Fontainebleau N-265

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 119

LE FORMALISME DES COUPURES ET DES RELATIONS TONNAGES-TENEURS

G. MATHERON Décembre 1971

Caractéristiques
- connues
- estimées
  - information définitive disponible aujourd'hui
  - " non encore disponible

Sélection
- 1 niveau
- plusieurs niveaux

S.-
- contrainte géométrique
- pas de contraintes géométriques

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 119

LE FORMALISME DES COUPURES ET DES RELATIONS TONNAGES-TENEURS

I - FORMALISME GENERAL

En première analyse, le résultat (tonnage, teneurs, etc...) que fournira l'exploitation d'un gisement (ou d'une portion d'un gisement) dépend des facteurs suivants :

a/ les caractéristiques réelles du gisement

b/ les caractéristiques technologiques du type d'exploitation

c/ les instructions données au mineur

d/ la plus ou moins grande fidélité avec laquelle le mineur respectera les dites instructions (ce facteur est lui-même sous la dépendance des précédents).

Examinons rapidement ces différents facteurs.

a/ A la limite, ces caractéristiques sont constituées par la donnée des teneurs en chacune des substances utiles ou nuisibles et de la densité en chacun des points de l'espace minéralisé. En général, il est possible de condenser cette information sous une forme que nous examinerons dans un instant. Soient X, Y, de telles caractéristiques. En général, X, Y... ne sont pas connues. On peut seulement les estimer à partir des données disponibles. Le gisement étant assimilé à une réalisation d'une F.A. conditionnée par les données de la reconnaissance, X, Y etc... sont elles-mêmes considérées comme des V.A. conditionnées par ces mêmes données. En général, on pourra faire une hypothèse sur la loi de ces variables, par exemple une hypothèse gaussienne. Il sera donc, au minimum, nécessaire de connaître les espérances conditionnelles et la matrice des covariances conditionnelles de ces variables. Si l'on ne sait pas former explicitement ces espérances conditionnelles (ce qui sera pour ainsi dire toujours le cas), on les remplacera par des estimateurs linéaires sans biais obtenus, par exemple, par krigeage. C'est, de loin, la condition relative à <u>l'absence de biais</u> qui est la plus importante. Si X^*, Y^* etc... sont ces estimateurs sans biais, on admettra, par exemple, que les V.A. X,Y... sont des gaussiennes admettant les espérances X^*, Y^*... et la matrice de covariance :

$$\sigma_X^2 = E(X-X^*)^2 \quad , \quad \sigma_{XY} = E(X-X^*)(X-Y^*) \text{ etc...}$$

b/ Les caractéristiques technologiques du mode d'exploitation sont considérées comme des données. Elles imposent des contraintes concernant notamment le niveau ou l'échelle à laquelle s'opérera la sélection du minerai. En particulier, les instructions c/ données au mineur doivent impérativement être compatibles avec ces caractéristiques (compte tenu éventuellement d'une certaine imprécision incorporée au facteur d/).

c/ Les instructions données au mineur sont, pour l'essentiel, résumées dans la définition géométrique précise du volume V_o du minerai à exploiter et du volume V_o' de stérile qu'il est nécessaire d'enlever (découverture, etc..). Ces instructions doivent, avant tout, <u>être réalisables</u> (compte tenu de la tolérance définie en d/). Ceci implique deux conséquences :

c-1/ La forme géométrique de V_o et de V'_o ne doit pas être trop compliquée, de manière à ce que l'exploitation puisse effectivement la respecter. On pourra, en général, réaliser convenablement cette condition en choisissant V_o et V'_o parmi une famille $V(\alpha_j)$, $V'(\alpha_j)$, $j \in J$ de volumes considérés comme acceptables et dépendant d'un volume J fini de paramètres α_j. (Par exemple, un gisement stratiforme sera découpé en panneaux prismatiques dont les bases seront des carrés ou des rectangles S_i choisis par nous ; pour chaque panneau S_i, il restera à choisir les cotes a_i et b_i du mur et du toit : $V(a_i,b_i)$ est alors la réunion des prismes $v_i = S_i \times [a_i,b_i]$, tandis que $V'(a_i,b_i)$ sera la réunion des couvertures de ces prismes élémentaires).

c-2/ Ces instructions <u>doivent être complètement explicitées</u> au moins immédiatement avant leur réalisation. Dans l'exemple précédent où le volume $V(a_i,b_i)$ est réunion de panneaux $v_i = S_i \times [a_i,b_i]$ dont la définition ne fait intervenir pour chacun d'eux que deux paramètres a_i et b_i, il est évidemment impératif que a_i et b_i soient fixés au moment où commence l'exploitation du panneau v_i .

Deux cas pourront d'ailleurs se présenter. Si l'on estime suffisantes les données actuellement disponibles, et si, donc, on n'envisage pas de campagnes ultérieures de reconnaissance, on peut dès à présent construire un projet global d'exploitation, c'est-à-dire fixer les paramètres α_j qui déterminent les instructions $V(\alpha_j)$ et $V'(\alpha_j)$. Nous verrons comment procéder à ce choix d'une manière optimale, compte tenu de l'information disponible. Plus souvent peut-être, on envisage de procéder à d'autres campagnes de reconnaissance. Par exemple, on prévoit zone par zone des réseaux à maille serrée de sondages en avant du front d'exploitation. Il n'est alors pas question de fixer dès maintenant tous les paramètres, mais on doit être capable de <u>formuler avec</u>

