Fontainebleau N-412

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 131

CALAGE D'UN RESEAU DE POINTS

G. MATHERON Mai 1975

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 131

CALAGE D'UN RESEAU DE POINTS

Le problème que j'examine ici est le suivant : on se donne une fonction aléatoire stationnaire $Z(x)$ dans $\mathbb{R}^n$, dont on suppose la loi spatiale connue. On fait des mesures aux points x_α, $\alpha = 1,2,\dots N$, de sorte que les valeurs numériques $Z(x_\alpha) = Z_\alpha$ de la réalisation soient connues exactement. Par contre, la localisation du point x_α est entachée d'une erreur u_α, de sorte que la valeur numérique Z_α est attribuée non pas au point exact x_α (inconnu) mais au point enregistré $\xi_\alpha = x_\alpha + u_\alpha$. Ces erreurs u_α sur la localisation sont supposées petites par rapport à l'échelle de variation de $Z(x)$, et sont assimilées à des vecteurs aléatoires (non nécessairement indépendants) admettant une loi symétrique (par exemple gaussienne centrée) de densité $p(u_\alpha)$ connue. Le problèem consiste à former un bon estimateur des vraies localisations x_α (à partir des valeurs connues des ξ_α et des Z_α). Nous allons proposer deux méthodes, montrer qu'elles conduisent aux mêmes formules d'approximation, et développer les calculs dans le cas simple où la loi spatiale de $Z(x)$ est gaussienne.

1 - METHODE DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE

Désignons par $f(Z_\alpha;x_\alpha)$ la densité des probabilités de la variable vectorielle à N composantes $Z_\alpha = Z(x_\alpha)$. Les points x_α, définis par leurs coordonnées x_α^i dans $\mathbb{R}^n$, apparaissent comme un ensemble de n N paramètres à estimer. De même, les n N coordonnées ξ_α^i des points aléatoires ξ_α constituent n N variables admettant la densité $p(\xi_\alpha - x_\alpha)$. L'ensemble des variables Z_α et ξ_α^i (au nombre de $(n+1)N$) admet donc la densité :

$$f(Z_\alpha \; ; \; x_\alpha) \; p(\xi_\alpha - x_\alpha) = f(Z_\alpha \; ; \; \xi_\alpha - u_\alpha) \; p(u_\alpha)$$

Prenons comme paramètres les u_α^i (de sorte que x_α sera $x_\alpha = \xi_\alpha - u_\alpha$). La méthode du maximum de vraisemblance consiste à prendre comme estimateurs les valeurs des u_α^i qui maximisent la densité ci-dessus pour les valeurs numériques données des Z_α et des ξ_α. Cela conduit au système suivant :

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u_\alpha^i} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha^i} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots N \; ; \; i = 1, \ldots n)$$

D'après l'hypothèse faite sur les u_α, on peut écrire

$$f(Z_\alpha ; \xi_\alpha - u_\alpha) = f(Z_\alpha ; \xi_\alpha) - \sum_{\alpha, i} u_\alpha^i \frac{\partial f(Z_\alpha ; \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha^i}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial u_\alpha^i} = \frac{\partial f(Z_\alpha ; \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha^i}$$

et le maximum de vraisemblance donne :

$$(1) \qquad \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial u_\alpha^i} = \frac{1}{f} \frac{\partial f(Z_\alpha ; \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha^i}$$

Supposons les u_α^i gaussiens avec :

$$E(u^i_\alpha) = 0 \qquad E(u^i_\alpha\, u^j_\beta) = S^{ij}_{\alpha\beta}$$

Si $R^{\alpha\beta}_{ij}$ est la matrice inverse de $S^{ij}_{\alpha\beta}$, on a :

$$\frac{1}{p}\ \frac{\partial\, p}{\partial\, u^i_\alpha} = - R^{\alpha\beta}_{ij}\, u^j_\beta$$

En écrivant $\partial^\alpha_i f$ au lieu de $\partial f/\partial\, \xi^i_\alpha$, le système (1) prend la forme :

$$R^{\alpha\beta}_{ij}\, u^j_\beta = - \frac{1}{f}\, \partial^\alpha_i\, f$$

Les estimateurs $\hat{u}^j_\beta$ cherchés s'écrivent donc :

(2) $$\hat{u}^j_\beta = - \frac{1}{f}\ S^{ij}_{\alpha\beta}\ \partial^\alpha_i\, f$$

Nous expliciterons plus loin le second membre dans le cas particulier où la loi f est gaussienne.

Dans bien des applications, les vecteurs u_α sont indépendants les uns des autres, et sont gaussiens isotropes de sorte que u^i_α et u^j_α sont indépendants pour $i \neq j$. Dans ce cas $S^{ij}_{\alpha\beta} = 0$, sauf si $i = j$ et $\alpha = \beta$, et $S^{ii}_{\alpha\alpha} = S^2$. L'équation (2) prend alors la forme très simple :

(2') $$\hat{u}^j_\beta = - S^2\ \frac{1}{f}\ \frac{\partial\, f}{\partial\, \xi^j_\beta}$$

