Fontainebleau N-377

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 125

REPRESENTATIONS STATIONNAIRES ET REPRESENTATIONS MINIMALES POUR LES F.A.I.

G. MATHERON Juin 1974

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 125

REPRESENTATIONS STATIONNAIRES ET REPRESENTATIONS MINIMALES POUR LES F.A.I.-k

Si Z est une F.A.I.-k et K(h) sa covariance généralisée, les representations de Z admettent des covariances (ordinaires) non stationnaires de la forme :

$$\sigma(x,y) = K(x-y) + a_\ell(x)\ f^\ell(y) + a_\ell(y)\ f^\ell(x) + T_{\ell s}\ f^\ell(x)\ f^s(y)$$

où les fonctions a_ℓ et les coefficients $T_{\ell s}$ sont à peu près complètement indéterminés. Dans certaines applications (et en particulier si l'on cherche à définir quelquechose comme une F.A.I.-k (lognormale) on souhaite diminuer cette indétermination, ce qui revient à limiter la classe des représentations considérées comme admissibles. Par exemple, si Z admet des représentations localement stationnaires sur un support S donné, on pourrait se limiter à la classe des représentations stationnaires sur S à une dérive déterministe près. D'une manière générale, donc, on est conduit à rechercher, dans cet ensemble trop vaste de toutes les représentations de Z, des sous-ensembles de tailles plus maniables, caractérisés, si faire se peut, par une propriété simple. On peut penser a deux possibilités : la première est la stationnarité locale, déjà évoquée; la seconde est la minimalité (i.e. chercher les représentations Y(x) minimisant $\sup_{x \in S} \|Y(x)\|$).

Les représentations minimales ont l'avantage de toujours exister, mais ne conduisent pas toujours à des propriétés simples. Les représentations stationnaires sont, de très loin, les plus agréables à manier - malheureusement elles n'existent pas nécessairement. Le cas idéal serait celui d'une représentation à la fois stationnaire et minimale. On trouvera ci-dessous (mais seulement dans le cas des F.A.I.-0) une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de cet oiseau rare.

1 - LES REPRESENTATIONS MINIMALES.

En toute généralité, posons-nous le problème suivant : soit S un espace compact, f^ℓ, $\ell = 0,1,\dots k$ k+1 fonctions continues sur S, $\Lambda_k(S)$ l'espace correspondant de combinaisons linéaires autorisées et Z une F.A.G. continue sur S, i.e. une application continue de Λ_k dans un espace L^2. Les représentations de Z sont alors les F.A. de la forme $Y(x) = Y_0(x) + A_\ell f^\ell(x)$ $(x \in S)$, où $Y_0(x)$ est l'une quelconques d'entre elles et les A_ℓ sont des éléments quelconques de L^2.

1-1 - Existence des représentations minimales.

A toute représentation Y(x), associons le nombre

$$B = \sup_{x \in S} \|Y(x)\|$$

(On a $B < \infty$, car S est compact et Y(x) continue) et désignons par β la borne inférieure de B lorsque Y parcourt l'ensemble des représentations de Z, soit :

$$\beta = \inf_{A_\ell \in L^2} \sup_{x \in S} \|Y_0(x) + A_\ell f^\ell(x)\|$$

Cette borne inférieure β est atteinte, autrement dit, il existe des représentations Y(x), que nous appellerons représentations

<u>minimales</u>, telles que $\operatorname{Sup} \|Y(x)\| = \beta$.

En effet, soient $Y_n = Y_o + A_\ell^n f^\ell$ une suite de représentations telles que $B_n \downarrow \beta$ ($B_n = \operatorname{Sup} \|Y_n(x)\|$), et λ_ℓ des mesures sur S vérifiant $\int \lambda_\ell f^s = \delta_\ell^s$. On a :

$$A_\ell^n = \int \lambda_\ell (Y_n - Y_o)$$

et par suite $\|A_\ell^n\| \leq (B_o + B_n) \int |\lambda_\ell|$ est bornée. On peut donc trouver une suite n_k telle que chaque suite $A_\ell^{n_k}$ converge faiblement dans L^2 vers une limite A_ℓ. Pour chaque $x \in S$, la suite $Y_{n_k}(x) = Y_o(x) + A_\ell^{n_k} f^\ell(x)$ converge donc faiblement vers $Y_o(x) + A_\ell f^\ell(x)$, et $\|Y_{n_k}(x)\| \leq B_{n_k}$ entraine :

$$\|Y_o(x) + A_\ell f^\ell(x)\| \leq \underline{\lim} \|Y_{n_k}(x)\| \leq \beta$$

La représentation $Y(x) = Y_o(x) + A_\ell f^\ell(x)$ vérifie donc $\operatorname{Sup} \|Y(x)\| \leq \beta$, c'est-à-dire $\operatorname{Sup} \|Y(x)\| = \beta$ (puisque β est minimale). Autrement dit $Y(x)$ est une représentation minimale.

<u>1-2 - Unicité et caractérisation de la représentation minimale si $k = 0$.</u>

Si $k = 0$ (avec, comme d'habitude, $f^o = 1$), les représentations de la F.A.G. Z sont de la forme $Y_o(x) + A_o$, $A_o \in L^2$. Dans ce cas, il existe <u>une et une seule représentation minimale</u>.

En effet, soient Y_1 et Y_2 deux représentations minimales de la F.A.G.-0 Z. Pour tout $\alpha \in [0,1]$ et $x \in S$, on a :

$$\|\alpha Y_1(x) + (1-\alpha) Y_2(x)\| \leq \alpha \|Y_1(x)\| + (1-\alpha)\|Y_2(x)\| \leq \beta$$

de sorte que $\alpha\, Y_1 + (1-\alpha)Y_2$ est encore une représentation minimale. Ceci implique l'existence d'un $x_o \in S$ tel que :

$$\|\alpha\, Y_1(x_o) + (1-\alpha)Y_2(x_o)\| = \beta$$

ou, explicitement :

$$\alpha^2\|Y_1(x_o\|^2 + 2\,\alpha(1-\alpha) < Y_1(x_o)\; Y_2(x_o) > + (1-\alpha)^2\; \|Y_2(x_o)\|^2 = \beta$$

Mais on a aussi $\|Y_1(x_o)\| \leq \beta$, $\|Y_2(x_o)\| \leq \beta$ et, d'après l'inégalité de Schwarz, $< Y_1(x_o), Y_2(x_o) > \leq \beta^2$. L'égalité ci-dessus implique donc :

$$\|Y_1(x_o)\|^2 = \|Y_2(x_o)\|^2 = < Y_1(x_o)\; Y_2(x_o) >$$

soit $\|Y_1(x_o) - Y_2(x_o)\|^2 = 0$. On a donc $Y_1(x_o) = Y_2(x_o)$ et par suite $Y_1(x) = Y_2(x)$ pour tout x (puisque $Y_1(x) = Y_o(x) + A_1$ et $Y_2(x) = Y_o(x) + A_2$ ne diffèrent que par une V.A. indépendante de x). La représentation minimale est donc bien unique. Voici maintenant sa caractérisation :

<u>La représentation minimale de la F.A.G.-O Z est $Z(\delta_x-\lambda_o)$ où λ_o réalise le minimum de $\operatorname{Sup}_x \|Z(\delta_x-\lambda)\|$ lorsque λ parcourt l'ensemble des mesures positives sur S de somme unité.</u>

Si $Y(x)$ est une F.A. continue sur S, l'ensemble des $Y(\lambda) = \int \lambda(dx)\; Y(x)$, où λ est une probabilité sur S, est convexe et fermé dans L^2. (La convexité est évidente. D'autre part, S étant compact, de toute suite de probabilités λ_n on peut extraire une suite partielle λ_{n_k} convergeant étroitement vers une probabilité λ_o, et la convergeance étroite des λ_{n_k} entraine la convergence forte

