

Fontainebleau

N-389

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 125

LA FORMULE DE CROFTON POUR LES
SECTIONS EPAISSES

G. MATHERON

Septembre 1974

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 126

LA FORMULE DE CROFTON POUR LES SECTIONS EPAISSES

On sait que des observations effectuées sur des sections planes permettent de retrouver les valeurs des fonctionnelles de Minkowski $W_k(A)$ d'un ovoïde A de $\mathbb{R}^3$ par une simple application de la formule de Crofton. De même, si l'on a affaire à une famille finie d'ovoïdes A_i disjoints, on reconstituera les $\sum W_k(A_i)$ (sauf pour $k = 3$, c'est-à-dire que le nombre des ovoïdes reste inconnu). En pratique, on a souvent affaire à des sections épaisses. Au lieu de la section de A par un plan H , on observe la projection sur H de l'intersection $A \cap (H \oplus \delta a)$ de A avec le dilaté de H par un segment δa orthogonal à H . Nous donnons ci-dessous les formules rigoureuses généralisant la formule de Crofton au cas de ces sections épaisses. Elles expriment, en fonction de l'épaisseur ε de la bande, l'erreur que l'on commet en appliquant au cas des sections épaisses les formules valables pour les sections planes. Si l'épaisseur ε est petite, on peut reconstituer les vraies valeurs des $W_k(A)$ avec une excellente approximation.

Nous traiterons d'abord, dans $\mathbb{R}^n$, le problème des sections par des hyperplans épais, et nous généraliserons ensuite au cas des sections par des variétés linéaires de dimension quelconque dilatéées par une boule (dans le cas $n = 3$, il s'agit donc de sections par des cylindres de révolution).

I - FORMULE DES LAMES EPAISSES.

Soit $H \in \mathcal{S}_{n-1}$ une direction d'hyperplan, $H^\perp$ la droite orthogonale à H , $u = u(H)$ le segment unité parallèle à $H^\perp$, A un compact convexe et $A \oplus \varepsilon u$ son dilaté par εu .

Pour appliquer Crofton (dans le cas des sections minces), on mesure les fonctionnelles de Minkowski de $A \cap H_h$, on intègre en $h \in H^\perp$ et on prend la valeur moyenne sur $H \in \mathcal{S}_{n-1}$. Mais les fonctionnelles de Minkowski d'une section $A \cap H_h$ sont elles-mêmes les valeurs moyennes des projections de $A \cap H_h$ sur les variétés contenues dans H_h . Par exemple, pour évaluer W_{n-1-p} , on prend d'abord :

$$W_{n-1-p}^{n-1}(A \cap H_h) = \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{S}_p(H)} \mu_p(\pi_\sigma(A \cap H_h)) \omega_p^H(d\sigma)$$

On intègre ensuite en $h \in H^\perp$. Or, on a :

$$\int_{H^\perp} \mu_1^H(dh) \mu_p(\pi_\sigma(A \cap H_h)) = \mu_{p+1}(\pi_{\sigma \oplus H^\perp} A)$$

pour $\sigma \in \mathcal{S}_p(H)$ orthogonal à $H^\perp$. Il en résulte :

$$(1) \int_{H^\perp} W_{n-1-p}^{n-1}(A \cap H_h) \mu_1^H(dh) = \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{S}_p(H)} \mu_{p+1}(\pi_{\sigma \oplus H^\perp} A) \omega_p^H(d\sigma)$$

Il reste ensuite à prendre la moyenne de rotation en $H \in \mathcal{S}_{n-1}$. Or la mesure $\omega_{n-1}(dH) \omega_p^H(d\sigma)$ a pour image $\omega_{p+1}(dS)$ sur $\mathcal{S}_{p+1}$ par l'application $(H, \sigma) \rightarrow \sigma \oplus H^\perp$. D'où :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}_{n-1}} \omega_{n-1}(dH) \int_{H^\perp} W_{n-1-p}^{n-1}(A \cap H_n) \mu_1^{H^\perp}(dh) = \\ = \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{G}_{p+1}} \mu_{p+1}(\pi_S A) \omega_{p+1}(dS) = \frac{b_{n-1}}{b_p} \frac{b_{p+1}}{b_n} W_{n-p-1}(A) \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule de Crofton. Si maintenant on substitue $A' = A \oplus \varepsilon u$ à A dans (1), on remarque :

