Fontainebleau N-299

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 123

LES COVARIANCES GENERALISEES POLYNOMIALES

-=-=-=-=-=-=-

G. MATHERON Octobre 1972

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 123

LES COVARIANCES GENERALISEES POLYNOMIALES

0 - BUT DE CETTE NOTE.

Les procédés automatiques d'identification pour les covariances généralisées utiliseront vraisemblablement de façon systématique des expressions de la forme :

$$(1) \qquad K(h) = - a_o|h| + \frac{a_1}{3!}|h|^3 - \dots + (-1)^{k+1}\frac{a_k}{(2k+1)!}|h|^{2k+1}$$

Il convient donc de chercher quelles conditions doivent vérifier les coefficients a_o, $a_1, \dots a_k$ pour que la fonction K(h) soit de type positif conditionnel d'ordre k. Le théorème de Bochner généralisé permet de resoudre assez facilement ce problème. Mais en fait la condition ainsi trouvée est plus forte qu'il n'est réellement nécessaire. Si L désigne le diamètre du voisinage de travail qui sera effectivement utilisé pour le calcul d'un krigeage par exemple, on n'a besoin de supposer la relation (1) valable que pour $|h| \leq L$. Le problème posé est donc le suivant : quelles conditions doivent vérifier les coefficients pour qu'il existe une fonction K de type positif conditionnel d'ordre k vérifiant (1) sur la boule de rayon L? En fait pour $k \leq 1$ nous montrerons même que, lorsque ces conditions sont vérifiées, il existe nécessairement une covariance stationnaire coïncidant avec K(h) à un polynome pair près sur la boule de diamètre L.

Dans le premier paragraphe, je montre qu'il suffit de trouver la solution du problème dans $\mathbb{R}^1$, une transformation simple permettant d'en déduire la solution dans $\mathbb{R}^n$. J'examine ensuite le problème "global" (condition pour que (1) soit vraie dans tout l'espace), puis le problème "local" (condition pour que (1) soit vérifiée sur la boule de rayon L).

1 - RELATION ENTRE LES SOLUTIONS DANS $\mathbb{R}^1$ ET DANS $\mathbb{R}^n$.

On sait que l'opérateur de montée transposée $M^*_{n,1}$ établit une relation bijective entre les fonctions isotropes de type positif dans $\mathbb{R}_1$ et dans $\mathbb{R}^n$ respectivement (Note Gst. N° 120), et on vérifie sans peine que cette propriété subsiste pour les fonctions de type positif conditionnel d'ordre k. D'autre part, les fonctions propres de cet opérateur sont les fonctions $|h|^\lambda$, avec :

$$(1\text{-}1) \qquad M^*_{n,1} \; |h|^\lambda = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \quad \Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\sqrt{\pi} \; \Gamma(\frac{\lambda+n}{2})} \quad |h|^\lambda$$

Pour n = 3, le coefficient de h^λ est particulièrement simple :

$$(1\text{-}1') \qquad M^*_{3,1} \; |h|^\lambda = \frac{1}{\lambda+1} \; |h|^\lambda$$

Pour λ entier impair et n = 2, on obtient explicitement :

$$(1\text{-}1'') \qquad M^*_{2,1} \qquad |h|^{2p+1} = \frac{2}{\pi}^{1+2p} \; \frac{(p!)^2}{(2p+1)!} \quad |h|^{2p+1}$$

Il en résulte que le polynome écrit en (1) est de type positif conditionnel d'ordre k dans $\mathbb{R}^1$ si et seulement si le polynome :

$$(1\text{-}2) \qquad K_n(r) = \sum_{o}^{k} (-1)^{p+1} \frac{a_p}{(2p+1)!} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) p!}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{2p+n+1}{2}\right)} r^{2p+1}$$

possède la même propriété dans $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 3$ et $n = 2$, ces polynomes s'écrivent explicitement :

$$(1\text{-}2') \qquad K_3(r) = \sum_{o}^{k} (-1)^{p+1} \frac{a_p}{(2p+2)!} r^{2p+1}$$

$$(1\text{-}2'') \qquad K_2(r) = \frac{2}{\pi} \sum_{o}^{k} (-1)^{p+1} 2^{2p} \left(\frac{p!}{(2p+1)!}\right)^2 a_p\, r^{2p+1}$$

Il suffit donc d'adopter ces notations (1-2) pour les polynomes K_n pour que la condition cherchée que doivent vérifier les coefficients a_p ne fassent pas intervenir la dimension n.