$Y(\lambda_{n_k}) \to Y(\lambda_o)$. Donc, si la suite $Y(\lambda_n)$ est convergente, sa limite est $Y(\lambda_o)$, et l'ensemble des $Y(\lambda)$ est fermé). Soit alors μ la probabilité telle que $Y(\mu) = \int \mu(dx)\, Y(x)$ soit la projection de 0 sur cet ensemble convexe et fermé. $Y(\mu)$ est caractérisé par $< Y(\lambda), Y(\mu) > \geq \|Y(\mu)\|^2$ pour tout λ, ou, ce qui est équivalent, par :

$$< Y(x), Y(\mu) > \geq \| Y(\mu)\|^2 \qquad \forall\ x \in S$$

Ceci est encore équivalent à :

$$\|Y(x) - Y(\mu)\|^2 \leq \|Y(x)\|^2 - \|Y(\mu)\|^2$$

Par suite, si $Y(x)$ est la représentation minimale de Z, on a nécessairement $Y(\mu) = 0$. Il en résulte $Y(x) = Y(x) - Y(\mu) = Z(\delta_x - \mu)$: la représentation minimale est bien de la forme indiquée. Pour toute autre probabilité λ, on a par définition $\operatorname{Sup}_x \|Z(\delta_x - \lambda)\| \geq \beta =$ $= \operatorname{Sup} \|Z(\delta_x - \mu)\|$, ce qui achève la démonstration.

Bien que la représentation minimale soit unique, il n'en est pas nécessairement de même de la probabilité λ_o sur S (car $Z(\lambda - \lambda')$ $= 0$ pour deux probabilités λ et λ' n'entraine $\lambda = \lambda'$ que si la covariance généralisée de Z est de type positif conditionnel <u>strict</u>).

Venons-en maintenant au <u>critère de minimalité</u>. Désignons, pour abréger, par $\mathcal{P}$ l'ensemble des probabilités (mesures ≥ 0 de somme 1) sur S et, pour tout $\mu \in \mathcal{P}$ posons :

$$\beta(\mu) = \operatorname*{Sup}_{x \in S} \|Z(\delta_x - \mu)\|$$

soit :

$$\beta^2(\mu) = 2 \operatorname*{Sup}_{x \in S} \gamma_{x\mu} - \gamma_{\mu\mu}$$

Comme on a $2\,\gamma_{x\mu} - \gamma_{\mu\mu} \leq \beta^2(\mu)$, en intégrant en μ on obtient $2\int\mu(dx)\gamma_{x\mu} - \gamma_{\mu\mu} = \gamma_{\mu\mu} \leq \beta^2(\mu)$ pour tout $\mu \in \mathcal{P}$:

(1-1) $$\gamma_{\mu\mu} \leq \beta^2(\mu) \qquad \forall\ \mu \in \mathcal{P}$$

Supposons de plus γ <u>non dégénéré</u>, i.e. $\iint(\mu-\mu')\ \gamma(\mu-\mu') = 0$ $\Rightarrow \mu = \mu'$. Dans ces conditions, les 5 propriétés suivantes sont équivalentes et caractérisent une et une seule mesure $\mu_o \in \mathcal{P}$

1 - <u>μ_o réalise le maximum de</u> $\gamma_{\mu\mu} = \iint\mu\ \gamma\ \mu,\ \mu \in \mathcal{P}$

2 - $\gamma_{x\mu_o} \leq \gamma_{\mu_o\mu_o}$ pour tout $x \in S$

3 - $\gamma_{\mu_o\mu_o} = \beta^2(\mu_o)$

4 - $\gamma_{x\mu_o} = \gamma_{\mu_o\mu_o}$ pour $x \in$ Supp μ_o et $\gamma_{y\mu_o} \leq \gamma_{\mu_o\mu_o}$ pour $y \in S$

5 - <u>$Z(\delta_x-\mu_o)$ est la représentation minimale.</u>

$1 \Rightarrow 2$ - Soit $\alpha \in [0,1]$, $x \in S$ et $\mu = (1-\alpha)\mu_o + \alpha\delta_x$. Si $\gamma_{\mu_o\mu_o} \geq \gamma_{\mu\mu} = 2\,\alpha(1-\alpha)\gamma_{x\mu_o} + (1-\alpha)^2\gamma_{\mu_o\mu_o}$, on en déduit $\alpha(2-\alpha)\gamma_{\mu_o\mu_o} \geq 2\,\alpha(1-\alpha)\gamma_{x\mu_o}$. En divisant par α et en faisant $\alpha \downarrow 0$, il vient $\gamma_{\mu_o\mu_o} \geq \gamma_{x\mu_o}$

$2 \Rightarrow 3$ - Si 2 est vrai, on a $\beta^2(\mu_o) = 2\ \mathrm{Sup}\ \gamma_{x\mu_o} - \gamma_{\mu_o\mu_o} \leq \gamma_{\mu_o\mu_o}$ et par suite $\beta^2(\mu_o) = \gamma_{\mu_o\mu_o}$ d'après (1-1).

$3 \Rightarrow 4$ - Pour tout $x \in S$, on a par définition $2\gamma_{x\mu_o} - \gamma_{\mu_o\mu_o} \leq \beta^2(\mu_o)$. Comme $\gamma_{x\mu_o}$ est continue en x, si cette inégalité est stricte en un point du support de μ_o , cela entraine (en multipliant par μ_o et en intégrant) $\gamma_{\mu_o\mu_o} < \beta^2(\mu_o)$ strictement. Par suite, si 3 est vrai, on a $2\,\gamma_{x\mu_o} - \gamma_{\mu_o\mu_o} = \beta^2(\mu_o)$ en tout $x \in$ Supp μ_o

et, puisque $\gamma_{\mu_o\mu_o} = \beta^2(\mu_o)$, il vient $\gamma_{x\mu_o} = \gamma_{\mu_o\mu_o}$. Pour $y \in S$, on a $2\,\gamma_{y\mu_o} - \gamma_{\mu_{oo}} \leq \beta^2(\mu_o)$, par définition, et donc aussi $\gamma_{y\mu_o} \leq \gamma_{\mu_o\mu_o}$ et 4 est vérifié.

4 ⇒ 5 - Soit $Z(\delta_x-\lambda_o)$ la représentation minimale, avec $\lambda_o \in \mathcal{P}$ réalisant le minimum de $\beta(\mu)$, $\mu \in \mathcal{P}$. En particulier, $\beta(\mu_o) \geq \beta(\lambda_o)$. Si μ_o vérifie la propriété 4, on a $\beta^2(\mu_o) = 2\ \mathrm{Sup}\ \gamma_{x\mu_o} - \gamma_{\mu_o\mu_o} = \gamma_{\mu_o\mu_o}$ et par suite pour tout $y \in S$

$$\gamma_{\mu_o\mu_o} \geq \beta^2(\lambda_o) \geq 2\,\gamma_{y\lambda_o} - \gamma_{\lambda_o\lambda_o}$$

En multipliant par μ_o et en intégrant, on en tire $\gamma_{\mu_o\mu_o} \geq 2\,\gamma_{\mu_o\lambda_o} - \gamma_{\lambda_o\lambda_o}$ c'est-à-dire $\|Z(\mu_o-\lambda_o)\|^2 = 0$. Par suite, $Z(\delta_x-\mu_o) = Z(\delta_x-\lambda_o)$ est la représentation minimale.

5 ⇒ 1 - S étant compact et γ continu, il existe effectivement une mesure $\mu_1 \in \mathcal{P}$ réalisant le maximum de $\gamma_{\mu\mu}$. D'après ce qui précède, $Z(\delta_x-\mu_1)$ est la représentation minimale. Si $\mu_o \in \mathcal{P}$ vérifie 5, on a $Z(\delta_x-\mu_o) = Z(\delta_x-\mu_1)$ d'après l'unicité de la représentation minimale, donc $Z(\mu_o-\mu_1) = 0$ et par suite $\mu_o = \mu_1$ (puisque γ est non dégénéré). Donc 1 est vérifiée par μ_o.

