

Fontainebleau

N-366

LES TOPOLOGIES FINIES

G. MATHERON



Février 1974

LES TOPOLOGIES FINIES

I - INTRODUCTION

La topologie usuelle de l'espace euclidien est, vraisemblablement, beaucoup plus fine qu'il n'est réellement nécessaire pour formaliser de manière adéquate la description des objets physiques tels qu'on peut les atteindre (ou les définir) à partir, par exemple, des manipulations effectuées à l'aide de l'analyseur de textures. Cet excès de richesse, qui pourrait passer pour un avantage, est en fait aussi une source d'inconvénients sérieux, dans la mesure où elle fait surgir et oblige à résoudre toute une série de problèmes concernant la théorie mathématique des ensembles aléatoires, problèmes auxquels rien ne correspond dans la réalité physique, et qui sont donc, en un sens, des pseudo-problèmes. De là l'idée de munir $\mathbb{R}^n$ d'une topologie plus grossière, mieux adaptée à la nature des objets et des opérations physiques que nous avons en vue.

Si $\mathcal{G}$ désigne la classe des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (pour la topologie euclidienne habituelle) ou, plus généralement, d'une topologie LCD sur un ensemble E , une topologie moins fine sera définie par une sous-classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ stable pour l'intersection finie et la réunion infinie. En fait, dans ce qui suit, nous nous intéresserons surtout au cas où $\mathcal{C}$ est stable pour la réunion et l'intersection infinies, et nous dirons qu'une topologie $\mathcal{C}$ possédant cette propriété est une topologie finie. Pour tout $x \in E$, nous poserons :

$$(1) \quad \gamma(x) = \bigcap \{T : T \in \mathcal{C}, T \ni x\}$$

Si $\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection infinie, on a $\gamma(x) \in \mathcal{C}$. Inversement, si $\gamma(x)$ est un ouvert de $\mathcal{C}$ pour tout $x \in E$, $\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection infinie. En effet, soit $T = \bigcap T_i$ pour une famille $\{T_i, i \in I\} \subset \mathcal{C}$, et $x \in T$. Il résulte de (1) que l'on a $\gamma(x) \subset T$, et T est un $\mathcal{C}$ -voisinage de tout $x \in T$, donc $T \in \mathcal{C}$. Autrement dit : une topologie $\mathcal{C}$ est finie si et seulement si tout point x admet un plus petit voisinage $\gamma(x) \in \mathcal{C}$.

Une topologie finie ne peut pas être séparée. En effet, si $\gamma(x) = E$ pour tout $x \in E$, $\mathcal{C}$ est la topologie grossière. Si $\gamma(x) \neq E$, soit $y \in \partial\gamma(x)$ un point de la frontière de $\gamma(x)$. Comme $\gamma(y)$ est ouvert et rencontre $\overline{\gamma(x)}$, on a $\gamma(x) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$, de sorte que x et y n'admettent pas de voisinages disjoints (et d'autre part $y \neq x$ puisque $y \notin \gamma(x)$).

Un exemple simple de topologie finie est fourni par la donnée d'un graphe dans le plan euclidien, c'est-à-dire une partition de $\mathbb{R}^2$ en classes d'équivalence qui sont soit des points isolés (sommets) soit des arêtes (ouvertes, i.e. extrémités exclues) soit enfin des faces (ouvertes). Si x est dans une face ouverte F , $\gamma(x) = F$. Si x appartient à une arête ouverte A , $\gamma(x)$ est la réunion de A et des deux faces ouvertes adjacentes. Si enfin x est un sommet, $\gamma(x)$ est la réunion de x avec les arêtes ouvertes et les faces ouvertes adjacentes à x . Pour la topologie $\mathcal{C}$ ainsi définie, un point x ne constitue un ensemble fermé que si x est un sommet. La $\mathcal{C}$ -fermeture $\phi(x)$ de $\{x\}$ est la fermeture pour $\mathcal{G}$ de la classe d'équivalence de x , c'est-à-dire une arête fermée si x appartient à une arête ouverte, et une face fermée si x appartient à une face ouverte.

Bien qu'il existe des topologies finies sur $\mathbb{R}^2$ qui ne soient pas

homéomorphe à un graphe planaire, cet exemple est probablement le plus intéressant pour les applications.

Remarquons que si $\mathcal{C}$ est une topologie finie moins fine que $\mathcal{G}$, alors nécessairement $\mathcal{C}$ est fermée dans $\mathcal{G}$ (la réciproque n'est pas vraie). Cela résulte de la formule suivante, valable pour toute suite $\{T_n\} \subset \mathcal{G}$:

$$(2) \quad \underline{\lim} T_n = \bigcup_N \overline{\bigcap_{n \geq N} T_n}$$

Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ est stable pour la réunion et l'intersection infinies et si $\{T_n\} \subset \mathcal{G}$, $\bigcap T_n$ est dans $\mathcal{C}$, donc est un ouvert, et dans ce cas $\underline{\lim} T_n = \bigcup_N \bigcap_{n \geq N} T_n$ est dans $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}$ est donc fermée.

Pour cette raison, nous étudierons d'abord la classe plus générale des topologies fermées dans $\mathcal{G}$.

2 - LES TOPOLOGIES FERMEES

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une topologie fermée moins fine que $\mathcal{G}$, c'est-à-dire un sous-ensemble fermé de $\mathcal{G}$ stable pour la réunion infinie et l'intersection finie. Nous désignerons par

$$\Phi = \{F, F^c \in \mathcal{C}\} \subset \mathcal{F}$$

la classe des fermés de la topologie $\mathcal{C}$, classe stable pour la réunion finie et l'intersection infinie. Φ est évidemment fermé dans $\mathcal{F}$.

A tout ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$ nous associerons sa $\mathcal{C}$ -ouverture $T(A)$ et sa $\mathcal{C}$ -adhérence $\varphi(A)$, soit :

$$(3) \quad \begin{cases} T(A) = \bigcup \{T, T \in \mathcal{C}, T \subset A\} \\ \varphi(A) = \bigcap \{F, F \in \Phi, F \supset A\} \end{cases}$$

Pour $x \in E$, nous désignerons par $\varphi(x)$, au lieu de $\varphi(\{x\})$ l'adhérence de l'ensemble ponctuel $\{x\}$.

Si $F \in \mathcal{F}$ est un fermé (pour la topologie usuelle), on a $\varphi(F) \in \mathcal{F}$. Plus précisément, la restriction de φ à $\mathcal{F}$ est une application s.c.i. de $\mathcal{F}$ dans lui-même (et de même la restriction de T à $\mathcal{G}$ est une application s.c.s. de $\mathcal{G}$ dans lui-même).

