

Fontainebleau

N-409



NOTE GEOSTATISTIQUE N° 130

LA CONVERGENCE EN LOI

DES SERIES ALEATOIRES

G. MATHERON

Avril 1975

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 130

LA CONVERGENCE EN LOI DES FERMES ALEATOIRES
 =====

Je me propose dans ce qui suit de caractériser la convergence en loi des EFA.

Je désigne par E un espace LCD quelconque, et un EFA sur E , soit A , est défini par la donnée de sa probabilité P sur la σ -algèbre σ_f des boréliens de $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$, ou, aussi bien, par la capacité associée $T : B \rightarrow T(B) = P(\mathcal{F}_B)$ pour B borélien dans E .

Nous dirons qu'une suite A_n d'EFA sur E converge en loi vers un EFA A si les probabilités P_n associées aux A_n convergent étroitement vers la probabilité P associée à A . Comme $\mathcal{F}$ est compact, il y a ici identité entre la convergence étroite et la convergence vague. En particulier, l'ensemble $\mathcal{P}$ des probabilités sur σ_f est un sous-ensemble convexe et compact de l'espace des mesures sur $\mathcal{F}$. Autrement dit, de toute suite A_n d'EFA sur E on peut extraire une suite partielle A_{n_k} convergeant en loi vers un EFA A .

- CRITERES DE CONVERGENCE EN LOI -

D'après la définition de la convergence étroite (= vague) des probabilités sur σ_f , on a $P_n \rightarrow P$ (ou $A_n \rightarrow A$ en loi) si et seulement si :

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{\lim} P_n(\mathcal{U}) \leq P(\mathcal{U}) & \forall \mathcal{U} \in \mathcal{K}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(\mathcal{F}) \\ \underline{\lim} P_n(\mathcal{U}) \geq P(\mathcal{U}) & \forall \mathcal{U} \in \mathcal{G}(\mathcal{F}) \end{cases}$$

Il est plus commode de traduire ce critère en termes de fonctionnelles T .

Proposition 1 - Soient A_n , $n = 1, 2, \dots$ et A des EFA, T_n , $n = 1, 2, \dots$ et T leurs fonctionnelles associées. On a $A_n \rightarrow A$ en loi si et seulement si :

$$\begin{cases} \overline{\lim} T_n(K) \leq T(K) & K \in \mathcal{K} \\ \underline{\lim} T_n(G) \geq T(G) & G \in \mathcal{G} \end{cases}$$

Nous allons même établir un résultat plus fort. Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts relative-ment compacts stable pour la réunion finie et constituant une base de la topologie de E (Comme E est LCD, il existe de telles familles $\mathcal{B}$ dénombrables, mais on peut évidemment aussi prendre $\mathcal{B} = \mathcal{G}$). Il suit de là que :

~ pour tout $K \in \mathcal{K}$, il existe une suite $\{B_n\} \subset \mathcal{B}$ telle que $B_n \supset \overline{B_{n+1}}$ et $B_n \downarrow K$

~ pour tout $G \in \mathcal{G}$, il existe une suite $\{B'_n\} \subset \mathcal{B}$ telle que $\overline{B'_n} \subset B_{n+1}$ et $B'_n \uparrow G$.

$\mathcal{B}$ étant stable pour la réunion finie, il en est de même de $\mathcal{B}' = \{\overline{B}, B \in \mathcal{B}\}$. Par suite :

~ toute fonctionnelle ϕ sci croissante sur $\mathcal{G}$ est déterminée par sa restriction à $\mathcal{B}$, et toute fonctionnelle ϕ' scs croissante sur $\mathcal{K}$ est déterminée par sa restriction à $\mathcal{B}'$.

~ inversement, une fonction ϕ croissante sur $\mathcal{B}$ (resp. ϕ' sur $\mathcal{B}'$) admet un prolongement nécessairement unique sci sur $\mathcal{G}$

(resp. scs sur $\mathcal{K}$) si et seulement si elle est sci sur $\mathcal{B}$ (resp. scs sur $\mathcal{K}'$)

Ces propriétés élémentaires seront utilisées constamment dans ce qui suit.