Ces résultats, établis pour le problème "global", restent vrais en ce qui concerne le problème local. Si l'on pose, en effet :

$$\varphi_n = M^{*}_{n,n-k}\, \varphi_{n-k}$$

il est facile de vérifier à l'aide des expressions explicites données dans la Note 120 que la valeur de φ_n en $r > 0$ ne dépend que des valeurs prises par φ_{n-k} sur $[o,r]$. Pour k entier pair, d'autre part, l'opérateur inverse $(M^{*}_{n,n-k})^{-1}$ est purement local (φ_{n-k} s'exprime à l'aide des dérivées de φ_n), autrement dit $K_1(r)$ s'exprime à l'aide des dérivées de K_3, ou de K_5 etc... Dans le cas impair, on note que $K_{2p+2}(r)$ ne dépend que des valeurs de $K_{2p+1}(x)$, $x \in [o,r]$, donc que K_1 ne dépend lui-même que de ces mêmes valeurs. On a donc dans tous les cas correspondance bijective entre les restrictions à la boule $r \leq L$ des fonctions de type positif conditionnel dans $\mathbb{R}^1$ et dans $\mathbb{R}^n$.

Comme la règle (1-2) reste valable localement (sur la boule $r \leq L$), la restriction de K_n à cette boule est polynomiale si et seulement si il en est de même de la restriction de K_1. Ainsi, pour le problème local également, l'usage des notations (1-2) permet d'exprimer les conditions cherchées sans faire intervenir le nombre des dimensions de l'espace.

2 - LE PROBLEME GLOBAL.

Dans l'espace à une seule dimension, le théorème de Bochner généralisé appliqué à la fonction $K_1(h)$ conduit à la solution du problème global. Si l'on part de la relation (valable à un polynome pair près de degré $\leq 2k$) :

$$\frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)!}\,|h|^{2p+1} = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi uh - 1_B(u)\,P_k(2\pi uh)}{(4\pi^2u^2)^{k+1}}\,(2\pi u)^{2k-2p}\,du$$

($p = 0,1,\dots k$ et B désignant un intervalle ouvert borné contenant l'origine), on voit que la mesure spectrale associée à $K_1(h)$ admet la densité :

$$(2\text{-}1) \qquad q_1(u) = 2\sum_{p=o}^{k} a_p(2\pi u)^{2k-2p}$$

Cette densité est positive si et seulement si on a :

$$(2\text{-}1') \qquad \sum_{o}^{k} a_p\, x^{k-p} \geq 0 \qquad \forall x \geq 0$$

Telle est donc la condition cherchée. En examinant les cas $x \downarrow 0$ et

$x \uparrow \infty$, on voit que cette condition entraine toujours en particulier :

(2-1") $a_o \geq 0$ $a_k \geq 0$

Pour k = 0 et pour k = 1, ces conditions sont suffisantes. Pour k = 2, on doit écrire :

$$a_o x^2 + a_1 x + a_2 \geq 0 \qquad (x \geq 0)$$

On doit donc adjoindre à (2-1") la condition supplémentaire :

(2-2) $$a_1 \geq - 2 \sqrt{a_o a_2}$$

Les polynomes limite sont donc du type :

$$\begin{cases} K_1(h) = - |h| - \frac{1}{3} \alpha |h|^3 - \frac{1}{120} \alpha^2 |h|^5 \\ K_2(h) = - |h| - \frac{2}{q} \alpha |h|^3 - \frac{1}{225} \alpha^2 |h|^5 \\ K_3(h) = - |h| - \frac{1}{6} \alpha |h|^3 - \frac{1}{360} \alpha^2 |h|^5 \end{cases}$$

3 - LE PROBLEME LOCAL.

La fonction périodique coïncidant sur $[-L, L]$ avec $\frac{L}{2} - |h|$ admet le développement de Fourier :

$$\frac{L}{2} - |h| = \Sigma_o^\infty \frac{4L}{\pi^2 (2p+1)^2} \cos (2p+1) \pi \frac{h}{L}$$

En intégrant deux fois en h, on en déduit (toujours avec $|h| \leq L$) :

$$\frac{|h|^3}{6} - \frac{Lh^2}{4} + \frac{L^3}{24} = \Sigma_o^\infty \frac{4\ L^3}{\pi^4(2p+1)^4} \cos\ (2p+1)\ \pi\ \frac{h}{L}$$

En réitérant l'opération, on obtient l'égalité suivante valable à un polynome pair près de degré $\leq 2k$ et sur l'intervalle $[-L,L]$:

$$(3\text{-}1) \qquad (-1)^{k+1} \frac{|h|^{2k+1}}{(2k+1)!} = \Sigma_o^\infty \frac{4\ L^{2k+1}}{\pi^{2k+2}(2p+1)^{2k+2}} \cos\ (2p+1)\ \pi\ \frac{h}{L}$$

Autrement dit, une fonction K(h) dont la restriction à $[-L,L]$ est de la forme (1) peut s'écrire sur ce même intervalle $[-L,L]$ (à un polynome pair près) :

$$(3\text{-}2) \qquad \begin{cases} K(h) = \sum\limits_{q=o}^{\infty} C_q \cos(2q+1)\ \pi\ \frac{h}{L} \\ \\ C_q = 4 \sum\limits_{p=o}^{k} a_p \frac{L^{2p+1}}{\pi^{2p+2}\ (2q+1)^{2p+2}} \end{cases}$$

