Fontainebleau N-432

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 132

COMPLEMENTS SUR LES MODELES ISOFACTORIELS

-=-=-=-=-=-=-

G. MATHERON Juillet 1975

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 132

COMPLEMENTS SUR LES MODELES ISOFACTORIELS

Je rassemble des résultats disparates, dont certains pourraient être utiles à l'occasion. La table est la suivante.:

1 - ENSEMBLE ALEATOIRE DEDUIT D'UNE F.A. GAUSSIENNE 2

Il s'agit de l'ensemble $\{Y(x) \geq a\}$ où $Y(x)$ est une F.A. gaussienne. La variogramme de cet ensemble est en $\sqrt{\gamma(h)}$ au voisinage de $h = 0$.

2 - FORME GENERALE DES LOIS HERMITIENNES 4

3 - FORME GENERALE DES LOIS DE LAGUERRE 7

Ces deux familles de lois constituent des simplexes.

4 - COVARIANCE D'UNE ANAMORPHOSEE 10

(diverses formules permettant, en particulier, l'étude des covariances conditionnelles).

5 - POINT DE VUE DES GENERATEURS INFINITESIMAUX 13

Les trois exemples de modèles à facteurs polynomiaux (Hermite, Laguerre et Jacobi) se laissent rattacher à des demi-groupes de diffusion.

6 - COMPACITE D'UNE FAMILLE DE LOIS ISOFACTORIELLE 18

1 - ENSEMBLE ALEATOIRE DEDUIT D'UNE F.A. GAUSSIENNE

Soit Y(x) une F.A. gaussienne, normée centrée, et $\rho(x,y)$ sa covariance. L'ensemble aléatoire :

$$A = \{x : Y(x) \geq a\}$$

(fermé si Y(x) est p.s.continue) admet la covariance :

$$(1-1) \qquad C(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_a^\infty \int_a^\infty e^{-\frac{z^2+z'^2-2\rho zz'}{2(1-\rho^2)}} dz\, dz'$$

où $\rho = \rho(x,y)$. En utilisant le développement de l'échelon unité en polynomes d'Hermite, on trouve aussi :

$$(1-2) \qquad C(x,y) = (1-G(a))^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \frac{(H_{n-1}(a))^2}{n!} (g(a))^2$$

où g est la densité de la loi de Gauss réduite. Dans le cas stationnaire $\rho=\rho(h)$, cette expression montre que C(h) et $\rho(h)$ ont des portées du même ordre de grandeur. Par contre, elle ne met pas en évidence le comportement de C(h) au voisinage de l'origine. Pour mettre en évidence ce comportement, considérons C comme une fonction $C(\rho)$ du coefficient ρ, et calculons la dérivée de (1-2)

$$\frac{dc}{d\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} (H_{n-1}(a))^2 (g(a))^2$$

Or cela signifie :

$$(1-3) \qquad \frac{dc}{d\rho} = g_\rho(a,a)$$

où $g_\rho(x,y)$ est la densité de la loi de Gauss à 2 variables réduites admettant le coefficient de corrélation. Cette relation (1-3) peut aussi se déduire de (1-1). En effet, on trouve :

$$\frac{dc}{d\rho} = \int_a^\infty\int_a^\infty \frac{\partial\, g_\rho(x,y)}{\partial\rho}\, dx\, dy$$

Or g_ρ a comme transformée de Fourier $e^{-\frac{u^2+v^2+2\,\rho uv}{2}}$, et $\frac{\partial\, g_\rho}{\partial\rho}$ a donc la transformée $-uv\; e^{-\frac{u^2+v^2+2\,\rho uv}{2}}$. Par suite :

$$\frac{\partial\, g_\rho}{\partial\rho} = \frac{\partial\, g_\rho}{\partial x\, \partial y}$$

La relation (1-3) en résulte aussitôt.