<u>précision la règle selon laquelle les paramètres a_i, b_i, etc.. relatifs à un panneau v_i donné seront déterminées sitôt que seront connues les informations complémentaires relatives à ce panneau</u>. Comme ces informations futures peuvent actuellement être considérées comme des V.A. conditionnées par l'information aujourd'hui disponible, les paramètres a_i, b_i deviennent eux-mêmes des V.A. par l'intermédiaire de la règle mentionnée ci-dessus, d'où possibilité de faire en espérance le bilan de l'exploitation future.

d/ Lorsque les instructions V_o et V'_o (c'est-à-dire les paramètres α_j) ont été choisies, il reste à les exécuter. Par suite de diverses causes d'erreur, les volumes V et V' qui seront effectivement réalisés différeront plus ou moins de V_o et V'_o . Au stade actuel, on peut considérer V et V' comme des ensembles aléatoires dont la loi de probabilité dépend évidemment de manière très étroite des V_o et V'_o choisis. En général, V et V' ne seront pas des éléments des familles $V(\alpha_j)$ et $V'(\alpha_j)$, et il sera nécessaire d'introduire un certain nombre d'hypothèses simplificatrices en vue de formuler de manière opératoire les lois de probabilités de V et V'.

II - CAS OÙ LES CARACTERISTIQUES DU GISEMENT SONT CONNUES

Plaçons-nous d'abord dans le cas idéal où toutes les caractéristiques utiles du gisement sont connues. Pour choisir les instructions V_o et V'_o , nous prendrons comme critère l'optimisation du bénéfice futur de l'exploitation, ce bénéfice B pouvant d'ailleurs être évalué sous forme actualisée ou non. B est de la forme :

$$(2\text{-}1) \qquad B(V,V') = H(V) - \Phi(V,V')$$

V et V' désignant les ensembles aléatoires introduits plus haut : ils représentent les volumes de minerai et de stérile qui seront effectivement enlevés par le mineur auquel des instructions précises $V(\alpha_j)$ et $V'(\alpha_j)$ ont été données. La loi de probabilité de V et V' dépend donc de ces paramètres α_j . Par l'intermédiaire de V et V', $B(V,V')$ est donc une variable aléatoire, et c'est son espérance qui doit être optimisée . $\Phi(V,V')$ représente les frais d'exploitation et de traitement du minerai. En général, on pourra remplacer $\Phi(V,V')$ (variable aléatoire) par $\Phi(V_o, V_o')$ (quantité numériquement déterminée dès que les instructions α_j sont fixées), car les frais d'exploitation ne seront pas sensiblement affectés par de légers écarts entre V et V_o. Si l'on n'actualise pas, on aura souvent une expression linéaire de la forme :

$$(2\text{-}2) \qquad \Phi(V,V') = \Phi(V_o,V_o') = \beta\, V_o(\alpha_j) + \beta'\, V_o'(\alpha_j)$$

Si l'on actualise, il sera nécessaire pour expliciter Φ d'introduire des hypothèses sur les cadences d'exploitation et de découverture (et, à dire vrai, se posera le problème de choisir ces cadences de manière optimale).

H(V), enfin, représente la valeur des substances utiles contenues dans V. Compte tenu de l'écart entre V_o et sa réalisation V, H(V) est assimilé à une variable aléatoire, dont la loi dépend des instructions α_j. En général, H(V) dépend de V par l'intermédiaire d'un petit nombre de caractéristiques X(V), Y(V) etc... telles que : les quantités des différentes substances utiles ou pénalisables contenues dans V, le volume de V (que nous désignerons également par V) etc... Ces caractéristiques sont donc des variables aléatoires dont la loi dépend des instructions α_j . On ne saura pas, en général, expliciter cette loi, mais on pourra, en première approximation, la supposer gaussienne. Il s'agira seulement alors d'évaluer les espérances et la matrice des covariances de ces variables à V_0 donné. On prendra garde que l'on n'a pas, en général, $E[X(V)] = X(V_0)$. En particulier, les α_j étant choisis selon une procédure d'optimisation, on aura $E[X(V)] < X(V_0)$ si X est la quantité d'une substance utile, et de même $E[H(V)] < H(V_0)$. La fonction H(V) elle-même se met sous la forme :

(2-3) $$H(V) = h[X(V), Y(V),...]$$

d'une fonction.- en général non linéaire - des caractéristiques X,Y....

Exemples : En l'absence d'actualisation, et dans le cas le plus simple, H est proportionnel à une seule caractéristique Q (quantité de substance utile) :

(2-3-1) $$H(V) = b\ Q(V)$$

Il peut y avoir une constante de pénalisation x_0, correspondant à une teneur irrécupérable dans le minerai. On a alors une expression de la forme :

(2-3-2) $$H(V) = \begin{cases} b[Q(V) - x_0 V] & \text{si } Q(V) \geq x_0 V \\ 0 & \text{si } Q(V) < X_0 V \end{cases}$$

Dans un autre cas extrême, la valeur du minerai est nulle si la teneur est inférieure à x_0 et proportionnelle au volume si cette teneur est $\geq x_0$:

$$(2\text{-}3\text{-}3)\qquad H(V) = \begin{cases} b\,V & \text{si } Q(V) \geq x_o V \\ 0 & \text{si } Q(V) < x_o V \end{cases}$$

Si nous désignons par $G = G(\alpha_j\ ;\ dx,dy\ldots)$ la loi de $X(V)$, $Y(V)$ lorsque les instructions sont fixées, on a :

$$(2\text{-}4)\qquad E(B) = \int h(x,y,\ldots)\ G(\alpha_j\ ;\ dx,dy) - \beta\ V(\alpha_j) - \beta'\ V'(\alpha_j)$$

