonction $2\,C\,C^{(\lambda)}$. Si donc nous posons

$$\Delta_p = \frac{d_+^\lambda C^2(pa)}{dh^\lambda} - \frac{d_-^\lambda C^2(pa)}{dh^\lambda}$$

nous trouvons :

$$(6'') \qquad \Delta_p = 2\, C(pa)\, \delta_p = (-1)^p\, 2\, C_{2k+2}^{p+k+1}\; C(pa;k)\; \delta$$

Nous allons utiliser ce résultat pour évaluer le terme :

$$S_D^2 = \frac{2}{N} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C^2(pb) - \frac{2}{Nb} \int_{-\infty}^{+\infty} C^2(\xi)\, d\xi$$

7 - CALCUL DE S_D^2.

D'après la formule d'Euler-Mac Laurin et les hypothèses faites sur la fonction $C(h) = C_a(h;k)$, nous trouvons pour p entier avec $f = C^2$

$$\int_{pa}^{(p+1)a} C^2(x)\, dx = b\, [\tfrac{1}{2} f(pa) + f(pa+b) + \ldots + \tfrac{1}{2} f(pa+a)]$$

$$- \frac{B1}{2!}\, b^2\, [f'(pa+a) - f'(pa)] + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}}{(\lambda+1)!}\, B_{\frac{\lambda+1}{2}}\, b^{\lambda+1}\, [f_-^{(\lambda)}(pa+a) - f_+^{(\lambda)}(pa)] + R$$

avec un reste R admettant une majoration en $b^{\lambda+4}$ (on rappelle que la maille b est de la forme $b = a/s$, s entier > 0). Sommons en p de $-\infty$ à $+\infty$. Il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^2(x)\, dx = b \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C^2(pb) - \frac{(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}}{(\lambda+1)!}\, B_{\frac{\lambda+1}{2}}\, b^{\lambda+1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Delta_p$$

à cause de la continuité des dérivées d'ordre inférieur à λ. D'après

(6"), d'autre part, nous trouvons

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \Delta_p = 2\,\delta \sum_p C_{2k+2}^{p+k+1} \ (-1)^p \ C(pa;k)$$

On voit apparaître (au signe près) l'accroissement d'ordre 2k+2 de la fonction C(h;k), pris en h = 0. Mais C(h;k) est elle-même au signe près l'accroissement d'ordre 2k+2 de K(h). Notre expression est donc elle-même un accroissement d'ordre 4k+4, soit, en appliquant à nouveau la formule (6) :

$$\sum_p \Delta_p = 2\,\delta \sum_p (-1)^p \ C_{4k+4}^{p+2k+2} \quad K(pa) = 2\,\delta\ C(0,\ 2k+1)$$

d'où la formule cherchée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_a^2(x)dx = b \sum_{p=-\infty}^{+\infty} C_a^2(pb) - 2\ \frac{(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}\ \delta}{(\lambda+1)\,!} \ B_{\frac{\lambda+1}{2}} \ b^{\lambda+1} \ C_a(0;2k+1)$$

On en déduit la valeur de S_D^2 :

$$(7) \qquad S_D^2 = \frac{4}{N}\,(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \ \frac{\delta}{(\lambda+1)\,!} \ B_{\frac{\lambda+1}{2}} \ b^{\lambda} \ C_a(0;2k+1)$$

et la variance d'estimation du cas discret admet la partie principale :

$$(7') \qquad D^2[C^*(o)] \simeq \frac{2}{Nb} \int_{-\infty}^{+\infty} C^2(x)dx + S_D^2$$

<u>EXEMPLE</u> : Si la covariance K(h) présente le seul terme irrégulier $(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \ |h|^{\lambda}$ (λ impair), on a :

$$\delta = (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}} \; 2\,\lambda! \quad ; \quad C_a(0;2k+1) = A(\lambda,\ 2k+1)\ a^{\lambda}$$

donc

$$S_D^2 = \frac{8}{N}\, B_{\frac{\lambda+1}{2}}\ \frac{A(\lambda,\ 2k+1)}{\lambda+1}\ b^{\lambda}\ a^{\lambda} = \frac{8}{N}\, B_{\frac{\lambda+1}{2}}\ \frac{A(\lambda,\ 2k+1)}{\lambda+1}\ \frac{a^{2\lambda}}{s^{\lambda}}$$

et finalement, compte tenu de (4'), avec $s = a/b$ entier ≥ 1

$$(7'')\quad D^2[C_a^*(0;\lambda,k)] \simeq \left[\frac{4s}{N}\ \frac{A(1+2\lambda,\ 2k+1)[\Gamma(1+\lambda)]^2}{\Gamma(2+2\lambda)} + \right.$$

$$\left. + \frac{8}{s^{\lambda}N}\ B_{\frac{\lambda+1}{2}}\ \frac{A(\lambda;2k+1)}{\lambda+1}\right] a^{2\lambda}$$

$$\left(B_1 = \frac{1}{6}\ ,\ B_2 = \frac{1}{30}\ ,\ B_3 = \frac{1}{42}\ \ldots\right)$$

8 - GENERALISATION.