En intégrant (1-3) de 0 à ρ, nous obtenons la covariance centrée :

$$\sigma_a(h) = C(h) - [1-G(a)]^2$$

sous la forme :

$$\sigma_a(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\rho e^{-\frac{a^2}{1+x}}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1\text{-}4)$$

En particulier, si $a = 0$, on trouve la formule bien connue :

$$\sigma_o(h) = \frac{1}{2\pi}\ \text{Arc sin}\ \rho$$

Prenons la transformée de Fourier en a de $\sigma_a(h)$. Il vient :

$$\tilde{\sigma}_u(h) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\rho e^{-\frac{(1+x)}{4}u^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\int_0^\rho e^{\frac{1-x}{4}u^2}\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, \Sigma\, \frac{u^{2n}}{n!}\int_0^\rho \left(\frac{1-x}{4}\right)^n \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

La transformée $\tilde{\gamma}_u$ du variogramme $\gamma_a(h) = \sigma_a(o) - \sigma_a(h)$ est donc :

$$\tilde{\gamma}_u(h) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{u^2}{2}} \sum \frac{u^{2n}}{n!} \int_\rho^1 \frac{(1-x)^n}{4^n} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{u^2}{2}} \sum \frac{(1-\rho)^{n+1/2}}{n+\frac{1}{2}} \frac{u^{2n}}{4^n \, n!}$$

et le variogramme lui-même s'écrit :

$$(1\text{-}5) \quad \gamma_a(h) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n \, (1-\rho)^{n+1/2}}{n+\frac{1}{2}} \frac{H_{2n}(a)}{4^n \, n!} \quad e^{-a^2/2}$$

Si ρ est voisin de 1 (i.e. h petit et pas d'effet de pépite) $\gamma(h)$ a une partie principale :

$$\gamma_a(h) \simeq \frac{1}{1\pi\sqrt{2}} \sqrt{1-\rho(h)} \quad e^{-a^2/2}$$

proportionnelle à la <u>racine</u> du variogramme $1-\rho(h)$ de $Y(x)$. En particulier, pour que $\gamma(h)$ soit linéaire autout de $h = 0$, il faut que $1-\rho(h)$ soit parabolique. On sera donc amenés à utiliser ce genre de modèle avec des covariances $\rho(h)$ du type $\rho(h) = e^{-b\,h^2}$ par exemple.

2 - <u>FORME GENERALE DES LOIS HERMITIENNES</u>

Pour $\rho = 1$, la loi de Gauss $G_\rho(dx,dy)$ n'a plus de densité, mais la relation :

$$E[H_n(X)|Y] = \rho^n \, H_n(Y)$$

reste valable. Pour inclure ce cas limite, il convient donc de généraliser légèrement la définition des lois hermitiennes.

Nous dirons donc qu'une loi $F(dx,dy)$ est hermitienne si elle vérifie les 2 conditions suivantes :

1 - Chacune des deux lois marginales est gaussienne réduite.

2 - Les polynomes d'Hermite vérifient pour $n = 0,1,\ldots$

$$(2\text{-}1) \qquad \begin{aligned} E[H_n(X)|Y] &= T_n\, H_n(Y) \\ E[H_n(Y)|X] &= T_n\, H_n(X) \end{aligned}$$

Ces conditions entrainent que T_n est le coefficient de corrélation de $\eta_n(X)$ et $\eta_n(Y)$, et par suite vérifient :

$$(2\text{-}2) \qquad T_o = 1 \quad , \quad |T_n| \leq 1$$

<u>THEOREME</u> - <u>Pour qu'une suite T_n de coefficients soit associée à une loi hermitienne nécessairement unique, il faut et il suffit que</u>

$$T_n = \int \rho^n \, \varpi(d\rho)$$

<u>pour une loi de probabilité ϖ concentrée sur l'intervalle fermé $(-1,+1)$.</u>

Cette condition est manifestement suffisante : la loi hermitienne F est alors le mélange de loi de Gauss obtenu en randomisant ρ selon la loi ϖ. Elle est définie par sa fonction caractéristique

$$\Phi(u,v) = \int e^{-\frac{u^2+v^2+2\,\rho uv}{2}} \, \varpi(d\rho)$$
$$= e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \sum \frac{\rho^n}{n!} (iu)^n (iv)^n$$

Inversement, supposons qu'il existe une loi hermitienne F

associée aux T_n. Du développement

$$e^{-\lambda x+\frac{\lambda^2}{2}} = \Sigma\ (-1)^n\ \frac{\lambda^n}{n!}\ H_n(x)$$

résulte alors :

$$e^{\lambda^2/2}\ E[e^{\lambda X}|Y=y] = \Sigma\ \frac{(-1)^n}{n!}\ T_n\ \lambda^n\ H_n(y)$$