Cette expression dépend uniquement des α_j. On choisira donc les instructions V_o, V_o' en déterminant les valeurs des paramètres α_j qui réalisent l'optimum de $E(B)$, donc en résolvant le système :

$$(2\text{-}5)\qquad \frac{\partial\ E(B)}{\partial\ \alpha_j} = 0$$

III - CAS DE SIMPLIFICATION

Examinons avec plus de détails le cas typique déjà examiné ci-dessus, où le volume $V(\alpha_j) = \bigcup S_i \times [a_i, b_i]$ est réunion de prismes $v_i(a_i, b_i)$ disjoints dont les bases S_i sont données, de sorte que chaque v_i est défini par la donnée des cotes a_i et b_i du mur et du toit. En outre, nous supposons que les caractéristiques X,Y etc... sont additives, soit :

$$(3\text{-}1)\qquad X(V) = \sum_i X(v_i)\quad ,\quad Y(V) = \sum_i Y(v_i)\ \ldots$$

Ces relations sont vérifiées, en particulier, lorsque X représente la quantité d'une substance utile ou nuisible contenue dans le volume V.

En particulier, le volume V lui-même est $V = \Sigma v_i$. Examinons quelques cas de figures .

a/ Le facteur d/ ne joue pas, autrement dit, le mineur est capable de respecter à la lettre les instructions reçues. A un facteur près, le bénéfice associé aux instructions (a_i, b_i) est :

$$B(a_i, b_i) = H(\Sigma v_i, \Sigma X_i, \Sigma Y_i) - \beta \Sigma v_i - \beta' \Sigma v'_i$$

L'optimum est donc régi par le système suivant :

$$(3\text{-}2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H}{\partial X} \dfrac{\partial X_i}{\partial a_i} + \dfrac{\partial H}{\partial Y} \dfrac{\partial Y_i}{\partial a_i} = S_i \left(\dfrac{\partial H}{\partial V} - \beta \right) \\ \\ \dfrac{\partial H}{\partial X} \dfrac{\partial X_i}{\partial b_i} + \dfrac{\partial H}{\partial Y} \dfrac{\partial Y_i}{\partial b_i} = S_i \left(\beta - \beta' - \dfrac{\partial H}{\partial V} \right) \end{array} \right.$$

Car $\dfrac{\partial v_i}{\partial b_i} = S_i$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial a_i} = \dfrac{\partial v'_i}{\partial b_i} = - S_i$, $\dfrac{\partial v'_i}{\partial a_i} = 0$

Pour résoudre ce système, on introduit des paramètres auxiliaires ξ, η,... et u que l'on substitue dans (3-2) aux dérivées partielles de H en X, Y,...V. On résoud alors pour chaque indice i le système :

$$(3\text{-}2') \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \dfrac{\partial X_i}{\partial a_i} + \eta \dfrac{\partial Y_i}{\partial a_i} = S_i (u - \beta) \\ \\ \xi \dfrac{\partial X_i}{\partial b_i} + \eta \dfrac{\partial Y_i}{\partial b_i} = S_i (\beta - \beta' - u) \end{array} \right.$$

On obtient ainsi $a_i = a_i(\xi, \eta, u)$ et $b_i(\xi, \eta, u)$ en fonctions de ces paramètres auxiliaires, et, en substituant dans les expressions $X(v_i)$, $Y(V_i)$, on obtient les quantités $X_i(\xi, \eta, u)$, $Y_i(\xi, \eta, u)$ pour chaque i et, en sommant en i, les quantités totales $X = \sum X_i$, $Y = \sum Y_i$ en fonctions toujours de ces mêmes paramètres. Il reste ensuite à choisir les valeurs de ξ, η,...u qui satisfont aux relations supplémentaires :

$$(3\text{-}2'') \qquad \xi = \frac{\partial H}{\partial X} \quad , \quad \eta = \frac{\partial H}{\partial Y} \quad , \quad u = \frac{\partial H}{\partial V}$$

On voit que ces paramètres auxiliaires généralisent exactement la notion de <u>teneur de coupure</u> (considérée comme un simple paramètre). De même, les fonctions $X_i(\xi,\eta,u)$ et $X(\xi,\eta,u) = \sum X_i$ donnent, en fonction de la teneur de coupure (ξ,η,u) généralisée, le tonnage de la su substance représentée par X contenuedans le panneau v_i ou dans le gisement V. Il s'agit donc bien de la généralisation de la <u>relation tonnage-teneur paramètrique</u> (voir remarque ci-dessous).

<u>Résolution du système (3-2)</u>- On peut résoudre le système (3-2) <u>par approximations successives</u>. En effet, X(V) et Y(V) étant additives, on a pour chaque i :

$$X_i(a_i,b_i) = \int_{a_i}^{b_i} X(dz) \quad , \quad Y_i(a_i,b_i) = \int_{a_i}^{b_i} Y(dz)$$

X(dz) représentant la quantité de la substance associée à X contenue dans la tranche élémentaire $S_i \times dz$. A cette quantité est associée la teneur moyenne $x(z) = X(dz)/S_i\, dz$ de cette même tranche. De même, à la quantité Y nous associons la teneur $Y(dz)/S_i\, dz = y(z)$ de la tranche. Pour ξ et η données, on peut aussi introduire la combinaison linéaire $\xi X + \eta Y$ et lui associer la teneur $\xi\, x(z) + \eta\, y(z)$. Le système (3-2') exprime que l'on définit la passe (a_i,b_i) en appliquant les teneurs de coupure β-u au mur et β-β'-u au toit à la substance fictive dont la teneur serait précisément cette combinaison linéaire