En effet, soit $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ une suite telle que $\lim F_n = F$ dans $\mathcal{F}$. Toute valeur d'adhérence de la suite $\{\varphi(F_n)\}$ est dans Φ , puisque Φ est fermée dans $\mathcal{F}$, et par suite $\underline{\lim} \varphi(F_n) \in \Phi$, puisque Φ est stable pour $\cap$. D'autre part $\varphi(F_n) \supset F_n$ entraîne $\underline{\lim} \varphi(F_n) \supset \lim F_n = F$. Par suite $\varphi(F) \subset \underline{\lim} \varphi(F_n)$, et φ est s.c.i. sur $\mathcal{F}$.

Inversement, d'ailleurs, si φ est une fermeture s.c.i. sur $\mathcal{F}$, la famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ de ses invariants est fermée dans $\mathcal{F}$. Car $F_n = \varphi(F_n)$ et $F = \lim F_n$ entraîne $\varphi(F) \subset \underline{\lim} \varphi(F_n) = F$ et $\varphi(F) = F$ (puisque φ est extensive). Ainsi cette propriété est caractéristique.

En particulier, la restriction $x \rightarrow \varphi(x)$ de φ à E lui-même (identifiée au sous-espace de $\mathcal{F}$ constitué des ensembles ponctuels) est une application s.c.i. de E dans $\mathcal{F}$, et vérifie les propriétés suivantes : pour tout x et tout y dans E , $x \in \varphi(x)$, et $y \in \varphi(x)$

entraîne $\varphi(y) \subset \varphi(x)$. Enfin, pour tout ensemble $A \in \mathcal{P}(E)$, on a :

$$(4) \quad \varphi(A) = \overline{\bigcup_{x \in A} \varphi(x)}$$

En effet, posons $F = \overline{\bigcup \{\varphi(x), x \in A\}}$. On a $F \in \Phi$, car Φ est fermée et stable pour la réunion finie, et $F \supset A$ entraîne $F \supset \varphi(A)$. Inversement, si $F' \in \Phi$ contient A , on a $\varphi(x) \subset F'$ pour tout $x \in A$, donc $F \subset F'$. Par suite, $F = \varphi(A)$.

Ces propriétés sont caractéristiques. Autrement dit :

Caractérisation des topologies fermées. - Une application de $\mathcal{P}(E)$

dans $\mathcal{F}(E)$ est l'adhérence associée à une topologie fermée moins fine que $\mathcal{U}$ si et seulement si elle est de la forme $A \rightarrow$

$\bigcup \{\varphi(x), x \in A\}$ pour une application φ de E dans $\mathcal{F}$ telle que :

- 1 - pour tout $x \in E, x \in \varphi(x)$
- 2 - pour $x, y \in E, y \in \varphi(x) \Rightarrow \varphi(y) \subset \varphi(x)$
- 3 - φ est s.c.i.

On vient de voir que ces conditions sont nécessaires. Inversement, soit $\varphi : E \rightarrow \mathcal{F}$ une application vérifiant les conditions 1, 2 et 3, et posons $\varphi(A) = \overline{\bigcup \{\varphi(x), x \in A\}}$ pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$.

Il est clair que $A \rightarrow \varphi(A)$ est extensive et croissante. Montrons que cette application est idempotente. Si $x \in \varphi(A)$, il existe deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ dans E vérifiant $x = \lim x_n, y_n \in A, x_n \in \varphi(y_n)$. D'après 1 et 2, on en déduit $x_n \in \varphi(x_n) \subset \varphi(y_n) \subset \varphi(A)$ et, φ étant s.c.i., $\varphi(x) \subset \varliminf \varphi(x_n) \subset \varphi(A)$. Par suite, $\varphi\varphi(A) \subset \varphi(A)$, et $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$. Ainsi φ est idempotente, et constitue une fermeture au sens

algébrique.

Soit $\Phi = \{\varphi(A), A \in \mathcal{P}\} \subset \mathcal{F}$ la famille des invariants de φ . La fermeture algébrique φ sera une fermeture topologique si et seulement si Φ est stable pour la réunion finie. Soient donc F et $F' \in \Phi$. On trouve d'abord $F \cup F' \subset \varphi(F \cup F')$, puisque φ est extensive. Inversement, $\bigcup \{\varphi(x), x \in F \cup F'\} \subset \varphi(F) \cup \varphi(F') = F \cup F'$ donne $\varphi(F \cup F') \subset F \cup F'$ (puisque $F \cup F' \in \mathcal{F}$), d'où $\varphi(F \cup F') = F \cup F'$, c'est-à-dire $F \cup F' \in \mathcal{F}$.

Il reste à montrer que Φ est fermée dans $\mathcal{F}$. Soit $\{F_n\} \subset \Phi$ une suite telle que $\lim F_n = F$ dans $\mathcal{F}$. Si $x \in F$, il existe une suite $\{x_n\}$ dans E avec $x_n \in F_n$ et $x = \lim x_n$. De $F_n = \varphi(F_n)$ résulte $\varphi(x_n) \subset F_n$, d'où $\varphi(x) \subset \varliminf \varphi(x_n) \subset F$, puisque φ est s.c.i., donc $\varphi(F) \subset F$ et $F = \varphi(F)$: Φ est fermée.

COROLLAIRE - Une famille $\Phi \subset \mathcal{F}$ est la famille des fermés d'une topologie fermée si et seulement si elle est de la forme :

$$\Phi = \bigcap_{x \in E} \{ \mathcal{F}^x \cup \{F \supset f(x)\} \}$$

pour une application f s.c.i. de E dans $\mathcal{F}$.

On vient de voir que cette condition est nécessaire (avec $f = \varphi$). Inversement, supposons f s.c.i. de E dans $\mathcal{F}$ (sans vérifier nécessairement les conditions 1 et 2). Alors Φ est manifestement stable pour la réunion finie et l'intersection infinie, Φ est fermée dans $\mathcal{F}$. En effet, soient $\{F_n\} \subset \Phi$ et $F = \lim F_n$. Il faut montrer $f(x) \subset F$ pour tout $x \in F$. Mais tout $x \in F$ est limite d'une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n \in F_n$, donc $f(x_n) \subset F_n$. Par suite $f(x) \subset \varliminf f(x_n) \subset \lim F_n = F$.

D'où le corollaire.

REMARQUE - Lorsque Φ est de la forme précédente, l'application $x \rightarrow \varphi(x)$ est la plus petite majorante s.c.i. de f vérifiant les conditions 1 et 2.