$$\mu_{p+1}(\pi_{\sigma \oplus H^\perp}^\perp (A \oplus \varepsilon u)) = \mu_{p+1}(\pi_{\sigma \oplus H^\perp}^\perp A) + \varepsilon \mu_p(\pi_\sigma A)$$

puisque $u \in H^\perp$ est orthogonal à σ et de longueur unité, et on trouve :

$$\begin{aligned} (1') \quad \int_{H^\perp} W_{n-1-p}^{n-1}(A' \cap H_n) \mu_1^{H^\perp}(dh) &= \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{G}_p(H)} \mu_{p+1}(\pi_{\sigma \oplus H^\perp}^\perp A) \omega_p^H(d\sigma) \\ &+ \varepsilon \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{G}_p(H)} \mu_p(\pi_\sigma A) \omega_p^H(d\sigma) \end{aligned}$$

Par rapport à (1), le terme correctif dépend scalairement de ε .

Lorsque l'on effectue ensuite la moyenne de rotation sur H , ce terme donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{G}_{n-1}} \omega_{n-1}(dH) \int_{\mathcal{G}_p(H)} \mu_p(\pi_\sigma A) \omega_p^H(d\sigma) = \\ \varepsilon \frac{b_{n-1}}{b_p} \int_{\mathcal{G}_p} \mu_p(\pi_\sigma A) \omega_p(d\sigma) = \varepsilon \frac{b_{n-1}}{b_n} W_{n-p}(A) \end{aligned}$$

La quantité calculée à partir des observations faites sur lames épaisses est donc :

$$\int_{\mathcal{G}_{n-1}} \omega_{n-1}(dH) \int_{H^\perp} W_{n-1-p}^{n-1}(A' \cap H_n) \mu_1^{H^\perp}(dh) =$$

$$\frac{b_{n-1}}{b_p} \frac{b_{p+1}}{b_n} \left[W_{n-p-1}(A) + \varepsilon \frac{b_p}{b_{p+1}} W_{n-p}(A) \right]$$

Autrement dit, la quantité $W'_{n-p-1}(A)$ mesurée expérimentalement n'est pas $W_{n-p-1}(A)$, mais :

$$(2) \quad W'_{n-p-1}(A) = W_{n-p-1}(A) + \varepsilon \frac{b_p}{b_{p+1}} W_{n-p}(A)$$

Telle est l'expression de l'erreur due à l'emploi de lames épaisses. On peut en déduire une correction approchée (pour ε petit).
la relation (2) donne, en effet :

$$W'_0(A) = W_0(A) + \varepsilon \frac{b_{n-1}}{b_n} W_1(A)$$

$$W'_1(A) = W_1(A) + \varepsilon \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} W_2(A)$$

$$W'_{n-1}(A) = W_{n-1}(A) + \varepsilon \frac{b_0}{b_1} W_n(A)$$

Donc

$$W_{n-1}(A) = W'_{n-1}(A) - \varepsilon \frac{b_0}{b_1} W_n(A)$$

et par récurrence :

$$(3) \quad \begin{cases} W_{n-p-1}(A) = W'_{n-p-1}(A) - \varepsilon \frac{b_p}{b_{p+1}} W'_{n-p}(A) + \varepsilon^2 \frac{b_{p-1}}{b_{p+1}} W'_{n-p+1}(A) \\ + \dots (-1)^p \varepsilon^p \frac{b_1}{b_{p+1}} W'_{n-1}(A) + (-1)^{p+1} \varepsilon^{p+1} \frac{b_0}{b_{p+1}} W_n(A) \end{cases}$$

Si A est un convexe unique $W_n(A) = b_n$ est connu et la correction rigoureuse est possible. Si $A = \bigcup A_i$ est une réunion de convexes en nombre inconnu (et tels que les $\Pi_H(A_i \otimes \varepsilon u)$ soient disjoints)

seul le terme en ε^{p+1} est inconnu dans la formule (3), qui doit donc donner une excellente approximation si ε est petit.