$\xi\, x + \eta\, y$. Il est donc très facile de résoudre (3-2') à ξ, η et u fixés, par simple examen de la succession verticale des valeurs numériques connues $\xi\, x(z) + \eta\, y(z)$. On sait qu'il existe en général plusieurs solutions, mais parmi celles-ci il est toujours possible de choisir la meilleure selon un critère facile à former dans chaque cas particulier (maximisation de $\xi\, X_i + \eta\, Y_i$). D'où la demarche itérative :

Partant de valeurs arbitraires $(a_i^o\ ,\ b_i^o)$ (correspondant, par exemple, aux cotes du mur et du toit géologiques de la formation minéralisée, c'est-à-dire en fait à l'absence de coupure), le système (3-2") donne des valeurs numériques ξ_1, η_1 et u_1. En résolvant (3-2') avec $\xi = \xi_1$; $\eta = \eta_1$ et $u = u_1$, on obtient (a_i^1 et b_i^1), valeurs que l'on porte dans (3-2") pour en déduire la seconde approximation ξ_2, η_2, u_2 , et l'on recommence. Examinons quelques cas simples.

a-1/ Supposons d'abord que H ne dépende que de V et d'une autre caractéristique additive Q, et se mette sous la forme

$$H(Q,V) = V\ f\left(\frac{Q}{V}\right) \tag{3-3}$$

Tel est le cas, entre autres, des expressions (2-3-1), (2-3-2) et (2-3-3). On a $\frac{\partial H}{\partial Q} = f'\left(\frac{Q}{V}\right)$, $\frac{\partial H}{\partial V} = -\ \frac{Q}{V}\ f' + f$ et le système (3-2) s'écrit, avec $m = Q/V$:

$$\begin{cases} f'(m)\ \dfrac{\partial\ Q_i}{\partial\ a_i} = S_i[f(m) - m\ f'(m) - \beta] \\ \\ f'(m)\ \dfrac{\partial\ Q_i}{\partial\ b_i} = S_i[\beta - \beta' - f(m) + m\ f'(m)] \end{cases}$$

Introduisons deux paramètres auxiliaires τ_a (<u>teneur de coupure au mur</u>) et τ_b (<u>teneur de coupure au toit</u>). Résolvons, en fonction de ces deux paramètres, le système :

$$\frac{1}{S_i}\frac{\partial Q_i}{\partial a_i} = - \tau_a$$

$$\frac{1}{S_i}\frac{\partial Q_i}{\partial b_i} = \tau_b$$

Les fonctions $Q_i(\tau_a, \tau_b)$ et $V_i(\tau_a, \tau_b)$ constituent la relation tonnage-teneur du panneau v_i. En sommant sur i, on obtient les relations tonnage-teneur globales. Il reste à déterminer τ_a et τ_b (teneurs de coupure optimales au mur et au toit) par les conditions :

$$\left(\begin{array}{l} \tau_a = \dfrac{1}{f'(m)} \quad [\beta + m\ f'(m) - f(m)] \\ \\ \tau_b = \dfrac{1}{f'(m)} \quad [\beta - \beta' + m\ f'(m) - f(m)] \end{array}\right.$$

où l'on substitue à $m = Q/V$ son expression $m(\tau_a, \tau_b)$ déduite des relations tonnages-teneurs paramétriques.

Souvent d'ailleurs β' est négligeable. On a alors $\tau_a = \tau_b = \tau$, et les relations tonneag-teneur s'expriment en fonction d'<u>un paramètre unique τ qui est la teneur de coupure au mur et au toit</u>.

<u>Remarque cruciale</u> - On se gardera bien de confondre <u>les relations tonnages-teneurs paramétriques</u> exprimées par les fonctions $Q(\tau)$ et $V(\tau)$, <u>avec la relation tonnage-teneur proprement dite</u> qui représente, pour un $\tau = \tau_o$, c'est-à-dire pour une instruction fixée, l'histogramme cumulé des $Q_i(\tau_o)$ et des $V_i(\tau_o)$ des différents panneaux d'exploitation. Les relations paramétriques nous ont servi essentiellement de procédé auxiliaire de calcul pour construire l'instruction optimale. Elles

n'en ont pas moins un sens physique précis, en tant qu'elles représentent l'évolution du tonnage total en minerai et métal en fonction de la teneur de coupure pratiquée au mur et au toit. Les relations proprement dites représentent la variabilité des caractéristiques $Q_i(\tau_o)$ et $V_i(\tau_o)$ des différents panneaux pour une teneur de coupure $\tau = \tau_o$ donnée. On peut les exprimer à l'aide des histogrammes cumulés. Il est plus commode d'introduire le paramètre teneur $x = q/v$, et de construire la courbe donnant le volume ou le tonnage $V(x)$ des panneaux $v_i(\tau_o)$ à teneur $q_i(\tau_o)/v_i(\tau_o) \geq x$.

b/ Si le facteur d/ intervient, c'est-à-dire si le mineur ne réalise pas exactement l'instruction qui lui est donnée, la fonction $H(V_o)$ doit être remplacée par l'espérance $E[H(V)]$. Le problème qui se pose ici consiste à déterminer les espérances et la matrice de covariance des V.A. $X(V)$, $Y(V)$... en fonction des paramètres α_j ou (a_i, b_i) de l'instruction V_o, puis à maximiser $E[H(V)] - \Phi(V,V')$ en α_j. L'instruction optimale V_o ainsi déterminée vérifiera $E[H(V)] < H(V_o)$, précisément parce que l'on est à l'optimum. Si donc on peut à la rigueur négliger les variances de $X(V)$, $Y(V)$,..., c'est-à-dire considérer ces caractéristiques comme connues (et non comme aléatoires) en fonction des α_j, ce n'est pas $X(V_o)$ qu'il faut substituer à $X(V)$, mais $E[X(V)]$ à V_o donné. Par exemple, dans le cas des panneaux prismatiques considérés plus haut, on peut penser qu'en chaque point $s \in S_i$ le mineur commettra une erreur $\delta\, a(s)$ sur le mur et $\delta\, b(s)$ sur le toit. Soit $X'(a,b;s)$ l'accumulation en s pour le mur a et le toit b. Au lieu de :