Nous obtiendrons des <u>conditions suffisantes</u> en écrivant :

$$(3\text{-}3) \qquad \boxed{C_q \geq 0 \quad , \quad q = 0,\ 1, \ldots}$$

Il est facile de voir que ces conditions (3-3) sont suffisantes. En effet, si elles sont vérifiées, la fonction périodique définie sur $\mathbb{R}^1$ par le développement de Fourier (3-2) est de type positif (comme somme de cosinus affectés de coefficients positifs), donc a fortiori de type positif conditionnel. Ces conditions étant vérifiées, il existe donc bien une covariance généralisée coïncidant sur $[-L,L]$ avec le polynome (1).

a - Conditions Générales.

Je ne suis pas arrivé à montrer, dans le cas général, que ces conditions suffisantes sont également nécessaires, mais je n'ai pas pu non plus former de contre exemple montrant qu'elles ne le sont pas. Toutefois, dans le cas particulier $k = 1$, nous verrons que les conditions (3-3) sont effectivement nécessaires et suffisantes.

Donnons d'abord une formulation générale du problème. Si une fonction $K(h)$ sur $[-L, L]$ est la restriction d'une covariance généralisée d'ordre k, on doit avoir :

$$\int_0^L \int_0^L f(x)\, K(x-y)\, f(y)\, dx\, dy \geq 0 \tag{3-4}$$

pour toute fonction f continue sur $(0, L)$ et vérifiant :

$$\int_0^L x^p\, f(x)\, dx = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots k)$$

ou, ce qui revient au même :

$$\int_0^L \frac{(L-x)^p}{p!}\, f(x)\, dx = 0 \qquad (p = 0, 1, \ldots k) \tag{3-5}$$

Si l'on désigne par g la $k+1^{\text{ème}}$ primitive de f, nulle en 0 ainsi que ses k premières dérivées, soit :

$$g(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^k}{k!}\, f(\xi)\, d\xi$$

les conditions (3-5) équivalent à :

$$g(L) = g'(L) = \ldots = g^{(k)}(L) = 0$$

On peut donc reformuler comme suit la condition cherchée :

Pour toute fonction g sur (0,L) admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre k+1 et vérifiant :

(3-6) $$g(0) = g(L) = g'(0) = g'(L) = \dots = g^{(k)}(0) = g^{(k)}(L) = 0$$

on doit avoir :

(3-7) $$\int_0^L \int_0^L g^{(k+1)}(x)\ K(x-y)\ g^{(k+1)}(y)\ dx\ dy \geq 0$$

On peut affaiblir les conditions (3-6) en remarquant qu'elles sont vérifiées par les fonctions g de la forme :

$$g(x) = x^{k+\varepsilon}\ (L-x)^{k+\varepsilon}\ \varphi(x)$$

pour un $\varepsilon > 0$ et une fonction φ suffisamment régulière. Passant à la limite $\varepsilon \downarrow 0$, nous trouvons les conditions nécessaires cherchées :

Condition (a) - Pour toute fonction g sur (0,L) admettant des dérivées jusqu'à l'ordre k+1 et vérifiant :

(3-8) $$g(0) = g(L) = \dots = g^{(k-1)}(0) = g^{(k-1)}(L) = 0$$

on doit avoir :

(3-9) $$\int_0^L \int_0^L g^{(k+1)}(x)\ K(x-y)\ g^{(k+1)}(y)\ dx\ dy \geq 0$$

Pour k = 0, la condition (3-9) doit être vérifiée pour toute fonction g suffisamment régulière (les conditions (3-8) disparaissent).

On note que les conditions (3-8)-(3-9) sont nécessaires et suffisantes pour que la restriction de $K(x-y)$ à $[0,L] \times [0,L]$ soit de type positif conditionnel (c'est-à-dire vérifie $\int \lambda\ K\ \lambda \geq 0$ pour toute mesure $\lambda \in \Lambda_k$ dont le support est contenu dans l'intervalle fermé $[0,L]$). Elles sont donc évidemment nécessaires pour que K soit la restriction d'une fonction de type positif conditionnel sur la droite entière, mais peut-être pas suffisantes (car il n'est pas évident que toute fonction de type ≥ 0 conditionnel sur $[0,L] \times [0,L]$ admette un prolongement de type ≥ 0 conditionnel sur la droite entière.

b - <u>Cas des Covariances Polynomiales</u>.