Dans le cas tridimensionnel usuel, $V = W_0$ est le volume, $F = 3 W_1$ la surface et $N = 3 W_2$ la norme. On trouve donc, pour un convexe A unique :

$$(4) \quad \begin{cases} V' = V + \frac{1}{4} \varepsilon F \\ F' = F + \frac{2}{\pi} \varepsilon N \\ N' = N + 2 \pi \varepsilon \end{cases}$$

et par suite :

$$(4') \quad \begin{cases} N = N' - 2\pi \varepsilon \\ F = F' - \frac{2}{\pi} \varepsilon N' + 4 \varepsilon^2 \\ V = V' - \frac{1}{4} \varepsilon F' + \frac{1}{2\pi} \varepsilon^2 N' - \varepsilon^3 \end{cases}$$

REMARQUE : Si, au lieu d'un convexe A unique, nous avons affaire à un nombre v (inconnu) de convexes A_i , $i = 1, 2, \dots, v$ (tels que les $\Pi_H(A_i \cap \varepsilon u)$ soient disjoints pour tout $H \in \mathcal{S}_{n-1}$), les formules (2) et (3), ou (4) et (4') subsistent avec $W_{n-p}(A) = \sum W_{n-p}(A_i)$, et, en particulier, $(1/b_n) W_n(A) = v$ est le nombre inconnu des constituants de A . Mais on remarque sur (3), ou (4') que v intervient comme coefficient d'un terme correctif d'ordre maximal en ε . Par exemple, le volume total $V = \sum V(A_i)$ est (dans $\mathbb{R}^3$)

$$V = V' - \frac{1}{4} \varepsilon F' + \frac{1}{2\pi} \varepsilon^2 N' - \varepsilon^3 v$$

Si ε est petit, on reconstitue donc V , F et N avec une très bonne précision.

Mais il y a mieux : si l'on dispose de deux séries de mesures effectuées sur des lames épaisses d'épaisseurs différentes, ε' et ε'' , il est alors possible de reconstituer le nombre ν des constituants de A (quoiqu'avec une précision vraisemblablement médiocre). En effet, soient

$$N' = N + 2\pi \varepsilon' \nu \quad \text{et} \quad N'' = N + 2\pi \varepsilon'' \nu$$

les mesures (entachées d'erreur) de la norme obtenue à partir des deux séries d'observation. Par différence, on trouve :

$$N' - N'' = 2\pi (\varepsilon' - \varepsilon'') \nu$$

c'est-à-dire

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{N' - N''}{\varepsilon' - \varepsilon''}$$

Il est donc théoriquement possible de reconstituer ν . Mais la précision sera médiocre, si ε' et ε'' sont petits, car N' et N'' sont très peu différentes, et $N' - N''$ risque d'être du même ordre de grandeur que les erreurs expérimentales commises sur N' et N'' .

II - FORMULE DES CYLINDRES.

Dans R^3 certains dispositifs expérimentaux remplacent les droites D théoriques infiniment minces par des cylindres de révolution d'axe D et de rayon ε , soit $D \oplus \varepsilon B$. Au lieu de $A \cap D$, on observe l'intersection $A \cap (D \oplus \varepsilon B)$ ou, plus précisément, la projection de cette intersection sur l'axe D du cylindre, soit :

$$\pi_D (A \cap (D \oplus \varepsilon B))$$

Il est facile de voir qu'un point de D appartient à cette projection si et seulement si il appartient à $A \oplus \varepsilon C$ où C est le disque unité du plan $D^\perp$ orthogonal à l'axe D . On a donc :

$$\pi_D (A \cap (D \oplus \varepsilon B)) = D \cap (A \oplus \varepsilon C)$$

Autrement dit, les observations faites sur une droite D donnée ne concerne pas A lui-même mais son dilaté par le disque εC orthogonal à D . Cette circonstance généralise le cas des lames épaisses, et va donner lieu à des formules correctives de même nature.

En fait, rien ne nous empêche de donner la théorie générale dans $\mathbb{R}^n$. Supposons donc qu'au lieu d'observations faites sur des variétés k -dimensionnelles $V = S_h$ ($S \in \mathcal{S}_k$, $h \in S^\perp$) on connaisse la projection sur V de l'intersection de A et du cylindre $V \oplus \varepsilon B$, soit :

$$\pi_V (A \cap (V \oplus \varepsilon B))$$

Ici encore, si l'on désigne par $C = C(S^\perp)$ le disque unité orthogonal à l'axe V , on vérifie

$$(5) \quad \pi_V (A \cap (V \oplus \varepsilon B)) = V \cap (A \oplus \varepsilon C)$$

Ainsi, les observations rapportées à V ne concernent pas A mais son dilaté $A \oplus \varepsilon C$ par le disque orthogonal à son axe.

