Fontainebleau N-401

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 129

COMPLEMENTS SUR LE PARAMETRAGE DES CONTOURS OPTIMAUX

-=-=-=-=-=-=-=-=-

G. MATHERON Février 1975

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 129

COMPLEMENTS SUR LE PARAMETRAGE DES CONTOURS OPTIMAUX

Dans cette Note, je rassemble (sans qu'il y ait de liens logiques entre eux) divers compléments à la note Géostatistique N° 128, susceptibles d'être utiles dans les applications effectives. En premier lieu, j'indique un théorème qui, (dans une certaine mesure) permettra dans les applications de ne faire varier la teneur de coupure que dans un intervalle $[a,b]$ donné, au lieu de $[0, \infty]$. En second lieu, j'indique une méthode d'itération (dite méthode du triangle) probablement plus puissante que la méthode du "colimaçon" exposée dans la note N° 128. En fait, pas plus que par la méthode du colimaçon, nous ne sommes assurés de parvenir à la solution optimale par la méthode du triangle : mais l'approximation Y_o à laquelle conduit cette méthode du triangle peut, à son tour, servir d'approximation initiale à la méthode du colimaçon - d'où possibilité, en conjuguant les deux méthodes, de se garantir dans une large mesure contre le risque de tomber très loin de la véritable solution optimale. Dans le troisième paragraphe, j'examine le cas d'un paramètre non linéaire. Les méthodes d'itération (du colimaçon et du triangle) restent utilisables - sans autre changement que la nécessité de charger davantage la mémoire. Je n'ai pas pour l'instant de démonstration de la convergence du procédé dans le cas le plus général (bien que l'on puisse conjecturer que cette convergence a lieu effectivement). Pourtant, dans le cas particulier le plus intéressant en pratique, cette démonstration est possible et sera donnée ci-dessous.

I - TENEUR DE COUPURE λ LIMITEE A UN INTERVALLE BORNE [a,b]

Prenons, comme dans la note 128, un espace E muni d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$, d'un préordre défini par une application $\Gamma : x \to \Gamma(x) \in \mathcal{P}(E)$, de la famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ des ensembles autorisés (i.e. mesurables et stables par Γ), et enfin du cône $\mathcal{S}$ des fonctions Γ-croissantes. On se donne aussi sur E une mesure positive bornée V et une fonction $q \in L^2(E,\mathcal{A},V)$, et on désigne par $\Lambda = \Pi_{\mathcal{S}} q$ la projection de q sur le cône convexe $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \cap L^2$.

Soient alors a et b réels, avec a < b. L'ensemble

$$\mathcal{F}_{a,b} = \{f : f \in L^2(E,\mathcal{A},V), \quad a \le f \le b \quad (V\text{-p. p.})\}$$

des fonctions f dans L^2 (V-p.p.) minorées par a et majorées par b est un sous-ensemble convexe et fermé dans $L^2(E,\mathcal{A},V)$. Toute fonction $g \in L^2(E,\mathcal{A},V)$ admet comme projection sur $\mathcal{F}_{ab}$ la fonction définie par :

$$\Pi_{\mathcal{F}_{ab}} g = (g \vee a) \wedge b$$

(c'est-à-dire g tronquée inférieurement en a et supérieurement en b). Nous désignerons par $\mathcal{S}_{ab}$ l'ensemble des fonctions Γ-croissantes dans L^2 vérifiant $a \le f \le b$ (V-p.p.), soit :

$$\mathcal{S}_{ab} = \mathcal{F}_{ab} \cap \mathcal{S}$$

Remarquons déjà :

$$(1\text{-}1) \qquad f \in \mathcal{S} \Rightarrow \Pi_{\mathcal{F}_{ab}} f = \Pi_{\mathcal{S}_{ab}} f$$

En effet, si f est Γ-croissante, $\Pi_{\mathcal{F}_{ab}} f = (f \vee a) \wedge b$ est également Γ-croissante, donc appartient à $\mathcal{S}_{ab}$, et par suite coïncide avec la projection de f sur le sous-ensemble convexe $\mathcal{S}_{ab} \subset \mathcal{F}_{ab}$. De même :

$$(1\text{-}2) \qquad f \in \mathcal{F}_{ab} \Rightarrow \Pi_{\mathcal{S}} f = \Pi_{\mathcal{S}_{ab}} f$$

En effet, $a \leq f \leq b$ entraîne $a \leq \Pi_{\mathcal{S}} f \leq b$, puisque $\Pi_{\mathcal{S}}$ est un opérateur positif (Note N° 128, p. 18), c'est-à-dire $\Pi_{\mathcal{S}} f \in \mathcal{S}_{ab}$: appartenant au sous-ensemble $\mathcal{S}_{ab} \subset \mathcal{S}$, cette fonction est évidemment aussi la projection de f sur $\mathcal{S}_{ab}$.