2 - METHODE DES x_α ALEATOIRES

Pour obtenir l'expression (2) de l'estimateur, nous avons dû supposer que les vecteurs u_α sont gaussiens. On peut éviter cette hypothèse en renversant les rôles des points ξ_α et x_α. Ci-dessus x_α était fixe (mais inconnu) et ξ_α un vecteur aléatoire dont on connaissait numériquement la réalisation. Maintenant, au contraire, nous considérons ξ_α comme fixe, et $x_\alpha = \xi_\alpha - u_\alpha$ comme un vecteur aléatoire d'espérance ξ_α connue, ainsi que la matrice $S^{ij}_{\alpha\beta}$ des covariances correspondantes. Les Z_α et les u_α admettent la densité a priori

$$f(Z_\alpha \; ; \; \xi_\alpha - u_\alpha) \; p(u_\alpha)$$

de sorte qu'à Z_α fixés, les u_α ont la densité conditionnelle

$$\frac{f(Z_\alpha ; \; \xi_\alpha - u_\alpha) \; p(u_\alpha)}{\int f(Z_\alpha ; \xi_\alpha - u_\alpha) \; p(u_\alpha) \; d \; u_\alpha}$$

Utilisons à nouveau le développement limité

$$f(Z_\alpha ; \; \xi_\alpha - u_\alpha) = f(Z_\alpha ; \; \xi_\alpha) - u^i_\alpha \, \partial^\alpha_i f + \frac{1}{2} u^i_\alpha \, u^j_\beta \, \partial^\alpha_i \, \partial^\beta_j f$$

Comme $E(u^i_\alpha) = 0$, ceci donne d'abord :

$$\int f(Z_\alpha ; \; \xi_\alpha - u_\alpha) \; p(u_\alpha) d \; u_\alpha = f(Z_\alpha ; \; \xi_\alpha) + \frac{1}{2} \; S^{ij}_{\alpha\beta} \; \partial^{\alpha\beta}_{ij} \; f$$

D'où l'expression approchée de la densité des u_α conditionnée par les Z_α :

$$p(u_\alpha | Z_\alpha) = p(u_\alpha)\ [1 - \frac{1}{2f}\ S^{ij}_{\alpha\beta}\ \partial^{\alpha\beta}_{ij}\ f]\ [1 - \frac{u^i_\alpha\ \partial^\alpha_i\ f}{f} +$$

$$+ \frac{1}{2}\ u^i_\alpha\ u^j_\beta\ \frac{\partial^{\alpha\beta}_{ij}\ f}{f}\ ]$$

soit, à l'ordre 2 :

$$(3)\quad p(u_\alpha | Z_\alpha) = p(u_\alpha)\ [1 - \frac{1}{f}\ u^i_\alpha\ \partial^\alpha_i\ f + \frac{1}{2f}\ (u^i_\alpha\ u^j_\beta - S^{ij}_{\alpha\beta})\ \partial^{\alpha\beta}_{ij}\ f]$$

De cette densité conditionnelle, nous pouvons déduire l'espérance et les covariances des u^i_α (au second ordre pour l'espérance et au 4$^{\text{ème}}$ pour les covariances).

$$E(u^j_\beta | Z_1, \ldots) = -\frac{1}{f}\ S^{ij}_{\alpha\beta}\ \partial^\alpha_i\ f$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} E(u^j_\gamma\ u^{j'}_{\gamma'} | Z_1, \ldots) = S^{jj'}_{\gamma\gamma'} + \frac{1}{2f}\ \left(E[u^i_\alpha\ u^{i'}_{\alpha'}\ u^{j'}_\gamma\ u^j_{\gamma'}] - S^{ii'}_{\alpha\alpha'}\ S^{jj'}_{\gamma\gamma'}\right) \\ \qquad\qquad \times\ \partial^{\alpha\alpha'}_{ii'}\ f \end{array} \right.$$

La première expression coïncide avec l'estimateur (2). La seconde nous montre qu'à l'ordre 2 les covariances ne sont pas modifiées : ceci est cohérent avec les hypothèses d'approximation faites ci-dessus, qui impliquent que l'on puisse négliger les termes en $u^2\ \partial^2\ f$.

3 - CALCUL EFFECTIF DANS LE CAS GAUSSIEN

Nous supposons maintenant que les Z_α sont gaussiennes, avec des espérances m_α et des covariances $\sigma_{\alpha\beta}$. Dans les formules (2) ou (4), la densité $f = f(Z_\alpha;\ \xi_\alpha)$ est prise aux points enregistrés ξ_α

(et non aux vrais points inconnus x_α. Par suite, ici $m_\alpha = m(\xi_\alpha)$ est l'espérance de $Z(\xi_\alpha)$, et de même $\sigma_{\alpha\beta} = \sigma(\xi_\alpha, \xi_\beta)$ désigne la covariance de $Z(\xi_\alpha)$ et $Z(\xi_\beta)$ (la covariance de $Z(x_\alpha) = Z(\xi_\alpha + u_\alpha)$ et de $Z(x_\beta)$ serait :

$$\iint \sigma(\xi_\alpha + u_\alpha ; \xi_\beta + u_\beta)\ p(u_\alpha)\ p(u_\beta)\ du_\alpha\ du_\beta$$

puisque les points x_α sont considérés comme aléatoires).

