

Fontainebleau

N-374

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 124

EFFET PROPORTIONNEL ET LOGNORMALITE

OU : LE RETOUR DU SERPENT DE MER

G. MATHERON

Mai 1974

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 124

EFFET PROPORTIONNEL ET LOGNORMALITE

OU : LE RETOUR DU SERPENT DE MER

Qu'il s'agisse de simulations conditionnelles, de coupure optimale ou de tel autre problème posé par la pratique, on constate de la part de la Géostatistique une tendance de jour en jour plus affirmée à s'affranchir du cadre étroit de l'analyse linéaire. A cette occasion, parmi beaucoup d'autres problèmes nouveaux, on voit aussi resurgir de vieux serpents de mer comme la lognormalité et les fameux effets proportionnels, de sorte qu'il est nécessaire de réexaminer ces diverses questions ; mais, à dire vrai, nous pouvons aujourd'hui procéder à ce réexamen d'un oeil plus averti, et comme enrichi par plus de quinze années d'expérience. On ne s'étonnera donc pas trop de la nouveauté de certains points de vue, ni de la manifestation d'assez nombreux paradoxes apparents. On verra par exemple que si $Y(x) = \log Z(x)$ est une F.A.I. gaussienne avec un variogramme $\gamma(h)$ sans portée (par exemple linéaire), le v variogramme expérimental de $Z(x)$ est, en espérance, de la forme $B(1 - e^{-\gamma(h)})$, et par conséquent présente une portée apparente, tout-à-fait artificielle. Il se pourrait que cette remarque soit importante pour la pratique, et nous conduise à faire l'"analyse structurale" à l'aide des variogrammes logarithmiques au lieu des variogrammes arithmétiques habituels (cette nécessité est déjà apparue clairement lorsqu'il s'est agi de simuler des F.A. lognormales ou, plus généralement, non gaussiennes : on a besoin de connaître le variogramme des variables après l'anamorphose

gaussienne).

Le premier objectif de cette note sera donc de donner une théorie du variogramme conditionnel (i.e., de calculer l'espérance du variogramme expérimental conditionnellement lorsqu'une "moyenne locale" est fixée. Dans le cas lognormal, on verra apparaître l'effet proportionnel habituel en m^2 . Mais - chose inattendue - on verra qu'il existe déjà une sorte d'effet proportionnel, faible il est vrai, dans le cas des F.A. gaussiennes.

Le second objectif de cette note sera évidemment de reformuler le problème de l'estimation et du krigeage dans le cas lognormal. Si l'on suppose connues l'espérance m et la covariance $C(h)$, le problème ne présente aucune difficulté, puisque l'on sait alors former explicitement l'estimation (non linéaire) optimale, c'est-à-dire l'espérance conditionnelle (par simple exponentiation d'un krigeage effectué sur les logarithmes). Mais il n'en est plus du tout de même dans la situation usuelle où l'on suppose seulement le variogramme connu et où l'espérance est inconnue (ou même inexistante). Le seul fait de poser la condition banale $\sum \lambda^\alpha = 1$ fait surgir, en lognormal, des difficultés inattendues sur lesquelles il conviendra de s'arrêter un peu.

Dans le but de dégager des ordres de grandeur, il sera nécessaire de faire quelques calculs explicites. Malheureusement, si les calculs lognormaux ne sont jamais réellement difficiles, ils sont en général assez longs et plutôt sales. Nous tâcherons de les simplifier un peu en remplaçant le plus souvent la notion de F.A. gaussienne $Y(x)$ stationnaire mais conditionnée par un

$Y(v) = \int \lambda(dy) Y(y)$ fixé par celle de représentation $Y(x) - Y_V$ de la F.A.I.-0 correspondante (et de fait la seconde notion est un cas limite de la première). Enfin, dans les applications, le procédé de loin le plus commode pour estimer une intégrale $Z(V) = \int \lambda(dx) Z(x)$ où $Z(x)$ est lognormale consiste à traiter cette variable comme si elle était lognormale (bien que l'on sache for bien qu'elle ne peut pas l'être). On sait, expérimentalement, que cette permanence de la lognormalité est à peu près vérifiée pourvu que le support V de la mesure λ ne soit pas trop grand. Mais il y aura lieu d'examiner d'un peu plus près cette hypothèse d'approximation commode.

1 - F.A. GAUSSIENNE CONDITIONNEE ET REPRESENTATION DES F.A.I.-0.

Dans ce qui suit, $Y(x)$ est une F.A. stationnaire et gaussienne, m est sa moyenne et $\sigma(h)$ sa covariance. En particulier, $\sigma(0) = \sigma^2$. Nous supposons pour l'instant m et $\sigma(h)$ connues. Le premier problème consiste à trouver ce que devient cette F.A. lorsqu'elle est conditionnée par la donnée de

$$Y_V = \int \lambda(dx) Y(x)$$

où λ est une mesure à support dans V et de somme unité.

1-a - F.A. Conditionnée.

D'après les formules classiques de la loi de Gauss, à Y_V fixé, $Y(x)$ est une F.A. gaussienne non stationnaire caractérisée par :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} E(Y_x | V) = m + \frac{\sigma_{x,V}}{\sigma_V^2} (Y_V - m) \\ D^2(Y_x | V) = \sigma^2 - \frac{\sigma_{x,V}^2}{\sigma_V^2} \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y | V) = \sigma_{xy} - \frac{\sigma_{xV} \sigma_{yV}}{\sigma_V^2} \end{array} \right.$$

avec les notions habituelles $\sigma_{xV} = \int_V \lambda(dy) \sigma(x-y)$,
 $\sigma_V^2 = \iint \lambda(dx) \sigma(x-y) \lambda(dy)$ etc...

Comme première conséquence, notons tout de suite le paradoxe annoncé plus haut : dans le cas gaussien, déjà, le variogramme conditionnel est biaisé. En effet, calculons l'expression :

$$\begin{aligned} 2 \gamma_V(x;y) &= E[(Y_x - Y_y)^2 | V] \\ &= \left(E[(Y_x - Y_y) | V] \right)^2 + D^2(Y_x | V) + D^2(Y_y | V) - 2 \text{Cov}(Y_x, Y_y | V) \end{aligned}$$

D'après (1), nous trouvons :

$$\begin{aligned} 2 \gamma_V(x;y) &= \frac{(Y_V - m)^2}{\sigma_V^2} - \frac{(\sigma_{xV} - \sigma_{yV})^2}{\sigma_V^2} + 2 \sigma^2 - \frac{\sigma_{xV}^2 + \sigma_{yV}^2}{\sigma_V^2} \\ &\quad - 2 \sigma_{xy} + \frac{2 \sigma_{xV} \sigma_{yV}}{\sigma_V^2} \end{aligned}$$

En divisant par 2, et en désignant par $\gamma(h) = \sigma^2 - \sigma(h)$ le vrai variogramme, ceci s'écrit :

$$(2) \quad \gamma_V(x,y) = \gamma(x-y) + \frac{(\sigma_{xV} - \sigma_{yV})^2}{2 \sigma_V^2} \left(\frac{(Y_V - m)^2}{\sigma_V^2} - 1 \right)$$

L'espérance du variogramme "expérimental" est la moyenne dans V de l'expression (2), soit

$$\gamma_V(h) = \frac{1}{K(h)} \int \gamma_V(x, x+h) k(x) dx$$

($k = 1_V$ est l'indicatrice de V, et $K = k * \check{k}$). On n'a donc pas en général $\gamma_V(h) = \gamma(h)$.

1-b - Exemple numérique.

Pour dégager des ordres de grandeur, nous effectuons souvent des calculs explicites dans le cas suivant : V est le segment $(0, L)$ de la droite réelle, et :

$$\gamma(h) = a|h|, \quad \sigma(h) = A - a|h|$$

Pourvu que $A \geq aL/2$, on sait que $\sigma(h) = A - a|h|$ est de type positif sur $(0, L)$, bien qu'elle ne le soit pas dans R_1 entier. On montre même qu'il existe une F.A. stationnaire (dans R_1 entier) dont la covariance coïncide avec $\sigma(h)$ pour $|h| \leq L$. C'est évidemment pour simplifier au maximum les calculs que je choisis cet exemple particulier. On verra aussi qu'il se prête particulièrement bien au passage aux F.A.I.-0 (i.e. $A \rightarrow \infty$). En ce qui concerne Y_V , nous prenons la moyenne arithmétique

$$Y_V = \frac{1}{L} \int_0^L Y(x) dx$$

On trouve

$$\begin{aligned} \sigma_{yV} - \sigma_{xV} &= \gamma_{xV} - \gamma_{yV} = \frac{a}{L} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(L-x)^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{(L-y)^2}{2} \right] = \\ &= \frac{a}{L} [y(L-y) - x(L-x)] \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} (\sigma_{x+h} - \sigma_x)^2 &= \frac{a^2}{L^2} (h(L-h) - 2xh)^2 = \frac{a^2}{L^2} [h^2(L-h)^2 - 4h^2(L-h)x + 4h^2x^2] \\ \frac{1}{L-h} \int_0^{L-h} (\sigma_{x+h} - \sigma_x)^2 dx &= \frac{1}{3} \frac{a^2 h^2 (L-h)^2}{L^2} \end{aligned}$$

Compte tenu de (2), il vient donc :

$$\gamma_V(h) = a|h| + \frac{1}{6} \frac{a^2 h^2 (L-h)^2}{L^2 \sigma_V^2} \left(\frac{(Y_V - m)^2}{\sigma_V^2} - 1 \right)$$

Pour apprécier un ordre de grandeur du biais, supposons par exemple que $\frac{Y_V - m}{\sigma_V}$ soit égal à 2 (valeur non exceptionnelle) de sorte que $\frac{(Y_V - m)^2}{\sigma_V^2} - 1$ est égal à 3. En $h = L/2$, le terme de biais est $(1/32) a^2 L^2 / \sigma_V^2$, avec $\sigma_V^2 = A - (1/3) aL$. Avec $A = aL/2$, qui est la plus petite valeur autorisée, $\sigma_V^2 = (1/6) aL$ est le biais et $(6/32) aL$ à comparer avec $\gamma(L/2) = aL/2$: il est de 40%! Dans une situation moins extrême où L serait le dixième du champ total, on devrait prendre $A = 5 aL$. Le biais est alors $(1/150) aL$, soit 1/80 en valeur relative. En conclusion : le variogramme conditionnel est toujours biaisé, mais ce biais est négligeable dès que le domaine conditionnant V est petit vis-à-vis du champ total.