Venons-en au résultat principal :

<u>Théorème 1 - Soit $q \in L^2(E, \mathcal{A}, V)$ et $\Lambda = \Pi_{\mathcal{S}} q$ sa projection sur le cône $\mathcal{S}$. Alors q et Λ ont même projection sur le convexe $\mathcal{S}_{ab}$ des fonctions Γ-croissantes tronquées. Plus précisément</u> :

$$(1\text{-}3) \qquad \Pi_{\mathcal{S}_{ab}} q = \Pi_{\mathcal{S}_{ab}} \Lambda = (\Lambda \vee a) \wedge b$$

<u>Démonstration</u> - Comme $\Lambda \in \mathcal{S}$, l'égalité

$$\Pi_{\mathcal{S}_{ab}} \Lambda = (\Lambda \vee a) \wedge b$$

résulte directement de (1-1). Posons

$$g_0 = \Pi_{\mathcal{S}_{ab}} q$$

Il faut montrer $g_0 = (\Lambda \vee a) \wedge b$. Or g_0 est l'unique élément de $\mathcal{S}_{ab}$ vérifiant :

$$(\alpha) \qquad \forall\, f \in \mathcal{S}_{ab} \; : \; < q-g_o, f > \;\leq\; < q-g_o,\, g_o >$$

Il faut donc montrer que $g = (\Lambda \vee a) \wedge b$ vérifie (α). Par construction de $\Lambda = \Pi_{\mathcal{S}} q$, on a :

$$< q-\Lambda,\, f > \;\leq 0 \quad , \quad f \in \mathcal{S}$$

$$< q-\Lambda,\, h > \;= 0 \quad , \quad h \in \sigma(\Lambda)$$

Mais $g = (\Lambda \vee a) \wedge b$ est dans $\sigma(\Lambda)$, et par suite :

$$< q-\Lambda,\, g > \;=\; 0$$

donc $< q-g,\, g > \;=\; < \Lambda-g,\, g >$. Nous devons donc montrer que g vérifie (au lieu de (α)) la relation suivante, pour tout $f \in \mathcal{S}_{ab}$:

$$(\beta) \qquad < q-g,\, f > \;\leq\; < \Lambda-g,\, g > \;=$$
$$= a \int_{\Lambda<a} (\Lambda-a) + b \int_{\Lambda\geq b} (\Lambda-b)$$

Par ailleurs, comme $f \in \mathcal{S}_{ab} \subset \mathcal{S}$, on a aussi :

$$(\gamma) \quad < q-g,\, f > \;\leq\; < \Lambda-g,\, f > \;=\; \int_{\Lambda<a} (\Lambda-a)\, f + \int_{\Lambda\geq b} (\Lambda-b)\, f$$

Sur $\{\Lambda < a\}$, $(\Lambda-a)$ est < 0 et $f \geq a$ (puisque $f \in \mathcal{S}_{ab}$) entraîne $(\Lambda-a)\, f \leq a\, (\Lambda-a)$. De même, sur $\{\Lambda \geq b\}$, $(\Lambda-b)$ est ≥ 0 et $f \leq b$ donne $(\Lambda-b)\, f \leq b\, (\Lambda-b)$. Par conséquent (γ) implique (β), et le théorème en résulte.

<u>COMMENTAIRE</u> - Dans les applications, on n'a généralement besoin de faire varier le paramètre λ que dans un intervalle fini [a,b]

contenant toutes les valeurs plausibles de la teneur de coupure. Autrement dit, on n'a besoin de connaître Λ que sur l'ensemble $\{a \le \Lambda \le b\} \subset E$, i.e. de connaître seulement $g = (\Lambda \vee a) \wedge b = \Pi_{\mathcal{S}_{ab}} \Lambda$. Le théorème ci-dessus nous indique donc qu'il est légitime de chercher directement la projection $\Pi_{\mathcal{S}_{ab}}\, q$ sur le convexe $\mathcal{S}_{ab}$ sans passer par l'intermédiaire de $\Lambda = \Pi_{\mathcal{S}}\, q$. Cette remarque se répercute au niveau des méthodes d'itération : au lieu de prendre :