Nous désignerons par $B = (B^{\alpha\beta})$ la matrice inverse σ^{-1}, de sorte que l'on a :

$$\log f = -\frac{1}{2} \log (2\pi \text{ Det } \sigma) - \frac{1}{2} B^{\alpha\beta} (Z_\alpha - m_\alpha)(Z_\beta - m_\beta)$$

D'après (2) ou (4), l'estimateur $\hat{u}_\alpha$ s'écrit donc :

$$(5) \quad \hat{u}^j_\beta = \frac{1}{2} S^{ij}_{\alpha\beta} \left[\partial^\alpha_i \log (\text{Det } \sigma) + (\partial^\alpha_i B^{\gamma\gamma'}) (Z_\gamma - m_\gamma)(Z_{\gamma'} - m_{\gamma'}) \right]$$

Le problème consiste donc à calculer les dérivées :

$$\begin{cases} \partial^\alpha_i \log \text{Det } \sigma = \dfrac{\partial}{\partial \xi^i_\alpha} \log \text{Det } \sigma \\ \\ \partial^\alpha_i B^{\gamma\gamma'} = \dfrac{\partial}{\partial \xi^i_\alpha} B^{\gamma\gamma'} \end{cases}$$

Partons de $B^{\gamma\gamma'} \sigma_{\gamma'\eta} = \delta^\gamma_\eta$ et dérivons. Cela donne

$$\sigma_{\gamma'\eta}\ \partial^\alpha_i B^{\gamma\gamma'} + B^{\gamma\gamma'}\ \partial^\alpha_i \sigma_{\gamma'\eta} = 0$$

Par suite

$$(6) \qquad \partial_i^\alpha B^{\gamma\gamma'} = - B^{\gamma\varepsilon} B^{\gamma'\eta} \partial_i^\alpha \sigma_{\varepsilon\eta}$$

Nous verrons un peu plus loin comment expliciter le calcul de ce terme. Passons à la dérivée de log Det σ. Si $A^{\alpha\beta}$ est le mineur de $\sigma_{\alpha\beta}$ dans Det σ, on sait que l'on a

$$\partial \operatorname{Det} \sigma = A^{\alpha\beta} \partial \sigma_{\alpha\beta}$$

Comme $A^{\alpha\beta} = \operatorname{Det} \sigma \, B^{\alpha\beta}$, on trouve donc simplement :

$$\partial \log \operatorname{Det} \sigma = B^{\alpha\beta} \partial \sigma_{\alpha\beta}$$

soit explicitement

$$(7) \qquad \partial_i^\alpha \log \operatorname{Det} \sigma = B^{\gamma\gamma'} \partial_i^\alpha \sigma_{\gamma\gamma'}$$

En reportant ceci dans (5), on obtient l'expression cherchée :

$$(8) \quad a_\beta^j = \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}^{ij} \left[B^{\gamma\gamma'} \partial_i^\alpha \sigma_{\gamma\gamma'} - B^{\gamma\varepsilon} B^{\gamma'\eta} (Z_\gamma - m_\gamma)(Z_{\gamma'} - m_{\gamma'}) \partial_i^\alpha \sigma_{\varepsilon\eta} \right]$$

En prenant l'espérance en $Z_\gamma \, Z_{\gamma'}$, on vérifie que l'on a bien $E(a_\beta^j) = 0$.

Remarquons que (8) contient des sommations surabondantes. En effet, considérons la dérivée :

$$\partial_i^\alpha \sigma_{\gamma\gamma'} = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^i} \sigma(\xi_\gamma ; \xi_{\gamma'})$$

Elle est nulle si γ et γ' sont tous deux différents de α, car alors $\sigma_{\gamma\gamma'}$ ne dépend pas de la variable ξ_α. Dans le cas stationnaire, elle est nulle également pour $\gamma = \gamma' = \alpha$, car $\sigma_{\alpha\alpha} = C^{ste}$.

Ainsi, en explicitant les signes de sommation :

$$\sum_{\gamma,\gamma'} B^{\gamma\gamma'} \partial_i^\alpha \sigma_{\gamma\gamma'} = 2 \sum_\gamma B^{\alpha\gamma} \partial_i^\alpha \sigma_{\alpha\gamma} \tag{9}$$

(sans sommation en α au second membre). De même, toujours sans sommation en α :

$$B^{\gamma\varepsilon} B^{\gamma'\eta} \partial_i^\alpha \sigma_{\varepsilon\eta} = B^{\gamma\alpha} B^{\gamma'\eta} \partial_i^\alpha \sigma_{\alpha\eta} + B^{\gamma\varepsilon} B^{\gamma'\alpha} \partial_i^\alpha \sigma_{\varepsilon\alpha}$$

Par suite, le second terme de (8) s'écrit (toujours avec α muet)

$$\left\{\begin{array}{l} B^{\gamma\varepsilon} B^{\gamma'\eta} \partial_i^\alpha \sigma_{\varepsilon\eta} (Z_\gamma - m_\gamma)(Z_{\gamma'} - m_{\gamma'}) = \\ \\ \qquad 2\, B^{\gamma\alpha} (Z_\gamma - m_\gamma)\, B^{\gamma'\eta} \partial_i^\alpha \sigma_{\alpha\eta} (Z_{\gamma'} - m_{\gamma'}) \end{array}\right. \tag{9'}$$

Interpretons l'expression (9'). Supposons d'abord que la FA stationnaire $Z(x)$ est dérivable et proposons-nous de kriger le gradient $\partial_i Z(x)$ au point ξ_α. L'estimateur :

$$\partial_i Z^*(\xi_\alpha) = \lambda_i^\beta (Z_\beta - m_\beta) \tag{10}$$

est défini par la solution du système :

$$\lambda_{i,\alpha}^\beta \sigma_{\beta\gamma} = \partial_i^\alpha \sigma_{\alpha\gamma} \tag{10'}$$