Soit maintenant la covariance généralisée d'ordre k_o :

$$K(h) = \sum_{\lambda} (-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}\ \alpha_{\lambda}\ |h|^{\lambda}$$

où λ parcourt l'ensemble $\{1,3,\ldots 2\ k_o+1\}$ des k_o+1 des premiers nombres impairs. Désignons encore par $C(h;k) = C_a(h;k)$ la covariance des accroissements d'ordre $k+1$ $(k \geq k_o)$, et par $C(h;k,\lambda) = C_a(h;k,\lambda)$ le terme analogue fermé à partir de la covariance généralisée $(-1)^{\frac{\lambda+1}{2}}\ |h|^{\lambda}$. On a donc

$$(8)\qquad C(h;k) = \sum\ \alpha_{\lambda}\ C(h;k,\lambda)$$

Calculons la partie principale de la variance $D^2[C^*(0,k)]$ dans le

<u>cas continu</u>, soit

$$(8') \qquad D^2[C^*(0,k)] = \frac{2}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} C^2(x;k)dx$$

On trouve tout d'abord :

$$C^2(x;k) = \sum_{\lambda,\lambda'} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'} C(x;k,\lambda)\, C(x;k,\lambda')$$

D'après (2"), $C(x;k,\lambda)$ admet la transformée de Fourier :

$$\tilde{C}(u;k,\lambda) = 2^{2k+2-\lambda}\, \lambda!\, \frac{(\sin \pi ua)^{2k+2}}{(\pi u)^{1+\lambda}}$$

et le théorème de Plancherel donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(x;k,\lambda)\, C(x;k,\lambda')dx = 2^{4k+4-\lambda-\lambda'}\, \lambda!\, \lambda'! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin \pi ua)^{4k+4}}{(\pi u)^{2+\lambda+\lambda'}}\, du =$$

$$= \frac{2^{4k+4-\lambda-\lambda'}}{2^{4k+3-\lambda-\lambda'}}\, \frac{\lambda!\, \lambda'!}{(1+\lambda+\lambda')!} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{C}(u;2k+1,1+\lambda+\lambda')\, du =$$

$$= \frac{2\, \lambda!\, \lambda'!}{(1+\lambda+\lambda')!}\, C(0;2k+1,1+\lambda+\lambda') = 2\, \frac{\lambda!\, \lambda'!}{(1+\lambda+\lambda')!}\, A(2k+1,1+\lambda+\lambda')\, a^{1+\lambda+\lambda'}$$

Si nous substituons dans (8'), nous obtenons l'expression cherchée de la variance de fluctuation du cas continu (ou plutôt, de la partie principale de cette variance pour L grand) :

$$(8'') \quad D^2[C^*(0,k)] \simeq \frac{4}{L} \sum_{\lambda,\lambda'} \alpha_\lambda \alpha_{\lambda'}\, A(2k+1,1+\lambda+\lambda')\, \frac{\lambda!\, \lambda'!}{(1+\lambda+\lambda')!}\, a^{1+\lambda+\lambda'}$$

Dans le cas discret, on doit ajouter le terme S_D^2 dont la partie principale est écrite en (7). Si λ_o est le plus petit des entiers λ qui figurent en exposant dans l'expression de K(h), on a :

$$\delta = 2\ \lambda!\ \alpha_\lambda$$

et par suite :

$$S_D^2 \simeq \frac{8\ \alpha_{\lambda_o}}{N} \quad \frac{1}{\lambda_o+1}\ B_{\frac{\lambda+1}{2}}\ b^{\lambda_o}\ C(0,2k+1)$$

soit avec b = a/s :

$$(8'') \qquad S_D^2 \simeq \alpha_{\lambda_o} \frac{8\ B_{\frac{\lambda_o+1}{2}}}{1+\lambda_o} \quad \frac{s^{\lambda_o}}{N} \quad a^{\lambda_o} \sum_\lambda \alpha_\lambda\ A(2k+1,\lambda)\ a^\lambda$$