Soit g une fonction vérifiant les conditions (3-6), et calculons l'expression :

$$I_k(g) = \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^L \int_0^L g^{(k+1)}(x)\ |x-y|^{2k+1}\ g^{(k+1)}(y)\ dx\ dy$$

Pour celà, considérons d'abord la fonction φ définie sur $[0,L]$ par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^L |x-y|^{2k+1}\ g^{(k+1)}(y)\ dy$$

En explicitant cette intégrale sous la forme :

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^x (x-y)^{2k+1}\ g^{(k+1)}(y)\ dy + \frac{1}{(2k+1)!} \int_x^L (y-x)^{2k+1}\ g^{(k+1)}(y)\ dy$$

et en effectuant des intégrations par;parties successives, les conditions (3-6) donnent :

$$\varphi(x) = \frac{1}{k!}\int_0^x (x-y)^k \, g(y)\, dy + \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_x^L (y-x)^k \, g(y)\, dy$$

d'où l'on déduit :

(3-10) $$\varphi^{(k+1)}(x) = 2\, g(x)$$

Pour calculer $I_k(g)$, il reste à écrire, en effectuant une intégration par parties :

$$I_k(g) = \int_0^L g^{(k+1)}(x)\ \varphi(x)\, dx = (-1)^{k+1}\int_0^L g(x)\ \varphi^{(k+1)}(x)\, dx$$

pour trouver l'expression cherchée

(3-11) $$I_k(g) = (-1)^{k+1}\ 2\int_0^L [g(x)]^2\, dx$$

Pour une fonction K(h) de la forme

$$K(h) = -\, a_o|h| + \frac{a_1}{3!}\,|h|^3 - \ldots + (-1)^{k+1}\,\frac{a_k}{(2k+1)!}\,|h|^{2k+1}$$

et la même fonction g que ci-dessus, nous trouvons de même :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^L g^{(k+1)}(x)\ K(x-y)\ g^{(k+1)}(y)\, dy = \sum_{p=o}^{k} a_p \int_0^L [g^{(k-p)}(x)]^2 dx$$

Cette expression doit être positive pour toute fonction g vérifiant (3-6). En remplaçant g par $x^{k+\varepsilon}\,(L-x)^{k+\varepsilon}\,\varphi(x)$, et en faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on voit que I doit être ≥ 0, même si g vérifie seulement (3-8).

D'où le résultat :

Condition (b) - Pour que K(x-y) soit de type positif conditionnel sur $[0,L]^2$, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\sum_{p=o}^{k} a_p \int_0^L [g^{(k-p)}(x)]^2 \, dx \geq 0$$

pour toute fonction g admettant des dérivées continues jusqu'à l'odre k-1 s'annulant en x = 0 et x = L.

Cette condition est évidemment nécessaire pour que K(h) soit la restriction à [-L, +L] d'une fonction de type positif conditionnel sur la droite entière, mais ici encore j'ignore si elle est suffisante.

c - Expression en Séries de Fourier.

Soit f une fonction continue sur [0,L] et :

$$\alpha_p = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \pi p \frac{x}{L} \, dx \qquad \beta_p = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \pi p \frac{x}{L} \, dx$$

les coefficients de Fourier des fonctions f_s et f_a définies par :

$$f_s(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq L) \\ f(-x) & (-L \leq x \leq 0) \end{cases} \qquad f_a(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < L) \\ 0 & (x = 0, x = L, x = -L) \\ -f(-x) & (-L < x < 0) \end{cases}$$

soit :

$$f_s(x) = \Sigma \alpha_p \cos \pi p \frac{x}{L} \quad , \quad f_a(x) = \Sigma \beta_p \sin \pi p \frac{x}{L}$$

D'autre part, la fonction définie sur [-L,L] par :

$$\varphi(x) = \Sigma\ \alpha_{2p} \cos 2\pi\ p \frac{x}{L} + \Sigma\ \beta_{2p} \sin 2\pi\ p \frac{x}{L}$$

vérifie

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & (0 < x < L) \\ \dfrac{f(0) + f(L)}{2} & (x = 0) \\ f(x+L) & (-L < x < 0) \end{cases}$$

La relation :

$$f(x) = f_s(x) + f_a(x) - \varphi(x) = \Sigma\ [\alpha_{2p+1} \cos^{(2p+1)} \pi \frac{x}{L} + \beta_{2p+1} \sin^{(2p+1)} \pi \frac{x}{L}]$$

est donc vérifiée pour $0 < x < L$. En $x = 0$, la série n'est pas égale à $f(o)$ mais à $\frac{f(o) - f(L)}{2}$, et à $\frac{f(L) - f(o)}{2}$ en $x = L$.