1-c - Le conditionnement optimal.

Il est clair que ce biais du variogramme conditionnel, dans le cas gaussien, est un effet parasite que nous aurons tout intérêt à éliminer pour éviter de compliquer inutilement les choses lorsque nous passerons au cas lognormal. Or cela est toujours possible moyennant un choix judicieux de la variable conditionnante Y_V . En effet, désignons par $m^*(V)$ l'estimateur universel optimal de l'espérance m à partir des $Y(x)$, $x \in V$ et prenons $Y_V = m^*(V)$ comme variable conditionnante. On sait que $m^*(V)$ existe toujours dans l'espace de Hilbert engendré par les $Y(x)$, $x \in V$ et, si V est fini, admet toujours une représentation $m^*(V) = \int \lambda_0(dx) Y_x$ avec une mesure λ_0 concentrée sur V telle que :

$$(3) \quad \begin{cases} \forall y \in V & \int \lambda_0(dx) \sigma(x-y) = \mu \\ & \int \lambda_0(dx) = 1 \quad (D^2(m^*) = \mu) \end{cases}$$

Si V n'est pas fini, cette représentation n'existe pas nécessairement, mais cela ne modifie pas la situation.

Avec ce choix $Y_V = m^*(V)$ de la variable conditionnante, on a par construction $\sigma_{xV} = \sigma_V^2 = \mu$ pour tout $x \in V$. Les formules (1) se simplifient notablement : il vient pour tout $x \in V$

$$(3') \quad \begin{cases} E(Y_x | m_V^*) = m_V^* \\ D^2(Y_x | m_V^*) = \sigma^2 - \mu \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y | m_V^*) = \sigma(x-y) - \mu \end{cases}$$

Autrement dit, la F.A. conditionnée par m_V^* est stationnaire sur V , avec l'espérance m_V^* et la covariance $\sigma(h) - \mu$. D'après (2), en particulier, on trouve $\gamma_V(x,y) = \gamma(x-y)$, de sorte que le variogramme conditionnel est sans biais.

Bien que, dans les applications pratiques, l'usage soit plutôt (pour des raisons évidentes de simplicité) d'utiliser la moyenne arithmétique $Y_V = (1/V) \int_V Y(x) dx$, nous ne modifierons pas fondamentalement les choses en conditionnant en $m^*(V)$, et cela nous permettra plus facilement, dans le cas lognormal, de dégager les conclusions essentielles. Mais il reste à examiner le cas intrinsèque ou (ce qui revient à peu près au même) le cas où l'espérance m n'est pas connue a priori.

1-d - Passage aux F.A.I.-0.

Plaçons-nous d'abord dans les mêmes hypothèses qu' en 1-a (espérance m et covariance connues) et posons $\sigma(h) = A - \gamma(h)$ où γ est le variogramme correspondant. En principe $A = \sigma^2 = \sigma(0)$.

Mais on peut prendre $A > \sigma^2$ et obtenir ainsi une nouvelle covariance, différant de la première par une constante positive, et tout aussi bien adaptée à la description correcte de la même réalité expérimentale (en termes de F.A. : nous remplaçons la constante m par une variable aléatoire $m(\omega)$ constante dans l'espace et stochastiquement indépendante des $Y(x) = Y(x, \omega)$. En termes de krigage universel, nous remplaçons la dérive déterministe $\bar{m}$ par une dérive aléatoire $m(\omega)$, de sorte que la covariance $\sigma(h)$ est majorée d'une quantité constante $E(m^2)$).

Examinons alors ce qui se passe lorsque A tend vers l'infini.
D'après les relations (1), nous trouvons :

$$E(Y_x | V) = m \left(1 - \frac{A - \gamma_{xV}}{A - \gamma_{VV}} \right) + \frac{A - \gamma_{xV}}{A - \gamma_{VV}} \quad Y_V \rightarrow Y_V$$

et de même :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_x Y_y | V) &= A - \gamma_{xy} - \frac{(A - \gamma_{xV})(A - \gamma_{yV})}{A - \gamma_{VV}} = \\ &= A - \gamma_{xy} - A \frac{(1 - \frac{\gamma_{xV}}{A})(1 - \frac{\gamma_{yV}}{A})}{1 - \frac{\gamma_{VV}}{A}} \\ &\rightarrow \gamma_{xV} + \gamma_{yV} - \gamma_{xy} - \gamma_{VV} \end{aligned}$$

A la limite, donc, nous trouvons une F.A. (non stationnaire) d'espérance constante égale à Y_V :

$$(4) \quad \begin{cases} E(Y_x | V) = Y_V \\ \text{Cov}(Y_x Y_y | V) = \gamma_{xV} + \gamma_{yV} - \gamma_{xy} - \gamma_{VV} \end{cases}$$

Bien que non stationnaire, cette F.A. est intrinsèque et admet

le variogramme $\gamma(h)$. De (4), en effet, on déduit $D^2(Y_X|V) = 2 \gamma_{XV} - \gamma_{VV}$ et par suite :

$$\frac{1}{2} E[(Y_X - Y_Y)^2 | V] = \gamma_{X,Y} = \gamma(x-y)$$

Plus précisément, la F.A. (non stationnaire) définie en (4) est une représentation de la F.A.I. de variogramme $\gamma(h)$. Si $X(x)$ est une autre représentation (quelconque) de cette F.A.I., on trouve en effet :

$$Y(x) = Y_V + X(x) - \int X(y) \lambda(dy)$$

avec $Y_V = y$ numériquement fixé. En terme de théorie des F.A.I.-k, si $Z : \Lambda_0 \rightarrow L^2$ est la F.A.I. de variogramme γ définie sur l'espace Λ_0 des combinaisons linéaires autorisées (de somme nulle) on a :

$$(4') \quad Y(x) = Y_V + Z(\delta_x - \lambda)$$

Il s'agit donc, et cela est naturel, de la représentation particulière associée à la mesure λ utilisée pour construire la variable conditionnante Y_V . Par construction, $\int \lambda(dx) Y(x) = Y_V$ identiquement.

L'avantage évident de la définition (4) est qu'elle se transpose sans aucun changement au cas où l'espérance à priori m est inconnue ou même n'existe pas, c'est-à-dire au cas où il n'existe qu'un variogramme γ mais pas de covariance $\sigma(h)$.

Dans les applications, également, il y aura intérêt à utiliser les définitions (4). En effet, l'espérance m (à supposer qu'elle existe) est toujours inconnue, ainsi d'ailleurs que la moyenne $Y_V = (1/V) \int_V Y(x) dx$ - V désignant ici la totalité du champ auquel

on s'intéresse. Dans ce cas, on obtient une excellente interprétation ("modélisation" probabiliste) de la réalité en admettant que la variable régionalisée à laquelle on s'intéresse est une réalisation de la représentation particulière (4') de la F.A.I.-O de variogramme γ , avec une constante Y_V numériquement inconnue. Même s'il existe une covariance stationnaire $\sigma(h)$ telle que $\gamma(h) = \sigma(0) - \sigma(h)$, l'interprétation ci-dessus est aussi bonne que l'interprétation habituelle en termes de F.A. stationnaire. Plus précisément, ces interprétations sont strictement équivalentes et ne peuvent pas être discernées expérimentalement l'une de l'autre, du fait que la valeur numérique de la moyenne générale Y_V est inconnue : que l'on adopte le schéma stationnaire ou la définition (4), l'espérance $E(Y_X)$ est m dans le premier cas, Y_V dans le second, mais reste inconnue dans un cas comme dans l'autre, de sorte que l'on est de toutes les façons obligé de travailler en intrinsèque, i.e. de ne manipuler que des combinaisons linéaires autorisées. Mais pour toute combinaison linéaire autorisée $v \in \Lambda_0$, les deux conceptions conduisent au même résultat $E(\int v(dx) Y(x)) = 0$ et

$$E[(\int v(dx) Y(x))^2] = -\int v(dx) \gamma(x-y) v(dy)$$

Les deux "modèles" probabilistes sont donc strictement équivalents.

1-e - Les représentations privilégiées.

Dans l'interprétation intrinsèque (4'), à part la condition $\int \lambda = 1$ nous n'avons pas spécifié le choix de la mesure λ utilisée pour définir la variable conditionnante $Y_V = \int \lambda(dx) Y(x)$. Dans le cas où il existe une covariance $\sigma(h)$, on a vu en 1-c qu'il était possible de choisir pour Y_V l'estimateur optimal $m^*(V)$ et que,

dans ce conditionnement optimal, la F.A. conditionnée était stationnaire sur V . Cette stationnarité subsiste évidemment aussi dans le cas de la représentation (4) (car $m^*(V)$ ne dépend pas de la constante Λ , de sorte que les relations (3) subsistent pour $\Lambda \rightarrow \infty$). S'il n'existe pas de covariance stationnaire $\sigma(h)$ telle que $\gamma(h) = \sigma(0) - \sigma(h)$, on ne peut plus garantir en toute généralité l'existence d'une telle représentation localement stationnaire. Toutefois, pour des variogrammes pas trop réguliers au voisinage de l'origine (et en particulier pour le variogramme linéaire dans $\mathbb{R}^n$) et pour tout domaine V borné, on peut trouver une mesure λ_0 à support dans V vérifiant des équations analogues à (3), soit :

$$(5) \quad \begin{cases} \forall y \in V, \int \lambda_0(dx) \gamma(x-y) = \mu \\ \int \lambda_0(dx) = 1 \end{cases}$$

Si l'on choisit $Y_V = \int \lambda_0(dx) Y(x)$ comme variable conditionnante, on a donc $\gamma_{yV} = \gamma_{VV} = \mu(y \in V)$ et, avec ce choix de Y_V , la représentation (4') est localement stationnaire dans V : pour $x, y \in V$, cette représentation vérifie en effet :

$$(5') \quad \begin{cases} E(Y_x | V) = Y_V \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y | V) = \mu - \gamma(x-y) \end{cases}$$

Nous dirons que cette représentation localement stationnaire est la représentation privilégiée dans V de la F.A.I.-0 de variogramme γ .