$$X(a_i, b_i) = \int_{S_i} X'(a_i\ b_i; s)\, ds$$

le mineur réalisera :

$$X'(a_i,b_i) = \int_{S_i} X'(a_i+\delta\ a(s),\ b_i + \delta\ b(s));s)\ ds$$

Soit en espérance :

$$E[X'(a_i,b_i)] = \int_{S_i} ds \int X'(a_i+\delta\ a,\ b_i+\ \delta\ b\ ;s)\ f(\delta a,\ \delta b)\ d\ \delta a\ \delta b$$

$f(\delta a,\ \delta b)$ désignant la loi (indépendante de s) de la V.A. $[\delta a(s),\ \delta b(s)]$. En pratique, on pourra prendre une loi de densité uniforme sur un segment de longueur donnée. On note que cette espérance s'exprime simplement en fonction de $X(a_i,b_i)$ lui-même :

(3-4) $$E[X'(a_i,b_i)] = \int X(a_i + \xi,\ b_i + \eta)\ f(\xi,\eta)\ d\ \xi\ d\ \eta$$

de sorte que les calculs effectifs seront en principe possibles.

IV - CAS OU LA TOTALITE DE L'INFORMATION EST DEJA DISPONIBLE

En réalité, les caractéristiques réelles ne seront jamais connues. Plaçons-nous d'abord dans le cas le plus simple, où l'information actuellement disponible ne doit pas être ultérieurement complétée, et où par conséquent il est possible d'élaborer dès aujourd'hui les instructions définitives. En krigeant les données, il est possible de former des estimateurs sans biais des caractéristiques $X(\alpha_j)$, $Y(\alpha_j)$ de chaque volume α_j, soient $X^*(\alpha_j)$, $Y^*(\alpha_j)$... Moyennant une hypothèse gaussienne, en effet, ces caractéristiques considérées comme des V.A. conditionnées par les informations disponibles, vérifient $E(X) = X^*$,

$E(Y) = Y^*, \ldots$ De plus, la matrice des covariances est également connue puisqu'elle coïncide avec la matrice des covariances du krigeage. La loi gaussienne de ces variables est donc bien déterminée ; soit $g(\alpha_j;x,y)$ sa densité. En négligeant le facteur d/ou en en tenant compte à l'aide d'une formule approchée du type (3-4)), la quantité à optimiser en α_j est donc :

$$(4\text{-}1) \qquad E[B(\alpha_j)] = \int h(V;x,y)\ g(\alpha_j;x,y)\ dx\ dy - \beta\ V(\alpha_j) - \beta'\ V'(\alpha_j)$$

Traitons avec quelques détails le cas déjà envisagé au paragraphe 3. Pour des (a_i,b_i) données, les volumes $V_i(a_i,b_i)$ et leur somme V sont connus. Les X, Y... sont des V.A. admettant des espérances connues $X^*(a_i,b_i)$, $Y^*(a_i,b_i)\ldots$ et une matrice de covariance connue. Cette matrice dépend d'ailleurs des (a_i,b_i) mais varie moins vite que les X^*, Y^* pour une même variation des paramètres, de sorte qu'en première approximation nous négligerons les dérivées partielles des covariances (Il serait d'ailleurs possible d'en tenir compte, mais en compliquant un peu les calculs). Comme on a par construction $X^* = \Sigma X_i^*(a_i,b_i)$ on a également :

$$\frac{\partial X^*}{\partial a_i} = \frac{\partial X_i^*}{\partial a_i}$$

de sorte que le système total (4-1) va se décomposer en I systèmes partiels. En effet, la densité gaussienne g (dans le cas de deux variables) est :

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\ \sigma_x\ \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \quad \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-X^*)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\,\frac{(x-X^*)(y-Y^*)}{\sigma_x\ \sigma_y} + \frac{(y-Y^*)^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}$$

Par suite, en négligeant les dérivées partielles des covariances, on trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial a_i} = \frac{g(x,y)}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{x-X^*}{\sigma_x^2} - \rho\,\frac{y-Y^*}{\sigma_x\sigma_y}\right)\frac{\partial X_i^*}{\partial a_i} - \left(\frac{y-Y^*}{\sigma_y^2} - \rho\,\frac{x-X^*}{\sigma_x\sigma_y}\right)\frac{\partial Y_i^*}{\partial a_i}\right]$$

et une expression analogue pour $\frac{\partial g}{\partial b_i}$. Introduisons donc les fonctions auxiliaires :

$$(4\text{-}2)\quad\left\{\begin{array}{l} \xi(a_i,b_i) = \dfrac{1}{1-\rho^2}\displaystyle\int g(x,y)\left[\frac{x-X^*}{\sigma_x^2} - \rho\,\frac{y-Y^*}{\sigma_x\sigma_y}\right] h(V,x,y)\;dx\;dy \\[3ex] \eta(a_i,b_i) = \dfrac{1}{1-\rho^2}\displaystyle\int g(x,y)\left[\frac{y-Y^*}{\sigma_y^2} - \rho\,\frac{x-X^*}{\sigma_x\sigma_y}\right] h(V,x,y)\;dx\;dy \\[3ex] u(a_i,b_i) = \displaystyle\int \frac{\partial}{\partial V}\;h(V,x,y)\;g(x,y)\;dx\;dy \end{array}\right.$$