D'autre part, il est facile de voir que les fonctions $\cos^{(2p+1)} \pi \frac{x}{L}$ et $\sin^{(2p+1)} \pi \frac{x}{L}$ sur $[0,L]$ forment un système orthogonal. La condition (b) peut donc s'écrire :

$$(3\text{-}12) \quad \sum_{j=o}^{\infty} (\alpha^2_{2j+1} + \beta^2_{2j+1}) \left[a_o (2p+1)^{2k} \frac{\pi^{2k}}{L^{2k}} + a_1 (2p+1)^{2k-2} (\tfrac{\pi}{L})^{2k-2} + \ldots + a_k\right] \geq 0$$

pour toute fonction g dont les coefficients de Fourier impair sont les α_{2j+1} et les β_{2j+1}, pourvu que g vérifie les conditions (3-8). Il est clair que les conditions (3-3) entraînent les conditions (3-12), mais la réciproque n'est pas évidente, (3-12) n'ayant besoin d'être vérifiées que pour les fonctions g satisfaisant à (3-8).

Pour $\underline{k = 0}$ et $\underline{k = 1}$, toutefois, il y a identité entre les conditions (3-12) et (3-3), de sorte que, dans ce cas, nous avons affaire à une condition <u>nécessaire et suffisante</u>.

En effet, pour $k = 1$ (et a fortiori pour $k = 0$), les conditions suffisantes (3-3) sont équivalentes à :

(3-13) $$a_o \geq 0 \quad \text{et} \quad a_1 \geq -\frac{\pi^2}{L^2}\, a_o$$

et entraînent évidemment les conditions nécessaires (3-12) ou (b). Inversement, la fonction $g = \sin \pi \frac{x}{L}$ vérifie (3-8) pour $k = 1$, et la condition (b) appliquée à cette fonction donne

$$a_o \frac{\pi^2}{L^2} + a_1 \geq 0$$

De même, la fonction $g = \sin (2p+1)\, \pi \frac{x}{L}$ donne

$$a_o \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{a_1}{(2p+1)^2} \geq 0$$

donc (en faisant $p \uparrow \infty$), $a_o \geq 0$. Par suite, la condition (b) entraîne (3-13), c'est-à-dire (3-3).

Incidemment, nous avons même établi un résultat plus fort : Pour $k \leq 1$, toute FAI-k admettant une covariance généralisée $K(h)$ dont la restriction à $(-L,L)$ est de la forme $-\,a_o|h| + \frac{a_1}{6}\,|h|^3$ admet une <u>représentation isomorphe sur $(0,L)$ à la fonction aléatoire stationnaire</u> dont la covariance stationnaire est :

$$\begin{cases} C(h) = \displaystyle\sum_{q=o}^{\infty} C_q \cos\, (2q+1)\, \pi \frac{h}{L} \\[2ex] C_q = 4 \left[a_o \dfrac{L}{\pi^2 (2q+1)^2} + a_1 \dfrac{L^3}{\pi^4 (2q+1)^4} \right] \end{cases}$$

Sous forme explicite, cette covariance stationnaire C(h) s'écrit :

$$C(h) = a_o \left(\frac{L}{2} - |h|\right) + a_1 \left(\frac{|h|^3}{6} - \frac{Lh^2}{4} + \frac{L^3}{24} \right)$$

C(h) est de type ≥ 0, mais non strictement à cause de la relation $C(o) + C(L) = 0$ (équivalente à $Y(L) = - Y(o)$ pour la représentation stationnaire associée). Il suffit de majorer C(h) par une constante positive pour obtenir une covariance stationnaire de type positif strict, qui est évidemment encore équivalente à K(h).

En résumé, dans $\mathbb{R}^1$:

Condition (c) - Pour $k \leq 1$, il existe une FAI-k dont la covariance K(h) vérifie :

$$K(h) = -a_o |h| + \frac{a_1}{6} |h|^3 \qquad \text{pour } |h| \leq L$$

si et seulement si on a :

$$a_o \geq 0 \qquad a_1 \geq - \frac{\pi^2}{L^2}\, a_o$$

De plus, si A est une constante > 0, la fonction :

$$\text{(3-14)} \qquad C(h) = A + a_o \left(\frac{L}{2} - |h|\right) + a_1 \left[\frac{|h|^3}{6} - \frac{Lh^2}{4} + \frac{L^3}{24}\right]$$

est de type positif strict sur la droite entière. Autrement dit, la FAI-k associée à K(h) admet une représentation isomorphe sur (O,L) à une fonction aléatoire stationnaire dont la covariance est C(h).

<u>REMARQUE</u> - J'ignore si cette identification <u>locale</u> d'une covariance généralisée <u>localement</u> polynomiale à une covariance stationnaire reste possible pour $k \geq 1$. En ce qui concerne le problème <u>global</u> correspondant, par contre, il est facile de voir que cette identification est toujours <u>localement</u> possible.