Avec ce choix - toujours parfaitement compatible, pour un variogramme γ donné, avec la réalité expérimentale donnée dans V - le modèle "fonction aléatoire intrinsèque" peut donc être remplacé par

le modèle équivalent "fonction aléatoire localement stationnaire dans V" avec une moyenne Y_V numériquement inconnue. C'est en fait, implicitement, ce qui a été fait dans l'exemple 1-b : sur le segment $(0, L)$ et avec un variogramme linéaire, la mesure $\lambda_0 = \frac{1}{2} (\delta_0 + \delta_L)$ vérifie :

$$\int \lambda_0(dx) |x-y| = \frac{1}{2} L$$

de sorte que la représentation privilégiée admet, sur $(0, L)$, la covariance stationnaire $aL/2 - a|h|$.

On notera bien toutefois ce point : la représentation privilégiée doit être choisie une fois pour toutes, autrement dit le domaine V sur lequel on l'évalue doit être le champ total auquel on s'intéresse. Si, à l'intérieur du champ total V, on sélectionne tel ou tel sous-champ $v \subset V$, la théorie du variogramme conditionnel dans v, conditionné par un Y_V , se construit exactement comme dans 1-a à partir de la F.A. stationnaire dans V de covariance (dans V) $\mu_V - \gamma(h)$.

Dans ce qui suit, les représentations privilégiées nous permettront de simplifier considérablement les calculs dans le cas des F.A. lognormales.

2 - F.A.S.T. ET F.A.I. LOGNORMALES.

Nous allons maintenant examiner les F.A. lognormales, en transposant les résultats du chapitre précédent. Rappelons d'abord une formule générale. Si les Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sont gaussiennes avec

$E(Y_i) = m_i$ et $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma_{ij}$, pour tout choix de constantes λ_i réelles ou complexes, les variables lognormales $Z_i = \exp(Y_i)$ vérifient :

$$E\left(\prod_{i=1}^n Z_i^{\lambda_i}\right) = E(e^{\sum \lambda_i Y_i}) = e^{\sum \lambda_i m_i} e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \sigma_{ij}}$$

Ceci n'est pas autre chose que l'expression de la fonction caractéristique de la loi de Gauss à n variables. En particulier :

$$\begin{cases} E(Z_i) = e^{m_i + \frac{1}{2} \sigma_i^2} \\ E((Z_i)^n) = (E(Z_i))^n e^{\frac{n(n-1)}{2} \sigma_i^2} \\ E(Z_i Z_j) = E(Z_i) E(Z_j) e^{\sigma_{ij}} \end{cases}$$

etc... Dans ces conditions, si $Y(x)$ est une F.A. gaussienne telle que :

$$\begin{cases} E(Y(x)) = m(x) \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y) = \sigma(x; y) \end{cases}$$

la F.A. $Z(x) = \exp(Y(x))$ est lognormale, avec une espérance $M(x)$ et une covariance centrée $C(x, y)$ données par :

$$(6) \quad \begin{cases} E(Z(x)) = M(x) = \exp\left(m(x) + \frac{1}{2} \sigma_x^2\right) \\ \text{Cov}(Z_x, Z_y) = C(x, y) = M(x) M(y) (e^{\sigma(x, y)} - 1) \end{cases}$$

Ces formules générales seront d'un emploi constant dans ce qui suit. Notons, en particulier, l'expression générale du variogramme $\Gamma(x, y) = \frac{1}{2} E[(Z_x - Z_y)^2]$:

$$(6') \quad \Gamma(x,y) = \frac{1}{2} M(x)^2 e^{\sigma_x^2} + \frac{1}{2} M(y)^2 e^{\sigma_y^2} - M(x) M(y) e^{\sigma_{xy}}$$

2-a - F.A.S.T. lognormale.

Si $Y(x)$ est une F.A.S.T. gaussienne d'espérance m et de covariance $\sigma(h)$, $Z(x) = \exp(Y(x))$ est une F.A.S.T. lognormale dont l'espérance M et la covariance centrée $C(h)$ sont, d'après (6) :

$$\begin{cases} M = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \\ C(h) = M^2 (e^{\sigma(h)} - 1) \end{cases}$$

En particulier, si $\gamma(h)$ est le variogramme de $Y(x)$ et $\sigma(h) = A - \gamma(h)$, le variogramme $\Gamma(h)$ de $Z(x)$ sera

$$(7) \quad \Gamma(h) = M^2 e^A (1 - e^{-\gamma(h)})$$

Sous cette forme, nous voyons qu'il ne nous sera pas possible de parvenir à la notion de F.A.I.-lognormale en faisant simplement tendre A vers l'infini comme dans le cas gaussien : on trouverait à la limite un variogramme infini. Nous y reviendrons après avoir étudié le conditionnement.

Dans les applications pratiques, les variables conditionnantes sont des moyennes arithmétiques de type $Z_V = \int \lambda(dx) Z(x)$ ($\int \lambda = 1$). Malheureusement, une telle variable Z_V n'est pas lognormale, et nous ne savons pas former l'expression explicite de la loi de Z_x à Z_V fixé. Nous remplacerons Z_V par la variable gaussienne $Y_V = \int \lambda(dx) Y(x)$ formée de manière analogue à partir de $Y(x)$. Il est clair que

$$Z_V = \int \lambda(dx) e^{Y(x)}$$

n'est ni égale ni proportionnelle à e^{Y_V} . Nous étudierons un peu plus loin les rapports entre ces deux variables et nous verrons que, du moins si le support V de la mesure λ n'est pas trop grand, la variance conditionnelle de Z_V à Y_V fixé ne peut pas être très grande.

Par conséquent, la loi de $Z(x)$ conditionnée par Y_V doit donner une image pas trop déformée de la loi conditionnée par Z_V que nous ne pouvons pas atteindre directement. En particulier, le variogramme de $Z(x)$ conditionnel en Y_V permet de mettre en évidence le phénomène connu sous le nom d'effet proportionnel. Nous obtenons son expression $\Gamma_V(x,y)$ en substituant directement (1) dans (6'). Il n'est pas utile d'explicitier cette formule, trop compliquée pour être aisément manipulée, bien qu'elle fasse apparaître, en gros, un effet proportionnel à e^{2Y_V} .

Pour obtenir un résultat simple et aisément interprétable, nous utiliserons la variable conditionnante optimale $m^*(V)$ définie en 1-c. D'après (3), $Y(x)$ conditionnée par $m^*(V)$ est stationnaire sur V avec l'espérance $m^*(V)$, la variance $A = \sigma^2 - \mu$ et la covariance $A - \gamma(h)$. D'après (7), on trouve donc, pour $x, y \in V$ l'espérance M^* et le variogramme Γ_V de $Z(x)$:

$$(8) \quad \begin{cases} M_V^* = E(Z_x | m^*(V)) = e^{m^* + \frac{A}{2}} \\ \Gamma_V(h) = (M_V^*)^2 e^{A(1 - e^{-\gamma(h)})} \end{cases}$$

L'effet proportionnel, en $(M_V^*)^2$ est donc ici présent à l'état pur. Mais on notera aussi la présence, un peu inquiétante, du coefficient e^A qui dépend de V (car $A = \sigma^2 - \mu$, et μ dépend de V).

En particulier, ici non plus il n'est pas possible de passer directement aux F.A.I. en faisant tendre directement A vers l'infini.

2-b - Les F.A.I. lognormales.

Venons-en à cette difficulté. En toute rigueur, il ne peut pas exister de F.A.I. lognormale. En effet, une F.A.I. est définie comme une application linéaire de l'espace Λ_0 des combinaisons linéaires autorisées dans un $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Si donc $Z(\lambda_1)$ et $Z(\lambda_2)$ étaient lognormales pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_0$, on aurait $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_0$ et $Z(\lambda_1 + \lambda_2)$ ne serait pas lognormale, puisque, comme on sait, la lognormalité n'est pas invariante pour les combinaisons linéaires.

D'autre part, on ne peut pas non plus dire qu'une F.A.I. $Z : \Lambda_0 \rightarrow L^2$ est lognormale si $\log Z$ est une F.A.I. gaussienne. Car $\log Z$ n'applique pas linéairement Λ_0 dans L^2 , et donc n'est pas une F.A.I. Nous nous tirerons d'affaire en passant par l'intermédiaire de la notion de représentation, c'est-à-dire en exponentiant une représentation particulière d'une F.A.I. gaussienne. Plus précisément :

Soit $Y : \Lambda_0 \rightarrow L^2$ une F.A.I. gaussienne et $Y(x)$ une représentation particulière de Y . Nous dirons (par abus de langage) que la F.A. (non stationnaire) $Z(x) = \exp(Y(x))$ est une F.A.I. lognormale.

Naturellement, les propriétés de $Z(x)$ vont dépendre de manière essentielle du choix de la représentation particulière $Y(x)$ utilisée pour construire $Z(x)$.