De cette formule (5), nous allons déduire les formules de Crofton pour les cylindres de révolution, en suivant la même démarche que dans le cas des lames épaisses (ce dernier cas correspond à $k = n-1$) : nous reprenons d'abord la démonstration de la formule classique de Crofton, au moment opportun nous remplaçons A par $A' = A \oplus \varepsilon C(S^\perp)$, nous évaluons le terme correspondant grâce à une

généralisation de la formule de Steiner, et enfin nous prenons les moyennes de rotation.

2-1 Démonstration de la formule de Crofton.

Bien que cette démonstration soit classique, nous devons l'explicitier ici pour effectuer au moment opportun le remplacement de A par $A' = A \oplus \varepsilon C$.

Soit S_h , $S \in \mathcal{F}_k$, $h \in S^\perp$ une variété à k dimensions, et :

$$W_{k-p}^k(A \cap S_h) = \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{F}_p(S)} \mu_p(\pi_\sigma(A \cap S_h)) \omega_p^S(d\sigma)$$

la valeur pour la section $A \cap S_h$ de la fonctionnelle W_{k-p}^k ($0 \leq p \leq k$) calculée dans l'espace S_h identifié à $\mathbb{R}^k$. La deuxième étape consiste à intégrer cette expression en $h \in S^\perp$, ce qui donne :

$$\int_{S^\perp} \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) \mu_p(\pi_\sigma(A \cap S_h)) = \mu_{n-k+p}(\pi_{\sigma \oplus S^\perp} A)$$

puisque $\sigma \subset S$ est orthogonale à $S^\perp$, et par suite :

$$(5) \int_{S^\perp} W_{k-p}^k(A \cap S_h) \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) = \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{F}_p(S)} \mu_{n-k+p}(\pi_{\sigma \oplus S^\perp} A) \omega_p^S(d\sigma)$$

Il reste à prendre la moyenne de rotation en $S \in \mathcal{F}_k$, ou, ce qui revient au même, en $S^\perp \in \mathcal{F}_{n-k}$. Or l'image de la mesure $\omega_{n-k}(dS^\perp) \omega_p^S(d\sigma)$ par l'application $(S^\perp, \sigma) \rightarrow S^\perp \oplus \sigma = S'$ est la mesure $\omega_{n-k+p}(dS')$ isotrope sur $\mathcal{F}_{n-k+p}$. On trouve donc

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}_k} \omega_k(dS) \int_{S^\perp} W_{k-p}^k(A \cap S_h) \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) = \\ & \frac{b_k}{b_p} \int_{\mathcal{F}_{n-k+p}} \mu_{n-k+p}(\pi_{S'} A) \omega_{n-k+p}(dS') = \frac{b_k b_{n-k+p}}{b_p b_n} W_{k-p}(A) \end{aligned}$$

C'est la formule classique de Crofton. Pour passer au cas des cylindres de révolution $S_n \otimes \varepsilon B$, c'est au niveau de la relation (6) que l'on doit effectuer la substitution $A \rightarrow A' = A \otimes \varepsilon C(S^1)$. L'étape suivante consiste donc à calculer le

2-2 Développement de $\mu_{n-k+p}(\Gamma_{\sigma \otimes S^1}(A \otimes \varepsilon C))$

Le disque unité $C = S^1 \cap B$ de $S^1 \in \mathcal{G}_{n-k}$ est un compact de Steiner. Pour $i = 1, 2, \dots, n-k$, la mesure G_i^C qui lui est associée (selon le Th. 4-5-2 de Random Sets and Integral Geometry) est concentrée sur $\mathcal{G}_i(S^1)$ et proportionnelle à la mesure invariante $\omega_1^{S^1}$, soit

$$G_i^C = a_i \omega_1^{S^1}$$

D'après le corollaire 4 de ce théorème :

$$W_{n-i}(C) = \frac{b_{n-i}}{\binom{n}{i}} a_i$$

D'autre part, d'après le corollaire 6, $W_{n-i}(C)$ est proportionnel à la fonctionnelle $W_{n-k-i}^{n-k}(C) = b_{n-k-i}$ de C dans $S^1 = \mathbb{R}^{n-k}$, soit

$$W_{n-i} = \frac{\binom{n-k}{i}}{\binom{n}{i}} \frac{b_{n-i}}{b_{n-k-i}} W_{n-k-i}^{n-k}$$