$$Y_n = \Pi_{\mathcal{S}(Y_{n-1}, X_i)}\, q$$

il suffirait, en principe, de prendre :

$$Y_n = \Pi_{\mathcal{S}_{ab}(Y_{n-1}, X_i)}\, q$$

projection de q sur le convexe des fonctions croissantes $f(Y_{n-1}, X_i)$ tronquées par a et b : or, cela est directement réalisable par la programmation dynamique (il suffit de limiter la variation de λ à l'intervalle $[a,b]$).

Toutefois, (du fait que cette méthode d'itération ne conduit pas nécessairement à la solution optimale) les risques de bloquage de l'itération sont augmentés lorsque l'on tronque (puisque l'on manipule moins d'information à la fois). C'est donc seulement la pratique qui pourra nous apprendre dans quelle mesure il est effectivement légitime de tronquer l'intervalle de variation du paramètre λ.

<u>REMARQUE</u> - Du point de vue théorique, le théorème précédent éclaire la nature des rapports existant entre le contour optimal $B^{+}_{\lambda_0}$ (correspondant à une valeur unique λ_0 du paramètre λ) et le théorème

des projections. Plaçons-nous, en effet, dans le cas où E est fini et désignons par $\lambda_o < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$ la suite croissante (finie) des valeurs distinctes prises par Λ. Pour $b \leq \lambda_N$ réel donné, il existe un et un seul indice avec $\lambda_{i-1} < b \leq \lambda_i$. Prenons $a = b-\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\lambda_{i-1} < a < b \leq \lambda_i$. Alors, la fonction $\Pi_{\mathcal{S}_{ab}}\, q = (\Lambda \vee a) \wedge b$ ne prend que deux valeurs : b sur $\{\Lambda \geq \lambda_i\} = B^+_{\lambda_i}$ et a sur le complémentaire :

$$\begin{aligned}\Pi_{\mathcal{S}_{ab}}\, q &= b\, 1_{B^+_{\lambda_i}} + (b-\varepsilon)\,(1- 1_{B^+_{\lambda_i}})\\ &= (b-\varepsilon) + \varepsilon\, 1_{B^+_{\lambda_i}}\end{aligned}$$

Il s'agit donc de la meilleure approximation de q (pour la norme de L^2) par une fonction à 2 valeurs de la forme $(b-\varepsilon) + \varepsilon\, 1_A$ $(A \in \mathcal{B})$.

II - LA METHODE DU TRIANGLE

L'espace E, ici, est fini. On se donne trois fonctions X_o, Y_o, Z_o sur E (que l'on peut prendre comme nouvelles coordonnées) et on cherche à approcher la projection (au sens de L^2)

$$\Lambda = \Pi_{\mathcal{S}(X_o,Y_o,Z_o)}\, q$$

de q sur le cône convexe des fonctions $f(X_o,Y_o,Z_o)$ croissantes en X_o,Y_o et Z_o. La méthode d'itération consiste à prendre :

$$(2\text{-}1) \qquad \begin{cases} X_n = \Pi^{\,q}_{\mathcal{S}(Y_{n-1}\ Z_{n-1})} \\ Y_n = \Pi^{\,q}_{\mathcal{S}(Z_{n-1},X_{n-1})} \\ Z_n = \Pi^{\,q}_{\mathcal{S}(X_{n-1},Y_{n-1})} \end{cases}$$

Théorème 2 - Les suites X_n, Y_n et Z_n convergent vers une même limite Λ_o , et cette limite est atteinte au bout d'un nombre fini d'itérations.

Noter que rien ne garantit que cette limite Λ_o soit identique à la projection Λ cherchée. Mais, si $\Lambda \neq \Lambda_o$, Λ_o doit, dans la plupart des cas, constituer déjà une excellente approximation de Λ. On peut du reste améliorer cette approximation en utilisant, par exemple Λ_o comme approximation initiale X_o de la méthode du colimaçon. La pratique seule décidera si celà est réellement utile. Il est possible d'ailleurs que Λ_o (sans être identique à Λ) ne puisse plus être améliorée par la méthode du colimaçon. Cela voudrait dire :

$$\Lambda_o = \Pi^{\,q}_{\mathcal{S}(\Lambda_o\ X_o)} = \Pi^{\,q}_{\mathcal{S}(\Lambda_o\ Y_o)} = \Pi^{\,q}_{\mathcal{S}(\Lambda_o\ Z_o)}$$

Mais je ne suis absolument pas à même de démontrer cette conjecture, et l'expérience m'a rendu méfiant, de sorte que la pratique devra décider.