En effet, soit $K(h) = - a_o |h| + \ldots + (-1)^{k+1} \frac{|h|^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Cette fonction est de type ≥ 0 conditionnel d'ordre k si et seulement si elle vérifie les conditions (2-1'). Or, pour L quelconque, les conditions (2-1') écrites avec $x = \left[(2q+1) \frac{\pi}{L}\right]^2$ montre que l'on a $C_q \geq 0$ dans les relations (3-2). Par conséquent, quel que soit L, il existe une covariance stationnaire C(h) équivalente à K(h) sur (-L,L), à savoir :

$$C(h) = \Sigma\, C_q \cos (2q+1)\, \pi \frac{h}{L}$$

$$= a_o\, f_1(h) + \frac{a_1}{3!} f_3(h) + \ldots + \frac{a_k}{(2k+1)!} f_{2k+1}(h)$$

$f_{2k+1}(h)$ est défini par le développement

$$f_{2k+1}(h) = \frac{4}{L}\, \Sigma \left[\frac{L}{(2p+1)\pi}\right]^{2k+2} \cos (2p+1)\, \pi \frac{h}{L}$$

et coïncide sur (-L,L) avec un polynome dont le terme de plus haut degré est $(-1)^{k+1} \frac{|h|^{2k+1}}{(2k+1)!}$, les autres termes étant de degré pair $\leq 2k$.

d - <u>Cas de l'Espace $\mathbb{R}^n$</u>.

Comme la méthode des bandes tournantes établit une correspondance entre les covariances isotropes (stationnaires ou généralisées) localement polynomiales dans $\mathbb{R}^n$ et dans R^1 respectivement, les résultats précédents se transposent à $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, pour $k \leq 1$, une fonction $K_n(r)$ vérifiant

$$K_n(r) = - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \; a_o \, r + \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \; \frac{a_3}{6} \; r^3$$

pour $r \leq L$ est la restriction d'une k-covariance généralisée isotrope dans R^n si et seulement si on a :

$$a_o \geq 0 \quad \text{et} \quad a_1 \geq - \frac{\pi^2}{L^2} \; a_o$$

Elle est alors équivalente pour $r \leq L$ à la covariance isotrope stationnaire dans R^n déduite de (3-14) par la méthode des bandes tournantes, soit :

$$C_n(h) = A + a_o \left[\frac{L}{2} - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \, r \right] + a_1 \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)} \, \frac{|h|^3}{6} - \frac{Lr^2}{4n} + \frac{L^3}{24} \right]$$

Explicitement, pour $n = 2$:

$$\left(\begin{aligned} K_2(r) &= - \frac{2}{\pi} \, a_o \, r + \frac{2}{9\pi} \; a_1 \, r^3 \\ C_2(r) &= A + a_o \left(\frac{L}{2} - \frac{2}{\pi} \, r \right) + a_1 \left[\frac{2}{9\pi} \, r^3 - \frac{L\, r^2}{8} + \frac{L^3}{24} \right] \end{aligned} \right.$$

et pour $n = 3$

$$\left(\begin{aligned} K_3(r) &= - \frac{a_o}{2} \, r + \frac{a_1}{24} \, r^3 \\ C_3(r) &= A + a_o \left(\frac{L}{2} - \frac{r}{2} \right) + a_1 \left[\frac{r^3}{24} - \frac{Lr^2}{12} + \frac{L^3}{24} \right] \\ &= A + a_o \, \frac{L-r}{2} + \frac{a_1}{24} \, (L-r) \, (L^2 + Lr - r^2) \end{aligned} \right.$$

e - <u>Problème Global pour k = 2</u>.

Pour k = 2, la fonction

$$K(h) = -a_o|h| + \frac{a_1}{6}|h|^3 - \frac{a_2}{120}|h|^5$$

est de type ≥ 0 conditionnel dans $\mathbb{R}^1$ si et seulement si on a

$$a_o \geq 0 \ , \ a_2 \geq 0 \quad , \quad a_1 \geq -2\sqrt{a_o\, a_2}$$

comme on l'a vu au paragraphe 2. D'après la remarque du paragraphe c/ci-dessus, K(h) est équivalente sur [-L,L] à la covariance stationnaire C(h) dont l'écriture explicite est :

$$C(h) = a_o\left(\frac{L}{2} - |h|\right) + a_1\left(\frac{|h|^3}{6} - L\frac{h^2}{4} + \frac{L^3}{24}\right) - a_2\left(\frac{|h|^5}{120} - \frac{Lh^4}{48} + \frac{L^3h^2}{48} - \frac{L^3}{240}\right)$$