<u>1-3 - Représentation stationnaire et minimale d'une F.A.I.-0.</u>

Nous supposons maintenant que S est un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ (par exemple une boule) et Z une F.A.I.-0 sur $\mathbb{R}^n$, caractérisée par son <u>variogramme</u> $\gamma(h)$ (i.e. $-\gamma$ est une covariance généralisée de Z). Une représentation Y(x) de Z est stationnaire sur S si elle admet sur S une covariance de la forme

$\sigma(x-y)$ $(x, y \in S)$. On a alors nécessairement

$$\sigma(h) = A - \gamma(h) \qquad (h \in S \oplus \check{S})$$

pour une constante A convenable, nécessairement ≥ 0, et il existe une valeur limite $A_o \geq 0$ telle que $A - \gamma(h)$ soit une covariance sur S si et seulement si $A \geq A_o$. Autrement dit, lorsque Z admet des représentations stationnaires sur S, il existe une plus petite représentation stationnaire : mais celle-ci n'est pas nécessairement identique à la représentation minimale définie ci-dessus. Nous verrons des contr-exemples. Donnons d'abord la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux représentations coïncident :

Pour que la représentation minimale de la F.A.I.-0 Z sur S soit stationnaire sur S il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive λ_o telle que l'on ait :

$$\forall\, y \in S \quad \int \lambda_o(dx)\ \gamma(x-y) = A_o$$

$$\int \lambda_o(dx) = 1$$

La covariance stationnaire et minimale sur S est alors $A_o - \gamma$.

En effet, la représentation minimale est de la forme $Y_o(x) = Z(\delta_x - \lambda_o)$ pour une probabilité λ_o sur S minimisant Sup $\|Z(\delta_x - \lambda)\|$ lorsque λ parcourt l'ensemble des probabilités sur S. Ceci implique $\int \lambda_o(dx)\ Y_o(x) = 0$. Si $Y_o(x)$ est stationnaire sur S, sa covariance est de la forme $\sigma_o = A - \lambda$, et on a donc $\int \lambda_o(dx)\ \sigma(x-y) = A - \int \lambda_o(dx)\ \gamma(x-y) = 0$. Inversement, soit λ_o une probabilité sur S vérifiant $\int \lambda_o(dx)\ \gamma(x-y) = A_o$ $(y \in S)$. Alors $Y_o(x) = Z(\delta_x - \lambda_o)$ est une représentation stationnaire sur S et $\int \lambda_o(dx)\ Y_o(x) = 0$. Montrons qu'elle est minimale. Soit $Y(x) = Y_o(x) + B$ une autre représentation, avec $B \in L^2$. Si $Y(x)$ est minimale, on a :

$$\|Y(x)\|^2 = \|Y_o(x)\|^2 + 2 < B,\ Y_o(x) > + \|B\|^2 \leq \|Y_o(x)\|^2$$

Donc : $2 < B, Y_o(x) > + \|B\|^2 \leq 0$. Comme λ_o est une mesure ≥ 0 vérifiant $\int \lambda_o\, Y_o = 0$, on en déduit $2 < B \int \lambda_o(dx)\, Y_o(x) > + \|B\|^2 = \|B\|^2 \leq 0$. Donc $B = 0$ et $Y(x) = Y_o(x)$.

1-4 - Exemple des variogrammes convexes.

Soit Z une F.A.I.-0 et $\gamma(h)$ son variogramme. Plaçons-nous dans le cas où $\gamma(h)$ est une fonction convexe, i.e. vérifie : $\gamma(\lambda\, x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\, \gamma(x) + (1-\lambda)\gamma(y)$ $(\lambda \in [0,1],\ x,y \in \mathbb{R}^n)$. De plus, supposons S compact et convexe. Dans ces conditions, pour toute probabilité λ sur S, la fonction $x \to \|Z(\delta_x-\lambda)\|^2 = 2\ \gamma_{x\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda}$ est convexe, donc atteint sa borne supérieure sur S en un point extrêmal du convexe S. Désignons par ∂S l'ensemble des points extrêmaux de S : pour toute probabilité λ sur S, il existe $x_o \in \partial S$ tel que $\beta^2(\lambda) = 2\ \gamma_{x_o\lambda} - \gamma_{\lambda\lambda}$.

Dans ces conditions, la probabilité λ_o associée à la représentation $Z(\delta_x-\lambda_o)$ minimale sur S est concentrée sur ∂S.

En effet, soit μ_o la probabilité sur ∂S telle que $Z(\delta_x-\mu_o)$ soit minimale sur ∂S. Pour tout $x \in S$, on a $2\ \gamma_{x\mu_o} - \gamma_{\mu_o\mu_o} \leq$ Sup $\sup\limits_{y\in\partial S} (2\ \gamma_{y\mu_o} - \gamma_{\mu_o\mu_o}) = \gamma_{\mu_o\mu_o}$, d'après la convexité de $\gamma_{x\mu_o}$. Par suite (d'après le critère 2 du paragraphe 1-2) $Z(\delta_x-\mu_o)$ est minimale non seulement sur ∂S, mais également sur S. Autrement dit $\mu_o = \lambda_o$ et

λ_o est caractérisée par les 2 conditions :

$$\begin{cases} \text{Supp } \lambda_o \subset \partial S \\ \\ \forall\, y \in \partial S,\ \gamma_{y\lambda_o} \leq \gamma_{\lambda_o\lambda_o} \end{cases}$$

Si S est une boule dans $\mathbb{R}^n$ et si le variogramme convexe γ est isotrope (par exemple $\gamma(h) = |h|^\alpha$ avec $1 \leq \alpha < 2$), λ_o est la probabilité de densité constante sur la surface de S, c'est-à-dire sur la sphère ∂S. En général, elle n'est pas associée à une représentation stationnaire.

Prenons, par exemple, la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$ et $\gamma(h) = |h|$ (variogramme linéaire. Avec λ_o uniforme qur la sphère ∂S, on trouve $\gamma_{\lambda_o\lambda_o} = \frac{4}{3}$ R. La représentation minimale correspondante n'est pas stationnaire : la plus petite représentation stationnaire sur S admet la covariance $2R - |h|$ (on le voit à l'aide de la méthode des bandes tournantes), et il lui correspond la variance 2R strictement supérieure à $\beta^2(\lambda_o) = (4/3)R$.

Examinons d'un peu plus près le cas du variogramme

$$\gamma(h) = |h|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 2)$$

dans l'espace à une dimension, avec $S = (-R,R)$. On sait que (pour $-1 < \alpha < 1$) la formule suivante est valable :

$$(1\text{-}3) \qquad \int_{-R}^{R} \frac{|x-y|^\alpha}{(R^2-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\, dx = \frac{\pi}{\cos \frac{\pi}{2}\alpha} \qquad (-R \leq y \leq R)$$

Par conséquent, pour $0 < \alpha < 1$, la probabilité sur $(-R,R)$

$$\lambda_o(dx) = (2R)^\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})\right)^2} \frac{dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}}$$

vérifie

$$\int_{-R}^{R} \lambda_o(dx)\,|x-y|^\alpha = A_\alpha \qquad (-R \leq y \leq R)$$

avec la constante

$$(1\text{-}4) \qquad A_\alpha = (2R)^\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})\right)^2} \frac{\pi}{\cos\frac{\pi}{2}\alpha} = \frac{R^\alpha}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(\tfrac{1+\alpha}{2})\, \Gamma(1-\tfrac{\alpha}{2})$$

Par suite, d'après le paragraphe 1-3, la représentation $Z(\delta_x-\lambda_o)$ est <u>minimale et stationnaire</u> sur $(-R,R)$. La covariance correspondante est

$$\sigma_\alpha(h) = A_\alpha - |h|^\alpha$$

Si $\alpha = 1$, la probabilité $\lambda_o = \frac{1}{2}(\delta_R+\delta_{-R})$ vérifie encore $\int \lambda_o(dx)\,|x-y| = R$, et on a donc une représentation minimale et stationnaire de covariance $R-|h|$. On remarque que $R = A_1$ est encore donné par la formule (1-4).