La démonstration du Th. 2 est assez analogue à celle du théorème relatif à la méthode du colimaçon. On remarque d'abord que les trois suites X_n, Y_n et Z_n ne prennent qu'un nombre fini de valeurs distinctes. En effet, X_n, par exemple, est évidemment identique à la projection de q sur le cône $\mathcal{S}(X_n)$ des fonctions croissantes de X_n. Or ce cône est univoquement défini par la donnée d'une famille ordonnée $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ de contours autorisés, et, $\mathcal{B}$ étant fini, il n'existe qu'un nombre fini de telles familles ordonnées. Il n'y a donc, dans l'espace L^2, qu'un nombre fini de fonctions f vérifiant $f = \Pi_{\mathcal{S}(f)}\, q$, d'où le résultat.

Ensuite, on note pour chacune des variables, par exemple Y_n , que l'on a $Y_n = \Pi_{\mathcal{S}(Y_n)}\, q$, et donc :

$$< Y_n, q > = \|Y_n\|^2$$

D'autre part, $X_{n+1} = \Pi_{\mathcal{S}(Y_n, Z_n)}\, q$ donne :

$$< Y_n, q > \leq < Y_n\ X_{n+1} >$$

Donc $\|Y_n\|^2 \leq < Y_n, X_{n+1} >$. On en déduit :

$$\|X_{n+1} - Y_n\|^2 = \|X_{n+1}\|^2 + \|Y_n\|^2 - 2 < Y_n\ X_{n+1} >$$

$$\leq \|X_{n+1}\|^2 - \|Y_n\|^2$$

Autrement dit : $\|X_{n+1}\| \geq \|Y_n\|$ avec égalité si et seulement si $X_{n+1} = Y_n$. De la même manière, on a $\|Y_{n+2}\| \geq \|X_{n+1}\|$ avec égalité si et seulement si $Y_{n+2} = X_{n+1}$. Par suite :

(α) $\|Y_{n+2}\| \geq \|Y_n\|$, et $\|Y_{n+2}\| = \|Y_n\|$ si et seulement si $Y_{n+2} = Y_n$.

Naturellement, on a le même énoncé pour chacune des suites X_n , et Z_n . Comme la suite Y_n ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, la suite Y_{2k} (par exemple) prend une infinité de fois la même valeur : autrement dit il existe une suite infinie $k_1 <$ $k_2 < \ldots$ telle que $Y_{2k_1} = Y_{2k_2} = \ldots$.D'après ($\alpha$), cela entraine :

$$Y_{2n} = Y_{2k_1} \text{ pour } n \geq k_1$$

Mais on a aussi $\|Y_{2n+2}\| \geq \|X_{2n+1}\| \geq \|Y_{2n}\|$ avec égalité si et seulement si $Y_{2n} = X_{2n+1} = Y_{2n+2}$. On en déduit :

$$X_{2n+1} = Z_{2n+1} = Y_{2k_1} \quad \text{pour} \quad n \geq k_1$$

Mais alors (avec $n \geq k_1$) $Z_{2n+1} = Y_{2k_1}$ = constante entraine (d'après $\|Z_{2n+3}\| \geq \|X_{2n+2}\| \geq \|Z_{2n+1}\|$ avec égalité si et seulement si $Z_{2n+1} = X_{2n+2} = Z_{2n+3}$) $X_{2n+2} = Y_{2k_1}$. De la même manière, on trouve $Z_{2n+2} = Y_{2k_1}$. Par suite, enfin, $Y_{2n+3} = \Pi\,\mathcal{G}(X_{2n+2}, Z_{2n+2})^q = Y_{2k_1}$. Autrement dit, dès que $n \geq 2k_1 + 3$, on a $X_n = Y_n = Z_n = Y_{2k_1}$, ce qui démontre le théorème.