Proposition 2 - Soit $\{A_n\}$ une suite d'EFA et T_n leurs fonctionnelles. La suite A_n converge en loi si et seulement si il existe une fonctionnelle T scs sur $\mathcal{K}$ et sci sur $\mathcal{G}$ telle que $T(G) = \sup\{T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}, G \in \mathcal{G}$ et :

$$\overline{\lim} T_n(\overline{B}) \leq T(\overline{B})$$

$$\underline{\lim} T_n(B) \geq T(B)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}$. T est alors la fonctionnelle associée à la limite en loi A de la suite $\{A_n\}$.

Démontrons simultanément les deux propositions 1 et 2. Si A_n converge en loi vers A et si T est la fonctionnelle associée à A , les conditions énoncées dans Prop. 1 sont vérifiées : car si $K \in \mathcal{K}$, on a $\mathcal{F}_K \in \mathcal{K}(\mathcal{F})$ et si $G \in \mathcal{G}$, on a $\mathcal{F}_G \in \mathcal{G}(\mathcal{F})$, de sorte qu'il suffit d'appliquer la formule (1). On a donc prouvé la nécessité de la condition de Prop. 1 (et a fortiori celle de Prop. 2).

Réciproquement, supposons vérifiée la condition énoncée dans Prop. 2, et montrons qu'alors $A_n \rightarrow A$ en loi avec $P(A \in \mathcal{F}_K) = T(K)$ (la réciproque de Prop. 1 en résultera a fortiori).

Comme $\mathcal{F}$ est compact, soit $\{A_{n_k}\}$ une suite partielle convergeant en loi vers un EFA A' dont la fonctionnelle est T' , et

montrons que T et T' coïncident sur $\mathcal{B}$: il en résultera qu'elles coïncident sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{K}$ et que (par suite de l'unicité de la probabilité P' associée à A'), la suite A_n elle-même converge vers A' .

Soit donc $B_0 \in \mathcal{B}$ et, dans $\mathcal{B}$, une suite $B_n \downarrow \bar{B}_0$ avec $B_n \supset \bar{B}_{n+1} \supset \dots$. On a :

$$T(\bar{B}_0) = \inf_p T(B_p) \leq \inf_p \underline{\lim} T_n(B_p)$$

puisque T est sci sur $\mathcal{G}$ et vérifie les hypothèses de la Prop. 2. Pour chaque p , on a de plus

$$\underline{\lim} T_n(B_p) \leq \underline{\lim} T_{n_k}(B_p) \leq \overline{\lim} T_{n_k}(\bar{B}_p) \leq T'(\bar{B}_p)$$

car $A_{n_k} \rightarrow A'$ en loi et que la suite partielle T_{n_k} vérifie donc les conditions de Prop. 2 (d'après la première partie de la démonstration). Ainsi, T' étant sci sur $\mathcal{G}$:

$$T(\bar{B}_0) \leq \inf_p T'(\bar{B}_p) = T'(\bar{B}_0)$$

De même, soit dans $\mathcal{B}$ une suite $B'_p \uparrow B_0$ avec $\bar{B}'_p \subset B_{p+1} \subset \dots$. Il vient de la même façon :

$$\begin{aligned} T(B_0) &= \sup_p T(\bar{B}'_p) \geq \sup_p \overline{\lim} T_n(\bar{B}'_p) \geq \\ &\geq \sup_p \overline{\lim} T_{n_k}(\bar{B}'_p) \geq \sup_p \underline{\lim} T_{n_k}(B'_{p'}) \geq \\ &\geq \sup_p T'(B'_p) = T'(B_0) \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $B_0 \in \mathcal{B}$ on a :

$$T(\overline{B}_0) \leq T'(\overline{B}_0) \quad ; \quad T(B_0) \geq T'(B_0)$$

Compte tenu des propriétés de semi-continuité de T et T' , cela entraîne bien $T = T'$ sur $\mathcal{B}$, et achève la démonstration.

Dans la Proposition 2, on utilise explicitement la fonctionnelle semi-continue T . Voici maintenant un critère où T n'intervient plus.