Le système général (4-1) se met alors sous la forme :

$$(4\text{-}3)\quad\left\{\begin{array}{l} \xi\;\dfrac{\partial X_i^*}{\partial a_i} + \eta\;\dfrac{\partial Y_i^*}{\partial a_i} = S_i(u-\beta) \\[3ex] \xi\;\dfrac{\partial X_i^*}{\partial b_i} + \eta\;\dfrac{\partial Y_i^*}{\partial b_i} = S_i(\beta-\beta'-u) \end{array}\right. \qquad (i \in I)$$

Faisons jouer à ξ, η et u le rôle habituel de paramètres de coupures. A ξ, η et u donnés, et pour chaque $i \in I$, la résolution de (4-3), système de deux équations à deux inconnues, permet de calculer a_i et b_i en fonction des paramètres auxiliaires :

$$a_i = a_i(\xi,\eta,u) \quad , \quad b_i = b_i(\xi,\eta,u)$$

En substituant dans les expressions $X_i^*(a_i,b_i)$, $Y_i^*(a_i,b_i)$, on obtient les relations tonnage/teneur paramétrique sous la forme $X_i^*(\xi,\eta,u)$, $Y_i^*(\xi,\eta,u)$ et $V_i(\xi,\eta,u)$ pour chaque panneau S_i, puis par sommation la relation paramétrique totale :

$$\begin{cases} X^*(\xi,\eta,u) = \sum X_i^* \quad , \quad Y^*(\xi,\eta,u) = \sum Y_i^* \\ \\ V(\xi,\eta,u) = \sum\limits_i V_i(\xi,\eta,u) \end{cases}$$

Il reste enfin à déterminer les valeurs optimales des paramètres de coupure ξ,η,u. Pour celà, il suffit de résoudre le système (4-2) en ξ,η,u, après y avoir remplacé X^* , Y^* et V par leurs expressions ci-dessus. Les calculs effectifs se font selon la méthode itérative exposée au paragraphe 3.

Traitons plus à fond quelques exemples.

a/ La fonction H dépend uniquement de V et d'une quantité additive Q, et elle est de la forme (déjà introduite en (3-3)) :

(4-4) $$H(Q,V) = V\ f\ (\tfrac{Q}{V}) = V\ f(m)$$

On ne connaît pas $Q(a_i,b_i) = \sum Q_i(a_i,b_i)$, mais seulement un estimateur Q^* sans biais, d'ailleurs égale à la somme des estimateurs $Q_i^*(a_i,b_i)$ également sans biais relatifs à chacun des panneaux S_i :

$$Q^* = \sum_i Q_i^*(a_i,b_i)$$

Q est donc assimilée à une V.A. gaussienne d'espérance Q^* et de variance σ^2 connue. En principe σ^2 dépend des paramètres a_i,b_i, mais nous négligerons ses dérivées partielles. La quantité à optimiser est donc :

$$E[B(a_i,b_i)] = \frac{V}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int f\left(\frac{Q}{V}\right) e^{-\frac{(Q-Q^*)^2}{2\sigma^2}} dQ - \beta V - B'V'$$

$$= \frac{V^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, e^{-\frac{(Vz-Q^*)^2}{2\sigma^2}} dz - \beta V - \beta' V'$$

D'où le système :

$$(4-4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{S_i}\,\dfrac{\partial Q_i^*}{\partial a_i} = -\tau_a \\[2ex] \dfrac{1}{S}\,\dfrac{\partial Q_i^*}{\partial b_i} = \tau_b \end{cases}$$

où l'on a posé :

$$(4-5)\qquad \begin{cases} \tau_a(a_i,b_i) = \dfrac{+\beta + \displaystyle\int\left[2V - \frac{V^2(Vz-Q^*)}{\sigma^2}\right] z\, e^{-\frac{(Vz-Q^*)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(z)dz}{\sigma\sqrt{2\pi}}}{\dfrac{V^2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int (Q^*-Vz)\, f(z)\, e^{-\frac{(Vz-Q^*)^2}{2\sigma^2}} dz} \\[6ex] \tau_b = \dfrac{\beta' - \beta - \displaystyle\int\left[2V - \frac{V^2(Vz-Q^*)}{\sigma^2}\right] z\, f(z)\, e^{-\frac{(Vz-Q^*)^2}{2\sigma^2}} \frac{dz}{\sigma\sqrt{2\pi}}}{\dfrac{V^2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int (Q^*-Vz)\, f(z)\, e^{-\frac{(Vz-Q^*)^2}{2\sigma^2}} dz} \end{cases}$$

La méthode est la même : traitant τ_a et τ_b comme de simples paramètres de coupures (au mur et au toit) on résoud (4-4) pour chaque i, d'où les relations paramétriques $Q_i^*(\tau_a,\tau_b)$ et $V_i(\tau_a,\tau_b)$. En sommant en i, on obtient les relations paramétriques totales $Q^*(\tau_a,\tau_b)$ et $V(\tau_a,\tau_b)$. En portant dans (4-5), enfin et en résolvant en τ_a, τ_b on obtient les valeurs optimales des paramètres de coupure.