(α muet), soit

$$\lambda_{i\alpha}^\beta = B^{\beta\gamma} \partial_i^\alpha \sigma_{\alpha\gamma}$$

et donc :

$$\partial_i \; Z^*(\xi_\alpha) = B^{\beta\gamma} \; \partial_i^\alpha \; \sigma_{\alpha\gamma} \; (Z_\beta - m_\gamma)$$

d'où l'interprétation des termes de (9') :

$$B^{\gamma'\eta} \; \partial_i^\alpha \; \sigma_{\alpha\eta} \; (Z_{\gamma'} - m_{\gamma'}) = \partial_i \; Z^*(\xi_\alpha)$$

et de même pour (9) :

$$B^{\alpha\gamma} \; \partial_i^\alpha \; \sigma_{\alpha\gamma} = \lambda_{i,\alpha}^\alpha$$

(toujours α muet) : c'est le coefficient de $(Z_\alpha - m_\alpha)$ dans l'expression de $\partial_i \; Z^*(\xi_\alpha)$.

Si $Z(\xi)$ n'est pas dérivable, on peut résoudre le système (10') à condition que la covariance $\sigma(h)$ soit dérivable en dehors de $h = 0$. En $h = 0$, la dérivée n'existe peut-être pas, mais on a toujours

$$\partial_i^\alpha \; \sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\partial}{\partial \; \xi_\alpha^i} \; \sigma(\xi_\alpha^i - \xi_\alpha^i) = 0$$

de sorte que le système (10') est bien défini. Conventionnellement, nous désignerons toujours par $\partial_i \; Z^*(\xi_\alpha)$ l'expression (10), bien qu'il ne s'agisse plus, à proprement parler, du krigeage d'un gradient (puisque le gradient n'existe pas).

On peut alors exprimer (8) à l'aide de $\partial_i \; Z^*(\xi_\alpha)$ et des coefficients $\lambda_{i,\alpha}^\beta$ de ce krigeage. En écrivant α_o au lieu de α pour bien rappeler qu'il n'y a pas de sommation sur cet indice, on trouve, en effet :

$$
(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} B^{\gamma\gamma'} \, \partial_i^{\alpha_o} \, \sigma_{\gamma\gamma'} - B^{\gamma\varepsilon} \, B^{\gamma'\eta} \, (Z_\gamma - m_\gamma)(Z_{\gamma'} - m_{\gamma'}) \, \partial_i^{\alpha_o} \, \sigma_{\varepsilon\eta} = \\ \\ 2 \, \lambda_{i,\alpha_o}^{\alpha_o} - 2 \, B^{\gamma\alpha_o} \, (Z_\gamma - m_\gamma) \, \partial_i \, Z^*(\xi_{\alpha_o}) \end{array} \right.
$$

Dans cette expression, $\lambda_{i,\alpha_o}^{\alpha_o}$ et $\partial_i \, Z^*(\xi_{\alpha_o})$ s'obtiennent en résolvant le krigeage (10') du gradient, et le terme

$$
b^{\alpha_o} = B^{\gamma\alpha_o} \, (Z_\gamma - m_\gamma)
$$

est solution de

$$
\sigma_{\gamma\alpha} \, b^\alpha = Z_\gamma - m_\gamma
$$

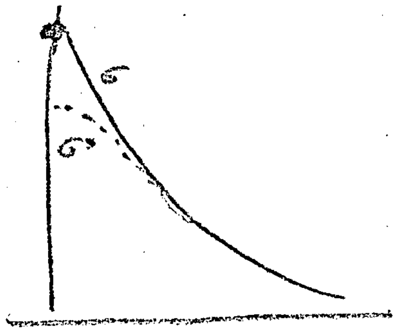
c'est-à-dire encore un système du même type.

Le calcul effectif de (8) est donc parfaitement réalisable. En principe, on devrait travailler en voisinage unique. Mais, en pratique, on ne commettra sans doute pas une grosse erreur en travaillant, comme d'habitude, avec des voisinages glissants

<u>REMARQUE</u> - La mise en oeuvre de cette méthode suppose que l'on connaisse la vraie covariance $\sigma(h)$ de la FA stationnaire. Pour $h = 0$, la variance des Z_α expérimentaux est un bon estimateur de $\sigma(0) = \sigma^2$. Mais, pour $h \neq 0$, compte tenu des erreurs de localisation, le terme expérimental associé aux couples $(\xi_\alpha, \xi_\beta = \xi_\alpha + h)$ estime non $\sigma(h)$ lui-même, mais

$$
\sigma^*(h) = \iint \sigma(h + u_\alpha - u_\beta) \, p(u_\alpha, u_\beta) \, du_\alpha \, du_\beta
$$

Pour h grand vis-à-vis de l'écart-type des u_α, cette expression diffère peu de $\sigma(h)$.



Expérimentalement, on observera donc un effet de pépite apparent : en h = 0, $\sigma^*(o)$ et $\sigma(o)$ coïncident (la variance est correcte). Mais dès que h s'écarte de 0, $\sigma^*(h)$ est nettement plus petit que $\sigma(h)$ - l'écart s'atténuant d'ailleurs vite pour h croissant. Du point de vue pratique, on doit donc pouvoir reconstituer $\sigma(h)$ sans trop de peine. De plus, s'il existe des profils le long desquels les u_α successifs sont très correllés, ces profils donneront directement des estimations à peine biaisées de la vraie covariance.