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement, moyennant les mêmes conditions sur les coefficients a_o, a_1 et a_2, on en déduit les covariances généralisées K_2 et K_3 et les covariances stationnaires isotropes C_2 et C_3 qui leur sont équivalentes sur la boule de rayon L :

$$\begin{cases} K_2(h) = -\frac{2}{\pi}a_o\, r + \frac{2}{9\pi}a_1\, r^3 - \frac{2}{225\,\pi}a_2\, r^5 \\ C_2(h) = a_o\left(\frac{L}{2} - \frac{2}{\pi} - r\right) + a_1\left(\frac{2}{9\pi}r^3 - \frac{Lr^2}{8} + \frac{L^3}{24}\right) + \\ \qquad + a_2\left(\frac{L^5}{240} - \frac{L^3r^2}{96} + \frac{Lr^4}{128} - \frac{2}{225\,\pi}r^5\right) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} K_3(h) = -\frac{a_o}{2}r + \frac{a_1}{24}r^3 - \frac{a_2}{720}r^5 \\ C_3(h) = a_o\frac{L-r}{2} + \frac{a_1}{24}(r^3 - 2Lr^2 + L^3) + a_2\left(\frac{L^5}{240} - \frac{L^3r^2}{144} + \frac{Lr^4}{240} - \frac{r^5}{720}\right) \end{cases}$$

Il suffit de majorer C_2 et C_3 d'une constante > 0 pour obtenir des covariances de type strictement positif.

4 - SIMULATION DES FAI-k A COVARIANCE POLYNOMIALE.

Cherchons maintenant un procédé permettant de construire des simulations d'une FAI-k admettant une covariance généralisée de la forme (1), avec des coefficients a_p donnés (vérifiant les conditions voulues pour que K(h) soit de type ≥ 0 conditionnel). Il suffit de savoir résoudre ce problème dans l'espace à une dimension, puisque la méthode des bandes tournantes permet alors de le résoudre également dans $\mathbb{R}^n$. Je me limite au problème global, c'est-à-dire au cas où l'expression polynomiale (1) est valable dans $\mathbb{R}^1$ tout entier. Le résultat essentiel est le suivant :

Théorème - Une FAI-k sur la droite réelle admet une covariance généralisée polynomiale si et seulement si elle admet une représentation Y(x) de la forme

$$(4-1)\quad Y(x) = b_o\, W(x) + b_1 \int_o^x W(\xi)\, d\xi + \ldots + b_k \int_o^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}\, W(\xi)\, d\xi$$

où W(x) désigne une FAI-0 admettant la covariance $-|h|$ et où les b_p sont des coefficients réels quelconques.

Montrons d'abord que la condition est suffisante. Si nous posons :

$$X(x) = \int_o^x \frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}\, X(\xi)\, d\xi$$

X(x) est une représentation d'une FAI-k admettant la covariance

$$(-1)^{k+1} \frac{|h|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

et nous pouvons écrire :

$$Y(x) = \sum_{p=o}^{k} b_p \, X^{(k-p)}(x)$$

ou, sous forme condensée :

$$Y = \left[\sum_{p=o}^{k} (-1)^{k-p} \, b_p \, \delta^{(k-p)}\right] * X$$

Par suite Y admet la covariance généralisée :

$$(4\text{-}2) \quad K = \left[\sum_{p=o}^{k} (-1)^{k-p} \, b_p \, \delta^{(k-p)}\right] * \left(\sum_{p=o}^{k} b_p \, \delta^{(k-p)}\right) * (-1)^{k+1} \frac{|h|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

qui est bien de la forme (1).

Pour la suite du raisonnement, il sera commode d'expliciter l'expression de la mesure spectrale χ_o associée à la covariance K(h) selon une formule du type :

$$K(h) = 2 \int_{o}^{\infty} \frac{\cos 2\pi uh - 1_B(u) \, P_k(2\pi uh)}{(4\pi^2 \, u^2)^{k+1}} \, \chi_o(du)$$

(à un polynome pair près de degré $\leq 2k$). La covariance $(-1)^{k+1} \frac{|h|^{2k+1}}{(2k+1)!}$ étant associée à la mesure 2 du (du, mesure de Lebesgue), la relation (4-2) est équivalente à :

$$(4\text{-}3) \qquad \chi_o(du) = 2 \left|\sum_{p=o}^{k} b_p \, (2i\pi u)^{k-p}\right|^2 du$$

Inversement, si une FAI-k Z admet la covariance associée à une mesure spectrale de la forme (4-3), Z admet une représentation Y(x) isomorphe à la F.A. écrite en (4-1).

Pour démontrer la réciproque de notre théorème, il reste donc à établir que toute covariance polynomiale admet une mesure spectrale de la forme (4-3). Soit donc :

$$K(h) = \sum_{p=o}^{k} (-1)^{k+1} a_p \frac{|h|^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

une covariance polynomiale, et :

$$q(u) = 2 \sum_{p=o}^{k} a_p (2\pi u)^{2k-2p} \tag{4-4}$$

la densité de sa mesure spectrale χ_o. D'après le théorème de Bochner, le polynome pair $q(u)$ vérifie $q(u) \geq 0$ pour tout u réel. Le lemme suivant montre donc que χ_o est de la forme (4-3) et achève la démonstration:

LEMME - Un polynome P pair et de degré $\leq 2k$ vérifie $P(x) \geq 0$ pour tout x réel si et seulement si il existe un polynome φ à coefficients réels de degré $\leq k$ tel que l'on ait :

$$P(x) = | \varphi(ix)|^2$$

Il suffit d'établir l'énoncé pour $P(x) > 0$ strictement, le cas $P(x) \geq 0$ s'en déduisant par passage à la limite.