En effet, on a toujours $f \subset \varphi$, puisque $\varphi(x) = \bigcap \{F, F \in \Phi, F \ni x\}$. Pour que $f = \varphi$, il faut que l'on ait $x \in f(x)$ et $f(x) \in \Phi$ pour tout $x \in E$. Mais $f(x) \in \Phi$ équivaut à $f(x) \supset f(y)$ pour tout $y \in f(x)$. Autrement dit, f doit vérifier 1 et 2, et inversement ces conditions entraînent $f = \varphi$. Si maintenant φ' est une majorante s.c.i. de f vérifiant 1 et 2, la famille Φ' des fermés de la topologie correspondante est $\Phi' = \{\mathcal{A}^x \cup \{F \supset \varphi'(x)\}\} \subset \Phi$. On a donc $\varphi'(A) \supset \varphi(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}$, et en particulier $\varphi'(x) \supset \varphi(x)$.

Expression explicite de φ . - Φ admettant toujours la représentation indiquée dans le corollaire ci-dessus, posons par récurrence :

$$f_1(x) = \{x\} \cup f(x)$$

$$f_n(x) = \bigcup \{f_1(y), y \in f_{n-1}(x)\}$$

Alors pour tout $A \in \mathcal{P}$, on a $\varphi(A) = \overline{\bigcup f_n(A)}$, et en particulier $\varphi(x) = \overline{\bigcup f_n(x)}$.

En effet, d'après les conditions 1 et 2, on trouve d'abord $\varphi(x) \supset f_n(x)$ donc $\varphi(x) \supset \overline{\bigcup f_n(x)}$ pour tout x . Montrons que l'application $x \rightarrow \overline{\bigcup f_n(x)}$ est s.c.i. En effet, soit G un ouvert rencontrant $\overline{\bigcup f_n(x)}$, donc aussi $\bigcup f_n(x)$. Il existe donc un n tel que $f_n(x) \cap G \neq \emptyset$. Si $n = 1$, $\{x : f_1(x) \cap G \neq \emptyset\}$ est ouvert, car f_1 est s.c.i.

Supposons par récurrence que $\{x : f_n(x) \cap G \neq \emptyset\}$ soit ouvert dans E pour tout $G \in \mathcal{G}$, et montrons que cette propriété subsiste pour $n+1$. Or $f_{n+1}(x) \cap G \neq \emptyset$ équivaut à : il existe $y \in G \cap f_1(z)$ pour un $z \in f_n(x)$. L'ensemble des z tels que $G \cap f_1(z)$ ne soit pas vide est un ouvert G_1 , et l'ensemble des x tels que $f_n(x) \cap G_1 \neq \emptyset$ est un ouvert G_2 , puisque f_1 et f_n vérifient la propriété. Donc $\{x : f_{n+1}(x) \cap G \neq \emptyset\} = \{x : f_n(x) \cap G_1 \neq \emptyset\} = G_2$ est ouvert.

Enfin, $x \in f_1(x)$ entraîne $x \in \overline{\bigcup f_n(x)}$ et la condition 1 est vérifiée. Si $y \in \bigcup f_n(x)$, on trouve $f_1(y) \subset \bigcup f_n(x)$ puis $\bigcup f_n(y) \subset \bigcup f_n(x)$. Si $y \in \overline{\bigcup f_n(x)}$, on a $y = \lim y_k$ pour une suite $\{y_k\} \subset \bigcup f_n(x)$. Pour chaque k , on trouve donc $\overline{\bigcup f_n(y_k)} \subset \overline{\bigcup f_n(x)}$. Comme l'application $z \rightarrow \overline{\bigcup f_n(z)}$ est s.c.i., il en résulte $\overline{\bigcup f_n(y)} \subset \lim \overline{\bigcup f_n(y_k)} \subset \overline{\bigcup f_n(x)}$. Ainsi $x \rightarrow \overline{\bigcup f_n(x)}$ est une majorante s.c.i. de f vérifiant les conditions 1 et 2. On a donc $\varphi(x) \subset \overline{\bigcup f_n(x)}$, d'après la remarque, et par suite l'égalité.

L'application γ .— Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, nous poserons :

$$(5) \quad \gamma(A) = \bigcap \{T \in \mathcal{E}, T \supset A\}$$

$\mathcal{E}$ désignant la famille des ouverts d'une topologie fermée dans $\mathcal{G}$. On note que ($\mathcal{E}$ n'étant pas supposée stable pour l'intersection infinie), $\gamma(A)$ n'est pas, en général, dans $\mathcal{E}$ ni même dans $\mathcal{G}$. $A \rightarrow \gamma(A)$ est manifestement une fermeture algébrique sur $\mathcal{P}$. De la même manière, nous désignerons par ω l'ouverture algébrique sur $\mathcal{P}$ duale de γ , soit :

$$(5') \quad \omega(A) = \bigcup \{F, F \in \Phi, F \subset A\}$$

Si G est un ouvert de $\mathcal{G}$, $\gamma(G)$ est dans $\mathcal{E}$ (car $\mathcal{E}$ est fermé et stable pour l'intersection finie). De même, si $F \in \mathcal{F}$, $\omega(F)$ est dans Φ . Autrement dit, γ est une fermeture algébrique sur $\mathcal{G}$, et $\mathcal{E}$ est la famille de ses invariants ouverts. De même, ω est une ouverture sur $\mathcal{F}$, et Φ est la famille de ses invariants fermés. Enfin, la restriction de ω à $\mathcal{F}$ est s.c.s., et la restriction de γ à $\mathcal{G}$ est s.c.i.

En effet, si $A \in \mathcal{F}$, $\omega(A) \subset \overline{\omega(A)} = \overline{\bigcup \{F, F \in \Phi, F \subset A\}} \subset A$. Mais $\overline{\omega(A)} \in \Phi$, puisque Φ est stable pour la réunion et fermée dans $\mathcal{F}$. Donc $\omega(A) = \overline{\omega(A)} \in \Phi$. Si $\{F_n\} \subset \mathcal{F}$ et $F = \lim F_n$, on a $\omega(F_n) \subset F_n$ et $\overline{\lim} \omega(F_n) \subset F$. Mais Φ est fermé et stable pour la réunion finie, donc $\overline{\lim} \omega(F_n) \in \Phi$ et par suite $\overline{\lim} \omega(F_n) \subset \omega(F)$. Donc ω est s.c.s. sur $\mathcal{F}$.