III - LE PARAMETRAGE NON LINEAIRE

Pour simplifier, je me limite au cas où l'espace E est fini et où la mesure μ_α représentant la valeur admet une densité ρ_α , soit

$$\mu_\alpha = \rho_\alpha V$$

décroissante et continue en α. On a vu dans la Note 128 qu'il existe alors une fonction (unique) a sur E, Γ-croissante et telle que, pour toute valeur de paramètre α, les contours optimaux soient :

$$B_\alpha^+ = \{a \geq \alpha\} \quad ; \quad B_\alpha^- = \{a > \alpha\}$$

Cette fonction a $\in \mathcal{J}$ est caractérisée par les relations :

$$(3\text{-}1) \qquad \begin{cases} \forall A \in \mathcal{B} : & \displaystyle\int_A \rho_{a(x)}(x)\ V(dx) \leq 0 \\ \forall \alpha & \displaystyle\int_{a \geq \alpha} \rho_{a(x)}(x)\ V(dx) = 0 \end{cases}$$

De ceci résulte que les méthodes d'itération (celle du triangle et celle du colimaçon) peuvent être utilisées telles quelles pour approcher la fonction a.

En effet, plaçons-nous en coordonnées (X_o, Y_o, Z_o) et prenons pour $\mathcal{S}$ le cône $\mathcal{S}(X_o, Y_o, Z_o)$ des fonctions croissantes de X_o, Y_o et Z_o . On prendra pour Z_1 la fonction $Z_1(X_o, Y_o)$ vérifiant les relations (3-1) en axes $(X_o\ Y_o)$ et pour la relation d'ordre défini par $\mathcal{S}(X_o\ Y_o)$. On l'obtient en appliquant la programmation dynamique en axes (X_o, Y_o) avec différentes valeurs du paramètre α : la seule différence avec le cas d'un paramètre λ linéaire est que l'on est ici obligé de mettre en mémoire les valeurs de $\rho_\alpha(x)$ pour les différentes valeurs $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ que l'on désire retenir (dans le cas linéaire, il suffisait de mémoriser les deux fonctions q et V). On peut écrire (symboliquement, puisqu'il ne s'agit plus de projection à proprement parler)

$$Z_1 = \Pi_{\mathcal{S}(X_o\ Y_o)}\ q$$

De la même manière, on construit par itération les suites X_n, Y_n, Z_n . La question qui se pose est évidemment celle de la convergence de ces suites (les raisonnements faits dans le cas linéaire ne s'appliquent plus ici, du fait que les normes dans L^2 n'ont plus de raison de croître de façon monotone).

Notons déjà cependant un premier résultat capital : ici encore, les <u>suites</u> X_n, Y_n et Z_n <u>ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes</u>. Pour le voir, on note que l'on a évidemment $X_n = \Pi_{\mathcal{G}(X_n)}\, q$. Or, d'une manière générale, lorsque f parcourt $\mathcal{G}$ <u>l'ensemble des fonctions</u> $g = \Pi_{\mathcal{G}(f)}\, q$ <u>est fini</u>.

En effet, la projection $\Pi_{\mathcal{G}(f)}\, q$ ne dépend pas de f elle-même, mais uniquement de la famille ordonnée (finie) des

$$A_\lambda^+ = \{f \geq \lambda\} \quad \text{ou des} \quad A_\lambda^- = \{f > \lambda\}$$

Si l'on pose $\delta A_\lambda = A_\lambda^+ \setminus A_\lambda^-$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de λ telles que $\delta A_\lambda \neq \emptyset$ et $f = \sum \lambda\, 1_{\delta A_\lambda}$. Toute fonction $g \in \mathcal{G}(f)$ est alors de la forme :

$$g = \sum \alpha(\lambda)\; 1_{\delta A_\lambda}$$

avec une fonction $\alpha(\lambda)$ croissante en λ. En particulier, d'après les relations (3-1), la fonction $g = \Pi_{\mathcal{G}(f)}\, q$ est caractérisée par :

$$\int_{\delta A_\lambda} \rho_{\alpha(\lambda)}(x)\; V(dx) = 0$$

Cette relation définit de manière univoque la valeur $\alpha(\lambda)$ que doit prendre g sur δA_λ, donc détermine g. Comme il n'y a qu'un nombre fini de familles ordonnées A_λ distinctes, il en résulte bien que l'ensemble :

$$\{g : g = \Pi_{\mathcal{G}(f)}\, q\ ,\ f \in \mathcal{G}\}$$

est <u>fini</u>.