Cette expression doit être ≥ 0 pour tout λ réel, ou, ce qui revient au même, la mesure :

$$(2\text{-}3) \qquad e^{\lambda^2/2}\ E(e^{\lambda X}|y)\ G(dy) = \Sigma\ \frac{(-1)^n}{n!}\ T_n\ \lambda^n\ H_n(y)\ G(dy)$$

doit être une probabilité. Compte tenu de (2-2), on peut prendre la transformée de Fourier terme à terme. Or, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuy}\ H_n(y)\ G(dy) = (-1)^n\ (iu)^n\ e^{-u^2/2}$$

La fonction caractéristique de la loi (2-3) est donc :

$$\Phi_\lambda(u) = \Sigma\ \frac{T_n\ \lambda^n}{n!}\ (iu)^n\ \ e^{-u^2/2}$$

Changeons u en u/λ et faisons tendre λ vers l'infini : il vient

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_\lambda\ \left(\frac{u}{\lambda}\right) = \Sigma\ \ T_n\ \frac{(iu)^n}{n!}$$

Cette limite est une fonction continue de u (car $|T_n| \leq 1$). C'est donc encore une fonction caractéristique. Il existe donc une loi ϖ telle que :

$$\Sigma\ T_n\ \frac{(iu)^n}{n!} = \int e^{iu\rho}\ \ \varpi(d\rho)$$

c'est-à-dire

$$T_n = \int \rho^n \varpi(d\rho)$$

De plus, comme on a $|T_n| \leq 1$, cette loi ϖ est nécessairement concentrée sur l'intervalle fermé $(-1,+1)$.

Enfin, la loi ϖ étant concentrée sur un intervalle borné, est univoquement définie par ses moments T_n, de sorte que la loi hermitienne F est unique.

On remarque de plus que les lois hermitiennes constituent un ensemble convexe, fermé et même compact pour la convergence en loi (en effet, la convergence d'une suite F_n de loi hermitienne est équivalente à celle des lois $\varpi_n(d\rho)$ associées, et les lois à support dans $(-1,1)$ forment un ensemble compact). Compte tenu de l'unicité, on en déduit :

COROLLAIRE - Les lois hermitiennes forment un simplexe dont les éléments extrémaux sont les lois de Gauss à deux variables.

3 - FORME GENERALE DES LOIS DE LAGUERRE

On va retrouver la même structure en simplexe pour les lois de Laguerre, i.e. les lois F vérifiant :

1 - Chacune des lois marginales est la loi Gamma de densité

$$g_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x} \qquad (x \geq 0)$$

2 -
$$E[L_n(X)|Y] = T_n L_n(Y)$$
$$E[L_n(Y)|X] = T_n L_n(X)$$

Ici L_n est le polynome de Laguerre défini par

$$(-1)^n \, n! \, x^{\alpha-1} \quad e^{-x} \, L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \quad (x^{n+\alpha-1} \, e^{-x})$$

Les polynomes normalisés ℓ_n sont définis, de leur côté, par :

$$\;_n = L_n / \sqrt{C_n} \quad , \quad C_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n! \, \Gamma(\alpha)}$$

Partons du développement :

$$e^{-\lambda x} = \Sigma \, (-1)^n \, \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^{n+\alpha}} \, L_n(x)$$

(λ réel > 0). Il en résulte que la transformée de Laplace d'une loi de Laguerre est de la forme

$$(3\text{-}1) \qquad E(e^{-\lambda x-\mu x}) = \Sigma \, C_n \, T_n \, \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^{n+\alpha}} \, \frac{\mu^n}{(1+\mu)^{n+\alpha}}$$

Les T_n, coefficients de corrélation de $\ell_n(X)$ et $\ell_n(Y)$, vérifient ici encore :

$$(3\text{-}2) \qquad T_o = 1 \qquad |T_n| \leq 1$$

Pour k entier positif, on a le développement :

$$x^k = \Gamma(\alpha+k) \left[1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \, \frac{L_n(x)}{C_n} \right]$$

et par suite :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+k)} \, E(X^k|Y) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \, T_n \, \frac{L_n(Y)}{C_n}$$

Ainsi, la mesure de densité :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+k)} \quad E(X^k|Y)\ g_\alpha(Y) = \left[1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{T_n}{C_n} L_n(Y)\right] g_\alpha(Y)$$

est une probabilité sur R_+. Elle admet la transformée de Laplace :

$$\Phi_k(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^\alpha} \left[1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} (-1)^n\, T_n \frac{\lambda^n}{(1+\lambda)^n}\right]$$