CONCLUSION

Dans un problème pratique (je pense à la cartographie marine) la méthode ci-dessus peut présenter des avantages dans certains cas (mais pas dans tous). Supposons, en effet, que nous voulions estimer Z(x) en $x \neq x_\alpha$. L'estimateur de moindre variance est alors :

$$Z^*(x) = \lambda^\alpha Z_\alpha$$

avec :

$$\lambda^\alpha \sigma^*_{\alpha\beta} = \sigma^*_{x\beta}$$

Compte tenu de l'imprécision sur la localisation des points expérimentaux, la matrice du système et son second membre, différents de $\sigma_{\alpha\beta}$ et $\sigma_{x\beta}$, sont :

$$\sigma^*_{\alpha\beta} = \iint \sigma(\xi_\alpha - \xi_\beta + u_\alpha - u_\beta)\ p(u_\alpha, u_\beta)\ du_\alpha\ du_\beta$$

(pour $\alpha \neq \beta$, mais $\sigma^*_{\alpha\alpha} = \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma^2$) et

$$\sigma^*_{x\alpha} = \int \sigma(\xi_\alpha + u_\alpha - x)\ p(u_\alpha)\ du_\alpha$$

Ce krigeage - qui correspond à l'optimum selon le critère de la variance minimale - ne passe évidemment pas par Z_α au point ξ_α, et fournit, au voisinage des points expérimentaux, une version très lissée de la réalité. On risque ainsi de perdre certains détails topographiques dont les Z_α indiquent l'existence (sans permettre de les localiser exactement, à cause de l'erreur commise sur la position vraie des x_α). Ce n'est pas gênant pour une carte à petite échelle, mais peut être dommage à grande échelle.

D'où une seconde possibilité - non optimale, du point de vue du critère de la variance minimale, mais permettant de conserver certains détails fins que perdrait la 1ère méthode, étant entendu que la localisation précise de ces détails fins restera entachée de la même imprécision que les x_α aux-mêmes. Cette méthode consisterait à corriger les ξ_α enregistrés à l'aide des estimations $\hat{u}_\alpha$ ci-dessus, c'est-à-dire à attribuer la mesure Z_α au point $x_\alpha = \xi_\alpha - \hat{u}_\alpha$, et à kriger ensuite comme si ces positions étaient les positions réelles (donc, avec $\sigma_{\alpha\beta}$ et non avec $\sigma^*_{\alpha\beta}$).

Loin des points expérimentaux, les deux méthodes doivent conduire à la même carte. Au voisinage d'un point x_α, par contre, la première donne une image correcte en position mais trop lisse. La seconde conserve certains détails topographiques que la première laisse échapper, mais en contrepartie la localisation de ces détails reste entachée d'erreur.

- ANNEXE 1 -

CAS DE DEUX POINTS SUR UNE DROITE

En vue de dégager des ordres de grandeur, considérons le cas simple de deux points x_1 et x_2 sur la droite réelle. Désignons par $\rho = \rho(h)$ le coefficient de corrélation entre deux points distants de h, et par S_{ij} la matrice des covariances des erreurs de localisation u_1 et u_2. La densité f est ici

$$\log f = - \log (2\pi\ \sigma^2) - \frac{1}{2} \log(1-\rho^2) - \frac{1}{2\ \sigma^2(1-\rho^2)}\ (Z_1^2+Z_2^2 - 2\rho\ Z_1 Z_2)$$

Pour fixer les idées, prenons $x_1 < x_2$, soit $x_2 = x_1+h$ avec $h > 0$, de sorte que

$$\rho'(h) = \frac{\partial\rho}{\partial\ x_2} = -\frac{\partial\rho}{\partial\ x_1}$$

et par suite $\dfrac{\partial \log f}{\partial\ x_1} = - \dfrac{\partial \log f}{\partial\ x_2} = - \rho'(h)\ \dfrac{\partial \log f}{\partial\ \rho}$

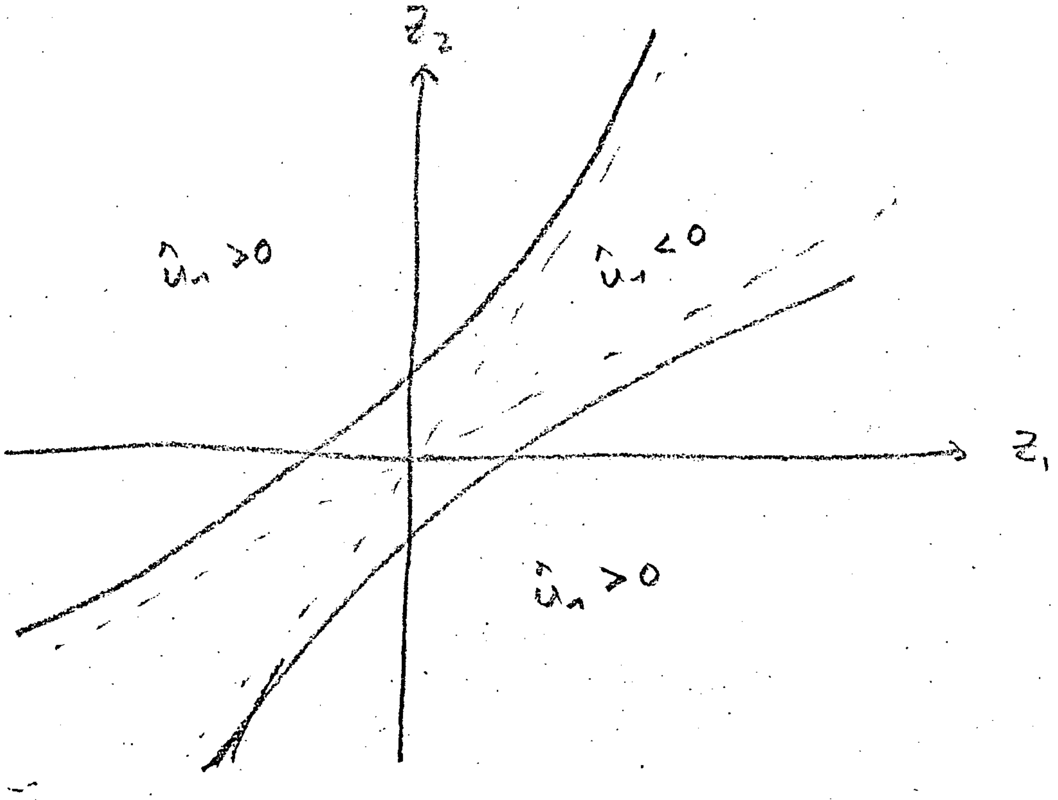
On trouve sans difficulté :