Ici encore, le problème se simplifie notablement si l'on peut négliger les dépenses de découverture. On a alors $\tau_a = \tau_b = \tau$, et il y a un seul paramètre de coupure, le même pour le mur et pour le toit.

b/ Le deuxième exemple est directement inspiré des phosphates du Togo. Les caractéristiques utiles sont au nombre de deux, soient X et Y, et la fonction H, indépendante de V est définie par :

$$H(X,Y) = \begin{cases} Y & \text{si } X \geq t_o Y \\ 0 & \text{si } X < t_o Y \end{cases}$$

(Y(V) représente le volume de la fraction granulométrique utile contenue dans V, X(V) la quantité de substance utile contenue dans cette fraction. Le minerai ne vaut rien si cette fraction est à teneur $X/Y < t_o$, et a une valeur pratiquement indépendante de cette teneur si $X/Y \geq t_o$). Ici encore X et Y sont des gaussiennes d'espérance $X^* = \sum X_i^*$ et $Y^* = \sum Y_i^*$, avec une matrice de covariances connues peu sensibles aux variations des a_i . Désignons par $g(x,y)$ la densité de (X,Y). La quantité à optimiser est :

$$(4\text{-}6) \qquad E[B(a_i,b_i)] = \iint_{x \geq t_o y} y\, g(x,y)\, dx\, dy - \beta V - \beta' V'$$

L'intégrale s'évalue commodément par changement de variable. Introduisons, en effet, la quantité additive $Z = X - t_o Y$ et ses estimateurs sans biais $Z_i^* = X_i^* - t_o Y_i^*$, $Z^* = X^* - t_o Y^*$. Z est une gaussienne d'espérance Z^* et de variance $\sigma^2 = \sigma_x^2 - 2\, t_o\, \sigma_{xy} + t_o^2\, \sigma_y^2$. A Z fixé, soit $Z = z$, l'espérance conditionnelle de Y est :

$$\begin{cases} E(Y|z) = Y^* + \alpha(z-Z^*) \\ \\ \alpha = \dfrac{\sigma_{YZ}}{\sigma_Z^2} = \dfrac{\sigma_{XY} - t_o\,\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 - 2\,t_o\,\sigma_{XY} + t_o^2\,\sigma_Y^2} \end{cases}$$

Ainsi, l'intégrale qui figure en (4-6) s'exprime comme suit :

$$\iint_{x \geq t_o y} y\,g(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_o^\infty [Y^* + \alpha(z-Z^*)]\, e^{-\frac{(z-Z^*)^2}{2\sigma^2}}\,dz$$

$$= Y^*\,P(Z^*) + \frac{\alpha\,\sigma}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{Z^{*2}}{2\sigma^2}}$$

La quantité auxiliaire $P(Z^*)$, définie par

$$P(Z^*) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_o^\infty e^{-\frac{(z-Z^*)^2}{2\sigma^2}}\,dz = P(X - t_o Y \geq 0) \tag{4-7}$$

représente la probabilité pour que l'on ait $Z = X - t_o Y \geq 0$, c'est-à-dire pour que <u>le gisement ait une valeur marchande</u> non nulle. La quantité (4-6) à optimiser s'écrit ainsi :

$$E(B) = Y^*\,P(Z^*) + \frac{\alpha\,\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{Z^{*2}}{2\,\sigma^2}\right\} - \beta V - \beta' V' \tag{4-8}$$

Comme d'habitude, nous négligerons les dérivées partielles de σ^2 vis-à-vis de celles de Y^* et Z^*. D'après (4-7), on a :

$$\frac{\partial P}{\partial Z^*} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_o^\infty \frac{d}{dz}\, e^{-\frac{(z-Z^*)^2}{2\sigma^2}}\,dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-Z^{*2}/2\,\sigma^2}$$

Introduisons alors les fonctions auxiliaires :

$$
(4\text{-}9) \quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial\ E(B)}{\partial\ Y^*} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{(z-Z^*)^2}{2\,\sigma^2}}\, dz \\[2ex] \xi = \dfrac{\partial\ E(B)}{\partial\ Z^*} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} (Y^* - \alpha Z^*) \exp\left\{- \dfrac{Z^{*2}}{2\,\sigma^2}\right\} \end{cases}
$$

On voit que l'optimisation de (4-8) conduit au système suivant :

$$
(4\text{-}10) \quad \begin{cases} \xi\ \dfrac{\partial\ Z_i^*}{\partial a_i} + P\ \dfrac{\partial\ Y_i^*}{\partial a_i} = -\ \beta\ S_i \\[2ex] \xi\ \dfrac{\partial\ Z_i^*}{\partial b_i} + P\ \dfrac{\partial\ Y_i^*}{\partial b_i} = (\beta - \beta')\ S_i \end{cases}
$$

Ce système exprime que l'on choisit les cotes a_i et b_i du mur et du toit en appliquant à la substance associée à la combinaison linéaire $\xi Z + PY$ les deux teneurs de coupure β au mur et $\beta - \beta'$ au toit. On sait donc le résoudre numériquement pour chaque panneau i et pour ξ et P donnés. La méthode d'approximations successives exposée au paragraphe 3 doit permettre après un petit nombre d'itérations de trouver la solution numérique du système global (4-9)-(4-10), c'est-à-dire les valeurs des a_i et b_i optimisant E(B). Les paramètres de coupure ξ et P permettent aussi, si l'on veut, de construire les relations tonnage-teneur paramétriques. Mais on notera surtout la signification très spéciale du paramètre P, qui est la probabilité de $\hat{Z} = X - t_0 Y \geq 0$. Pour diminuer le risque de ruine, on cherche spontanément à rendre cette probabilité très voisine de l'unité. Mais celà conduit à pratiquer des teneurs de coupure élevées, c'est-à-dire à écrémer le gisement, donc à perdre des quantités considérables de bon minerai et à diminuer d'autant E(B). Le système (4-9)-(4-10) met ainsi en équilibre optimal le risque de ruine et la perte due à un écrémage.