Notons encore l'équivalence suivante, valable pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$(6) \quad \varphi(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \varphi(A) \cap \gamma(B) = \emptyset$$

(En effet, $B \subset \beta \varphi(A) = T(A^c)$ équivaut à $\gamma(B) \subset T(A^c)$) et pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $G \in \mathcal{G}$:

$$(6') \quad A \cap \gamma(G) = \emptyset \Leftrightarrow \varphi(A) \cap \gamma(G) = \emptyset \Leftrightarrow \varphi(A) \cap G = \emptyset$$

En particulier, pour $x, y \in E$:

$$(7) \quad y \in \varphi(x) \Leftrightarrow x \in \gamma(y) \Leftrightarrow \varphi(x) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$$

Car $y \in \varphi(x)$ équivaut à $T \cap \varphi(x) \neq \emptyset$ c'est-à-dire à $x \in T$ pour tout $T \in \mathcal{E}$ tel que $y \in T$.

Pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a :

$$(8) \quad \gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \gamma(x) \quad ; \quad \omega(A) = \bigcup \{x : \varphi(x) \subset A\}$$

En effet, si $x \in A$, on a $\gamma(x) \subset \gamma(A)$, d'où $\bigcup \{\gamma(x), x \in A\} \subset \gamma(A)$. Inversement, si $y \notin \bigcup \{\gamma(x), x \in A\}$, on a : $\forall x \in A, \exists T_x \in \mathcal{C} : x \in T_x, y \notin T_x$. Posons $T = \bigcup \{T_x, x \in A\}$, d'où $T \in \mathcal{C}$, $y \notin T$ et $A \subset T$. Donc $y \notin \gamma(A)$ et $\bigcup \{\gamma(x), x \in A\} \supset \gamma(A)$.

La seconde égalité (8) résulte de $x \in \omega(A) \Leftrightarrow \varphi(x) \subset \omega(A) \Leftrightarrow \varphi(x) \subset A$.

En général, comme on l'a vu, $\gamma(A)$ n'est pas dans $\mathcal{C}$ ni même dans $\mathcal{G}$. Mais l'ouverture $T \gamma(A)$ de $\gamma(A)$ pour la topologie $\mathcal{C}$ est identique à son ouverture $\overset{\circ}{\gamma}(A)$ pour la topologie $\mathcal{G}$, soit :

$$(9) \quad T\gamma = \overset{\circ}{\gamma}$$

En effet, $T\gamma(A) = \bigcup \{T, T \in \mathcal{C}, T \subset \gamma(A)\} \subset \gamma(A)$ donne $T\gamma(A) \subset \overset{\circ}{\gamma}(A)$. Inversement, $\overset{\circ}{\gamma}(A) = \overline{\bigcap \{T, T \in \mathcal{C}, T \supset A\}}$ est dans $\mathcal{C}$, puisque $\mathcal{C}$ est fermé et stable pour l'intersection finie. Donc $T\gamma(A) \supset \overset{\circ}{\gamma}(A)$ et l'égalité.

Notons encore les propriétés suivantes. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\gamma}(x) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_x} \bigcup_{y \in G} \gamma(y) = \bigcap \{\gamma(G), G \in \mathcal{G}, x \in G\} \\ \hat{\gamma}(x) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_x} \bigcap_{y \in G} \gamma(y) \\ \check{\varphi}(x) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}_x} \bigcup_{y \in G} \varphi(y) \\ \hat{\varphi}(x) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}_x} \bigcap_{y \in G} \varphi(y) \end{array} \right.$$

Alors :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \check{\gamma}(x) = \gamma(x), \text{ et } y \in \check{\gamma}(x) \Leftrightarrow x \in \varphi(y) \\ y \in \hat{\gamma}(x) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\varphi}(y) \\ y \in \check{\varphi}(x) \Leftrightarrow x \in \overline{\gamma}(y) \\ y \in \hat{\varphi}(x) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{\gamma}(y) \end{array} \right.$$

En effet, $y \in \check{\gamma}(x)$ si et seulement si pour tout $G \in \mathcal{G}_x$ il existe $z \in G$ tel que $y \in \gamma(z)$, i.e. $z \in \varphi(y)$, donc si $G \cap \varphi(y) \neq \emptyset$. Mais cela équivaut à $x \in \overline{\varphi}(y) = \varphi(y)$, et aussi d'après (7) à $y = \gamma(x)$. De même $y \in \hat{\gamma}(x)$ équivaut à $\exists G \in \mathcal{G}_x \forall z \in G \quad z \in \varphi(y)$ soit à $\exists G \in \mathcal{G}, x \in G \subset \varphi(y)$, c'est-à-dire enfin à $x \in \overset{\circ}{\varphi}(y)$. Ensuite, $x \in \overline{\gamma}(y)$ équivaut à $\forall G \in \mathcal{G}_x, \exists z \in G : y \in \varphi(z)$, donc à $y \in \check{\varphi}(x)$, et $x \in \overset{\circ}{\gamma}(y)$ équivaut à $\exists G \in \mathcal{G}, x \in G \subset \gamma(y)$, donc à $\exists G \in \mathcal{G}_x \forall z \in G \quad y \in \varphi(z)$, i.e. à $y \in \hat{\varphi}(x)$.

Préordre et relation d'équivalence associés à $\mathcal{C}$.

D'après l'équivalence $x \in \gamma(y) \Leftrightarrow y \in \varphi(x)$, l'application $\gamma : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ vérifie les conditions : $x \in \gamma(x)$ et $y \in \gamma(x) \Rightarrow \gamma(y) \subset \gamma(x)$. En particulier la relation : $x \in \gamma(y)$ est un préordre sur E . La classe d'équivalence d'un élément x est pour ce préordre : $\{y : y \in \gamma(x) \text{ et } x \in \gamma(y)\} = \{y : y \in \gamma(x) \text{ et } y \in \varphi(x)\} = \gamma(x) \cap \varphi(x)$.

Un élément x est minimal pour ce préordre si $y \in \gamma(x)$ entraîne $\gamma(y) = \gamma(x)$, c'est-à-dire si et seulement si $\gamma(x) \subset \varphi(x)$. De même x est maximal pour ce préordre si $x \in \gamma(y)$ entraîne $\gamma(x) = \gamma(y)$, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi(x) \subset \gamma(x)$.

La relation (7) :

$$\varphi(x) \cap \gamma(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \gamma(y)$$

exprime que x est un mincrant de y si et seulement si x admet un majorant plus petit que y .

Un élément x est minimal si et seulement si $\varphi\gamma(x) = \varphi(x)$. Il est maximal si et seulement si $\gamma\varphi(x) = \gamma(x)$.

En effet, si x est minimal, on a $\varphi(x) \supset \gamma(x)$, d'où $\varphi(x) = \varphi\gamma(x)$. Inversement, $\varphi(x) = \varphi\gamma(x)$ entraîne $\gamma(x) \subset \varphi(x)$.

De même x est maximal si et seulement si $\omega\gamma(x) \neq \emptyset$.