On a donc

$$\frac{b_{n-i}}{\binom{n}{i}} a_i = \frac{\binom{n-k}{i}}{\binom{n}{i}} \frac{b_{n-i}}{b_{n-k-i}} b_{n-k}$$

c'est-à-dire

$$a_i = \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}}$$

Le disque εC de rayon ε admet les mesures $G_i^{\varepsilon C} = \varepsilon^i G_i^C$. Donc :

$$(7) \quad G_i^{\varepsilon C} = \varepsilon^i \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \omega_i^{S^\perp}$$

Posons maintenant $S' = \sigma \oplus S^\perp$ ($S \in \mathcal{F}_k$, $\sigma \in \mathcal{S}_p(S)$). Comme σ est orthogonal à $S^\perp$, on a $S' \in \mathcal{F}_{n+p-k}$. Nous allons calculer $\mu_{n-k+p}(\pi_S, (A \oplus \varepsilon C))$ au moyen du Corollaire 1 du théorème déjà cité : d'après cette version généralisée de la formule de Steiner, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mu_{n-k+p}(\pi_S, A \oplus \varepsilon C) &= \mu_{n-k+p}(\pi_S, A) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k+p} \int |\tau, S'| \mu_{n-k+p-i}(\pi_{S' \cap \tau^\perp A}) G_i^{\varepsilon C}(d\tau) \end{aligned}$$

Comme $G_i^{\varepsilon C} = 0$ pour $i > n-k$, la sommation s'arrête en fait à $i = n-k$. D'autre part, $G_i^{\varepsilon C}$ est concentrée sur $S^\perp \subset S'$, de sorte que $|\tau, S'| = 1$ dans l'intégrale ci-dessus. D'après (7), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mu_{n-k+p}(\pi_S, A \oplus \varepsilon C) &= \mu_{n-k+p}(\pi_S, A) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-k} \varepsilon^i \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \int \mu_{n-k+p-i}(\pi_{S' \cap \tau^\perp A}) \omega_i^{S^\perp}(d\tau) \end{aligned}$$

avec, rappelons-le, $S' = \sigma \oplus S^\perp$. C'est cette expression qui doit être substituée à $\mu_{n-k+p}(\pi_S, A)$ dans la formule (6). On voit donc apparaître, dans le 2ème membre de cette formule, des termes correctifs de la forme :

$$\int_{\mathcal{S}_p(S)} \omega_p^S(d\sigma) \int_{\mathcal{F}_i(S)} \mu_{n-k+p-i}(\pi_{\sigma \oplus S^\perp \cap \tau^\perp A}) \omega_i^{S^\perp}(d\tau)$$

dont il faut ensuite prendre la moyenne de rotation en $S \in \mathcal{F}_k$.

Or, par l'application $(S, \sigma, \tau) \rightarrow (\sigma \oplus S^\perp, \tau) = (S', \tau)$, la mesure

$\omega_k(dS) \omega_p^S(d\sigma) \omega_i^{S^\perp}(d\tau)$ a pour image $\omega_{n-k+p}(dS') \omega_i^{S'}(d\tau)$. Cette dernière mesure devient $\omega_{n-k+p-i}(d\tau')$ par $(S', \tau) \rightarrow S' \cap \tau^\perp$. La moyenne de rotation en $S \in \mathcal{S}_k$ du terme ci-dessus est donc simplement

$$\int_{\mathcal{S}_{n-k+p-i}} \mu_{n-k+p-i}(\pi_{\tau, A}) \omega_{n-k+p-i}(d\tau') = \frac{b_{n-k+p-i}}{b_n} W_{k-p+i}(A)$$

Ainsi, la moyenne de rotation de $\mu_{n-k+p}(\pi_{\sigma \oplus S} A \oplus \varepsilon C)$ est :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \omega_k(dS) \int \mu_{n-k+p}(\pi_{\sigma \oplus S}^\perp(A \oplus \varepsilon C)) \omega_p^S(d\sigma) = \\ & \left\{ \begin{aligned} & \frac{b_{n-k+p}}{b_n} W_{k-p}(A) + \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \frac{b_{n-k+p-i}}{b_n} \varepsilon^i W_{k-p+i}(A) \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

2-3 Formule de Crofton pour les cylindres.