V - CAS OU L'ON ENVISAGE UN COMPLEMENT D'INFORMATION

Venons-en maintenant au cas où l'on envisage un complément de travaux de reconnaissance (par exemple, l'exécution de sondages à maille serrée en avant du front d'exploitation). Il n'est plus question de fixer dès maintenant les valeurs numériques des paramètres α_j qui déterminent l'instruction définitive V_o , mais seulement de préciser la règle suivant laquelle celà sera fait dès que le complément d'information attendu sera effectivement disponible. Une fois cette règle définie, les paramètres futurs α_j peuvent être considérés comme des V.A., dont la loi dépend évidemment de la règle choisie. Lorsque les α_j sont fixés, l'espérance conditionnelle du futur bénéfice est une fonction $E(B|\alpha_j)$ de ces paramètres. Si $F(d\alpha_j)$ désigne la loi des α_j (pour une règle donnée), l'espérance actuelle de B est donc :

$$E(B) = \int E(B|\alpha_j)\ F(d\alpha_j)$$

C'est cette expression qu'il convient d'optimiser. Parmi les règles possibles pouvant présider au choix futur des paramètres α_j, on doit donc dès aujourd'hui choisir la règle optimisant l'expression E(B) écrite ci-dessus. C'est avec cette règle optimale que l'on doit faire le bilan prévisionnel (c'est-à-dire en espérance) de l'exploitation, et aussi estimer (toujours en espérance) les tonnages futurs de minerai et de métal. Traitons avec quelques détails notre cas de simplification habituel.

<u>La méthode des variables utiles</u>. Parmi les prismes de base S_i dont la réunion constitue le gisement, certains, correspondant au groupe $I_o \subset I$ d'indices, sont déjà informés, tandis que les autres, correspondant

au complémentaire $I_1 = I - I_o$ ne le sont pas encore (mais le seront avant leur mise en exploitation effective : cette condition est impérative, rappelons-le, puisque la règle fixant l'instruction doit être formulée en termes tels qu'elle soit effectivement applicable au moment de l'exploitation). Si toutes les données (correspondant aux indices $i \in I_1$ aussi bien qu'aux indices $i \in I_o$) étaient déjà connues, on déterminerait les cotes a_i et b_i du mur et du toit de chaque panneau en résolvant le système (4-2), (4-3). D'après la structure de ce système, on peut traiter chacun des panneaux S_i indépendamment des autres dès que les paramètres de coupure ξ et η sont connus. Par contre, le choix optimal de ces paramètres fait intervenir les équations (4-2), c'est-à-dire la totalité de ces informations (résumée par les estimateurs $X_i^*(a_i,b_i)$, $Y_i^*(a_i,b_i)$, fonctions des paramètres a_i b_i et des données expérimentales). Or, parmi ces estimateurs, certains (les X_i^* et Y_i^* pour $i \in I_o$) sont déjà connus actuellement, tandis que les autres (ceux qui correspondent aux indices $i \in I_1$) ne le sont pas. Par conséquent, si ξ et η sont fixés a priori, on peut :

a/ Déterminer dès maintenant les cotes optimales a_i et b_i du mur et du toit des panneaux S_i, $i \in I_o$ et former les estimateurs sans biais X_i^* et Y_i^* correspondants.

b/ Etudier expérimentalement les caractéristiques des X_i^*, Y_i^*, $i \in I_o$ considérées comme constituant des V.R. (dont le support est S_i), ou variables utiles (dont la définition dépend du choix des paramètres de coupure ξ et η).

c/ Par une extrapolation facile de ces caractéristiques, on peut alors former des estimateurs sans biais X_i^{**} , Y_i^{**} , $i \in I_1$ des valeurs que prendront les variables utiles associées aux panneaux non encore informés lorsque le complément de reconnaissance aura été effectué, et considérer ces valeurs futures X_i^* , Y_i^* comme des V.A. dont les espérances sont aujourd'hui X_i^{**} et Y_i^{**} (et dont la matrice des covariances est connue). De même, V_i est estimé par un estimateur sans biais V_i^{**} .

d/ Pour ξ et η toujours fixés, les estimateurs futurs $X^*(\xi,\eta)$, $Y^*(\xi,\eta)$ de la relation paramétrique sont ainsi des V.A. d'espérances X^{**} , Y^{**} connues et de variances également connues. Alors $X = (X-X^*) + (X^*-X^{**}) + X^{**}$ est assimilable à une gaussienne dont l'espérance X^{**} est connue et dont la variance, somme des variances de $X-X^*$ et de X^*-X^{**} est également connue aujourd'hui, et on a une décomposition analogue pour Y et pour V de sorte que la loi actuelle de (X,Y,V) est connue. Cette loi dépend du choix des paramètres de coupures ξ et η . On déterminera donc dès aujourd'hui les valeurs $\xi = \xi_0$ et $\eta = \eta_0$ optimisant l'espérance de

$$B = h(X,Y\ldots,V) - \beta V - \beta' V'$$

pour la loi actuelle de (X,Y,V). Ceci conduit à un système identique à (4-2), (4-3), à ceci près qu'on substitue X_i^{**} et Y_i^{**} à X_i^* et Y_i^* pour $i \in I_1$, et la loi actuelle de (X,Y,V) à la loi g. La résolution numérique s'effectue par la même méthode d'approximations successives.

e/ A ces valeurs optimales (ξ_0, η_0) des paramètres de coupure, on associe non seulement l'espérance correspondante de B, mais les estimateurs actuels des X_i, Y_i, V_i , qui sont les X_i^{**} etc..., et ceux des X, Y, V, qui sont les sommes en i des précédents. Les variances d'estimation se calculent également par composition.