Mais si <u>$1 < \alpha < 2$</u>, les choses se compliquent. Le variogramme étant convexe, la mesure associée à la <u>représentation minimale</u> est concentrée sur la frontière de $(-R,R)$: c'est donc, par raison de symétrie, $\lambda_o = \frac{1}{2}(\delta_R+\delta_{-R})$. La covariance correspondante :

$$\sigma_o(x,y) = \frac{1}{2}\left[(R-x)^\alpha + (R+x)^\alpha + (R-y)^\alpha + (R+y)^\alpha\right] - |x-y|^\alpha - \frac{1}{2}(2R)^\alpha$$

<u>n'est pas stationnaire</u>. La variance maximale, atteinte en R ou en $-R$, est $\frac{1}{2}(2R)^\alpha$. Elle est inférieure à la constante A_α de la formule (1-4). Montrons que la plus petite représentation stationnaire

existe et admet encore la covariance

$$\sigma_\alpha(h) = A_\alpha - |h|^\alpha$$

Comme la formule de Landkov (1-3) n'est plus valable pour $\alpha > 1$ (l'intégrale diverge), nous devons la transposer en termes de distributions : si f a une dérivée continue, posons :

$$(1\text{-}5)\quad \begin{cases} \mathscr{L}_\alpha f = \displaystyle\int_{-R}^{R} [f(x) - \frac{f(R) + f(-R)}{2} - x \frac{f(R) - f(-R)}{2R}] \times \\ \quad \times (2R)^\alpha \dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\left(\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})\right)^2} \dfrac{dx}{(R^2-x^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}} + \dfrac{f(R) + f(-R)}{2} \end{cases}$$

Cette intégrale existe : en effet, au voisinage de R, avec x = = R - ε, on trouve :

$$f(x) - \frac{f(R) + f(-R)}{2} - x \frac{f(R) - f(-R)}{2R} = f(R-\varepsilon) - f(R) + \frac{\varepsilon}{2R} (f(R)-f(-R$$

et il suffit donc que f soit dérivable pour que l'intégrale converge.

Si maintenant Y(x) est une représentation de la F.A.I.-0 de variogramme $|h|^\alpha$, $\mathscr{L}_\alpha Y$ existe. En effet, au voisinage de x = R par exemple, avec x = R-ε on trouve :

$$Y_x - \frac{Y_R + Y_{-R}}{2} - x \frac{Y_R - Y_{-R}}{2R} = Y(R-\varepsilon) - Y_R + \frac{\varepsilon}{2R} (Y_R - Y_{-R})$$

Par suite :

$$\| Y_x - \frac{Y_R + Y_{-R}}{2} - x \frac{Y_R - Y_{-R}}{2R} \| \leq \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} + (2R)^{\frac{\alpha}{2}-1} \varepsilon$$

Par suite l'intégrale $\int_0^a \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1+\alpha}{2}}} [Y_{R-\varepsilon} - Y_R + \frac{\varepsilon}{2R} (Y_R - Y_{-R})] d\varepsilon$ existe pourvu que $\alpha < 3$.

En particulier, l'expression

$$\int \mathscr{L}_\alpha(dx)\ |x-y|^\alpha = A_\alpha$$

a un sens et (comme elle réalise le prolongement analytique de la formule de Landkov), elle vaut encore A_α. Il en résulte bien que la plus petite représentation stationnaire admet la covariance

$$\sigma_\alpha(h) = A_\alpha - |h|^\alpha$$

$(0 < \alpha < 2)$. Mais, pour $\alpha > 1$, cette représentation n'est pas minimale.

La méthode des bandes tournantes nous permet ensuite d'affirmer que la F.A.I.-0 de variogramme $|h|^\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ admet sur la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$ une plus petite représentation stationnaire de covariance :

$$\frac{\Gamma(\alpha + \frac{1+n}{2})}{\Gamma(1+\alpha)\ \Gamma(\frac{1+n}{2})}\ A_\alpha - |h|^\alpha$$

Toutefois, et même pour $\alpha \leq 1$, cette représentation n'est plus minimale pour $n > 1$ (la valeur critique de α, au-dessus de laquelle cette représentation n'est plus minimale, est la valeur pour laquelle la F.A.I. est markovienne, soit $\alpha = 2-n$ ($n > 2$) et, dans le cas $n = 2$, au lieu de $|h|^0$ apparait $\log |h|$).

2 - REPRESENTATIONS LOCALEMENT STATIONNAIRES DES F.A.I.-k.

Nous avons vu qu'une F.A.I.-k Z sur $\mathbb{R}^n$ admet, sur tout compact S, des représentationa minimales. Toutefois nous n'avons pas établi l'unicité de la représentation minimale pour k > 0, et d'autre part l'exemple des F.A.I.-0 nous a montré que les représentations minimales ne conduisent à des schémas vraiment intéressants que lorsqu' elles sont en même temps stationnaires. Nous n'étudierons donc que les représentations localement stationnaires, en nous attachant principalement au cas des covariances polynomiales.

2-1 - La classe des représentations d'ordre 2k.

Soit Z une F.A.I.-k, K(h) sa covariance généralisée et S un compact d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$. Toute représentation de Z est de la forme

$$Y(x) = Z(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell) + A_\ell f_x^\ell$$

où les λ_ℓ sont des mesures ou des opérateurs (tels que $Z(\delta_x - f_x^\ell \lambda_\ell)$ soit limite m.q. de combinaisons linéaires autorisées) <u>à support dans S</u> et les A_ℓ des V.A. orthogonales à l'espace image H(S) = $= Z(\Lambda_k(S))$ des combinaisons linéaires autorisées à support dans S. La covariance correspondante est alors

$$\sigma(x,y) = K(x-y) - f_x^\ell \int \lambda_\ell(dx)\ K(z-y) - f_y^\ell \int \lambda_\ell(dz)\ K(z-x)$$

$$+ f_x^\ell f_y^s \left[\iint \lambda_\ell\ K\ \lambda_s + < A_\ell\ A_s > \right]$$

Du fait que S est d'intérieur non vide, on vérifie sans peine que $\sigma(x,y)$ est stationnaire sur S si et seulement si elle ne diffère (sur S) de K(x-y) que par une expression de la forme Q(x-y) où Q est un polynome pair de degré $\leq$ 2k. Autrement dit, avec $T_{\ell s} = \, = < A_\ell \, A_s > + \iint \lambda_\ell K \lambda_s$:

$$- f_x^\ell \int \lambda_\ell(dz) \, K(x-z) - f_y^\ell \int \lambda_\ell \, K(x-z) + T_{\ell s} \, f_x^\ell \, f_y^s = Q(x-y)$$

En prenant des mesures $\tilde{\lambda}_\ell$ telles que $\int \tilde{\lambda}_\ell \, f^s = \delta_\ell^s$, on en déduit

$$\int \lambda_\ell(dz) \, K(x-z) = T_{\ell s} \, f_x^s - f_x^s \int \lambda_s \, K \, \tilde{\lambda}_\ell \; - \int \tilde{\lambda}_\ell(dy) \, Q(x-y)$$