Changeons λ en λ/k. De $|T_n| \leq 1$ et

$$\frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^n \leq \lambda^n$$

on déduit, par application du théorème de convergence dominée :

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k\left(\frac{\lambda}{k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{T_n\, \lambda^n}{n!}$$

Cette limite, étant continue en $\lambda = 0$, est encore la transformée de Laplace d'une loi ϖ concentrée sur R_+. Donc, on a

$$T_n = \int_0^\infty \rho^n\, \varpi(d\rho) \tag{3-3}$$

et la relation $|T_n| \leq 1$ entraine que ϖ est en fait concentrée sur l'intervalle fermé $(0,1)$.

Inversement, si $T_n = \rho^n$ avec $0 \leq \rho \leq 1$, l'expression

$$\Phi_\rho(\lambda,\mu) = \sum C_n\, \rho^n \frac{\lambda^n\, \mu^n}{(1+\lambda)^{n+\alpha}(1+\mu)^{n+\alpha}} = \frac{1}{(1+\lambda+\mu+(1-\rho)\lambda\mu)^\alpha}$$

est la transformée de Laplace de la loi de densité :

$$f_\rho(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum \frac{1}{n!\ \Gamma(\alpha+n)} \frac{\rho^n}{(1-\rho)^{\alpha+2n}} (xy)^{\alpha+n-1}\, e^{-\frac{x+y}{1-\rho}}$$

Donc, si T_n est de la forme (3-3), le mélange correspondant est une loi de Laguerre associée aux T_n et définie par sa transformée de Laplace

$$\Phi(\lambda,\mu) = \int_0^1 \frac{\varpi(d\rho)}{[1+\lambda+\mu+(1-\rho)\lambda\mu]^{\alpha}} \tag{3-4}$$

Ici encore, la donnée des T_n détermine univoquement la loi ϖ concentrée sur (0,1). Ainsi :

THEOREME - La forme générale des lois de Laguerre d'indice α est donnée en (3-4), et les T_n correspondants par (3-3), et ces lois constituent un simplexe.

4 - COVARIANCE D'UNE ANAMORPHOSEE

Voici maintenant quelques calculs inspirés par la dernière note d'A. Maréchal (Analyse numérique des anamorphoses gaussiennes, Annexe V), dont l'objectif est d'élucider les fonctions $W_p(u)$ introduites page 57.

Soient X, Y, Z trois gaussiennes centrées normées, et

ρ	le coefficient	de corrélation	de	X et Y
r	"	"	"	X et Z
s	"	"	"	Y et Z

On a :

$$E(e^{\lambda X+\mu Y+\nu Z}) = e^{\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{2} + \rho\lambda\mu + r\lambda\nu + s\mu\nu}$$

$$= e^{\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{2}} \sum_{n,p,q} \frac{\rho^n}{n!} \frac{r^p}{p!} \frac{s^q}{q!} \lambda^{n+p} \mu^{n+q} \nu^{p+q}$$

Comme $\lambda^k \; e^{\lambda^2/2}$ est la transformée de Laplace de $(-1)^k \; H_k(x) \; e^{\lambda x} \; g(x)$, il suit de là que la densité de la loi à trois variables admet le développement :

$$\left[\sum_{npq} \frac{\rho^n}{n!} \frac{r^p}{p!} \frac{s^q}{q!} H_{n+p}(x) \; H_{n+q}(y) \; H_{p+q}(z) \right] g(x) \; g(y) \; g(z)$$

(valable pour $|\rho|$, $|r|$ et $|s| < 1$).

Si $f = \sum \frac{\phi_n}{n!} H_n$ et $f' = \sum \frac{\phi'_n}{n!} H'_n$ sont deux fonctions telles que $f(X)$, $f'(Y)$ et $f(X)f'(Y)$ aient des moments d'ordre 2, on en déduit aussitôt :

$$(4-1) \quad E[f(X) \; f'(Y) \,|\, Z=z] = \sum_{n,p,q} \frac{\rho^n}{n!} \frac{r^p}{p!} \frac{s^q}{q!} \phi_{n+p} \; \phi'_{n+q} \; H_{p+q}(z)$$

Ceci peut se détailler sous la forme :

$$E[f(X) \; f'(Y) \,|\, Z=z] = \sum_{N=o}^{\infty} \frac{B_N}{N!} H_N(z)$$

avec

$$(4-2) \qquad B_N = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{p=o}^{N} C_N^p \; r^p \; s^{N-p} \; \phi_{n+p} \; \phi'_{n+N-p}$$

Le cas dunconditionnement optimal étudié par A. Maréchal correspond à $r = s$. Avec $f = f'$, la fonction B_N s'identifie à $r^N \; W_N(\rho)$. Nous allons donner une interprétation directe de cette fonction.