En effet, si x est maximal, $\varphi(x) \subset \gamma(x)$ entraîne $\varphi(x) \subset \omega\gamma(x)$, puisque $\varphi(x) \in \Phi$. Inversement, si $y \in \omega\gamma(x)$, on a $\varphi(y) \subset \gamma(x)$, donc $y \in \gamma(x)$, c'est-à-dire $x \in \varphi(y)$. Il en résulte $\varphi(x) \subset \varphi(y) \subset \gamma(x)$, et x est maximal.

Si $\mathcal{C}$ est une topologie finie, c'est-à-dire si $\gamma(x) \in \mathcal{C}$ quel que soit $x \in E$, un élément x est minimal si et seulement si $T\varphi(x) \neq \emptyset$.

En effet, si x est minimal, $\gamma(x) \subset \varphi(x)$ entraîne $\gamma(x) \subset T\varphi(x)$ si $\gamma(x) \in \mathcal{C}$. Inversement, si $y \in T\varphi(x)$, on a $\gamma(y) \subset \varphi(x)$ et $y \in \varphi(x)$ donne $x \in \gamma(y)$, donc $\gamma(x) \subset \gamma(y) \subset \varphi(x)$: x est minimal.

De même, $\varphi(x) \subset \gamma(y)$ entraîne que y est maximal, et $\gamma(x) \subset \varphi(y)$ entraîne que y est minimal.

En effet, si $\varphi(x) \subset \gamma(y)$, $x \in \gamma(y)$ donne $y \in \varphi(x)$, puis $\varphi(y) \subset \varphi(x) \subset \gamma(y)$. Même démonstration si $\gamma(x) \subset \varphi(y)$.

3 - LES TOPOLOGIES FINIES

Rappelons qu'une topologie fermée $\mathcal{C}$ est dite finie si $\gamma(x) \in \mathcal{C}$ pour tout $x \in E$. Il suffit d'ailleurs pour cela que l'on ait $\gamma(x) \in \mathcal{G}$ car alors $\gamma(x)$ est la limite dans $\mathcal{G}$ de la famille filtrante décroissante $\{T, T \in \mathcal{C}, x \in T\}$, donc appartient à $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est fermée. Comme on l'a vu, γ est alors une application de E dans $\mathcal{G}$ vérifiant les conditions :

$$1 - x \in \gamma(x)$$

$$2 - y \in \gamma(x) \Rightarrow \gamma(y) \subset \gamma(x)$$

$$3 - \gamma \text{ est s.c.s. sur } E$$

Il est clair d'ailleurs que la condition 3 est une conséquence immédiate des conditions 1 et 2 (si $\gamma(x) \not\subset G$, pour $G \in \mathcal{G}$, on a aussi $\gamma(y) \not\subset G$ pour tout y appartenant à l'ouvert $\gamma(x)$).

Comme $\gamma(x)$ est le plus petit voisinage ouvert de x pour la topologie $\mathcal{C}$, on a $T \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\gamma(x) \subset T$ pour tout $x \in T$, c'est-à-dire, d'après (8) : $T = \gamma(T)$. $\mathcal{C}$ est donc la famille des invariants associés à l'application γ . Autrement dit, $\mathcal{C}$ est stable pour la réunion et l'intersection infinies.

Inversement, soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ une famille stable pour la réunion et l'intersection infinies. Alors $\mathcal{C}$ est fermée dans $\mathcal{G}$ (voir introduction ci-dessus).

Si maintenant γ est une application quelconque de E dans $\mathcal{G}$ vérifiant les conditions 1 et 2 ci-dessus (qui impliquent que γ est s.c.s), désignons par $\mathcal{C}$ la classe stable pour la réunion infinie

engendrée par $\gamma(x)$, $x \in E$. Alors $\mathcal{C}$ est une topologie finie, et $\gamma(x)$ est le plus petit ouvert de $\mathcal{C}$ contenant x .

En effet, $\mathcal{C}$ est fermée. Pour le voir, posons $\gamma(A) = \bigcup \{\gamma(x), x \in A\}$ pour tout $A \subset E$. Si une suite $\{G_n\} \subset \mathcal{G}$ vérifie $\gamma(G_n) = G_n$ (i.e. $G_n \in \mathcal{C}$) et $\lim G_n = G$, soit x un point tel que $\gamma(x) \not\subset G$. Pour n assez grand, on a $\gamma(x) \not\subset G_n$, puisque $\{G_n\}$ tend vers G , donc $x \notin G_n$ et par suite $x \notin G$. On a donc $\gamma(G) \subset G$, d'où $\gamma(G) = G \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est stable pour l'intersection finie. Soient, en effet $T = \gamma(T)$ et $T' = \gamma(T')$ deux éléments de $\mathcal{C}$. Si $x \in T \cap T'$, on a $\gamma(x) \subset \gamma(T) \cap \gamma(T') = T \cap T'$, donc $\gamma(T \cap T') = T \cap T' \in \mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est donc une topologie fermée. D'autre part, $T \in \mathcal{C}$ et $x \in T$ entraîne $\gamma(x) \subset T$, donc $\gamma(x)$ est le plus petit voisinage de x pour $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ est une topologie finie.

Nous avons ainsi obtenu une caractérisation des topologies finies.

CRITERE - Une famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ est une topologie finie si et seulement si $\mathcal{C}$ est la classe stable pour la réunion infinie engendrée par les $\gamma(x)$; $x \in E$, où γ est une application de E dans $\mathcal{G}$ vérifiant $x \in \gamma(x)$ et $y \in \gamma(x) \Rightarrow \gamma(y) \subset \gamma(x)$ pour $x, y \in E$.

En particulier, on peut écrire :

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \bigcap_{x \in E} (\mathcal{G}_{\gamma(x)} \cup \mathcal{G}^x) \\ \Phi = \bigcap_{x \in E} (\mathcal{F}^{\gamma(x)} \cup \mathcal{F}_x) \end{cases}$$

Inversement, soit g une application quelconque de E dans $\mathcal{G}$

vérifiant $x \in g(x)$ pour tout $x \in E$ (mais non nécessairement la condition 2). Posons :

$$(11) \quad \mathcal{C} = \bigcap_{x \in E} \left(\mathcal{G}_{g(x)} \cup \mathcal{G}^x \right)$$

Montrons que $\mathcal{C}$ est une topologie finie (de sorte que (11) représente la forme générale des topologies finies).