Or $\int \tilde{\lambda}_\ell(dy) \, Q(x-y)$ est un polynome en x de degré $\leq$ 2k - deg. f^ℓ, et il en est donc de même de l'expression qui figure au second membre. On a donc :

$$\int \lambda_\ell(dy) \, Q(x-y) = P_\ell(x)$$

pour un polynome P_ℓ de degré $\leq$ 2k - degré f^ℓ. Nécessairement, donc, les covariances stationnaires sur S rentrent dans la classe un peu plus générale des représentations dont la covariance sur S est de la forme :

$$(2\text{-}1) \quad \sigma(x,y) = K(x-y) - f^\ell(x) \, P_\ell(y) - f^\ell(y) \, P_\ell(x) + H_{\ell s} \, f_x^\ell \, f_y^s$$

où P_ℓ est un polynome de degré au plus égal à 2k - degré f^ℓ. Nous dirons que les représentations de la forme (2-1) sur S sont d'ordre 2k (sur S). Les représentations stationnaires sur S en constituent un sous-ensemble, que l'on détermine en écrivant que le polynome

$$Q(x,y) = f^\ell(x) \, P_\ell(y) + f^\ell(y) \, P_\ell(x) - H_{\ell s} \, f^\ell(x) \, f_y^s$$

vérifie sur S : $\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0$

Dans l'expression (2-1), le terme $H_{\ell s}$ est :

$$H_{\ell s} = \iint \lambda_\ell K \lambda_s + < A_\ell, A_s >$$

Les A_ℓ sont orthogonaux à H(S) et, à cela près, quelconques, de sorte que $< A_\ell A_s >$ est une matrice quelconque de type ≥ 0. Si les <u>A_ℓ sont nuls</u>, nous dirons que nous avons affaire à une <u>représentation interne</u> sur S (dans ce cas, en effet, et dans ce cas seulement, $Y(x) \in H(S)$ pour tout $x \in S$). Ainsi, la covariance d'une représentation quelconque est, sur S, la somme de la covariance d'une représentation interne et d'une expression de la forme $K_{\ell s} f_x^\ell f_y^s$, où K est une matrice quelconque de type positif.

Nous pouvons donc nous limiter à la caractérisation des <u>représentations internes d'ordre 2k</u>. D'après (2-1), nous devons chercher les opérateurs λ_ℓ à support dans S vérifiant :

$$(2\text{-}2) \qquad \begin{cases} \int \lambda_\ell(dz)\ K(x-y) = P_\ell(x) \\ \int \lambda_\ell(dx)\ f^s(x) = \delta_\ell^s \end{cases}$$

avec des <u>polynomes</u> P_ℓ de degré $\leq 2k$ - degré f^ℓ. La covariance de la représentation interne correspondante est alors

$$(2\text{-}3) \qquad K(x-y) - f_x^\ell P_\ell(y) - f_y^\ell P_\ell(x) + f_x^\ell f_y^s \int \lambda_\ell K \lambda_s$$

Ces représentations constituent une <u>variété linéaire de dimension finie</u>. En effet, s'il en existe une associée à des λ_ℓ^o donnés, on obtient toutes les autres à partir des opérateurs de la forme $\lambda_\ell^o + \tilde{\lambda}_\ell$, où $\tilde{\lambda}_\ell \in \Lambda_k$ et $\int \tilde{\lambda}_\ell\ (dz)\ K(x-y)$ est un polynome arbitraire de degré $\leq$ 2k - degré f^{ℓ}. Evaluons cette dimension dans le cas n = 1 (F.A.I.-k sur la droite réelle). On a, dans ce cas, degré $f^{\ell} = \ell$, $\ell = 0,1,\ldots k$, et le polynome P_{ℓ}, de degré $\leq 2k-\ell$, dépend de $2k+1-\ell$ paramètres arbitraires. Pour chaque ℓ, les conditions d'universalité $\int \tilde{\lambda}_{\ell} f^s = 0$ sont au nombre de k+1, de sorte que $\tilde{\lambda}_{\ell}$ décrit un espace de dimensions $2k+1-\ell-(k+1) = k-\ell$ au plus. Au total, la dimension de notre variété est donc au plus

$$\sum_{\ell=0}^{k} (k-\ell) = \frac{k(k+1)}{2}$$

(nous disons au plus, car il n'est pas obligatoire qu'il existe de tels $\tilde{\lambda}_{\ell}$). Si k = 0, il existe donc au plus une représentation interne d'ordre 0 (et elle est alors obligatoirement localement stationnaire, comme on l'a vu). Si k = 1, on obtient une famille à un paramètre, etc...

Ayant obtenu la famille à $\frac{k(k+1)}{2}$ paramètres (au plus) des représentations internes d'ordre 2k, nous disposons encore des termes $K_{\ell s}\, f_x^{\ell}\, f_y^{s}$, soit $(k+1)(k+2)/2$ paramètres supplémentaires. Les covariances des représentations d'ordre 2k constituent donc une famille : $k(k+1)/2 + (k+1)(k+2)/2 = (k+1)^2$ paramètres au plus (mais cette famille n'est plus une variété linéaire, à cause de la condition de positivité sur $K_{\ell s}$. C'est cependant un cone convexe).

2-2 - La classe des représentations stationnaires.

Cette classe est un sous-ensemble de la classe des représentations d'ordre 2k. Nous allons voir que les covariances correspondantes constituent une famille à k+1 paramètres au plus, et, en particulier, qu'une F.A.I.-k admet au plus une seule représentation stationnaire interne sur S. Pour cela, nous allons raisonner par récurrence sur l'ordre k de la F.AI. Il nous faut également élargir un peu la définition des F.A.I.-k, en lui donnant un sens local :

Si S est un compact d'intérieur non vide, une F.A.I.-k (locale) sur S est une application $Z : \Lambda_k(S) \to L^2$ des combinaisons linéaires autorisées à support dans S dans un espace L^2 telle que $x \to Z(\tau_x \lambda)$ soit (localement) stationnaire pour tout $\lambda \in \Lambda_k$ et tout x tel que λ et sa translatée $\tau_x \lambda$ aient toutes deux leurs supports inclus dans S : la théorie est la même que dans le cas des F.A.I.-k sur $\mathbb{R}^n$: en particulier Z admet une covariance généralisée (locale) K(h) telle que $\int \lambda \, K \, \lambda \geq 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda_k(S)$, et la classe de ces covariances est identique à celle des fonctions localement de type positif conditionnel.

Si Z est une F.A.I.-0 locale et $K = -\gamma$ sa covariance généralisée, les représentations de Z ont des covariances de type

$$\sigma(x,y) = K(x-y) - \int \lambda(dz) \, K(z-y) - \lambda(dz) \, K(z-x) + \lambda \, K \, \lambda + C$$

($C \geq 0$, $\int \lambda = 1$, Supp $\lambda \subset S$). Cette représentation est stationnaire si et seulement si $\int \lambda(dz) \, K(z-y) = C^{ste} = \int \lambda \, K \, \lambda$ ($y \in S$).

L'opérateur λ, s'il existe, n'est pas obligatoirement unique, car K peut être dégénéré, mais la représentation stationnaire correspondante $Z(\delta_x - \lambda)$ est unique. En effet, si un autre opérateur λ' vérifie les mêmes conditions, $\nu = \lambda - \lambda'$ vérifie $\int \nu = 0$, i.e. $\nu \in \Lambda_0(S)$ et $\int \nu(dx) \, K(x-y) = C^{ste}$, d'où $\int \nu \, K \, \nu = 0$, donc

$Z(\nu) = Z(\lambda-\lambda') = 0$. Par suite $Z(\delta_x-\lambda) = Z(\delta_x-\lambda')$.

Il y a donc (au plus) une représentation stationnaire interne et (compte tenu de la constante $C \geq 0$) une famille à un seul paramètre de covariances stationnaires locales. Le théorème est donc vrai pour $k = 0$.

Supposons donc le théorème établi jusqu'à l'ordre k et montrons qu'il est vrai pour k+1.