Cette relation (8) permet de trouver les termes correctifs que l'on doit ajouter à la formule classique lorsque la variété V de dimension k est remplacée par le cylindre $V \oplus \varepsilon B$: du fait de ce remplacement, les calculs conduits selon la formule classique de Crofton conduisent non pas à la vraie valeur $W_{k-p}(A)$ mais à la valeur différente $W'_{k-p}(A)$ donnée par :

$$(9) \quad W'_{k-p}(A) = W_{k-p}(A) + \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-i}} \frac{b_{n-k+p-i}}{b_{n-k+p}} \varepsilon^i W_{k-p+i}(A)$$

Telle est la formule corrective cherchée.

Examinons le cas le plus intéressant en pratique (cylindre de révolution dans $(\mathbb{R}^3)$, soit

$n = 3$, $k = 1$ et $p = 0$ ou 1 . Il vient :

$$\begin{cases} W'_0(A) = W_0(A) + \frac{3\pi}{4} \varepsilon W_1(A) + \frac{3}{2} \varepsilon^2 W_2(A) \\ W'_1(A) = W_1(A) + 2 \varepsilon W_2(A) + \varepsilon^2 W_3(A) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} V' = V + \frac{\pi}{4} \varepsilon F + \frac{1}{2} \varepsilon^2 N \\ F' = F + 2 \varepsilon N + 4\pi \varepsilon^2 \end{cases}$$

III - AUTRES DEMONSTRATIONS.

Le résultat exprimé par la formule (9) peut s'énoncer sous la forme d'un théorème de géométrie intégrale : l'intégrale :

$$(10) \quad I_{k,p}(\varepsilon, A) = \int_{S^c_k} \omega_k(dS) \int_{S^\perp} W_{k-p}^k [(A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h] \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh)$$

où $A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)$ est le dilaté de A par le disque orthogonal à S vaut :

$$I_{k,p}(\varepsilon, A) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_k}{b_p} \frac{b_{n-k}}{b_n} \frac{b_{n-k+p-i}}{b_{n-k-i}} \varepsilon^i W_{k-p+i}(A)$$

On peut retrouver ce résultat comme suit : la fonctionnelle $A \rightarrow I_{k,p}(\varepsilon, A)$ est manifestement croissante et invariante pour les translations et les rotations. Montrons qu'elle est C-additive, c'est-à-dire vérifie :

$$I_{k,p}(\varepsilon, A_1 \cup A_2) + I_{k,p}(\varepsilon, A_1 \cap A_2) = I_{k,p}(\varepsilon, A_1) + I_{k,p}(\varepsilon, A_2)$$

pour A_1, A_2 et $A_1 \cup A_2$ convexes compacts. D'après (10), il suffit

de montrer que - pour S et h donnés - la fonctionnelle $A \rightarrow W_{k-p}^k[(A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h]$ est elle-même C -additive. Posons $K' = (K \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h$ pour tout compact K . Si K est convexe, K' est encore convexe. On a $A'_1 \cup A'_2 = (A_1 \cup A_2)'$, pour tous compacts A_1 et A_2 . La relation $A'_1 \cap A'_2 = (A_1 \cap A_2)'$, fautive en général, est vraie si A_1 , A_2 et $A_1 \cup A_2$ sont convexes. En effet :

$$\begin{aligned} A'_1 \cap A'_2 &= (A_1 \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap (A_2 \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h \\ (A_1 \cap A_2)' &= ((A_1 \cap A_2) \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h \end{aligned}$$

Or, pour tout compact convexe K , on a l'inclusion

$$(A_1 \cap A_2) \oplus K \subset (A_1 \oplus K) \cap (A_2 \oplus K)$$

Montrons que l'inclusion inverse est vraie, si A_1 , A_2 et $A_1 \cup A_2$ sont convexes : soit $x \in (A_1 \oplus K) \cap (A_2 \oplus K)$, c'est-à-dire $x = a_1 + k_1 = a_2 + k_2$ avec $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $k_1, k_2 \in K$. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a aussi $x = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 + \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$. Mais on sait que, $A_1 \cup A_2$ étant convexe, $A_1 \cap A_2$ sépare A_1 et A_2 , autrement dit on peut trouver $\lambda_0 \in [0, 1]$ tel que $a_0 = \lambda_0 a_1 + (1-\lambda_0) a_2 \in A_1 \cap A_2$. On a alors $x = k_0 + a_0$ avec $k_0 = \lambda_0 k_1 + (1-\lambda_0)k_2 \in K$ et $a_0 \in A_1 \cap A_2$, ce qui démontre l'inclusion cherchée et l'égalité