Ce résultat doit vraisemblablement permettre de démontrer la convergence du procédé d'itération. Mais je me contenterai ici d'étudier seulement un cas particulier, qui est du reste sans doute le plus important pour les applications.

<u>Etude d'un cas particulier important</u>.

On suppose E fini, on se donne en chaque point $x \in E$ la fonction de transfert $F_x(t)$, de sorte que $F_x(dt)$ est la loi de probabilité de la teneur en x (éventuellement concentrée sur un $q(x)$ donné si la teneur est parfaitement connue). Enfin, on suppose connus et fixés les frais d'extraction et de traitement à la tonne, soient s et r, et on prend comme paramètre la valeur p du point de métal récupéré. Autrement dit, la valeur du minerai est définie par la mesure :

$$[\ p \int_{r/p}^{\infty} (t - \frac{r}{p})\ F_x(dt) - s\ ]\ V(dx)$$

Nous prendrons comme paramètre de travail l'inverse α de p :

$$\alpha = 1/p$$

de sorte que, pour chaque valeur du paramètre α, la quantité à optimiser est :

$$\int_B q_\alpha(x)\ V(dx) \qquad , \qquad B \in \mathcal{B}$$

avec

$$(3\text{-}2) \qquad q_\alpha(x) = \int_{\alpha r}^{b} (t - \alpha r)\ F_x(dt) - \alpha s$$

On a mis b (au lieu de $+\infty$) comme borne supérieure d'intégration, parce que les teneurs t sont nécessairement bornées (par exemple par 100 %). Quitte à remplacer b par $b+\varepsilon$, nous supposerons $t < b$ strictement p.s. pour la loi $F_x(dt)$ et pour tout $x \in E$.

Nous allons maintenant, moyennant l'addition d'une dimension supplémentaire (celle des teneurs), remplacer le problème initial par un problème analogue dans $\mathbb{R}^4$ mais qui relèvera du théorème des projections dans un espace L^2. Précisons tout de suite que c'est uniquement à des fins théoriques (pour démontrer la convergence) que nous introduisons cette quatrième dimension. Les calculs numériques effectifs se feront sans changement (dans $\mathbb{R}^3$), exactement comme on l'a exposé au début de ce paragraphe.

Prenons comme nouvel espace l'espace $\overline{E}$ des couples (x,t) où $x \in E$ et $t \in [o,b]$ (les points et les teneurs), soit

$$\overline{E} = E \times [o,b]$$

Munissons $\overline{E}$ du préordre $\overline{\Gamma}$ défini par :

$$(x',t') \in \overline{\Gamma}(x,t) \Leftrightarrow \begin{cases} t' \geq t \\ \text{et } x' \in \Gamma(x) \end{cases}$$

Ce préordre nous oblige, dès qu'une teneur t est supposée avoir été acceptée en un point x supposé extrait, à accepter aussi toutes les teneurs supérieures à t : mais cela est bien conforme au problème réel. Car, pour chaque valeur α du paramètre, on accepte les teneurs $t \geq \alpha r$ et on refuse les teneurs $t < \alpha r$ en chaque point x supposé extrait : cette contrainte supplémentaire (apparente) ne modifie donc pas les optima.

Sur $\overline{E}$, en nous inspirant de (3-2), donnons-nous la mesure $\overline{V}$ définie par :

(3-3) $$\overline{V}(dx,dt) = r\ F_x(dt)\ V(dx) + s\ \delta_b(dt)\ V(dx)$$

Ce "volume" comporte deux termes : le premier représente les frais de traitement (des teneurs acceptées sur les points extraits), et le second les frais d'extraction (des points extraits, que les teneurs correspondantes soient ou non acceptées : telle est la raison du Dirac $\delta_b(dt)$ localisé sur $\{t = b\}$, valeur supérieure à toutes les teneurs réelles).