Soit Z une F.A.I.-(k+1) sur S <u>dérivable</u> à l'ordre 1. Si Z admet une représentation stationnaire interne Y(x), les dérivées d'ordre 1, D Y(x) sont des représentations internes et stationnaires des F.A.I.-k dérivées DZ correspondantes. Elles sont donc déterminées de manière unique d'après l'hypothèse de récurrence, et Y(x) est elle-même déterminées à une constante aléatoire près A_0. On peut donc considérer Y(x) comme une représentation (localement stationnaire) d'une F.A.I.-0. D'autre part, Y(x) est de la forme $Y(x) = Z(\delta_x-\lambda_\ell\, f^\ell_x)$ (puisque c'est une représentation interne de Z). En particulier, avec $\ell = 0$, on a $\int\lambda_0 = 1$ et $\int\lambda_0(dx)\, Y(x) = 0$, soit $Y(x) = Y(x) - \int\lambda_0(dx)\, Y(x)$. En tant que représentation d'une F.A.I.-0, $Y(x) = Y(\delta_x-\lambda_0)$ est donc également une représentation interne et stationnaire. Elle est donc déterminée de manière unique. Si Z n'est pas dérivable, on la régularise par une fonction φ de support B_ε. Le théorème s'applique à la régularisée (et au support $S \ominus B_\varepsilon$) et subsiste pour Z lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

Si, maintenant, Y(x) est une représentation stationnaire, mais non interne, de Z, sa covariance ne diffère de K(h) que par un polynome pair de degré $\leq 2k$, qui dépend d'au plus (k+1) paramètres.

Du fait de son unicité, la représentation stationnaire interne sur S (lorsqu'elle existe) joue un rôle privilégié qui pourrait inciter à la retenir en vue des applications. Mais il ne faut pas oublier qu'elle dépend du choix du compact S. Pour S' ⊃ S, la représentation interne stationnaire sur S' est encore, évidemment, stationnaire sur S, mais non interne en général: sa restriction à S est l'une, quelconque, des représentations stationnaires sur S et n'a aucune raison de coïncider avec la représentation stationnaire interne sur S. Autrement dit, dans les applications, si le champ S n'est pas physiquement bien délimité et parfaitement connu, on ne pourra pas spécifier à l'avance cette représentation privilégiée. Du reste, on ne pourra en général expliciter la covariance correspondante que si S a une forme suffisamment simple, par exemple si S est une boule. On choisira donc une boule S de rayon assez grand pour contenir le champ physique réel, mais il n'y aura évidemment plus de raison pour privilégier la représentation stationnaire interne sur S.

Finalement, dans la plupart des cas, le degré d'indétermination auquel on arrivera sera le suivant : on admettra que le phénomène auquel on s'intéresse est une réalisation d'une F.A. Y(x) de la forme :

$$Y(x) = Z(\delta_x - \lambda_\ell f^\ell) + A_\ell f^\ell(x)$$

où $Z(\delta_x - \lambda_\ell f^\ell)$ est l'une (quelconque) des représentations stationnaires sur une boule S contenant le champ, et les A_ℓ sont soit des constantes inconnues, soit (ce qui revient strictement au même) des V.A. orthogonales à $Z(\delta_x - \lambda_\ell f^\ell)$. La covariance sous-jacente est donc de la forme :

$$\sigma(x-y) = K(x-y) + Q(x-y)$$

où Q est un polynome pair de degré $\leq 2k$ à coefficients inconnus.

Tant que l'on s'impose de ne manipuler que des combinaisons linéaires autorisées $\lambda \in \Lambda_k(S)$, les variances sont parfaitement connues, car $\int \lambda\ \sigma\ \lambda = \int \lambda\ K\ \lambda$. Le krigeage (universel) ne pose donc pas de problèmes. Par contre, si on veut estimer les A_ℓ (la dérive), les estimateurs optimaux eux-mêmes (et non seulement leur variance) dépendent du polynome Q. La notion de dérive ne prendra donc un sens que si l'on spécifie le polynome Q (ou au moins ses termes de degré > k), par exemple si l'on décide de choisir la représentation stationnaire interne sur S.

En lognormal, les choses se présenteront un peu différemment. Si Y(x) est, comme ci-dessus, une représentation stationnaire sur S flanquée d'une dérive déterministe (ou orthogonale) supposée de plus avoir une loi spatiale gaussienne, on s'intéresse maintenant à la F.A. $X(x) = \exp(Y(x))$. Ici, le premier problème est celui de former des estimateurs universels de la forme $B \exp(\lambda^\alpha Y_\alpha)$ vérifiant la condition :

$$BE(\exp \lambda^\alpha Y_\alpha) = E(\exp Y(x))$$

quels que soient les coefficients A_ℓ et le polynome Q. Or on trouve :

$$E(e^{\lambda^\alpha Y_\alpha}) = e^{\lambda^\alpha f_\alpha^\ell A_\ell + \frac{1}{2} \lambda^\alpha \lambda^\beta \sigma_{\alpha\beta}}$$

$$E(e^{Y(x)}) = e^{A_\ell f_x^\ell + \frac{1}{2}\sigma(0)}$$

La condition usuelle d'universalité :

$$\lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{\ell} = f_{x}^{\ell}$$

nous garantit bien $\lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{\ell} A_{\ell} = A_{\ell} f_{x}^{\ell}$, mais non pas que $\lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta}$ est indépendant de Q : en effet, Q(x-y) comporte des termes indéterminés jusqu'à l'ordre 2k, auxquels les conditions d'universalité ne s'appliquent plus. Désignons par f^{i}, $i \in I$ les monomes <u>jusqu'au degré 2k</u> de sorte que Q(x-y) se mette sous la forme :

$$Q(x-y) = Q_{ij} f^{i}(x) f^{j}(y)$$

(sommation sur les i, j tels que Degré f^{i} + Degré $f^{j} \leq 2k$). On aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} \sigma_{\alpha\beta} = \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} K_{\alpha\beta} + \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{i} \lambda^{\beta} f_{\beta}^{j} Q_{ij} \\ \\ \sigma(0) = Q_{ij} f_{x}^{i} f_{x}^{j} \end{array} \right.$$

Par conséquent, la manière la plus simple de construire un <u>estimateur lognormal sans biais consistera à imposer aux λ^{α} les conditions d'universalité jusqu'à l'ordre 2k</u>, soit

$$\text{(2-4)} \qquad \lambda^{\alpha} f_{\alpha}^{i} = f^{i}(x) \qquad (\text{degré } f^{i} \leq 2k)$$

Sous cette condition, on aura, en effet :

$$E\left(e^{\lambda^{\alpha} Y_{\alpha} - \frac{1}{2} \lambda^{\alpha} \lambda^{\beta} K_{\alpha\beta}}\right) = E\left(e^{Y(x)}\right)$$

quels que soient les A_{ℓ} et le polynome Q.

Mais, en fait, la condition (2-4) est la condition d'universalité pour une dérive de degré 2k, et s'applique donc aussi bien avec une dérive $A_i\ f^i(x)$. On est ainsi conduit au concept de fonction aléatoire lognormale localement stationnaire d'ordre 2k (FALLST d'ordre k) :

X(x) est une FALLST d'ordre k (sur S) si X(x) = exp (Y(x)) où Y(x) est une représentation localement stationnaire d'une F.A.I.-k gaussienne affectée d'une dérive polynomiale de degré 2k à coefficients inconnus.

Du fait que la dérive est d'ordre 2k, on aura rarement besoin en pratique d'utiliser des valeurs élevées de k. L'avantage de ce schéma est que - moyennant les conditions d'universalité à l'ordre 2k on n'aura jamais (pour le krigeage) à préciser le polynome Q. En ce qui concerne la dérive, on pourra former les estimateurs optimaux des A_ℓ (mais non calculer leurs variances), mais on ne pourra pas, à moins de spécifier Q, en déduire un estimateur sans biais de la dérive exp $(A_\ell\ f^\ell(x))$ de X(x) elle-même.

Pour terminer ce tour d'horizon, étudions maintenant quelques classes de covariances polynomiales.

3 - COVARIANCES POLYNOMIALES LOCALES DE DEGRE 3.

On sait que $\sum_\alpha C_\alpha |h|^\alpha$ est une covariance localement stationnaire sur le segment (-R,R) si et seulement si

$$\sum_\alpha C_\alpha\ B_{n\alpha}\ |h|^\alpha$$

$$B_{n\alpha} = \frac{\Gamma(1+\alpha)\ \Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\alpha+\frac{1+n}{2})}$$

est une covariance localement stationnaire sur la boule de rayon R dans $\mathbb{R}^n$. Nous étudierons donc uniquement les covariances polynomiales sur le <u>segment</u> (-R,R) de la droite euclidienne.