Il est immédiat que $\mathcal{C}$ est stable pour la réunion infinie et pour l'intersection finie. D'autre part, $\mathcal{C}$ est fermée dans $\mathcal{G}$, comme intersection des fermés $\mathcal{G}_{g(x)} \cup \mathcal{G}^x$. Donc $\mathcal{C}$ est une topologie fermée. Enfin, pour tout $x \in E$, on a $T \supset g(x)$ dès que $x \in T$. Donc $x \in g(x) \subset \gamma(x) = \bigcap \{T \in \mathcal{C}, x \in T\}$. Mais $g(x) \in \mathcal{G}$, et par suite $x \in \overset{\circ}{\gamma}(x)$. Comme $\overset{\circ}{\gamma}(x)$ est dans $\mathcal{C}$ (comme limite dans $\mathcal{G}$ de la famille $\{T, T \in \mathcal{C}, x \in T\}$, il en résulte $\gamma(x) = \overset{\circ}{\gamma}(x) \in \mathcal{C}$, et $\mathcal{C}$ est une topologie finie.

On note que l'on n'a pas $g(x) = \gamma(x)$, si g ne vérifie pas la condition 2, mais seulement $g(x) \subset \gamma(x)$. Plus précisément, γ est la plus petite application de E dans $\mathcal{G}$ majorant g et vérifiant les deux conditions 1 et 2. (La démonstration est analogue à celle qui a été faite dans la première partie pour la fonction ϕ).

Si l'on pose par récurrence $g_n(x) = \bigcup \{g(y), y \in g_{n-1}(x)\}$, on trouve précisément :

$$\gamma = \bigcup g_n$$

En effet, posons $g' = \bigcup g_n$. On a $g' \supset g$, $gg' = g'g = g'$ et donc $g' = g'g'$. Par suite, g' vérifie les conditions 1 et 2 et majore g . Il en résulte $g' \supset \gamma$. Mais $g \subset \gamma$ donne $g' \subset \gamma$ et l'égalité.

Les trois conditions suivantes sont équivalentes pour une topologie $\mathcal{C}$ finie (et sont vérifiées en particulier par les graphes planaires) :

$$1/- \text{ Pour tout } A \in \mathcal{P}(E), \varphi\gamma(A) = \overline{\gamma}(A)$$

$$2/- \text{ Pour tout } x \in E, \overline{\gamma}(x) \supset \varphi(x)$$

$$3/- \text{ Pour tout } T \in \mathcal{C}, \text{ on a } \overline{T} \in \Phi \text{ (i.e. } \varphi(T) = \overline{T})$$

En effet, 1/ entraîne 2/, car $\varphi\gamma(x) = \overline{\gamma}(x)$ donne $\overline{\gamma}(x) \supset \varphi(x)$.
 2/ entraîne 3/ car $\varphi(T) = \overline{\bigcup \{\varphi(x), x \in T\}}$, d'après (4), d'où $\varphi(T) \subset \overline{\bigcup \{\overline{\gamma}(x), x \in T\}} = \overline{\bigcup \{\gamma(x), x \in T\}} = \overline{T}$. Il reste à montrer que 3/ entraîne 1/. On a toujours $\varphi\gamma(A) \supset \overline{\gamma}(A)$. Si 3/ est vrai, $\gamma(A) \in \mathcal{C}$ entraîne $\overline{\gamma}(A) \in \Phi$, donc $\varphi\gamma(A) \subset \overline{\gamma}(A)$, et l'égalité.

L'Antitopologie $\mathcal{C}^*$.

Si $\mathcal{C}$ est une topologie finie, c'est une famille stable pour la réunion et l'intersection infinies. On peut donc également considérer $\mathcal{C}$ comme la famille Φ^* des fermés d'une autre topologie que nous appellerons l'antitopologie associée à $\mathcal{C}$. La famille $\mathcal{C}^*$ des ouverts de cette antitopologie coïncide évidemment avec la famille des fermés de $\mathcal{C}$, soit $\mathcal{C}^* = \Phi$. L'ouverture associée à $\mathcal{C}^*$ est identique à ω , et la fermeture associée à $\mathcal{C}^*$ coïncide avec γ . Dans le cas d'un graphe planaire, on voit facilement que l'antitopologie exprime le point de vue du graphe dual. Chaque fois que la démonstration d'une propriété ne fera intervenir que la stabilité de $\mathcal{C}$ pour $\cup$ et $\cap$, la propriété duale sera vraie également et s'énoncera à l'aide des règles de dualité :

$$T^* = \omega \quad \varphi^* = \gamma$$

$$\omega^* = T \quad \gamma^* = \varphi$$

En particulier, le préordre $x \in \gamma(y)$ se trouve inversé, puisque $x \in \gamma(y)$ équivaut à $y \in \gamma^*(x)$. On note que les classes d'équivalence sont identiques, puisque $\gamma(x) \cap \varphi(x) = \varphi^*(x) \cap \gamma^*(x)$.

Topologie finie régulière inférieurement ou supérieurement.

A tout point x est associé son voisinage minimal $\gamma(x)$ et son plus petit voisinage fermé $\varphi\gamma(x)$. Le plus petit voisinage ouvert de x contenu dans $\varphi\gamma(x)$ est $\gamma(x)$ lui-même, et le plus grand est $T\varphi\gamma(x)$. Nous dirons que la topologie finie $\mathcal{C}$ est régulière inférieurement si pour tout $x \in E$ $\gamma(x)$ est le seul voisinage ouvert de x contenu dans $\varphi\gamma(x)$, autrement dit si l'on a :

$$(12) \quad \gamma(x) = T \varphi\gamma(x)$$

De même, nous dirons que $\mathcal{C}$ est régulière supérieurement si l'antitopologie $\mathcal{C}^*$ est régulière inférieurement, autrement dit si l'on a pour tout $x \in E$:

$$(12') \quad \varphi(x) = \omega \gamma\varphi(x)$$

Si maintenant $\mathcal{C}$ est une topologie finie quelconque, nous poserons

$$(13) \quad \tilde{\gamma}(x) = T \varphi\gamma(x)$$

Il est clair que $y \in \tilde{\gamma}(x)$ équivaut à $\gamma(y) \subset \varphi\gamma(x)$ et entraîne $\gamma(y) \subset \tilde{\gamma}(x)$, soit

$$(14) \quad \tilde{\gamma}(x) = \{y : \gamma(y) \subset \varphi\gamma(x)\}$$

D'autre part, si $y \in \tilde{\gamma}(x)$, i.e. si $\gamma(y) \subset \varphi\gamma(x)$, on a aussi

$\varphi\gamma(y) \subset \varphi\gamma(x)$. Par suite, d'après (14), $\tilde{\gamma}(y) \subset \tilde{\gamma}(x)$. Autrement dit, l'application $\tilde{\gamma} : E \rightarrow \mathcal{G}$ vérifie les conditions 1 et 2 caractéristiques des topologies finies moins fines que $\mathcal{G}$. Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{E}}$ la topologie associée à $\tilde{\gamma}$, et nous dirons que $\tilde{\mathcal{E}}$ est la régularisée inférieure de $\mathcal{E}$ (nous verrons dans un instant que $\tilde{\mathcal{E}}$ est effectivement régulière inférieurement). Nous désignerons de même par $\tilde{\varphi}$ l'adhérence associée à cette topologie $\tilde{\mathcal{E}}$.