$$(A_1 \cap A_2) \oplus K = (A_1 \oplus K) \cap (A_2 \oplus K)$$

En particulier $A'_1 \cap A'_2 = (A_1 \cap A_2)'$. Comme les fonctionnelles de Minkowski sont C -additives, on trouve alors :

$$\begin{aligned} W_{k-p}^k((A_1 \cup A_2)') + W_{k-p}^k((A_1 \cap A_2)') &= W_{k-p}^k(A'_1 \cup A'_2) + \\ &+ W_{k-p}^k(A'_1 \cap A'_2) = W_{k-p}^k(A'_1) + W_{k-p}^k(A'_2) \end{aligned}$$

Ainsi, la fonctionnelle $A \rightarrow I_{k,p}(\varepsilon, A)$ est C -additive. Il résulte alors d'un théorème général de géométrie intégrale qu'elle est de la forme :

$$I_{k,p}(\varepsilon, A) = \sum C_i(\varepsilon, k, p) W_i(A)$$

$I_{k,p}$ est une longueur à la puissance $n+p-k$. Par suite, les coefficients C_i sont de la forme $C_i(\varepsilon, k, p) = C_{k,p} \varepsilon^{p+i-k}$ avec des nombres $C_{k,p}$ indépendants de ε . Il reste à identifier ces coefficients en effectuant des calculs explicites, par exemple dans le cas où $A = \rho B$ est une boule, pour retrouver le résultat énoncé ci-dessus. Nous ne ferons pas ces calculs.

Voici maintenant une troisième démonstration.

Remarquons d'abord que, pour tout $S \in \mathcal{S}_k$ et $h \in S^\perp$, on a :

$$(A \oplus (\rho B \cap S)) \cap S_h = (A \cap S_h) \oplus (\rho B \cap S)$$

(la section par S_h du dilaté de A par le disque de S est identique au dilaté de la section). D'après le théorème de Fubini, on peut donc écrire :

$$\mu_n(A \oplus (\rho B \cap S)) = \int_{S^\perp} \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) \mu_k((A \cap S_h) \oplus \rho(B \cap S))$$

D'après la formule de Steiner (appliquée dans S_h identifié à $\mathbb{R}^k$) on obtient

$$\mu_k((A \cap S_h) \oplus \rho(B \cap S)) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \rho^i W_i^{(k)}(A \cap S_h)$$

et par suite :

$$(11) \quad \mu_n(A \oplus \rho(B \cap S)) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \rho^i \int_{S^\perp} \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) W_i^{(k)}(A \cap S_h)$$

En prenant la moyenne de rotation des deux membres de cette relation, nous allons retrouver la formule de Crofton. En effet, d'après la formule de Steiner généralisée :

$$\int \mu_n(A \oplus \rho(B \cap S)) \omega_k(dS) = \frac{1}{b_n} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \rho^i W_i(A) W_{n-i}(B \cap S)$$

Le disque $B \cap S$ de dimension k admet dans $\mathbb{R}^n$ les fonctionnelles :

$$W_{n-i}(B \cap S) = \frac{\binom{k}{i} b_{n-i}}{\binom{n}{i} b_{k-i}} b_k$$

Ainsi :

$$\int \mu_n(A \oplus \rho(B \cap S)) \omega_k(dS) = \frac{b_k}{b_n} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{b_{n-i}}{b_{k-i}} \rho^i W_i(A)$$

En identifiant avec le second membre de (11), ceci nous donne

$$(12) \int \omega_k(dS) \int \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) W_i^k(A \cap S_h) = \frac{b_k}{b_n} \frac{b_{n-i}}{b_{k-i}} W_i(A)$$

c'est-à-dire la formule de Crofton.