Par exemple, supposons Y sans dérive ($EY = 0$) et prenons la représentation $Y(x) = Y(\delta_x - \delta_0)$ nulle en $x = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} E(Y(x)) = 0 \\ E(Y_x Y_y) = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x-y) \end{cases}$$

D'après (6), la F.A. lognormale nonstationnaire $Z(x)$ vérifie

$$M(x) = e^{\gamma(x)}$$

$$C(x,y) = e^{2\gamma(x)+2\gamma(y)-\gamma(x-y)} - e^{\gamma(x)+\gamma(y)}$$

Plus généralement, toute autre représentation de Y est de la forme : $X(x) = X_0 + Y(x)$, où X_0 est une V.A. quelconque non nécessairement indépendante de $Y(x)$. Avec $m = E(X_0)$, on trouve :

$$\begin{cases} E(X(x)) = m \\ \text{Cov}(X_x X_y) = \phi(x) + \phi(y) - \gamma(x-y) \end{cases}$$

où ϕ peut être une fonction quelconque (sous réserve seulement que cette covariance soit de type positif). Pour $Z(x)$, il vient alors :

$$(8') \quad \begin{cases} M(x) = e^{m+\phi(x)} \\ C(x,y) = e^{2m+\phi(x)+\phi(y)} (e^{\phi(x)+\phi(y)-\gamma(x-y)} - 1) \end{cases}$$

et le variogramme $\Gamma(x,y)$ n'a pas un aspect plus sympathique.

On doit bien noter que seul le variogramme γ doit être considéré comme connu ou accessible expérimentalement. La constante m , et a fortiori la fonction arbitraire ϕ restent complètement indéterminés. La règle opératoire que nous impose impérativement la logique de cette représentation consiste à ne jamais manipuler que des expressions dont les caractéristiques probabilistes ne dépendent ni de m ni de la fonction arbitraire ϕ . Autrement dit, nous pourrions

utiliser uniquement des combinaisons linéaires autorisées.

$\int \lambda(dx) \log Z(x)$, $\lambda \in \Lambda_0$ portant sur $Y(x) = \log Z(x)$ et des fonctions arbitraires de telles combinaisons linéaires autorisées.

C'est là une situation très inconfortable. Si, par exemple, nous voulons évaluer $Z_V = (1/V) \int_V Z(x)dx$ à l'aide de valeurs expérimentales $Z_\alpha = \exp(Y_\alpha)$, nous serons conduit à former des expressions de la forme $Y^* = \sum \lambda_\alpha Y_\alpha$, $\sum \lambda_\alpha = 1$ et à essayer des estimateurs de la forme $B e^{Y^*}$. Mais Y^* n'est pas une combinaison linéaire autorisée et $Z_V - B e^{Y^*}$ ne vérifie pas la règle opératoire donnée ci-dessus, de sorte que la variance d'estimation $E(Z_V - B e^{Y^*})^2$ dépend de manière irréductible de m et de $\phi(x)$. Dans ce contexte, nous ne pouvons donc parler de manière sensée ni de variance d'estimation ni, a fortiori, d'estimateurs optimaux.

C'est pourquoi il faut, impérativement, affaiblir la règle opératoire trop stricte que nous nous sommes imposée. Affaiblir cette règle revient à diminuer, d'une manière ou d'une autre, le degré d'arbitraire qui préside au choix de la représentation (8). C'est, évidemment, la fonction indéterminée ϕ qui introduit la plus large part d'arbitraire, de sorte que si nous pouvions l'éliminer, le problème redeviendrait traitable. Or, fort heureusement, cela est possible si l'on convient de n'utiliser comme F.A. gaussiennes $Y(x)$ que des représentations privilégiées de la F.A.I. Y telles qu'elles ont été définies en 1-e.

Ceci introduit d'ailleurs une limitation (peu grave en pratique) puisque nous ne pourrions plus utiliser que des variogrammes γ pour lesquels de telles représentations privilégiées existent (cette classe est stable pour les combinaisons linéaires positives et con-

tient au moins les éléments $|h|^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$) et $\sigma^2 - \sigma(h)$ pour toute covariance stationnaire $\sigma(h)$: elle est donc tout-à-fait suffisante pour les besoins de la pratique).

Soit donc V un domaine borné (mais suffisamment grand pour contenir la totalité du champ auquel on s'intéresse effectivement), et λ_0 la solution de (5) : nous utiliserons sur V pour $Y(x)$ la représentation :

$$Y(x) = Y_V + Y(\delta_x - \lambda_0) \quad (x \in V)$$

où Y_V restera une constante (non aléatoire) indéterminée. Alors, d'après (5'), $Y(x)$ est stationnaire sur V , admet l'espérance inconnue Y_V et une covariance de la forme :

$$(9) \quad \sigma(h) = A - \gamma(h)$$

La constante A est égale au paramètre de Lagrange μ du système (5'), et, à ce titre, dépend du choix du domaine V . Mais V est arbitraire (sous réserve de contenir le champ total) et peut être pris aussi grand que l'on veut. Lorsque V augmente (et si γ n'est pas de la forme $\gamma(h) = \sigma^2 - \sigma(h)$) A augmente indéfiniment. Autrement dit, la constante A doit également être considérée comme inconnue.

Arrivé à ce stade, il y a intérêt à changer la terminologie. Au lieu de F.A.I. lognormales, nous parlerons de fonctions aléatoires lognormales et localement stationnaires sur un domaine V donné, que nous appellerons pour abrégé des F.A.L.L.ST sur V . La définition est la suivante :

Une F.A. $Z(x)$ est une F.A.L.L.ST sur V si $Z(x) = e^{Y(x)}$ ($x \in V$) pour une F.A. $Y(x)$ gaussienne et localement stationnaire sur V .

Si l'on pose pour $x, y \in V$

$$\begin{cases} m_V = E(Y(x)) \\ \frac{1}{2} E((Y_x - Y_y)^2) = \gamma(x-y) \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y) = A_V - \gamma(h) \end{cases}$$

on obtient, par conséquent, pour $Z(x)$ ($x, y \in V$) :

$$(10) \quad \begin{cases} E(Z_x) = m_V = e^{m_V + \frac{1}{2} A_V} \\ \text{Cov}(Z_x, Z_y) = m_V^2 (e^{A_V - \gamma(h)} - 1) \end{cases}$$

En particulier, le variogramme de $Z(x)$ dans V est

$$(11) \quad \Gamma_V(h) = m_V^2 e^{A_V} (1 - e^{-\gamma(h)})$$

Cette définition, d'après ce qui précède, doit être assortie d'une règle opératoire qui est la suivante : Ne jamais manipuler que des expressions dont les caractéristiques probabilistes sont indépendantes des deux constantes A_V et m_V .

En fait, de ces deux restrictions, seule celle qui concerne la constante m_V présente un caractère irréductible. En effet, désignons par $V_0 \subset V$ le champ total qui nous intéresse et par λ_0 la mesure vérifiant :

$$(12) \quad \begin{cases} \forall y \in V_0 \quad \int \lambda_0(dx) \gamma(x-y) = \mu_0 \\ \int \lambda_0 = 1 \quad \text{Supp } \lambda_0 \subset V_0 \end{cases}$$

Nous pouvons poser $m^*(V_0) = \int \lambda_0(dx) Y(x)$ et considérer la F.A.

$Y(x)$ conditionnée par $m^*(V_0)$. D'après les paragraphes 1-c et 1-e, on obtient ainsi la représentation privilégiée particulière associée à V_0 :

$$\begin{cases} E(Y_x | V_0) = m^*(V_0) \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y | V_0) = A_0 - \gamma(x-y) \end{cases}$$

et cette fois A_0 est numériquement connue, car $A_0 = \mu_0$ est le paramètre de Lagrange μ_0 du système (12).

Toutefois cette amélioration est plus apparente que réelle. D'après (10), on trouve en effet :

$$(13) \quad \begin{cases} E(Z(x) | V_0) = M_{V_0}^* = e^{m_{V_0}^* + \frac{1}{2} A_0} \\ \text{Cov}(Z_x, Z_y | V_0) = (M_{V_0}^*)^2 (e^{A_0 - \gamma(h)} - 1) \end{cases}$$

et, en particulier, pour le variogramme conditionné

$$(14) \quad \Gamma(h | V_0) = (M_{V_0}^*)^2 e^{A_0} (1 - e^{-\gamma(h)})$$

Il reste indéterminé à une constante multiplicative près, car $M_{V_0}^*$ reste irréductiblement inconnue.

2-c - Premières conséquences.

Examinons quelques conséquences de la définition de F.A.L.L.ST qui vient d'être donnée. Nous verrons que quelques-unes d'entre elles sont inattendues.

1 - Le variogramme (arithmétique) d'une F.A.L.L.ST a toujours une portée finie.

Ceci résulte immédiatement de (11) ou de (14). Ce variogramme en effet, est toujours de la forme $\Gamma(h) = B(1 - e^{-\gamma(h)})$ et vérifie donc $\Gamma(h) \leq B$ quel que soit h . Par exemple, si $\gamma(h) = a|h|$ est un variogramme linéaire, le variogramme Γ de la F.A.L.L.ST est exponentiel :

$$\Gamma(h) = B(1 - e^{-a|h|})$$

Du point de vue pratique, cette affirmation doit pourtant être nuancée. Les données expérimentales disponibles étant dans V , on ne connaît $\Gamma(h)$ expérimentalement que pour $h \in V \oplus \overset{V}{V}$ (en particulier, si L est le diamètre de V , pour $|h| < L$). Donc, si a est suffisamment petit pour que l'on ait $e^{-aL} = 1 - aL$ avec une très bonne approximation, le variogramme expérimental observé sera $\Gamma(h) = B a|h|$, i.e. linéaire. Mais, si a n'est pas très petit, la portée apparente de $\Gamma(h)$ se manifestera expérimentalement.

Je pense que cette remarque présente une importance pratique réelle pour l'analyse structurale d'une F.A. lognormale. Chaque fois que le variogramme arithmétique expérimental présente une portée apparente, on doit se demander s'il s'agit d'un caractère réel du phénomène étudié ou d'un simple effet de F.A.L.L.ST : pour en décider, il faut former le variogramme des logarithmes.