D'après l'équivalence $y \in \tilde{\varphi}(x) \Leftrightarrow x \in \tilde{\gamma}(y)$, nous voyons que $y \in \tilde{\varphi}(x)$ équivaut à $\gamma(x) \subset \varphi\gamma(y)$. Or un point z est dans $\varphi\gamma(y)$ si et seulement si $\gamma(z) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$. Autrement dit encore, $y \in \tilde{\varphi}(x)$ équivaut à : $\forall z \in \gamma(x), \gamma(z) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$, ou encore à : $\forall z \in \gamma(x), y \in \varphi\gamma(z)$. En résumé :

$$(15) \quad \tilde{\varphi}(x) = \bigcap_{z \in \gamma(x)} \varphi\gamma(z) = \{y : \gamma(x) \subset \varphi\gamma(y)\}$$

et aussi :

$$(15') \quad x \notin \tilde{\gamma}(y) \Leftrightarrow y \notin \tilde{\varphi}(x) \Leftrightarrow \exists z \in \gamma(x), \gamma(z) \cap \gamma(y) = \emptyset$$

Pour tout $A \in \mathcal{P}$, on a $\varphi\gamma(A) = \tilde{\varphi} \tilde{\gamma}(A)$, soit :

$$(16) \quad \varphi\gamma = \tilde{\varphi} \tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} \gamma = \varphi \tilde{\gamma}$$

En effet, notons d'abord l'inclusion évidente $\varphi\gamma \subset \varphi\tilde{\gamma}$. Ensuite, $x \in \tilde{\gamma}(A)$ équivaut à : $\exists y \in A, \gamma(x) \subset \varphi\gamma(y)$, d'après (14), et ceci entraîne, puisque Φ est stable pour la réunion :

$$\gamma(x) \subset \bigcup_{y \in A} \varphi\gamma(y) = \varphi \left(\bigcup_{y \in A} \gamma(y) \right) = \varphi \left(\bigcup_{y \in A} \gamma(y) \right) = \varphi\gamma(A)$$

On en déduit $\tilde{\gamma}(A) \subset \varphi\gamma(A)$, et $\varphi\tilde{\gamma} \subset \varphi\gamma$, d'où l'égalité $\varphi\tilde{\gamma} = \varphi\gamma$. De la relation $\tilde{\varphi}\varphi = \tilde{\varphi}$ (évidente puisque $\tilde{\mathcal{E}}$ est moins fine que $\mathcal{E}$)

et de $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\gamma} = \tilde{\varphi} \circ \gamma$ résulte ensuite $\tilde{\varphi}\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi}\gamma$. Enfin, $x \notin \varphi\gamma(A)$ équivaut à $\gamma(x) \cap \gamma(A) = \emptyset$, donc à $A \cap \varphi\gamma(x) = \emptyset$, soit, compte tenu de $\tilde{\varphi}\tilde{\gamma} = \tilde{\varphi}\gamma$, à $A \cap \tilde{\varphi}\tilde{\gamma}(x) = \emptyset$, i.e. à $\gamma(A) \cap \tilde{\gamma}(x) = \emptyset$ ou encore à $x \notin \tilde{\varphi}\gamma(A)$. Mais $\tilde{\varphi}\gamma = \tilde{\varphi}\tilde{\gamma}$. Par suite $\varphi\gamma(A) = \tilde{\varphi}\tilde{\gamma}(A)$, ce qui achève la démonstration des relations (16).

Montrons maintenant que la topologie $\tilde{\mathcal{E}}$ est régulière inférieurement. En effet, $y \in \tilde{\gamma}(x)$ équivaut d'après (14), à $\tilde{\gamma}(y) \subset \tilde{\varphi} \tilde{\gamma}(x)$, donc aussi à $\tilde{\varphi} \tilde{\gamma}(y) \subset \tilde{\varphi} \tilde{\gamma}(x)$. D'après (16), ceci est équivalent à $\varphi\gamma(y) \subset \varphi\gamma(x)$, donc à $y \in \tilde{\gamma}(x)$. Donc $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}$, et $\tilde{\mathcal{E}}$ est bien régulière inférieurement.

Relativement au préordre $x \in \gamma(y)$, les éléments minimaux de $\mathcal{E}$ sont encore minimaux pour sa régularisée inférieure $\tilde{\mathcal{E}}$.

En effet, si x est minimal pour $\mathcal{E}$, on a $\gamma(z) = \gamma(x)$ pour tout $z \in \gamma(x)$, donc $\tilde{\varphi}(x) = \varphi\gamma(x)$ d'après (15). Mais, x étant minimal, l'inclusion $\gamma(x) \subset \varphi(x)$ entraîne $\varphi\gamma(x) = \varphi(x)$, donc $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$. D'après (14), $y \in \tilde{\gamma}(x)$ équivaut à $\gamma(y) \subset \varphi\gamma(x)$, i.e. à $\gamma(y) \subset \varphi(x)$. On a donc $y \in \varphi(x)$, d'où $x \in \gamma(y) \subset \tilde{\gamma}(y)$ et x est minimal pour $\tilde{\mathcal{E}}$.

On note que la réciproque n'est pas nécessairement exacte, un élément minimal pour $\tilde{\mathcal{E}}$ n'étant pas obligatoirement minimal pour $\mathcal{E}$. De même, si x est minimal pour $\mathcal{E}$ (donc aussi pour $\tilde{\mathcal{E}}$), on n'a pas nécessairement $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$. Toutefois, on vient de voir que l'on a toujours dans ce cas $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x)$.

Un élément x est minimal pour le préordre $y \in \tilde{\gamma}(x)$ si $\tilde{\gamma}(x) \subset \tilde{\varphi}(x)$ et ceci équivaut, d'après (16), à $\varphi\gamma(x) = \tilde{\varphi}(x)$, ou encore à $\gamma(x) \subset \tilde{\varphi}(x)$. D'après (15), il en est ainsi si et seulement si

$\gamma(x) \subset \varphi\gamma(z)$, ou, ce qui revient au même, $\gamma(x) \subset \tilde{\gamma}(z)$ pour tout $z \in \gamma(x)$. D'après (15), donc, x est minimal pour $\tilde{\mathcal{C}}$ si et seulement si :

$$(17) \quad \forall z \in \gamma(x) \quad \forall y \in \gamma(x) : \gamma(z) \cap \gamma(y) \neq \emptyset$$

Cette condition exprime que l'ensemble des minorants de x pour le préordre $y \in \gamma(x)$ est filtrant inférieurement. En particulier, si $\gamma(x)$ contient un élément minimal pour $\mathcal{C}$, cet élément est unique (à une équivalence près) et constitue le plus petit minorant de x . Inversement, si x admet un plus petit minorant, (17) est vérifié et x est minimal pour $\tilde{\mathcal{C}}$.