$$\frac{\partial \log f}{\partial\ \rho} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \left[\rho\ \sigma^2 + \frac{(1+\rho^2)\ Z_1 Z_2 - \rho(Z_1^2 + Z_2^2)}{1 - \rho^2} \right]$$

et, avec $S_{11} = S_{22} = S^2$, $S_{12} = r\ S^2$:

$$\hat{u}_1 = - \hat{u}_2 = S^2(1-r)\ \frac{\partial \log f}{\partial\ \rho}\ \ \rho'(h)$$

Avec $\rho'(h) > 0$, la situation est la suivante dans le plan $Z - Z_2$:



On a $\hat{u}_1 < 0$, c'est-à-dire $x_1 = \xi_1 - \hat{u}_1 > \xi_1$ lorsque Z_1 et Z_2 sont relativement proches l'un de l'autre, et les deux points expérimentaux doivent alors être rapprochés. Au contraire, on les éloigne lorsque Z_1 et Z_2 sont très différents. (Dans le cas limite $r = 1$, on a $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = 0$, aucune correction n'est possible. Dans tous les autres cas, le signe de r ne joue aucun rôle, et l'influence de la corrélation entre u_1 et u_2 se répercute par le facteur multiplicatif $(1-r)$ toujours > 0. Pour $r = -1$, i.e. $u_1 = -u_2$, la correction est le double de celle du cas $r = 0$, mais de même signe).

Pour dégager des ordres de grandeur numérique, prenons $\rho(h) = 1 - h/a$ (avec $h \leq a$) , $r = 1$ et posons $Z_1 = \sigma\,\zeta_1$, $Z_2 = \sigma\,\zeta_2$, $h/a = \eta$. On trouve alors :

$$(12) \qquad \mathfrak{a}_1 = -\,\mathfrak{a}_2 = \frac{S^2}{2a\;\eta(1-\eta/2)}\left[(1-\eta)\left[1 - \frac{(\zeta_1-\zeta_2)^2}{2\;\eta(1-\frac{\eta}{2})}\right] + \frac{\eta}{2-\eta}\,\zeta_1\zeta_2\right]$$

Voici les valeurs numériques de $\mathfrak{a}_1$ exprimées (en unité S^2/a) dans quelques cas typiques :

	$\rho = 0,9$ ($\eta = 0,1$)	$\rho = 0.75$ ($\eta = 0.25$)	$\rho = 0,5$ ($\eta = 0,5$)	$\rho = 0$ ($\eta = 1$)
$Z_1 = 0$ $Z_2 = 0$	- 4,70	- 1.13	- 0.66	0
$Z_1 = \sigma$ $Z_2 = \sigma$	- 5,2	- 1,37	- 1,12	- 1
$Z_1 = 2\sigma$ $Z_2 = 2\sigma$	- 6,6	- 1,99	- 2,9	- 4
$Z_1 = \sigma$ $Z_2 = -\sigma$	94,8	+ 5,4	+ 2,3	+ 1
$Z_1 = 2\sigma$ $Z_2 = 2\sigma$	394	+25,6	+10,7	+ 4

Comme ordre de grandeur, on peut supposer par exemple $S/a = 1/10$, soit $S^2/a = a/100$, de sorte que les valeurs du tableau représentent des % de la portée a. Pour $\rho = 0,9$, on observe une valeur forte (395%) qui fait soupçonner que l'on a dépassé le domaine de validité de ce mode de calcul approché. Par contre, pour $\rho = 0,5$ et $\rho = 0$, les valeurs sont très raisonnables.

Pour $\eta = h/a$ très petit, la formule approchée (12) se réduirait à :

$$\hat{u}_1 = - \frac{S^2}{2\ a} \left[\frac{1}{\eta} - \frac{(\zeta_1-\zeta_2)^2}{2\ \eta^2} \right]$$

La formule exacte (que l'on déduit du maximum de vraisemblance) serait :

$$\hat{u}_1 = \frac{S^2}{a} \frac{\partial}{\partial \rho} \log f(Z_1, Z_2\ ;\ \rho(h + 2\ \hat{u}_1))$$