Pour cela, posons :

$$D^2 = r^2 + s^2 - 2 \rho rs$$

et introduisons les deux gaussiennes normées centrées :

$$(4\text{-}3) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{X(r-\rho s) + Y(s-\rho r)}{D\sqrt{1-\rho^2}} \\ B = \dfrac{sX - rY}{D} \end{cases}$$

La première est, à un facteur près, la projection de Z dans le plan de (X,Y), et la seconde est orthogonale à cette projection. D'où les formules inverses :

$$(4\text{-}4) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{r\sqrt{1-\rho^2}\,A + (s-\rho r)B}{D} \\ Y = \dfrac{s\sqrt{1-\rho^2}\,A - (r-\rho s)B}{D} \end{cases}$$

Notons qu'à A fixé, X et Y sont indépendantes de Z, puisque A est à un facteur près la projection de Z sur (X,Y), et $\langle A\,Z \rangle = \dfrac{D}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Si l'on part du développement :

$$E[f(X)\ f'(Y|A] = \sum \frac{E[f(X)\ f'(Y)\ H_N(A)]}{N!}\quad H_N(A)$$

il en résulte donc :

$$E[f(X)\ f'(Y)|Z] = \sum_{N=o}^{\infty} \left(\frac{D}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^N \frac{E[f(X)\ f'(Y)\ H_N(A)]}{N!}\quad H_N(Z)$$

Par conséquent, le coefficient B_N qui figure en (4-2) admet l'expression suivante :

$$(4\text{-}5) \qquad B_N = \left(\frac{r^2+s^2 - 2\rho rs}{1-\rho^2}\right)^{\frac{N}{2}} E[f(X)\ f'(Y)\ H_N(A)]$$

En particulier, si r = s, on a $B_N = r^N\, W_N(\rho)$ et

$$(4\text{-}6) \qquad W_N(\rho) = \left(\frac{2}{1+\rho}\right)^{\frac{N}{2}} E\left[f(X)\ f'(Y)\ H_N\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right)\right]$$

Comme A et B sont des gaussiennes indépendantes, on peut utiliser (4-4) pour calculer l'expression :

$$E[f(X)\, f'(Y)\, H_N(A)] = \iint f\left(\frac{zr\sqrt{1-\rho^2} + z'(s-\rho r)}{D}\right) \times$$

$$f'\left(\frac{zs\sqrt{1-\rho^2} - z'(r-\rho s)}{D}\right) H_N(z)\, g(z)\, g(z')\, dz\, dz'$$

par la méthode de Gauss : cela doit abréger considérablement les calculs numériques .

Dans le cas r = s, on trouve en particulier :

$$W_N(\rho) = \left(\frac{2}{1+\rho}\right)^{\frac{N}{2}} \iint f\left(\frac{z\sqrt{1+\rho} + z'\sqrt{1-\rho}}{2}\right) \quad f'\left(\frac{z\sqrt{1+\rho} - z'\sqrt{1-\rho}}{2}\right) \times$$

$$\times\ H_N(z)\, g(z)\, g(z')\, dz\, dz'$$

5 - POINT DE VUE DES GENERATEURS INFINITESIMAUX

La théorie des demi-groupes éclaire les résultats relatifs aux lois hermitiennes et aux lois de Laguerre. Elle permet aussi de prévoir l'existence d'un modèle isofactoriel où les lois marginales sont des lois beta avec comme facteurs les polynomes correspondants de Jacobi.

Considérons le cas d'une loi à une variable, admettant une densité g suffisamment régulière, concentrée sur un intervalle fermé (b,c), avec éventuellement $b = -\infty$, et/ou $c = +\infty$. Soit a(x) une fonction strictement positive pour $b < x < c$, nulle en $x = b$, $x = c$, et telle que a(x) g(x) soit dérivable sur l'intervalle fermé (b,c).