2 - L'effet proportionnel est clairement en évidence sur la formule (14). Plus précisément, si $v \subset V_0$ est un sous champ donné et $m^*(v)$ la variable conditionnante optimale associée à v , le variogramme conditionnel en $m^*(v)$ est donné par cette formule (14), avec A_v au lieu de A_0 et $M^*(v) = \exp(m_v^* + \frac{1}{2} A_v)$ au lieu de $M^*(V_0)$. Il s'agit donc bien d'un effet proportionnel en $(M^*(v))^2$.

Dans les applications pratiques, on conditionnera en $Z_V = (1/v) \int_V Z(x)dx$ plutôt qu'en $m^*(v)$, et nous ne savons pas former l'expression exacte du variogramme conditionnel correspondant. On peut penser cependant (dans la mesure où la variance de $m^*(v)$ à Z_V fixé n'est pas trop grande) que ce variogramme conditionnel présentera, en gros, la même allure que le précédent, c'est-à-dire un effet proportionnel en $(Z_V)^2$. On pourrait faire quelques calculs explicites (comme dans l'exemple 1-c) en ce qui concerne le variogramme conditionné, non par Z_V lui-même, mais par $Y_V = (1/v) \int_V Y(x)dx$ mais nous ne nous lancerons pas dans cette opération d'intérêt douteux.

Un point plus intéressant serait le suivant : en cas d'effet de pépite, on observe souvent que l'effet proportionnel n'affecte pas de la même manière la composante pépitique et la composante continue du variogramme arithmétique expérimental. On peut se demander si ce résultat est dû à un simple effet de lognormalité ou s'il faut lui trouver une explication ad hoc.

3 - D'après la règle opératoire que nous nous sommes fixée, nous ne devons pas utiliser d'expressions dont l'espérance dépend de la constante m_V ou M_V (à la rigueur, comme on l'a vu, on peut considérer A_0 comme connu, moyennant le choix de la représentation privilégiée associée au champ V_0 lui-même). En particulier, donc, il devrait être interdit d'utiliser le variogramme arithmétique $\Gamma(h|V_0)$ donné en (14). En pratique, M_V^* , bien qu'inconnu, peut être estimé à l'aide des données expérimentales, et $\Gamma(h|V_0)$ lui-même peut faire l'objet d'une estimation. On prendra garde, toutefois, aux biais qu'entraîne l'exponentiation des gaussiennes.

La situation expérimentale typique est la suivante : dans le champ V_0 , on a fait des prélèvements aux points x_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$ et on connaît les Z_α et les $Y_\alpha = \log Z_\alpha$. En travaillant sur les Y_α on obtient une estimation (sans biais) γ^* du variogramme (logarithmique) γ . Par contre, si l'on travaille sur les Z_α on aboutira à une estimation biaisée du variogramme arithmétique $\Gamma(h|V_0)$. En effet, si $S = \{x_\alpha, \alpha = 1, \dots, n\}$ est le domaine (fini) constitué des points expérimentaux, notre variogramme arithmétique expérimental Γ^* vérifie :

$$E(\Gamma^*(h)) = \Gamma(h|S) = (M_S^*)^2 e^{A_S} (1 - e^{-\gamma(h)})$$

et non $E(\Gamma^*(h)) = \Gamma(h|V_0)$. Ici, M_S^* est la variable conditionnante optimale associée à S et A_S le paramètre de Lagrange correspondant. On connaît numériquement A_S , et aussi $M_S^* = \exp(m_S^* + \frac{1}{2} A_S)$ puisque $m_S^* = \lambda_S^\alpha Y_\alpha$ avec des λ_S^α solution du système (12) écrit pour le domaine S . Autrement dit, ce qui est accessible expérimentalement c'est le variogramme arithmétique $\Gamma(h|S)$ conditionné en m_S^* . Il se trouve, par chance, que $\Gamma(h|S)$ est un estimateur sans biais de $\Gamma(h|V_0)$, en ce sens que l'espérance conditionnelle $\Gamma(h|S)$ à $m^*(V_0)$ fixé est égale à $\Gamma(h|V_0)$. En effet, on a $(M_S^*)^2 = \exp(2m_S^* + A_S)$ et, à $m_{V_0}^*$ fixé, m_S^* est gaussien, d'espérance $m_{V_0}^*$ et de variance $A_0 - A_S$. On a donc à $m^*(V_0)$ fixé

$$\begin{aligned} E(M_S^{*2} e^{A_S}) &= e^{2A_S} E(e^{2m_S^*}) = e^{2A_S} e^{2m_{V_0}^* + 2(A_0 - A_S)} \\ &= e^{2m_{V_0}^* + 2A_0} = (M_{V_0}^*)^2 e^{A_0} \end{aligned}$$

En définitive, donc, le variogramme arithmétique expérimental est un estimateur sans biais de $\Gamma(h|V_0)$.

3 - L'ESTIMATION DES F.A.L.L.ST

Le problème de l'estimation se pose dans les termes suivants : on se donne une F.A. gaussienne (localement) stationnaire dans V_0 , d'espérance inconnue m et de covariance $\sigma(h) = A - \gamma(h)$. Le variogramme γ est supposé connu. A la rigueur, comme on l'a vu, on peut supposer A connu, mais en tout état de cause m est inconnu. On pose $Z(x) = \exp(Y(x))$, de sorte que $Z(x)$ est une F.A.L.L.ST sur V_0 et admet l'espérance M , la covariance centrée $C(h)$ et le variogramme $\Gamma(h)$ définis comme suit :

$$(15) \quad \begin{cases} M = e^{m + \frac{1}{2} A} \\ C(h) = M^2 (e^{A - \gamma(h)} - 1) \\ \Gamma(h) = M^2 e^A (1 - e^{-\gamma(h)}) \end{cases}$$

On suppose connues les valeurs $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$ (et $Y_\alpha = \log Z_\alpha$) en n points $x_\alpha \in V_0$ et on veut estimer :

$$Z_0 = \int p(dx) Z(x) = \int p(dx) e^{Y(x)}$$

où p est une mesure donnée (de support dans V_0 et de somme unité). Le problème comporte deux parties : premièrement, former une classe assez vaste d'estimateurs (non nécessairement linéaires) qui soient sans biais quelle que soient les constantes inconnues m et A , autrement dit, construire une classe d'estimateurs universels. Deuxièmement, à l'intérieur de cette classe, choisir le meilleur estimateur possible (selon un critère d'optimalité qu'il conviendra de définir avec précision) ou, si cela se révèle trop difficile, former un estimateur qui ne soit pas trop éloigné de cet estimateur optimal, et nous verrons qu'il existe plusieurs possibilités.

3-a - Recherche d'estimateurs universels.

Nous dirons qu'une fonction (non nécessairement linéaire) $Z^*(Z_\alpha)$ des Z_α est un estimateur universel de Z_0 si $E(Z^* - Z_0) = 0$ quelles que soient les constantes A et m . En fait, on a $E(Z_0) = M = \exp(m + \frac{1}{2} A)$ et la condition d'universalité se réduit à :

$$E(Z^*) = M = \exp(m + \frac{1}{2} A) \quad (\forall m, A)$$

Une première possibilité, triviale, consiste à prendre :

$$Z^* = \lambda^\alpha Z_\alpha, \quad \sum \lambda^\alpha = 1$$

puisque alors $E(Z_\alpha) = M$ quel que soit M . Mais, du fait que les régressions lognormales ne sont pas linéaires, ce n'est certainement pas dans cette classe que l'on trouvera l'estimateur optimal. Une autre possibilité consiste à remarquer qu'avec les Y_α fixés (et m supposé connu!) l'espérance conditionnelle de $Z(x)$ est de la forme $B \exp(\lambda^\alpha Y_\beta)$. On peut donc chercher, parmi les expressions de cette forme, celles qui vérifient la condition d'universalité. Or on trouve :

$$E(B e^{\lambda^\alpha Y_\alpha}) = B e^{m \sum \lambda_\alpha + \frac{1}{2} A (\sum \lambda_\alpha)^2 - \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}}$$

Par conséquent, moyennant la seule condition :

$$(16) \quad \sum \lambda^\alpha = 1$$

et en prenant $B = \exp(\frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta})$, l'estimateur :

$$(17) \quad Z^* = e^{\lambda^\alpha Y_\alpha + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}}$$

vérifie $E(Z^*) = \exp(m + \frac{1}{2} A) = M$, c'est-à-dire la condition d'universalité.

Il est possible qu'il existe d'autres classes d'estimateurs universels, mais dans ce qui suit nous nous limiterons à la classe des estimateurs définis par les relations (16) - (17) et à ceux qui s'en déduisent par combinaison linéaire : il est clair, en effet, que si les Z_i sont des estimateurs universels, $Z^* = \sum \beta_i Z_i^*$ est également universel pourvu que $\sum \beta_i = 1$. Cette classe est, en fait, déjà plutôt trop vaste.

3-b - Recherche d'un critère d'optimalité.

Le critère d'optimalité doit, lui aussi, vérifier la règle opératoire de base, autrement dit être indépendant de m (et si possible aussi de A). On peut envisager plusieurs possibilités : variance conditionnelle de Z_0 à Z^* fixé, variance d'estimation $E((Z_0 - Z^*)^2)$, variance relative $E((Z^*/Z_0)^2)$ etc...

1 - Variances conditionnelles asymptotiques. - Un simple coup d'oeil sur les formules (1) suffit pour voir que la variance de Z_0 à Z^* dépendra irréductiblement de m et de A et ne peut pas conduire à un critère opératoire. Il en est ainsi même si les λ^α vérifient la relation du conditionnement optimal sur l'ensemble $S = \{x_\alpha\}$ des points expérimentaux : car la relation $\lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = \mu_S$ n'entraîne nullement $\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} = \mu_S$ en $x \notin S$. On pourrait enfin chercher à utiliser les résultats du paragraphe 1-d en, prenant comme critère la valeur asymptotique pour $A \rightarrow \infty$ de la variance conditionnelle. Examinons cette possibilité.