3-1 - Les covariances du second degré.

Une F.A.I.-0 admettant le variogramme linéaire $|h|$ peut aussi être considérée comme une F.A.I. d'ordre 1 et (comme telle) admettre des représentations localement stationnaires Y(x) avec des covariances de la forme $A - |h| + B\,h^2$. S'il en est ainsi, $Y'(x)$ est une mesure aléatoire qui admet (localement) la mesure-covariance $2\,\delta - 2B$. Or δ est évidemment une mesure de type positif donc une covariance, et sur (-R,R), la fonction constante $f(x) = 1/2\,R$ vérifie $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 1$, $\int f(x)\,\delta_y(dx) = 1/2\,R$ $(y \in (-R,R))$. Si $W(dx)$ est une mesure aléatoire stationnaire et δ sa covariance, elle admet sur (-R,R) la représentation interne stationnaire $W(dx) - \frac{dx}{2R}\int_{-R}^{R} W(dy)$, dont la covariance est $\delta - \frac{1}{2R}$. Par suite, $|h| - B\,h^2$ est un variogramme local sur (-R,R) si et seulement si $B \le \frac{1}{2R}$. B vérifiant cette condition, il reste à trouver les représentations stationnaires locales de la F.A.I.-0 (locale) dont le variogramme est

$$\gamma(h) = |h| - B\,h^2 \qquad (B \le \tfrac{1}{2R})$$

Or les mesures $(\delta_R + \delta_{-R})/2$ et $dx/2R$ vérifient :

$$\int \frac{\delta_R(dx) + \delta_{-R}(dx)}{2}\,\gamma(x-y) = R - B(R^2 + y^2)$$

$$\int_{-R}^{R} \gamma(x-y)\,\frac{dx}{2R} = \frac{R^2 + y^2}{2R} - B\left(\frac{R^2}{3} + y^2\right)$$

Par suite la mesure :

$$\lambda_o(dx) = B\,dx + (1 - 2\,BR)\,\frac{\delta_R + \delta_{-R}}{2}$$

vérifie

$$\int \lambda_o(dx)\ \gamma(x-y) = R - 2\,BR^2 + \frac{4}{3}\ B^2\,R^3$$

La représentation stationnaire interne est donc $A - |h| + B\,h^2$ avec $A = R - 2\,BR^2 + \frac{4}{3}\ B^2\,R^3$. La forme générale des covariances locales du second degré sur $(-R,R)$ est ainsi :

$$(3\text{-}1)\qquad \begin{cases} \sigma(h) = A - |h| + B\,h^2 \\ B \leq \frac{1}{2R} \\ A \geq R - 2\,BR^2 + \frac{4}{3}\ B^2\,R^3 \end{cases}$$

En particulier, pour la valeur extrémale $B = \frac{1}{2R}$, on trouve $A \geq R/3$. Ainsi $R/3 - |h| + h^2/2R$ est une covariance locale, ainsi que $(R - |h|)^2$.

3-2 - Les covariances $A - B\,h^2 + h^3/6$.

Prenons, maintenant, la F.A.I.-1 dont la covariance est $|h|^3/6$. Si $Y(x)$ est une représentation stationnaire, $\sigma(h) = A - B\,\frac{h^2}{2} + h^3/6$ sa covariance, alors la dérivée $Y'(x)$ est stationnaire et a la covariance $-\sigma''(h) = B - |h|$. Cette expression est effectivement une covariance locale sous la condition $B \geq R$.

Autrement dit, $\gamma(h) = B\,\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}$ est un variogramme local sur $(-R,R)$ si et seulement si $B \geq R$.

D'autre part, la mesure $\frac{1}{2}$ $(\delta_R + \delta_{-R})$ donne :

$$\int \frac{1}{2}\,[\delta_R(dx) + \delta_{-R}(dx)]\ \gamma(x-y) = B\,\frac{R^2 + y^2}{2} - \frac{R^3}{6} - \frac{R}{2}\ y^2$$

Mais Y(x) est dérivable, et nous avons également droit aux dérivées de Dirac (δ'_{x_o} est défini par $\int \delta'_{x_o}\varphi = -\varphi'(x_o)$). Avec $(\delta'_R - \delta'_{-R})$ on trouve :

$$\int (\delta'_R(dx) - \delta'_{-R}(dx))\ \gamma(x-y) = -\,2\,B\,R + R^2 + y^2$$

Par conséquent, l'opérateur :

$$\lambda_o = \frac{\delta_R + \delta_{-R}}{2} + \frac{R-B}{2}\ (\delta'_R - \delta'_{-R})$$

vérifie $\int \lambda_o = 1$ et :

$$\int \lambda_o(dx)\ \gamma(x-y) = \frac{R^2}{3} - BR^2 + B^2R$$

D'où l'expression générale de ces covariances dérivables de degré 3 :

$$(3\text{-}2)\qquad \begin{cases} \sigma(h) = A - B\,\dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{6} \\ \\ B \geq R \\ \\ A \geq \dfrac{R^3}{3} - B\,R^2 + B^2R \end{cases}$$

La représentation stationnaire interne correspond à B = R et $A = R^3/3 - R^3 + R^3 = R^3/3$, soit :

$$\sigma(h) = \frac{R^3}{3} - R\,\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}$$

On note, sur ces deux premiers exemples, que la représentation stationnaire interne est associée à la plus petite variance $\sigma(0)$ possible. (Il est vraisemblable que c'est là un résultat général).

3-3 - Les covariances de 3ème degré.

Passons maintenant à la F.A.I.-1 dont la covariance généralisée est :

$$K(h) = -\frac{1}{\alpha^2}|h| + \frac{1}{6}|h|^3 \qquad (\alpha \text{ donné})$$

et cherchons si elle admet des représentations localement stationnaires dont les covariances seront alors de la forme :

$$\sigma(h) = A - \frac{1}{\alpha^2}|h| - B\frac{h^2}{2} + \frac{1}{6}|h|^3$$

S'il existe une telle représentation $Y(x)$, sa dérivée $Y'(x)$ (qui est en fait une mesure aléatoire) admet la mesure covariance $B + \frac{2}{\alpha^2}\delta - |h|$. Partant donc du variogramme avec effet de pépite :

$$\gamma_1(h) = |h| - \frac{2}{\alpha^2}\delta$$

nous devons d'abord chercher les représentations stationnaires associées. Or la fonction ch αx vérifie

$$\int_{-R}^{R} \gamma_1(x-y) \text{ ch } \alpha x \, dx = \frac{2R}{\alpha} \text{ sh } \alpha R - \frac{2}{\alpha^2} \text{ ch } \alpha R$$

En normant à 1, on voit que l'opérateur

$$\lambda_0(dx) = \frac{\alpha}{2}\frac{\text{ch } \alpha x}{\text{sh } \alpha R}\, dx$$

vérifie :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-R}^{R} \lambda_o(dx)\ \gamma_1(x-y) = R - \frac{1}{\alpha}\ \frac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R} \\ \displaystyle\int \lambda_o = 1 \end{cases}$$

Par conséquent $B + \frac{2}{\alpha^2}\ \delta - |h|$ est une covariance sur $(-R,R)$ pourvu seulement que l'on ait :

$$B \geq R - \frac{1}{\alpha}\ \frac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R}$$

Sous la même condition $B\,\frac{h^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2}\,|h| - \frac{1}{6}\,|h|^3$ est un variogramme (local). Il reste à réitérer cette démarche :

Etant donné le variogramme :

$$\gamma(h) = B\,\frac{h^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2}\,|h| - \frac{1}{6}\,|h|^3 \qquad \left(B \geq R - \frac{1}{\alpha}\ \frac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R}\right)$$

trouver les représentations stationnaires (locales) de la F.A.I.-0 correspondante.