Si f est deux fois continument différentiable sur (b,c) et φ une fois differentiable, on trouve alors en effectuant une intégration par partie :

$$\int [a(x)\, f''(x) + \frac{f'(x)}{g(x)} \frac{d}{dx} (ag)]\, \varphi(x)\, g(x)\, dx =$$
$$- \int f'(x)\, \varphi'(x)\, a(x)\, g(x)\, dx$$

Autrement dit, dans l'espace $L^2(\mathbb{R},g)$, l'opérateur A défini par :

$$\text{(5-1)} \qquad Af = a\, f'' + \frac{1}{g} \frac{d(ag)}{dx} f' = \frac{1}{g} \frac{d}{dx} (a\, g\, f')$$

vérifie :

$$< A\, f,\, \varphi > = - < \sqrt{a}\, f',\ \sqrt{a}\, \varphi' >$$

En posant $B\, f = \sqrt{a}\, f'$, on a donc $A = - B^*B$: l'opérateur A est hermitien négatif (au sens $< A\, f,\, f > = - \|Bf\|^2 \leq 0$). Il suffit donc que A soit dense et fermé dans $L^2(\mathbb{R},g)$, pour qu'il existe dans cet espace un demi-groupe $P_t = e^{At}$ admettant A comme opérateur infinitésimal. Comme l'équation d'évolution

$$\text{(5-2)} \qquad \frac{\partial f_t}{\partial t} = A\, f_t = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x} \left(a\, g\, \frac{\partial f_t}{\partial x}\right)$$

est du type équation de la chaleur, il s'agit d'un demi-groupe de diffusion. D'après (5-2), $\int g\, A\, f_t = 0$, de sorte que la loi de densité g est la limite ergodique de $P_t(x;dy)$ pour $t \to \infty$.

Supposons maintenant que, parmi les fonctions propres de l'opérateur hermitien A, on puisse trouver une suite χ_n constituant une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R},g)$. Si $-\lambda_n$ est la valeur propre associée à χ_n, on a $P_t\, \chi_n = e^{-\lambda_n t}\, \chi_n$ et par suite pour toute $f \in L^2(\mathbb{R},g)$:

$$P_t\, f = \Sigma\; e^{-\lambda_n t} < f\, \chi_n > \chi_n$$

La loi à 2 variables $g(x)\, dx\, P_t(x,\, dy) = F_t(dx,\, dy)$ admet donc la représentation factorielle :

$$(5\text{-}3) \qquad F_t(dx,\, dy) = \Sigma\; e^{-\lambda_n t}\, \chi_n(x)\, \chi_n(y)\, G(dx)\, G(dy)$$

Autrement dit : le processus markovien associé à ce demi-groupe constitue un modèle isofactoriel.

Exemples - 1.- Processus Gaussien. Sur R entier ($b = -\infty$, $c = +\infty$)

Il correspond à $a = 1$ et $g = (1/\sqrt{2\pi})\, \exp(-x^2/2)$. Ici

$$A\, f = f'' - x\, f'$$

Les polynomes d'Hermite H_n vérifient $A\, H_n = -n\, H_n$, et F_t est la loi de Gauss associée au coefficient de corrélation $\rho = e^{-nt}$.

2.- Processus Gamma sur $\mathbb{R}^+$ ($b = 0$, $c = +\infty$).

Prenons cette fois $a(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x}$. Cette fois, on trouve :

$$A\, f = x\, f'' + (\alpha - x)\, f'$$

Le polynome de Laguerre :

$$F(-n,\alpha,x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

est fonction propre associée à la valeur propre $-\lambda_n = -n$. En désignant par ℓ_n le polynome normalisé, on trouve donc la représentation

$$F_t = \sum e^{-nt} \ \ell_n(x) \ \ell_n(y) \ \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ \frac{y^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ e^{-x-y}$$

3.- Processus Beta sur $(\underline{0},\underline{1})$. Prenons maintenant :

$$a(x) = x(1-x) \quad ; \quad g_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \ x^{\alpha-1} \ (1-x)^{\beta-1}$$

L'opérateur A a pour expression !