Posons donc (avec $\sum \lambda^\alpha = 1$)

$$Y^* = \lambda^\alpha Y_\alpha \quad Z^* = \exp \left(Y^* + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} \right)$$

D'après les relations (4), à Y^* fixé et pour $A \rightarrow \infty$, la F.A.

conditionnelle Y_x vérifie

$$\begin{cases} E(Y_x | Y^*) = Y^* \\ \text{Cov}(Y_x, Y_y | Y^*) = \lambda^\alpha (\gamma_{x\alpha} + \gamma_{y\alpha}) - \gamma(x-y) - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} \end{cases}$$

En particulier, pour un $x \in V_0$ donné, ceci donne :

$$(18) \quad \begin{cases} D^2(Y_x | Y^*) = 2 \lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} \\ E(Z_x | Y^*) = \exp(Y^* + \lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} - \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}) \\ = Z^* \exp(\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}) \end{cases}$$

On obtient un résultat d'apparence paradoxale : bien que Z^* soit un estimateur universel de Z_x , donc vérifie

$$E(Z^* - Z_x) = 0 \quad \forall A, m$$

où l'espérance conditionnelle $E(Z_x | Z^*) = E(Z_x | Y^*)$ est asymptotiquement égale à $C Z^*$ pour $A \rightarrow \infty$ avec une constante $C = \exp(\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta})$ différente de 1. En fait, il n'y a pas là de contradiction, car pour A infini l'espérance $E(Z^*)$ n'existe plus de sorte que la relation $E(Z_x) = E[E(Z_x | Z^*)] = C E(Z^*)$ est dépourvue de sens.

Par contre, nous pouvons choisir les λ^α de manière à minimiser la variance conditionnelle logarithmique (celle de Y_x) ou arithmétique (celle de Z_x). Ces deux formulations ne sont pas équivalentes, car

$$D^2(Z_x | Z^*) = e^{2Y^* + D^2(Y_x | Y^*)} (e^{D^2(Y_x | Y^*)} - 1)$$

ne sera pas optimisée en même temps que $D^2(Y_x | Y^*)$. En fait, la présence du facteur e^{2Y^*} qui dépend lui aussi des λ^α montre que la

variance arithmétique $D^2(Z_x|Z^*)$ conduirait à un critère où les valeurs numériques des Y_α interviendraient explicitement : bien que cela ne soit pas incompatible avec notre règle opératoire, cette circonstance conduit à rejeter ce critère. Il conduirait, en effet, à un estimateur $Y^* = \lambda^\alpha Y_\alpha$ où les coefficients λ^α dépendraient eux-mêmes des Y_α , et nous savons que cela réintroduirait des biais inextricables.

Par contre, minimiser la variance logarithmique $D^2(Y_x|Y^*)$ conduit à un critère opératoire qui semble fort judicieux. D'après (18) et (16), cela conduit au système :

$$(19) \quad \begin{cases} \lambda^\alpha(x) \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta x} - \mu(x) \\ \sum \lambda^\alpha(x) = 1 \end{cases}$$

qui n'est autre que le système habituel du krigeage (écrit pour la F.A. $Y(x)$). Ainsi $Y^* = Y^*(x) = \lambda^\alpha(x) Y_\alpha$ est identique au krigeage $Y_K(x)$ de $Y(x)$. La variance (logarithmique) de ce krigeage est :

$$\sigma_K^2(x) = 2 \lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} = \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} + 2 \mu(x)$$

Mais on notera que l'estimateur Z^* n'est pas égal (comme on aurait pu s'y attendre) à $\exp(Y^* + \frac{1}{2} \sigma_K^2)$, mais à :

$$Z^* = e^{Y^* + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} = e^{Y^* + \frac{1}{2} \sigma_K^2 - \mu}$$

Malgré cette curieuse anomalie, nous avons là, semble-t-il, un excellent estimateur universel pour la valeur ponctuelle $Z(x)$. Si maintenant nous voulons estimer $Z_0 = \int p(dx) Z(x)$, il n'est pas absurde de prendre l'estimateur (universel)

$$(20) \quad Z_0^* = \int p(dx) \quad Z^*(x) = \int p(dx) \quad e^{Y^*(x) + \frac{1}{2} \lambda_x^\alpha \lambda_x^\beta \gamma_{\alpha\beta}}$$

Pourtant, cet estimateur est trop lourd pour être effectivement utilisé en pratique. De plus, nous ne savons pas exactement en quel sens il peut être optimal. En effet, $Z^*(x)$, formé à partir de (19), est l'estimateur qui minimise la variance logarithmique conditionnelle (asymptotique) $D^2(Y(x)|Y^*)$. Mais il n'y a évidemment pas de relation simple entre la variance de $\log(\int p(dx) Z(x))$ et celles des $\log Z(x)$, de sorte que rien ne nous garantit que l'estimateur (20) minimise la variance de $\log Z_0$ à Z_0^* fixé (il est vraisemblable qu'il n'en est rien).

2 - Variance d'estimation $E((Z_0 - Z^*)^2)$

Examinons d'abord la variance d'estimation $E[(Z(x) - Z^*)^2]$ d'une valeur ponctuelle $Z(x)$ donnée. On trouve :

$$\begin{aligned} E[(Z(x) - Z^*)^2] &= E(e^{2Y(x)}) - 2 E(e^{Y(x) + \lambda^\alpha Y_\alpha + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}}) \\ &= E(e^{2\lambda^\alpha Y_\alpha + \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}}) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} E(e^{2Y(x)}) &= M^2 e^A \\ E(e^{Y(x) + \lambda^\alpha Y_\alpha}) &= e^{2m + 2A - \lambda^\alpha \gamma_{\alpha x} - \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} \\ E(e^{2\lambda^\alpha Y_\alpha}) &= e^{2m + 2A - 2 \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

Par suite :

$$(21) \quad E[(Z(x) - Z^*)^2] = M^2 e^A \left(1 - 2 e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} + e^{-\lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} \right)$$

Comme les constantes inconnues M et A n'interviennent que sous la forme d'un facteur constant $M^2 e^A$, les valeurs de λ^α qui minimisent la variance d'estimation (21) sont indépendantes de m et de A , de sorte que nous arrivons à un critère parfaitement opératoire. On note que le minimum de (21) n'est nullement donné par le système (19) du krigeage ordinaire, mais par :

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta} e^{-\lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} = \gamma_{\beta x} e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} + \mu \\ \sum \lambda_\alpha = 1 \end{cases}$$

On peut le résoudre par itération, en partant de la solution λ_0^α du système (19) et en posant par récurrence :

$$\begin{cases} \lambda_n^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = \left(\gamma_{\beta x} e^{-\lambda_{n-1}^\alpha \gamma_{\alpha x}} + \mu_n \right) e^{\lambda_{n-1}^\alpha \lambda_{n-1}^\beta \gamma_{\alpha\beta}} \\ \sum \lambda_n^\alpha = 1 \end{cases}$$

Vu l'arbitraire qui préside au choix de ces divers critères, on peut sans doute aussi bien se contenter de la solution, plus simple, du système (19).

Passons maintenant à l'estimation d'une valeur $Z_0 = \int p(dx) Z(x)$ non ponctuelle. A nouveau, deux possibilités apparaissent. On peut estimer $Z(x)$, pour chaque x , en formant l'estimateur $Z^*(x) = \exp(\lambda^\alpha(x) Y_\alpha + \frac{1}{2} \lambda^\alpha(x) \lambda^\beta(x) \gamma_{\alpha\beta})$ où les $\lambda^\alpha(x)$ constituent la solution de (22), ou, si l'on préfère, de (19), et prendre $Z_0^* = \int p(dx) Z^*(x)$. Ici encore, il s'agira d'un estimateur universel, sans doute très bon (bien que l'on ne puisse plus dire selon quel critère au juste il est optimal) mais trop lourd à mettre en oeuvre dans les applications (du fait que l'on doit calculer les $\lambda^\alpha(x)$ pour

pour toutes les valeurs de x).

L'autre possibilité consiste à choisir l'estimateur de la forme
(17)

$$Z^* = e^{\lambda^\alpha Y_\alpha + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}}$$

et à choisir les λ^α minimisant la variance arithmétique d'estimation $E(Z_0 - Z^*)^2$. Comme Z^* vérifie la condition d'universalité $\sum \lambda^\alpha = 1$, nous trouvons :

$$E((Z_0 - Z^*)^2) = D^2(Z_0) + D^2(Z^*) - 2 \text{Cov}(Z_0, Z^*)$$

D'après (15), on a tout d'abord :

$$D^2(Z_0) = \int p(dx) C(x-y) p(dy) = M^2 e^A \int e^{-\gamma(x-y)} p(dx) p(dy) - M^2$$

puis

$$D^2(Z^*) = M^2 (e^{D^2(Y^*)} - 1) = M^2 e^{A - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} - M^2$$

Il reste à calculer la covariance de Z_0 et Z^* qui est :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_0, Z^*) &= \int p(dx) \text{Cov}(Z_x, Z^*) \\ &= M^2 e^A \int p(dx) e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} - M^2 \end{aligned}$$

Finalement, ici encore, l'expression $M^2 e^A$ se met en facteur, et on trouve :

$$(23) \quad \begin{cases} E[(Z_0 - Z^*)^2] = M^2 e^A \left[\iint p(dx) e^{-\gamma(x-y)} p(dy) - \right. \\ \left. - 2 \int p(dx) e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} + e^{-\lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} \right] \end{cases}$$

Les valeurs des λ^α réalisant le minimum de cette expression ne dépendent pas de m ni de A (de sorte que notre règle opératoire

est bien vérifiée) et ils sont solution du système :

$$(23') \quad \begin{cases} \lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta} e^{-\lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}} = \int \gamma_{\beta x} e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} p(dx) - \mu \\ \sum \lambda^\alpha = 1 \end{cases}$$

On peut résoudre ce système par approximation successives. On formera d'abord la solution λ_0^α du krigeage ordinaire :

$$\lambda_0^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = \int \gamma_{\beta x} p(dx) - \mu_0$$

$$\sum \lambda_0^\alpha = 1$$

puis, par récurrence :

$$\begin{cases} \lambda_n^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = e^{\lambda_{n-1}^\alpha \lambda_{n-1}^\beta \gamma_{\alpha\beta}} \int \gamma_{\beta x} e^{-\lambda_{n-1}^\alpha \gamma_{\alpha x}} p(dx) - \mu_n \\ \sum \lambda_n^\alpha = 1 \end{cases}$$

Ici encore, on peut se demander dans quelle mesure la solution λ_0^α du krigeage ordinaire ne serait pas très suffisante pour les besoins de la pratique.