A ce pseudo-volume $\overline{V}$ sur $\overline{E}$, associons la pseudo-quantité de métal $\overline{Q}$, qui est la mesure sur $\overline{E}$ définie par :

$$\overline{Q}(dx,dt) = t\ F_x(dt)\ V(dx)$$

En comparant avec (3-3), on voit que cette mesure $\overline{Q}$ admet une densité $\overline{q}$ par rapport à $\overline{V}$: cette densité n'est pas t/r (à cause du terme en s dans l'expression de $\overline{V}$) mais :

(3-4) $$\overline{q}(x,t) = \frac{1}{r}\,(t - b\ 1_{\{b\}}(t)) = \begin{cases} t/r & \text{si } t < b \\ 0 & \text{si } t = b \end{cases}$$

D'après (3-2), (3-3) et (3-4), la quantité à optimiser lorsque B parcourt $\mathcal{B}$ est pour chaque α :

$$\int_{B\times\{t\geq\alpha r\}} [\overline{q}(x,t) - \alpha]\ \overline{V}(dx,dt)$$

Comme, pour tout point extrait, le critère $t \geq \alpha r$ est le meilleur possible pour décider de traiter le minerai correspondant, l'optimum en question est du même coup réalisé sur la famille plus large des $\overline{B} \in \overline{\mathcal{B}}$ (ensembles de $\overline{E}$ stables pour le préordre $\overline{\Gamma}$). Nous sommes donc ramenés au problème à un paramètre linéaire qui consiste à maximiser :

$$\int_{\overline{B}} \overline{q}(x,t)\ \overline{V}(dx,dt) - \alpha \int_{\overline{B}} \overline{V}(dx,dt)$$

pour $\overline{B} \in \overline{\mathcal{B}}$.

Par suite, si $\overline{\mathcal{G}}$ est le cône des fonctions $\overline{\Gamma}$-croissantes sur $\overline{E}$ et $\Lambda(x,t)$ la projection de $\overline{q}$ sur $\overline{\mathcal{G}}$, soit :

$$\Lambda = \Pi_{\overline{\mathcal{G}}}\ \overline{q}$$

les contours optimaux (dans l'espace produit $\overline{E}$) sont, pour chaque valeur de α :

$$\overline{B}^{+}_{\alpha} = \{\Lambda(x,t) \geq \alpha\} \quad ; \quad \overline{B}^{-}_{\alpha} = \{\Lambda(x,t) > \alpha\}$$

Il va donc exister un rapport simple entre la fonction Λ sur $\overline{E}$ et la fonction a sur E caractérisée par les relations (3-1). En effet :

$$(x,t) \in \overline{B}^{+}_{\alpha} \Leftrightarrow \Lambda(x,t) \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{matrix} a(x) \geq \alpha \\ t \geq \alpha r \end{matrix}$$

Autrement dit, si $B^{+}_{\alpha} = \{a \geq \alpha\}$ est le contour optimal dans E, on sait que l'on a :

$$\overline{B}^{+}_{\alpha} = B^{+}_{\alpha} \times \{t \geq \alpha r\}$$

Ou encore, en écrivant :

$$\Lambda(x,t) = \mathrm{Sup}\ \{\alpha : (x,t) \in B_\alpha^+\} = \mathrm{Sup}\ \{\alpha : \alpha \leq a(x),\ \alpha \leq t/r\}$$

on trouve la relation simple :

(3-5) $$\Lambda(x,t) = \mathrm{Inf}\ (a(x),\ t/r)$$

Notons tout de suite l'inégalité (stricte) :

(3-6) $$a(x) < b/r \qquad (\forall\ x \in E)$$

En effet, pour $\alpha = b/r$, la teneur de coupure (au traitement) est b, donc supérieure aux teneurs réelles. Comme on ne peut rien traiter, on ne doit non plus rien extraire, et $\{a \geq b/r\} = \emptyset$. En particulier, en $t = b$:

$$\Lambda(x,b) = a(x)$$

Dès lors, nous pouvons affirmer que <u>les méthodes d'itération</u> (du colimaçon ou du triangle) sont <u>convergentes</u> et que les limites sont <u>effectivement atteintes au bout d'un nombre fini d'opérations</u>.

En effet, à toute approximation $Z_n = Z_n(x)$ de la fonction a sur E, nous associons la fonction sur $\overline{E}$:

$$\overline{Z}_n(x,t) = \mathrm{Inf}\ (Z_n(x),\ t/r)$$

qui est <u>la projection</u> de $\overline{q}$ sur $\mathcal{G}(\overline{X}_n, \overline{Y}_n, t)$ (cône des fonctions croissantes de ces trois variables) au sens de l'espace $L^2(\overline{E}, \overline{\mathcal{Q}}, \overline{V})$. Par suite, les relations :

$$\|\overline{Z}_n - \overline{X}_{n-1}\|^2 \leq \|\overline{Z}_n\|^2 - \|\overline{X}_{n-1}\|^2$$

(soit : $\|\overline{Z}_n\| \geq \|\overline{X}_{n-1}\|$ avec égalité si et seulement si $\overline{Z}_n = \overline{X}_{n-1}$) sont vérifiées. Par ailleurs, nous l'avons vu, les suites Z_n, X_n etc... ne prennent qu'un nombre fini de valeurs possibles, et il en est évidemment de même des suites $\overline{Z}_n$, puisque $\overline{Z}_n(x,t) = \text{Inf}\ (Z_n(x),\ t/r)$. Par suite, les raisonnements qui établissent la convergence au bout d'un nombre fini d'opérations peuvent être repris mot pour mot et la conclusion en résulte.