$$\text{(5-4)} \qquad A\, f = x(1-x)\ f'' + [\alpha - (\alpha+\beta)x]\ f'$$

Les polynomes de Jacobi :

$$\text{(5-5)} \quad \begin{cases} F(-n,\ \alpha+\beta+n-1,\ \alpha;x) = \\ \displaystyle =1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)..(n-k+1)(\alpha+\beta+n-1)(\alpha+\beta+n)..(\alpha+\beta+n+k-2)}{\alpha(\alpha+1)..(\alpha+k-1) \qquad k!} x^k \end{cases}$$

sont fonctions propres associées aux valeurs propres

$$-\lambda_n = -n(n+\alpha+\beta-1)$$

Par suite, en désignant par χ_n les polynomes normalisés, on a la représentation

$$F_t(dx,dy) = \sum e^{-n(n+\alpha+\beta-1)t} \ \chi_n(x)\ \chi_n(y)\ g_{\alpha\beta}(x)\ g_{\alpha\beta}(y) \quad dx\, dy$$

Il est intéressant de noter le facteur de norme. Désignons, pour abréger, par F_n le polynome défini en (5-5) :

$$F_n(x) = 1 + \ldots + (-1)^n \ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+n)} \ \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)} \ x^n$$

D'autre part, la relation :

$$P_n(x) = x^{1-\alpha}(1-x)^{1-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta+n-1}]$$

définit également des polynomes orthogonaux dans $L^2(\mathbb{R},g)$. Par suite :

$$P_n(x) = C_n F_n(x)$$

Dans $P_n(x)$, le terme constant est :

$$C_n = P_n(o) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

En comparant avec l'expression de F_n, il en résulte que le terme de plus haut degré de P_n est :

$$(-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)} x^n$$

Maintenant :

$$\int_o^1 P_n^2(x)\, g(x)\, dx =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_o^1 P_n(x) \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta+n-1}]\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (-1)^n \int_o^1 \frac{d^n P_n(x)}{dx^n} x^{\alpha+n-1} (1-x)^{\beta+n-1}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n-1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n-1)} \frac{1}{\alpha+\beta+2n-1}$$

est le facteur de normalisation cherché.

Remarque - A la différence des deux cas précédents, on n'a pas la forme simple $T_n = \rho^n = e^{-nt}$, mais

$$T_n = e^{-n(n+\alpha+\beta-1)t}$$

J'ignore s'il existe une loi de Jacobi avec $T_n = \rho^n$. J'ignore également si ces lois constituent encore un simplexe, et dans l'affirmation si les éléments extrémaux sont justement les lois F_t du type précédent.

6 - COMPACITE D'UNE FAMILLE DE LOIS ISOFACTORIELLES

Soit $F(dx)$ une loi, χ_n une base orthonormée dans $L^2(\mathbb{R},F)$, et $\mathscr{C}$ la famille des lois à deux variables $F(dx,dy)$ admettant les lois marginales égales à F et vérifiant :

$$(6\text{-}1) \qquad \begin{cases} E[\chi_n(X)\,|\,Y] = T_n\ \chi_n(Y) \\ E[\chi_n(Y)\,|\,X] = T_n\ \chi_n(X) \end{cases}$$

(il en existe : par exemple $T_o = 1$, $T_n = 0$, $n \geq 1$; ou encore $T_n = 1$ pour tout n : le premier cas est celui de X et Y indépendants, le second celui de $X = Y$ p.s.).

$\mathscr{C}$ est évidemment convexe. Momtrons qu'il est fermé (pour la convergence en loi) et même compact.

Partons du développement de l'exponentielle complexe :

$$(6\text{-}2) \qquad \begin{cases} e^{iux} = \sum \varphi_n(u)\ \chi_n(x) \\ \varphi_n(u) = \int e^{iux}\ \chi_n(x)\ F(dx) \end{cases}$$

Pour u fixé, ce développement converge dans $L^2(\mathbb{R}, F)$. En utilisant la continuité de l'opérateur E_2 d'espérance conditionnelle, on trouve donc d'après (6-1) :

$$E[e^{iux} | Y = y] = \Sigma\, T_n\, \varphi_n(u)\, \chi_n(y)$$

Le produit scalaire de cette expression par e^{ivy} donne ainsi :

(6-3) $$\Phi(u,v) = E[e^{iux+ivy}] = \Sigma\, T_n\, \varphi_n(u)\, \varphi_n(v)$$