3 - Autres possibilités. Nous avons mentionné d'autres possibilités. En fait, la plus intéressante d'entre elles repose sur le principe d'approximation connu sous le nom de permanence de la lognormalité : dès lors que l'on admet que Z_0 et Z_α sont des variables (simultanément) lognormales et que l'on est capable de calculer la matrice des covariances correspondantes, il n'y a pas de difficulté à calculer $E((Z_0 - Z^*)^2)$ et à déterminer les λ^α qui minimisent cette variance. Nous y reviendrons dans le paragraphe ci-dessous.

4 - LA PERMANENCE DE LA LOGNORMALITE.

Nous arrivons maintenant à ce grand Serpent de Mer : la permanence de la lognormalité. Soit $Y(x)$ une F.A. gaussienne d'espérance m et de covariance stationnaire $\sigma(x-y) = A - \gamma(x-y)$, et soit $Z(x) = e^{Y(x)}$. Dans quelle mesure la variable :

$$(24) \quad Z = \int \lambda(dx) \quad Z(x) = \int \lambda(dx) e^{Y(x)}$$

où λ est une mesure donnée peut-elle être considérée comme (à peu près) lognormale? Une autre question que l'on peut se poser concerne les rapports existant entre Z et la variable gaussienne $Y = \int \lambda(dx) Y(x)$. Enfin, à supposer que ce principe de permanence soit admissible, comment peut-on en profiter pour former le plus simplement possible un estimateur universel et à peu près optimal d'un Z_0 donné?

4-a - Les moments de la variable Z .

Pour apprécier la permanence, nous allons calculer les moments de la variable Z définie en (24) et les comparer avec ceux que l'on devrait avoir si Z était lognormal.

Notons que l'on a pour n entier > 0 :

$$Z^n = \iint \dots \int e^{Y(x_1) + \dots + Y(x_n)} \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n)$$

$$E[e^{\sum Y(x_i)}] = e^{n m + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij}}$$

Pour $n = 1$, $E(Z) = E(e^{Y(x)}) = M$ avec

$$M = e^{m + \frac{1}{2} \sigma^2}$$

Par suite, dans le cas général :

$$\begin{aligned} E[e^{\sum Y(x_i)}] &= M^n e^{\sum_{i < j} \sigma(x_i - x_j)} \\ &= M^n e^{\frac{n(n-1)}{2} A} e^{-\sum_{i < j} \gamma(x_i - x_j)} \end{aligned}$$

Donc :

$$(25) \quad E(Z^n) = M^n e^{\frac{n(n-1)}{2} A} \int \dots \int e^{-\sum_{i < j} \gamma(x_i - x_j)} \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n)$$

En particulier :

$$E(Z) = M \quad E(Z^2) = M^2 e^A \iint e^{-\gamma(x-y)} \lambda(dx) \lambda(dy)$$

Si Z était lognormal, on aurait $Z = e^\zeta$ pour une gaussienne ζ vérifiant

$$\begin{aligned} E(\zeta) &= \mu & D^2(\zeta) &= s^2 \\ M &= e^{\mu + s^2} & E(Z^2) &= M^2 e^{s^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$(26) \quad s^2 = A + \log \iint \lambda(dx) e^{-\gamma(x-y)} \lambda(dy)$$

D'après la formule lognormale générale :

$$E(e^{n\zeta}) = (E(e^\zeta))^n e^{\frac{n(n-1)}{2} s^2}$$

on aurait donc, si Z était lognormal :

$$(27) \quad E_{\text{logn}}(Z^n) = M^n e^{\frac{n(n-1)}{2} A} \left(\int \lambda(dx) e^{-\gamma(x-y)} \lambda(dy) \right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Tout se ramène donc à comparer les expressions (25) et (27). Elles contiennent toutes deux le facteur $M^n e^{\frac{n(n-1)}{2} A}$, et tout revient donc à comparer entre elles les deux expressions intégrales. Comme il n'y a évidemment pas de méthode générale, nous pouvons faire deux choses : un calcul approché (à l'ordre deux) en supposant

$\gamma(x-y)$ petit pour x et y parcourant le support de λ , puis un calcul explicite sur un cas particulier.

4-b - Approximation d'ordre deux.

A l'ordre deux, nous remplaçons $e^{-\gamma}$ par $1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2}$,
d'où

$$(28) \quad \begin{cases} \int \lambda e^{-\gamma} \lambda = 1 - \int \lambda \gamma \lambda + \frac{1}{2} \int \lambda \gamma^2 \lambda \\ \left(\int \lambda e^{-\gamma} \lambda \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 1 - \frac{n(n-1)}{2} \int \lambda \gamma \lambda + \frac{n(n-1)}{4} \int \lambda \gamma^2 \lambda \\ \quad + \frac{1}{8} n(n-1)(n-2)(n+1) \left(\int \lambda \gamma \lambda \right)^2 \end{cases}$$

Ceci nous donne les deux premiers termes de (27). Il reste à faire le même calcul pour (25). De :

$$e^{-\sum_{i<j} \gamma(x_i - x_j)} = 1 - \sum_{i<j} \gamma(x_i - x_j) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i<j} \gamma(x_i - x_j) \right)^2$$

nous déduisons :

$$\begin{aligned} \iint e^{-\sum_{i<j} \gamma(x_i - x_j)} \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n) &= 1 - \frac{n(n-1)}{2} \int \lambda \gamma \lambda \\ &+ \frac{1}{2} \int \dots \int \left(\sum_{i<j} \gamma(x_i - x_j) \right)^2 \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n) \end{aligned}$$

Les termes du premier ordre sont les mêmes que dans la première expression (de sorte que la permanence est vérifiée, si l'on peut dire, au premier ordre). Cette coïncidence ne subsiste pas à l'ordre 2. Considérons, en effet, l'expression :

$$\left(\sum_{i<j} \gamma(x_i - x_j) \right)^2 = \sum_{i<j} \sum_{i'<j'} \gamma(x_i - x_j) \gamma(x_{i'} - x_{j'})$$

Des raisonnements combinatoires simples montrent que cette expression comporte :

$$\begin{array}{lll} \frac{n(n-1)}{2} & \text{termes du type} & \gamma^2(x_i - x_j) \\ n(n-1)(n-2) & " & \gamma(x_i - x_j) \gamma(x_i - x_k) \quad (k \neq j) \\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} & " & \gamma(x_i - x_j) \gamma(x_k - x_\ell) \quad \left(\begin{array}{l} i \neq k \quad i \neq \ell \\ j \neq k \quad j \neq \ell \end{array} \right) \end{array}$$

Par conséquent, notre terme d'ordre deux est :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \dots \int \left(\sum_{i < j} \gamma(x_i - x_j) \right)^2 \gamma(dx_1) \dots \lambda(dx_n) &= \frac{n(n-1)}{4} \iint \lambda(dx) \gamma^2(x-y) \lambda(dy) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \iiint \gamma(x-y) \gamma(y-z) \gamma(dx) \lambda(dy) \lambda(dz) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} \left(\iint \lambda \gamma \lambda \right)^2 \end{aligned}$$

Il est donc différent (quoiqu'en un sens pas tellement) des termes d'ordre 2 de l'expression (28), qui est ^{soit} :

$$\frac{n(n-1)}{4} \iint \lambda \gamma^2 \lambda + \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{8} \left(\iint \lambda \gamma \lambda \right)^2$$

Autrement dit : la permanence n'est vraiment vérifiée qu'au premier ordre, c'est-à-dire pour un support dont le diamètre L est tel que $(\gamma(L))^2$ soit très petit.

4-c - Exemple.

Prenons $\gamma(h) = a|h|$ et

$$Z = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell Z(x) dx$$

Calculons explicitement $E(Z^3)$: d'après (25), il vient :

$$\begin{aligned} E(Z^3) &= M^3 e^{3A} \frac{6}{\ell^3} \int_0^\ell dx \int_0^x dy \int_0^y e^{-2a(x-z)} dz \\ &= 6 M^3 e^{3A} \left[\frac{1 + e^{-2a\ell}}{4a^2 \ell^2} - 2 \frac{1 - e^{-2a\ell}}{8a^3 \ell^3} \right] \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{2}{\ell^2} \int_0^\ell dx \int_0^x e^{-a(x-y)} dy = 2 \frac{e^{-a\ell} - 1 + a\ell}{a^2 \ell^2}$$

et par suite

$$E_{\log n}(Z^3) = M^3 e^{3A} \left(2 \frac{e^{-a\ell} - 1 + a\ell}{a^2 \ell^2} \right)^3$$

Si $a\ell$ est grand, on a, asymptotiquement :

$$E(Z^3) = \frac{3}{2} M^3 e^{3A} \frac{1}{a^2 \ell^2}$$

$$E_{\log n}(Z^3) = 8 M^3 e^{3A} \frac{1}{a^3 \ell^3}$$

Ces deux expressions ne sont pas du même ordre de grandeur en $(a\ell)$: la permanence est inadmissible pour les grands supports.