On l'obtient en remplaçant $h = \xi_2-\xi_1$ par $\xi_2-\xi_1 + u_2-u_1 = h + 2u_1$ au second membre de l'équation du maximum de vraisemblance. Comme S/a est petit, $\hat{u}_1/a$ est petit, mais peut être du même ordre de grandeur que η. D'où la relation meilleure :

$$\hat{u}_1 = - \frac{S^2}{2a} \left[\frac{1}{\eta + 2\frac{\hat{u}_1}{a}} - \frac{(\zeta_1-\zeta_2)^2}{2(\eta + 2\frac{\hat{u}_1}{a})^2} \right]$$

Pour $\zeta_1-\zeta_2$ de l'ordre de quelques unités et η petit ($\leq 1/10$) le terme en $1/(\eta + 2\ u_1/a)$ est négligeable, η est petit devant $2\ u_1/a$, de sorte qu'il reste

$$\hat{u}_1 = \frac{S^2}{16\ u_1^2}\ a(\zeta_1-\zeta_2)^2\ ,\ \text{soit}\ \hat{u}_1 = \left(\frac{S^2\ a}{16}\right)^{1/3} = a \left(\frac{S^2}{16\ a^2}\right)^{1/3} (\zeta_1-\zeta_2)$$

pour la formule exacte - valeur finie - contre $\hat{u}_1 = \frac{S^2}{4a} \frac{(\zeta_1-\zeta_2)^2}{\eta^2}$ (qui tend vers $+\infty$ si $\eta \to 0$) pour la formule approchée. Avec $S = a/10$, cette limite supérieure absolue serait

$$\hat{u}_1 = a \left(\frac{1}{1600}\right)^{1/3} (\zeta_1-\zeta_2)^2 = \frac{9,5}{100}\ (\zeta_1-\zeta_2)^2\ a$$

Ainsi, pour $\rho = 0,9$, $\eta = 0,1$, $\zeta_1 = -\zeta_2 = 2$ on trouve $\frac{150}{100}$ a au lieu de $\frac{395}{100}$ a avec la formule approchée.

En comparant ces deux valeurs asymptotiques :

$$\left(\frac{S^2\ a}{16}\right)^{1/3} \qquad \text{et} \qquad \frac{S^2}{4\ a\ \eta^2}$$

on conclut que la formulation approxhée doit être valable tant que la premier coefficient n'est pas trop petit vis-à-vis du second. La condition $S^2/4\ a\ \eta^2 \leq \frac{1}{2}\ (S^2\ a/16)^{1/3}$ (par exemple) donnerait :

$$\eta \geq 1,1\ \left(\frac{S}{a}\right)^{2/3}$$

Soit $\eta \geq 0,24$ pour $S/a = 1/10$: les formules approchées seraient donc utilisables pourvu que la distance entre points expérimentaux ne soit pas inférieure au quart de la portée.

- ANNEXE 2 -

CAS D'UNE FAI-k

Dans le cas non stationnaire, le problème précédent devient beaucoup plus complexe, et on ne peut l'aborder dans sa généralité. Nous supposerons essentiellement que Z(x) est une représentation d'une FAI-k sans dérive dont la covariance généralisée K(h) est connue. Deux problèmes se présentent :

a) Lorsqu'il n'y a pas d'erreur de localisation, comment choisir la représentation particulière à utiliser?

b) Comment se transpose le problème lorsqu'il y a des erreurs de localisation?

Abordons le premier point. Le second (plus difficile) pourrait faire l'objet d'une étude ultérieure.

a) Choix d'une représentation.

Parmi les représentations possibles, nous nous limiterons à celles qui ne présentent pas de "terme rectangle" du moins sur le domaine des points expérimentaux, c'est-à-dire à celles pour lesquelles la matrice des covariances est de la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} + T_{\ell s}\, f_\alpha^\ell\, f_\beta^s$$

avec une matrice $T_{\ell s}$ symétrique, qu'il s'agit justement d'estimer. Appliquons ici encore la technique du maximum de vraisemblance, en supposant f gaussienne. Soit $B = \sigma^{-1}$ la matrice inverse des covariances. Le maximum de vraisemblance conduit au système en $T_{\ell s}$:

$$(14) \qquad \frac{\partial \log \operatorname{Det} \sigma}{\partial T_{\ell s}} + \frac{\partial B^{\alpha\beta}}{\partial T_{\ell s}} (Z_\alpha - m_\alpha)(Z_\beta - m_\beta)$$

avec $m_\alpha = a_\ell\, f_\alpha^\ell$, auquel il faut ajouter le système en a_ℓ , puisque ces coefficients sont eux aussi inconnus. On sait que ce second système conduira aux estimateurs :

$$a_\ell^* = \lambda_\ell^\alpha\, Z_\alpha$$

avec

$$(15) \qquad \begin{cases} \lambda_\ell^\alpha\, \sigma_{\alpha\beta} = \tilde{\mu}_{\ell s}\, f_\beta^s \\ \lambda_\ell^\alpha\, f_\alpha^s = \delta_\ell^s \end{cases}$$

La première relation s'écrit aussi bien :

$$(15') \qquad \begin{cases} \lambda^{\alpha}_{\ell} \, K_{\alpha\beta} = (\tilde{\mu}_{\ell s} - T_{\ell s}) \, f^{s}_{\beta} = \mu_{\ell s} \, f^{s}_{\beta} \\ \\ \lambda^{\alpha}_{\ell} \, f^{s}_{\alpha} = \delta^{s}_{\ell} \end{cases}$$

et sa solution ne dépend pas de $T_{\ell s}$ (seul $\tilde{\mu}_{\ell s}$ en dépend ; $\mu_{\ell s}$, lui, est déterminé par (15')).