Avec la mesure $(\delta_R + \delta_{-R})/2$, on trouve :

$$\int \frac{\delta_R(dx) + \delta_{-R}(dx)}{2}\ \gamma(x-y) = \frac{B-R}{2}\,y^2 + \frac{BR^2}{2} + \frac{R}{\alpha^2} - \frac{R^3}{6}$$

Avec la fonction ch α x, on trouve

$$\int_{-R}^{R} \text{ch}\ \alpha\ x\ \gamma(x-y)dx = y^2\left(\frac{1}{\alpha^2}\ \text{ch}\ \alpha\ R + \frac{B-R}{\alpha}\ \text{sh}\ \alpha\ R\right)$$

$$+ \text{sh}\ \alpha\ R\left(\frac{BR^2}{\alpha} + \frac{2B}{\alpha^3}\ \frac{R^3}{3\alpha}\right) + \text{ch}\ \alpha\ R\left(\frac{R^2}{\alpha^2} - 2\,\frac{BR}{\alpha^2}\right)$$

Nous devons donc prendre une mesure λ_o de la forme

$$\lambda_o(dx) = (1-C)\,\frac{\delta_R + \delta_{-R}}{2} + C\,\frac{\alpha}{2}\ \frac{\text{ch}\ \alpha\ x}{\text{sh}\ \alpha\ R}$$

vérifiant $\int \lambda_0 = 1$, et choisir C de manière à éliminer le terme en y^2 dans l'expression $\int \lambda_0(dx)\ \gamma(x-y)$. Cela donne :

$$(1-C)\ \frac{B-R}{2} + \frac{C}{2}\ \left(\frac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\alpha\ \text{sh}\ \alpha\ R} + B - R\right) = 0$$

donc

$$C = - \frac{\alpha\ \text{sh}\ \alpha\ R}{\text{ch}\ \alpha\ R}\ (B - R)$$

Avec cette valeur de C, il vient :

$$\int \lambda_0(dx)\ \gamma(x-y) = \frac{R}{\alpha^2} + (B - R)(BR - \frac{R^2}{3}) + \frac{BR^2}{3} - \frac{1}{\alpha}\ \frac{\text{sh}\ \alpha\ R}{\text{ch}\ \alpha\ R}\ (B - R)^2$$

Ainsi, la formule générale des covariances stationnaires d'ordre 3 est :

$$(3\text{-}3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma(h) = A - \dfrac{1}{\alpha^2}\ |h| - B\ \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{1}{6}\ |h|^3 \\[2ex] B \geq R - \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R} \\[2ex] A \geq \dfrac{R}{\alpha^2} + \dfrac{R^3}{3} + R^2(B-R) + \left[R - \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{\text{sh}\ \alpha\ R}{\text{ch}\ \alpha\ R}\right]\ (B-R)^2 \end{array} \right.$$

En particulier, la représentation stationnaire interne correspond à

$$\left\{ \begin{array}{l} B = R - \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R} \\[2ex] A = \dfrac{R^3}{3} + \dfrac{R}{\alpha^2} - \dfrac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R}\left[\ \dfrac{1}{\alpha^3} + \dfrac{R^2}{\alpha} - \dfrac{R}{\alpha^2}\ \dfrac{\text{ch}\ \alpha\ R}{\text{sh}\ \alpha\ R}\ \right] \end{array} \right.$$

Ici encore, on peut vérifier que la représentation interne est associée à la variance minimale. En ce qui concerne la pente à l'origine du corrélogramme $\sigma(h)/\sigma(0)$, elle est égale à $1/A\ \alpha^2$, donc maximale pour A minimum, c'est-à-dire à nouveau pour la représentation stationnaire interne : il doit lui correspondre, du moins pour certaines valeurs de α, un assez fort effet de trou.

3-4 Les représentations périodiques.

Si nous prenons B = R dans (3-3) et pour A la plus petite valeur possible, nous obtenons la covariance :

$$\sigma(h) = \frac{1}{\alpha^2} (R - |h|) + \frac{R^3}{3} - \frac{h^2}{2} + \frac{1}{6} |h|^3$$

qui vérifie $\sigma(2R) = - \sigma(0)$, c'est-à-dire $Y_R + Y_{-R} = 0$ pour la représentation correspondante (la mesure λ_o est ici $\frac{1}{2} (\delta_R + \delta_{-R})$). On peut prolonger $\sigma(h)$ par une fonction continue périodique de période 4R en posant $\sigma(2R+x) = - \sigma(x) \quad (0 \leq x \leq 2R)$. Ce prolongement, que nous désignons encore par $\sigma(h)$, admet le développement de Fourier :

$$(3\text{-}4) \qquad \sigma(h) = 8 R \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha^2} + \frac{4R^2}{\pi^2 (2p+1)^2}\right] \frac{\cos\left[(2p+1)\pi h/L\right]}{\pi^2 (2p+1)^2} \qquad (L = 2R)$$

Cette covariance (périodique) est de type positif sur la droite toute entière, de sorte que la représentation localement stationnaire correspondante est la restriction à (-R,R) d'une F.A. stationnaire et périodique.

Sur la formule (3-4), il apparaît aue si l'on remplace $\sigma(h)$ par $- \sigma(h)$ et α^2 par $- \beta^2$, la nouvelle fonction :

$$\sigma(h) = 8 R \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\beta^2} - \frac{4R^2}{\pi^2 (2p+1)^2} \right] \frac{\cos (2p+1)\pi h/L}{\pi^2 (2p+1)^2}$$

a tous ses coefficients de Fourier positifs, pourvu que :

$$\frac{1}{\beta^2} \geq \frac{4\,R^2}{\pi^2}\ , \text{ i.e. } \qquad \beta \leq \frac{\pi}{2R}$$

C'est donc encore une covariance périodique. Sa restriction à (-R,R), soit :

$$\sigma(h) = \frac{R}{\beta^2} - \frac{R^3}{3} - \frac{h}{\beta^2} + R\,\frac{h^2}{2} - \frac{1}{6}\ h^3$$

est donc une <u>covariance locale</u>, associée à la F.A.I.-1 <u>locale</u>.de covariance généralisée $-\frac{h}{\beta^2} - \frac{1}{6}\,h^3$.

A cette F.A.I. locale, on peut appliquer les résultats précédents sous réserve de remplacer α par $i\alpha$ et de changer les signes.

Sous réserve, donc, d'avoir :

(3-5) $$\alpha \leq \frac{\pi}{2R}$$

on obtient une nouvelle famille de covariances locales du $3^{\text{ème}}$ degré, avec un terme en $- h^3/6$ au lieu de $h^3/6$:

(3-6) $$\begin{cases} \sigma(h) = A - \dfrac{1}{\alpha^2}\ |h| - \beta\ \dfrac{h^2}{2} - \dfrac{1}{6}\ |h|^3 \\[2ex] B \geq \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{\cos\,\alpha R}{\sin\,\alpha R} - R \\[2ex] A \geq \dfrac{R}{\alpha^2} - \dfrac{R^3}{3} + R^2(B+R) - \left(R - \dfrac{1}{\alpha}\,\dfrac{\sin\,\alpha R}{\cos\,\alpha R}\right)(B+R)^2 \end{cases}$$

En particulier, la représentation interne correspond à

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{\cos\,\alpha R}{\sin\,\alpha R} - R \\[2ex] A = \dfrac{R}{\alpha^2} - \dfrac{R^3}{3} + \dfrac{1}{\alpha}\ \dfrac{\cos\,\alpha R}{\sin\,\alpha R}\ \left[R^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} - R\,\dfrac{\cos\,\alpha R}{\alpha\,\sin\,\alpha R} \right] \end{cases}$$

On note que, pour la valeur critique $\alpha = \pi/2R$, la représentation interne coïncide avec la représentation périodique dont nous sommes partis (ceci indique sans doute que $\alpha = \pi/2R$ est la valeur extrémale, au-dela de laquelle ces fonctions ne sont plus des covariances). La pente à l'origine du corrélogramme est alors particulièrement forte $(4/R)\ (1/(4 - \pi^2/3))$.