Si $a\ell$ est petit, on trouve à l'ordre 2 :

$$\begin{cases} E(Z^3) = M^3 e^{3A} (1 - a\ell + \frac{3}{5} a^2 \ell^2) \\ E_{\log n}(Z^3) = m^3 e^{3A} (1 - a\ell + \frac{7}{12} a^2 \ell^2) \end{cases}$$

la permanence est vérifiée au premier ordre. En fait, l'accord est excellent pour $a\ell \leq 1/10$ et acceptable pour $a\ell \leq 1/2$.

En conclusion de ces deux calculs - l'un général, mais approché, l'autre rigoureux, mais particulier - et compte tenu surtout des résultats de l'expérience, on peut avancer la règle pratique suivante : la permanence de la lognormalité est très bien vérifiée pour des supports dont le diamètre ℓ vérifie $\gamma(\ell) \leq 1/10$, approximativement vérifiée si $\gamma(\ell) \leq 1/2$, mais beaucoup plus contestable si $\gamma(\ell) \geq 1$.

4-d - Relation entre Y_V et Z_V .

Avec les mêmes notations, interrogeons-nous maintenant sur les relations qui peuvent exister entre les deux variables

$$Y = \int \lambda(dx) Y(x) \quad , \quad Z = \int \lambda(dx) Z(x) = \int \lambda(dx) e^{Y(x)}$$

Il est possible de calculer les covariances de Y et Z , et aussi l'espérance et la variance conditionnelle de Z à Y fixé (mais non, inversement, de Y à Z fixé, à moins de postuler la permanence de la lognormalité). On trouve, tout d'abord, sans difficulté :

$$E(e^Y) = M e^{-\frac{1}{2} \int \lambda \gamma \lambda}$$

$$E(Z) = M$$

Remplaçons donc Y par $Y^* = Y + \frac{1}{2} \int \lambda \gamma \lambda$, de manière à ce que $Z^* = \exp(Y^*)$ soit un estimateur universel de Z . En reprenant les calculs du chapitre précédent (3-b-2), on trouve :

$$\begin{cases} E(Z^*) = M = E(Z) \\ D^2(Z^*) = M^2 \left(e^{A - \iint \lambda \gamma \lambda} - 1 \right) \\ \text{Cov}(Z, Z^*) = M^2 \left(e^A \int \lambda(dx) e^{-\int \lambda(dy) \gamma(x-y)} - 1 \right) \\ D^2(Z) = M^2 \left(e^A \iint \lambda(dx) e^{-\gamma(x-y)} \lambda(dy) - 1 \right) \end{cases}$$

Intéressons-nous, maintenant, à la loi de Z à Y (ou Y^*) fixé, en nous limitant - pour simplifier les calculs - au cas asymptotique $\Lambda \rightarrow \infty$. D'après (18), on trouve pour chaque $x \in V_0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(e^{Yx}|Y) = e^{Y + \gamma_{xY} - \frac{1}{2} \gamma_{YY}} \\ D^2(e^{Yx}|Y) = (E(e^{Yx}|Y))^2 [e^{2\gamma_{xY} - \gamma_{YY}} - 1] \\ \text{Cov}(e^{Yx}, e^{Yy}|Y) = E(e^{Yx}|Y) E(e^{Yy}|Y) (e^{\gamma_{xY} + \gamma_{yY} - \gamma(x-y) - \gamma_{YY}} - 1) \end{array} \right.$$

On en déduit l'espérance de $Z = \int \lambda(dx) e^{Y(x)}$ à Y fixé :

$$E(Z|Y) = e^Y - \frac{1}{2} \gamma_{YY} \int e^{\gamma_{xY}} \lambda(dx)$$

En particulier $E(Z|Y)$ n'est pas égal à $Z^* = e^{Y + \frac{1}{2} \gamma_{YY}}$, sauf toutefois dans le cadre de l'approximation d'ordre 1 (c'est-à-dire, comme on l'a vu, pratiquement sous l'hypothèse de la permanence de la lognormalité). A l'approximation d'ordre 1, en effet, on trouve :

$$\begin{aligned} E(Z|Y) &= e^Y (1 - \frac{1}{2} \gamma_{YY}) \int [1 + \gamma_{xY}] \lambda(dx) \\ &= e^Y (1 - \frac{1}{2} \gamma_{YY}) (1 + \gamma_{YY}) = e^Y (1 + \frac{1}{2} \gamma_{YY}) = e^{Y + \frac{1}{2} \gamma_{YY}} = Z^* \end{aligned}$$

En deuxième lieu, la variance de Z à Y fixé est donnée par :

$$\begin{aligned} D^2(Z|Y) &= \iint \lambda(dx) \lambda(dy) \text{Cov}(e^{Yx}, e^{Yy}|Y) \\ &= e^{2Y} \iint \lambda(dx) \lambda(dy) [e^{2\gamma_{xY} + 2\gamma_{yY} - 2\gamma(x-y) - 2\gamma_{YY}} - e^{\gamma_{xY} + \gamma_{yY} - \gamma(x-y) - \gamma_{YY}}] \end{aligned}$$

A l'ordre 1, on trouve $D^2(Z|Y) = 0$, c'est-à-dire $Z = Z^*$ p.s.

A l'ordre 2, toutefois, cette variance conditionnelle est > 0 , et vaut :

$$\begin{aligned} D^2(Z|Y) &= \frac{3}{2} e^{2Y} \iint (\gamma_{xY} + \gamma_{yY} - \gamma(x-y) - \gamma_{YY})^2 \lambda(dx) \lambda(dy) \\ &= \frac{3}{2} e^{2Y} [\iint \lambda(dx) \gamma^2(x-y) \lambda(dy) - 2 \int \lambda(dx) \gamma_{xY}^2 + \gamma_{YY}^2] \end{aligned}$$

Par exemple, pour $\gamma(h) = a|h|$ et $Z = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell Z(x) dx$, on a :

$$\gamma_{xY} = \frac{a}{\ell} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(\ell-x)^2}{2} \right] = a \ell \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{\ell} + \frac{x^2}{\ell^2} \right)$$

$$\gamma_{xY}^2 = a^2 \ell^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{x}{\ell} + \frac{2x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3} + \frac{x^4}{\ell^4} \right)$$

$$\frac{1}{\ell} \int_0^\ell \gamma_{xY}^2 dx = \frac{7}{60} a^2 \ell^2$$

et finalement (à l'ordre 2)

$$D^2(Z|Y) = \frac{1}{15} e^{2Y} a^2 \ell^2$$

A la même approximation, des calculs similaires donnent :

$$E(Z|Y) = e^Y \left(1 + \frac{1}{6} a \ell + \frac{a^2 \ell^2}{60} + \dots \right)$$

4-e - L'estimation sous l'hypothèse de la permanence.

Supposons maintenant que l'hypothèse de la lognormalité soit acceptable sous la forme forte : à savoir $Z_0 = \int p(dx) Z_\alpha$ et les Z_α expérimentaux obéissent (approximativement au moins) à une loi lognormale à $n+1$ variables - et cherchons l'estimateur universel

$$Z^* = e^{\sum \lambda_\alpha Y_\alpha + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta}}$$

($\sum \lambda^\alpha = 1$) qui soit optimal sous ces hypothèses. Nous pouvons alors - car nous saurons la calculer - nous donner comme critère de mini-

miner la variance logarithmique de Z_0/Z^* . D'après le paragraphe 3-b-2, on trouve les variances et covariances logarithmiques suivantes (en supposant (Z_0, Z^*) lognormales):

$$\begin{cases} D^2(\log Z^*) = A - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} \\ \text{Cov}(\log Z^* \log Z_0) = \log \frac{E(Z^* Z_0)}{M^2} = A + \log \int p(dx) e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} \\ D^2(\log Z_0) = \log E\left(\frac{Z_0^2}{M^2}\right) = A + \log \iint p(dx) e^{-\gamma(x-y)} p(dy) \end{cases}$$

Par conséquent, la variance logarithmique :

$$\begin{aligned} D^2(\log(Z^*/Z_0)) &= D^2(\log Z^*) + D^2(\log Z_0) - 2 \text{Cov}(\log Z^*, \log Z_0) \\ &= -2 \log \int p(dx) e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} - \lambda^\alpha \lambda^\beta \gamma_{\alpha\beta} + \log \iint p(dx) e^{-\gamma(x-y)} p(dy) \end{aligned}$$

ne dépend pas des constantes inconnues A et m et constitue donc un excellent critère d'optimisation. Les λ^α minimisant cette variance d'estimation logarithmique sont la solution du système suivant :

$$(30) \quad \begin{cases} \lambda^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\int \gamma_{\beta x} e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}} p(dx)}{\int p(dx) e^{-\lambda^\alpha \gamma_{\alpha x}}} + \mu \\ \sum \lambda^\alpha = 1 \end{cases}$$

Il n'est pas identique au système (23'). Ici encore, on peut le résoudre par itération en partant de la solution λ_0^α du système du krigeage ordinaire, et en prenant

$$\begin{cases} \lambda_n^\alpha \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\int \gamma_{\beta x} e^{-\lambda_{n-1}^\alpha \gamma_{\alpha x}} p(dx)}{\int p(dx) e^{-\lambda_{n-1}^\alpha \gamma_{\alpha x}}} + \mu \\ \sum \lambda_n^\alpha = 1 \end{cases}$$

Il serait peut-être intéressant de procéder à une comparaison numérique méthodique des estimateurs (23') et (30) ainsi que des variances d'estimation auxquels ils conduisent.

Effet proportionnel $\left\{ \begin{array}{l} \text{ancien def-} \\ \text{usagier (8 fonction de m local)} \\ \text{Interpretation} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{avec 2 stat-} \\ \text{de effet d'annee.} \end{array} \right.$

Conditionnement en gausien

Conditionnement optimal $\rightarrow$ stationnarité locale

Cosinusoïdique : représentation localement stationnaire

Conditionnement et quelconque

Le cas logarithme