Désignons par $z = x + iy$ la variable complexe. Si le polynome $P(z)$ est pair, à coefficients réels et sans racine réelle, ses racines sont soit imaginaires pures (de la forme $\pm$ ib, b réel > 0) soit complexes de la forme $a = a_1 + i a_2$ $(a_2 \neq 0)$ et, en même temps que a, $-a$, $\bar{a}$ et $-\bar{a}$ sont également des racines. A un facteur près, P(z) est donc le produit d'expressions de la forme :

$$(z + ib)\,(z - ib)$$

ou

$$(z - a)\,(z + a)\,(z - \overline{a})\,(z + \overline{a})$$

Or la première expression est égale à :

$$(b + iz)\,(b - iz)$$

et la seconde à :

$$(iz + ia)(iz - ia)\,(iz + i\overline{a})(iz - i\overline{a}) = (\alpha+iz)(\overline{\alpha}+iz)\,(\alpha-iz)(\overline{\alpha}-iz)$$

avec $\alpha = ia$. Désignons alors par $\varphi(x)$ le produit des facteurs du type $(b+x)$ et $(\alpha+x)(\overline{\alpha}+x)$: $\varphi(x)$ est un polynome à coefficients réels et vérifie :

$$P(z) = \varphi(iz)\,\varphi(-iz)$$

c'est-à-dire $P(x) = |\varphi(ix|^2$. La réciproque est évidente.

Du point de vue des <u>applications</u>, il est important de noter qu'il suffit <u>d'un seul Wiener-Lévy</u> W(x) pour simuler une FAI-k de covariance polynomiale donnée à l'aide de la relation (4-1), les coefficients b_p se déduisant des a_p par identification des polynomes (4-4) et (4-3). (La condition pour qu'il existe des b_p réels tels que cette identification soit possible coïncide comme on vient de le voir avec la condition exprimant que K(h) est de type positif conditionnel).

Pour k = 1, on trouve

$$a_o = b_o^2 \quad , \quad a_1 = b_1^2$$

(d'où la condition $a_o \geq 0$, $a_1 \geq 0$). Pour $k = 2$, de même, on trouve :

$$\begin{cases} a_o = b_o^2 \\ a_1 = b_1^2 - 2\, b_o b_2 \\ a_2 = b_2^2 \end{cases}$$

et les conditions $a_o \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 \geq - 2 \quad a_o a_2$ déjà rencontrées).

<u>FAST localement équivalentes</u>.

On a vu que toute FAI-k à covariance polynomiale est localement équivalente à une FAST. Le théorème précédent permet de simuler directement une réalisation de cette FAST équivalente sur (0,L) sans passer par l'intermédiaire des séries de Fourier à coefficients aléatoires (ces séries risqueraient de ne pas converger assez vite pour les besoins de la pratique).

En effet, si W(x) est une représentation d'un Wiener-Lévy, la FA :

$$X_o(x) = W(x) - \frac{W(0) + W(L)}{2}$$

est stationnaire sur (0,L), avec la covariance $\frac{L}{2} - |h|$ ($|h| \leq L$). Posons par récurrence :

$$X_p(x) = \int_0^x X_{p-1}(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}\int_0^L X_{p-1}(\xi)\, d\xi$$

Si l'on suppose démontré que X_{p-1} admet la covariance

$$\sum_q \frac{4\, L^{2p-1}}{\pi^{2p}\, (2q+1)^{2p}} \cos\, (2q+1)\, \pi \,\frac{h}{L}$$

la condition $X_p' = X_{p-1}$ et $X_p(0) + X_p(L) = 0$ suffit pour montrer que X_p admet la covariance

$$\sum_q \frac{4\ L^{2p+1}}{\pi^{2p+2}\ (2q+1)^{2p+2}} \cos\ (2q+1)\ \pi\ \frac{h}{L}$$

Explicitement, on trouvera :

$$X_1(x) = \int_0^x W(\xi)\ d\xi - \int_0^L W(\xi)\ d\xi + (\frac{L}{2} - x)\ \frac{W(0) + W(L)}{2}$$

$$X_2(x) = \int_0^x (x-\xi)\ W(\xi)\ d\xi - \int_0^L (x-\xi)\ W(\xi)\ d\xi +$$

$$+ (L-x) \int_0^L W(\xi)\ d\xi + \frac{x\ (L-x)}{4}\ [W(0) + X(L)]$$

et ainsi de suite.

De la même manière, grâce à la méthode des bandes tournantes, on pourra construire dans $\mathbb{R}^n$ des FAST localement équivalentes à une FAI-k de covariance polynomiale donnée.