En particulier, dans le cas (étudié plus loin) où tout élément admet des minorants minimaux dans le préordre $\mathcal{C}$, la propriété précédente est caractéristique : un élément x est minimal pour le préordre $\tilde{\mathcal{C}}$ si et seulement si il admet un plus petit minorant pour le préordre $\mathcal{C}$. Dans ce cas, $\tilde{\gamma}(x)$ est la réunion des éléments admettant le même plus petit minorant que x . Plus généralement, d'ailleurs, pour x quelconque, $\tilde{\gamma}(x)$ est l'ensemble des éléments y tels que x majore un minorant de chaque minorant de y (ou que chaque minorant de y majore un minorant de x). Si tout élément admet des minorants minimaux pour $\mathcal{C}$, $\tilde{\gamma}(x)$ est simplement l'ensemble des y admettant les mêmes minorants minimaux que x .

Si un élément x n'est pas minimal pour $\mathcal{C}$, l'ensemble $\gamma(x) \cap \varphi^c(x)$ de ses minorants stricts est non vide. On a alors :

$$(18) \quad \varphi(\gamma(x) \cap \varphi^c(x)) = \varphi\gamma(x)$$

En effet, tout majorant d'un minorant de x est alors majorant d'un minorant strict de x , d'où $\varphi\gamma(x) \subset \varphi(\gamma(x) \cap \varphi^c(x))$ et l'égalité.

Si la topologie $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement, tout élément x non minimal est le plus petit majorant de ses minorants stricts.
En particulier, si deux éléments non minimaux ont les mêmes minorants stricts, ils sont équivalents.

En effet, soit y un majorant des minorants stricts de x , soit $\gamma(x) \cap \varphi^c(x) \subset \gamma(y)$. D'après (18) ceci entraîne $\varphi\gamma(x) \subset \varphi\gamma(y)$, puis, compte tenu de (12), $\gamma(x) = T \varphi\gamma(x) \subset T \varphi\gamma(y) = \gamma(y)$, puisque $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement, c'est-à-dire $x \in \gamma(y)$.

Dans le cas où tout élément admet des minorants minimaux, la réciproque est vraie : si tout x non minimal est le plus petit majorant de ses minorants stricts, le topologie $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement.

En effet, soient x et y deux éléments tels que $x \notin \gamma(y)$. Si x est minimal, on a $\gamma(x) \cap \gamma(y) = \emptyset$ (sinon, il existerait un $z \in \gamma(x) \cap \gamma(y)$ qui serait un minorant strict de $\gamma(x)$) donc $x \notin \tilde{\gamma}(y)$ d'après (15'). Supposons x non minimal. Comme x est le plus petit majorant de $\gamma(x) \cap \varphi^c(x)$, on a $\gamma(x) \cap \varphi^c(x) \not\subset \gamma(y)$. Il existe donc un élément minimal $z \in \gamma(x) \cap \varphi^c(x)$ tel que $z \notin \gamma(y)$, c'est-à-dire (puisque z est minimal) $\gamma(z) \cap \gamma(y) = \emptyset$. D'après (15'), on a donc $x \in \tilde{\gamma}(y)$. Il en résulte $\tilde{\gamma}(y) \subset \gamma(y)$ et l'égalité : $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement.

On peut améliorer ce résultat comme suit :

Soit $\mathcal{E}$ une topologie finie telle que tout élément admette un

minorant minimal. Alors $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement si et seulement si tout élément x est le plus petit majorant de ses minorants minimaux.

En effet, si $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement, d'après (15'), $x \notin \gamma(y)$ si et seulement si il existe un $z \in \gamma(x)$ tel que $\gamma(z) \cap \gamma(y) = \emptyset$. On peut supposer z minimal, et dans ce cas $\gamma(z) \cap \gamma(y) = \emptyset$ équivaut à $z \notin \gamma(y)$. Donc $x \in \gamma(y)$ si et seulement si les minorants minimaux de x sont dans $\gamma(y)$.

Inversement, supposons que chaque x soit le plus petit majorant de ses minorants minimaux. Si $x \notin \gamma(y)$, x admet donc un minorant minimal $z \notin \gamma(y)$. On a alors $z \in \gamma(x)$ et $\gamma(z) \cap \gamma(y) = \emptyset$, c'est-à-dire $x \notin \tilde{\gamma}(y)$. Donc $\tilde{\gamma}(y) \subset \gamma(y)$, et $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement.

En particulier, si $\mathcal{E}$ est régulière inférieurement et si tout élément admet des minorants minimaux, un élément x est défini (à une équivalence près) par la donnée de ses minorants minimaux. Ces différents résultats se transposent par dualité si $\mathcal{E}$ est régulière supérieurement. Par exemple, si de plus tout élément admet des majorants maximaux, un élément x est défini, à une équivalence près, par la donnée de ses majorants maximaux z_i , $i \in I$, et par suite $\gamma(x) = \bigcap \gamma(z_i)$. (En effet, l'inclusion $\gamma(x) \subset \bigcap \gamma(z_i)$ est immédiate. Si $y \in \bigcap \gamma(z_i)$, y est majoré par x , puisque x est le plus grand majorant des z_i , et $y \in \gamma(x)$).

Il reste à examiner sous quelles conditions tout élément admet des minorants minimaux ou des majorants maximaux. Le cas le plus simple est le suivant :

Une topologie finie $\mathcal{E}$ est dite complètement finie si pour tout $x \in E$, $\varphi\gamma(x)$ contient un nombre fini de classes d'équivalences.

Comme $y \in \varphi\gamma(x)$ équivaut à $\gamma(y) \cap \gamma(x) \neq \emptyset$, cette propriété entraîne que x n'a qu'un nombre fini de majorants et de minorants, donc en particulier, admet des majorants maximaux et des minorants minimaux. Inversement, si tout élément n'a qu'un nombre fini de majorants et de minorants, l'ensemble $\varphi\gamma(x)$ des majorants des minorants de x est fini, et $\mathcal{E}$ est complètement finie. La topologie associée à un graphe est toujours complètement finie.