Pour expliciter (14), tenons compte maintenant des expressions (6) et (7) des dérivées de B. On trouve :

$$\frac{\partial \log \operatorname{Det} \sigma}{\partial T_{\ell s}} = B^{\alpha\beta} \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial T_{\ell s}} = \varepsilon \, B^{\alpha\beta} \, f^{\ell}_{\alpha} \, f^{s}_{\beta}$$

(avec $\varepsilon = 2$ si $\ell \neq s$ et $\varepsilon = 1$ si $\ell = s$).

De même, d'après (7) :

$$\frac{\partial B^{\alpha\beta}}{\partial T_{\ell s}} (Z_{\alpha}-m_{\alpha})(Z_{\beta}-m_{\beta}) = - B^{\alpha\gamma} B^{\beta\eta} (Z_{\alpha}-m_{\alpha})(Z_{\beta}-m_{\beta}) \frac{\partial \sigma_{\gamma\eta}}{\partial T_{\ell s}}$$

$$= - \varepsilon \, B^{\alpha\gamma} B^{\beta\eta} (Z_{\alpha}-m_{\alpha})(Z_{\beta}-m_{\beta}) \, f^{\ell}_{\gamma} \, f^{s}_{\eta}$$

avec ε comme ci-dessus. Par suite, le système (14) s'écrit

$$(16) \qquad B^{\alpha\beta} f^{\ell}_{\alpha} f^{s}_{\beta} = B^{\alpha\gamma} B^{\beta\eta} (Z_{\alpha}-m_{\alpha})(Z_{\beta}-m_{\beta}) \, f^{\ell}_{\gamma} \, f^{s}_{\eta}$$

Au second membre de (16) figurent les m_{α} qui doivent évidemment être remplacées par leurs estimations du maximum de vraisemblance

$$(17) \qquad m^{*}_{\alpha} = \lambda^{\delta}_{\ell} \, Z_{\delta} \, f^{\ell}_{\alpha}$$

Calculons d'abord les quantités :

$$C^{\alpha\ell} = B^{\alpha\beta} f_\beta^\ell \tag{18}$$

solution du système :

$$\sigma_{\alpha\beta}\, C^{\alpha\ell} = f_\beta^\ell$$

c'est-à-dire, d'après (15) et (15') :

$$C^{\alpha\ell} = D^{\ell r} \lambda_r^\alpha \tag{18'}$$

avec des coefficients $D^{\ell r}$ vérifiant :

$$D^{\ell r} \mu_{rs} f_\beta^s = f_\beta^\ell - T_{st} D^{\ell s} f_\beta^t$$

soit :

$$D^{\ell r} (\mu_{rs} + T_{rs}) f_\beta^s = f_\beta^\ell$$

Donc :

$$D^{\ell r}(\mu_{rs} + T_{rs}) = \delta_s^\ell \tag{19}$$

et la matrice D est l'inverse de $\mu + T$ (en particulier, elle est symétrique).

Le premier membre de (16), d'après (16), (18) et (18'), est :

$$B^{\alpha\beta} f_\alpha^\ell f_\beta^s = C^{\beta\ell} f_\beta^s = D^{\ell s}$$

Le second membre est, d'après (18), (18')

$$B^{\alpha\gamma} f_\gamma^\ell B^{\beta\eta} f_\eta^s (Z_\alpha - m_\alpha)(Z_\beta - m_\beta) = C^{\alpha\ell} C^{\beta s} (Z_\alpha - m_\alpha)(Z_\beta - m_\beta)$$

$$= D^{\ell r} \lambda_r^\alpha (Z_\alpha - m_\alpha) D^{st} \lambda_t^\beta (Z_\beta - m_\beta)$$

Compte tenu de (19), multiplions la relation

$$D^{\ell s} = D^{\ell r} \lambda_r^\alpha (Z_\alpha - m_\alpha) D^{st} \lambda_t^\beta (Z_\beta - m_\beta)$$

par $(\mu_{\ell u} + T_{\ell u})(\mu_{sv} + T_{sv})$. Il vient

$$\mu_{uv} + T_{uv} = \lambda_u^\alpha (Z_\alpha - m_\alpha) \lambda_v^\beta (Z_\beta - m_\beta)$$

Mais $\lambda_u^\alpha Z_\alpha$ est justement l'estimateur m_α^* de m_α. Il apparait donc que nous sommes dans un cas de dégénérescence. Le maximum de la forme quadratique (infini) est atteint lorsque $m_\alpha^* = \lambda_u^\alpha Z_\alpha$ et $T_{uv} = - \mu_{uv}$. La covariance correspondante :

$$\sigma_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} - \mu_{\ell s} f_\alpha^\ell f_\beta^s \tag{20}$$

est celle qui est associée à la représentation $Z(\delta_x - \lambda_\ell^\beta f_x^\ell \delta_{x_\beta})$.
Notons bien que si x,y ne sont pas des points expérimentaux, la forme simple (20) ne subsiste pas. On trouve :

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{x,y} = {} & K(x-y) - \lambda_\ell^\beta f_x^\ell K(y-x_\beta) - \lambda_s^\gamma f_y^s K(x-x_\gamma) \\ & + \mu_{\ell s} f_x^\ell f_y^s \end{aligned} \right. \tag{20'}$$

avec les λ_ℓ^α solution de (15'), et pour l'espérance :

$$m^*(x) = a_\ell^* f_x^\ell = \lambda_\ell^\alpha f_x^\ell Z_\alpha$$