Du point de vue pratique, notons que les normes $\|Z_n\|$ (dans $L^2(\overline{E},\overline{V})$) doivent vérifier la croissance monotone :

$$\|\overline{Z}_{n+2}\| \geq \begin{matrix} \|\overline{X}_{n+1}\| \\ \\ \|\overline{Y}_{n+1}\| \end{matrix} \geq \|\overline{Z}_n\| \qquad \text{etc....}$$

de sorte que ces <u>normes peuvent fournir un bon critère pour arrêter les itérations</u>.

Calculons donc la norme de la fonction $\overline{Z}$ définie par :

$$\overline{Z}(x,t) = \text{Inf}\ (Z(x),\ t/r) \tag{3-5'}$$

On trouve :

$$\|\overline{Z}\|^2 = \int |\overline{Z}(x,t)|^2\ \overline{V}(dx,dt) =$$

$$r\iint |\overline{Z}(x,t)|^2\ F_x(dt)\ V(dx) + s\int (\overline{Z}(x,b))^2\ V(dx)$$

D'après la relation (3-6), que ces projections $\overline{Z}$ sur des sous-cônes vérifient également, on a $\overline{Z}(x,b) = Z(x)$: le terme en s est donc $s\|Z\|^2$, norme de Z dans l'espace ordinaire. D'après (3-5'), on trouve aussi :

$$\iint (\overline{Z}(x,t))^2 \; F_x(dt)\; V(dx) =$$

$$\int V(dx) \left[\frac{1}{r^2} \int_0^{rZ(x)} t^2\, F_x(dt) + \int_{rZ(x)}^{\infty} Z^2(x)\; F_x(dt)\right]$$

Par suite, la norme de $\overline{Z}$ est :

$$(3\text{-}7) \quad \left\{ \begin{aligned} \|\overline{Z}\|^2 &= s\; \|Z\|^2 + \frac{1}{r} \int_E V(dx) \int_0^{rZ(x)} t^2\; F_x(dt) \\ &\quad + r \int Z^2(x)\; [1 - F_x(r\; Z(x))]\; V(dx) \end{aligned} \right.$$

C'est cette norme qui pourra servir de critère pour arrêter une itération (les $\|\overline{Z}_n\|$ doivent aller en croissant).

On peut aussi utiliser la norme $\|\overline{q} - \overline{Z}\|^2$, qui elle, doit évidemment aller en décroissant. En développant

$$\|\overline{q} - \overline{Z}\|^2 = \|\overline{q}\|^2 - 2 < \overline{q}\; \overline{Z} > + \|\overline{Z}\|^2$$

et en tenant compte des expressions de $\overline{q}$, de $\overline{Z}$ et de $\overline{V}$, on trouve :

$$\|\overline{q}\|^2 = \int \overline{q}(x,t)^2\; \overline{V}(dx,dt) = \frac{1}{r} \iint t^2\; F_x(dt)\; V(dx)$$

$$< \overline{q}\; \overline{Z} > = \int q(x,t)\; Z(x,t)\; \overline{V}(dx,dt) =$$

$$\int V(dx) \left[\int_0^{rZ(x)} \frac{t^2}{r}\; F_x(dt) + Z(x) \int_{rZ(x)}^{\infty} t\; F_x(dt) \right]$$

Compte tenu de (3-7), il vient ainsi :

$$(3\text{-}8) \quad \|\overline{q} - \overline{Z}\|^2 = s\; \|Z\|^2 + \frac{1}{r} \int V(dx) \int_{rZ(x)}^{\infty} [t - r\; Z(x)]^2\; F_x(dt)$$

En particulier, on voit que la fonction a cherchée est la fonction Γ-croissante sur E minimisant l'expression (3-8) de la norme $\|\overline{q} - \overline{a}\|^2$.