Si maintenant, pour chaque $S \in \mathcal{S}_k$, nous remplaçons A par $A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)$, c'est-à-dire le dilaté par le disque orthogonal à S , la formule (11) subsiste et donne

$$\begin{aligned} \mu_n(A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp) \oplus (\rho B \cap S)) &= \\ &= \sum_{i=0}^k \rho^i \binom{k}{i} \int \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) W_i^k((A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h) \end{aligned}$$

Prenons la moyenne de rotation, soit I , de cette expression.

La moyenne du second membre donne :

$$(13) \quad I = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \rho^i \int \omega_k(dS) \int \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) W_i^k((A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h)$$

D'après la formule de Steiner généralisée, la moyenne du premier membre est :

$$(13') \quad I = \frac{1}{b_n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} W_p(A) W_{n-p}((\varepsilon B \cap S^\perp) \oplus (\rho B \cap S))$$

Il nous faut donc calculer $W_p((\varepsilon B \cap S^\perp) \oplus (\rho B \cap S))$. Plus généralement, montrons le lemme suivant :

LEMME - Soient K et K' deux compacts de Steiner, contenus dans deux variétés orthogonales de dimension k et $n-k$ respectivement.

Alors, pour $k = 1, 2, \dots, n$, la mesure $G_r^{K \oplus K'}$ associée à $K \oplus K'$ est la somme en $j = 0, 1, \dots, p$ des images par $(S, S') \rightarrow S \oplus S'$ des mesures $G_j^K(dS) G_{p-j}^{K'}(dS')$ sur $\mathcal{G}_j \times \mathcal{G}_{p-j}$. En particulier

$$(14) \quad W_{n-p}(K \oplus K') = \frac{b_{n-p}}{\binom{n}{p}} \sum_{j=0}^p \frac{\binom{n}{j} \binom{n}{p-j}}{b_{n-j} b_{n-p+j}} W_{n-j}(K) W_{n-p+j}(K')$$

La première partie de cet énoncé découle directement du Théorème 4-5-2 déjà cité, et la deuxième de son corollaire 4.

On note d'ailleurs que la relation (14) subsiste si les convexes orthogonaux K et K' ne sont pas dans la classe de Steiner (on le démontre suivant la méthode habituelle : $K \rightarrow W_{n-p}(K \oplus K')$ est une fonctionnelle croissante, isotrope, stationnaire et C-additive sur l'ensemble des compacts convexes d'un $S \in \mathcal{F}_k$).

Appliquons (14) avec $K = \rho B \cap S$ et $K' = \varepsilon B \cap S^\perp$. On a

$$W_{n-j}(\rho B \cap S) = \frac{\binom{k}{j} b_{n-j}}{\binom{n}{j} b_{k-j}} \rho^j b_k$$

$$w_{n-p+j}(\varepsilon B \cap S^\perp) = \frac{\binom{n-k}{p-j} b_{n-p+j}}{\binom{n}{p-j} b_{n-k-p+j}} b_{n-k} \varepsilon^{p-j}$$

Substituons ce résultat dans (14). Cela donne :

$$w_{n-p}((\rho B \cap S) \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) = \frac{b_{n-p}}{\binom{n}{p}} \sum_{j=0} \frac{\binom{k}{j} \binom{n-k}{p-j} b_k b_{n-k}}{b_{k-j} b_{n-k-p+j}} \rho^j \varepsilon^{p-j}$$

Il reste à substituer dans (13') et à identifier les termes en ρ^i qui apparaissent dans (13) et dans (13') pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int \omega_k(dS) \int \mu_{n-k}^{S^\perp}(dh) w_j^k((A \oplus (\varepsilon B \cap S^\perp)) \cap S_h) = \\ \sum_{p=j}^{n-k+j} \frac{b_{n-p}}{b_n} \binom{n-k}{p-j} \frac{b_k b_{n-k}}{b_{k-j} b_{n-k-p+j}} \varepsilon^{p-j} w_p(A) \\ = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_k b_{n-k}}{b_n b_{k-j}} \frac{b_{n-i-j}}{b_{n-k-i}} \varepsilon^i w_{i+j}(A) \end{aligned}$$

En comparant avec (12), on retrouve bien la formule corrective

$$w_j'(A) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} \frac{b_{n-k}}{b_{n-j}} \frac{b_{n-i-j}}{b_{n-k-i}} \varepsilon^i w_{i+j}(A)$$

identique à (9) comme on le voit en changeant j en $k-p$.