Pour $T_n = 1 \; \forall\, n$, en particulier :

$$\Phi(u+v) = \Sigma\, \varphi_n(u)\, \varphi_n(v)$$

ou cette fois Φ_o est la fonction caractéristique de la loi F(dx) à une variable. Pour v = -u, il vient

$$\varphi_n(-u) = < e^{-iux}, \chi_n > = \overline{\varphi_n(u)}$$

donc pour tout u :

(6-4) $$1 = \Sigma\, |\varphi_n(u)|^2$$

Dans (6-3), nous avons la majoration $|T_n| \leq 1$ (comme coefficient de corrélation de $\chi_n(X)\, \chi_n(Y)$, et :

(6-5) $$|T_n|\, |\varphi_n(u)\, \varphi_n(v)| \leq \frac{|\varphi_n(u)|^2 + |\varphi_n(v)|^2}{2}$$

D'après (6-4), donc, le développement de $\Phi(u,v)$ est majoré terme à terme par une expression convergente <u>indépendante</u> de T_n.

Soient alors F_k une suite de lois dans $\mathcal{E}$, $\Phi_k(u,v)$ leurs fonctions caractéristiques et $T_n(k)$ les coefficients associés.

a/ Si $\lim_{k\to\infty} T_n(k) = T_n$ pour chaque n, les lois F_k convergent vers une loi $F \in \mathcal{C}$ dont la fonction caractéristique est

$$\Phi(u,v) = \Sigma\, T_n\, \varphi_n(u)\, \varphi_n(v)$$

En effet, d'après (6-5) et le Théorème de convergence dominée, on a $\lim \Phi_k = \Phi$ et cette limite est continue.

b/ L'ensemble des suites $\{T_n\}$ telles que $|T_n| \leq 1$ est compact pour la convergence simple : par le procédé de diagonalisation, on peut de toute famille $\{T_n(k)\}$, $k = 1,2\ldots$ extraire une sous-famille convergente $\{T_n(k_i)\}$. D'après a/, on peut donc extraire de toute suite $\{F_k\}$ dans $\mathcal{C}$ une suite convergente : donc, $\mathcal{C}$ est <u>compacte.</u>

c/ Notons enfin que $F_k \to F$ en loi dans $\mathcal{C}$ si et seulement si $\lim_{k\to\infty} T_n(k) = T_n$ pour chaque n.

D'après a/, cela est suffisant. Inversement, supposons $F_k \to F$. On peut extraire de $\{T_n(k)\}$ une sous-famille $\{T_n(k_i)\}$ telle que $T_n(k_i) \to T_n$ pour tout n. D'après a/,

$$\Phi(u,v) = \Sigma\, T_n\, \varphi_n(u)\, \varphi_n(v) \tag{6-6}$$

est la fonction caractéristique de F.

Si nous montrons que la représentation (6-6) de la loi F est unique, il en résultera $\lim_k T_n(k) = T_n$ par suite de l'unicité des T_n. Il faut donc montrer :

d/ Les T_n sont univoquement déterminés par (6-6).

En effet, $\varphi_n(v) = \langle e^{iv\cdot}\, \chi_n \rangle$ est la transformée de

Fourier de $\chi_n(x)\ F(dx)$ et

$$\Phi(u,v) = \Sigma\ T_n\ \varphi_n(u) \int e^{ivy}\ \chi_n(y)\ F(dy)$$

Si $h \in \mathcal{S}$ est indéfiniment dérivable à décroissance rapide ainsi que ses dérivées, sa transformée $\tilde{h}$ est aussi dans $\mathcal{S}$ et on trouvera (d'après (6-5) et le théorème de convergence dominée :

$$\int \varphi(u,v)\ \tilde{h}(v)\ dv = \Sigma\ T_n\ \varphi_n(u) \int \varphi_n(v)\ \tilde{h}(v)\ dv$$

Par suite :

$$E(e^{iuX}|y)\ F(dy) = \Sigma\ T_n\ \varphi_n(u)\ \chi_n(y)\ F(dy)$$

puis, en multipliant par $\chi_n(y)$ et en intégrant :

$$T_n\ \varphi_n(u) = < E(e^{iuX}|Y),\ \chi_n(Y) >$$

Comme φ_n n'est pas $\equiv 0$, T_n est univoquement déterminée par cette relation, de sorte que la représentation (6-6) est bien unique.