Critère 1 de Convergence en loi - Une suite $\{A_n\}$ d'EFA converge en loi si et seulement si on a :

$$(2) \quad \overline{\lim} T_n(\overline{B}) \leq \underline{\lim} T_n(B')$$

pour tous B et $B' \in \mathcal{B}$ tels que $\overline{B} \subset B'$.

De plus, si l'on pose $\phi(B) = \underline{\lim} T_n(B)$ ($B \in \mathcal{B}$),
 $T(K) = \inf\{\phi(B), B \in \mathcal{B}, B \supset K\}$ pour $K \in \mathcal{K}$ et $T(G) =$
 $\sup\{T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset G\}$, $G \in \mathcal{G}$, T est la fonctionnelle
associée à la limite en loi des A_n .

En posant $\phi'(\overline{B}) = \overline{\lim} T_n(\overline{B})$ ($B \in \mathcal{B}$), on a aussi bien
 $T(G) = \sup\{\phi'(\overline{B}), B \in \mathcal{B}, \overline{B} \subset G\}$.

La condition (2) est évidemment nécessaire, d'après Prop. 2. Inversement, supposons-la vérifiée, et définissons $\phi(B)$ et T comme dans l'énoncé. Notons d'abord que T est scs sur $\mathcal{K}$ (et par suite aussi sci sur $\mathcal{G}$). En effet, pour tout $K \in \mathcal{K}$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \supset K$ et $\phi(B) \leq T(K) + \varepsilon$. Pour tout compact $K' \subset B$, on a alors $T(K') \leq \phi(B) \leq T(K) + \varepsilon$, et par suite T est scs sur $\mathcal{K}$.

Montrons que T vérifie les conditions de la Proposition 2 (d'où résultera que A_n converge en loi vers un EFA dont la fonctionnelle est justement T). D'après la définition de ϕ , et l'hypothèse (2), on a :

$$\overline{\lim} T_n(\overline{B}) \leq \phi(B')$$

pour $B, B' \in \mathcal{B}$ et $\overline{B} \subset B'$. D'après la définition de T , il en résulte :

$$\overline{\lim} T_n(\overline{B}) \leq T(\overline{B})$$

D'autre part, pour $B \in \mathcal{B}$, on a $T(B) \leq \phi(B)$. En effet, $T(B) = \sup \{T(K), K \in \mathcal{K}, K \subset B\}$, et $T(K)$ est $\leq \phi(B)$ par définition dès que $K \subset B$. Comme $\phi(B) = \underline{\lim} T_n(B)$, il en résulte :

$$T(B) \leq \underline{\lim} T_n(B)$$

et T vérifie bien les conditions des Propositions 1 et 2.

Il reste à établir l'énoncé concernant la fonctionnelle $\phi'(\overline{B}) = \overline{\lim} T_n(\overline{B})$. Posons donc $T'(G) = \sup \{\phi'(\overline{B}), B \in \mathcal{B}, \overline{B} \subset G\}$ pour $G \in \mathcal{G}$ et $T'(K) = \inf \{T'(G), G \in \mathcal{G}, G \supset K\}$. Alors, T' est sci sur $\mathcal{G}$ (et donc scs sur $\mathcal{K}$). En effet, pour $G \in \mathcal{G}$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ avec $\overline{B} \subset G$ et $\phi'(\overline{B}) \geq T'(G) - \varepsilon$. Pour tout ouvert $G' \supset \overline{B}$, on a alors $T'(G') \geq \phi'(\overline{B}) \geq T'(G) - \varepsilon$, et T' est sci. Il reste alors à vérifier que T' satisfait aux conditions énoncées dans la Proposition 1-2. Cela se fait de la même manière que ci-dessus. Pour $B, B' \in \mathcal{B}$ et $\overline{B} \subset B'$, on a d'abord

$$\phi'(\overline{B}) = \overline{\lim} T_n(\overline{B}) \leq \underline{\lim} T_n(B')$$

d'après l'hypothèse (1-2), et par suite $T'(B') \leq \underline{\lim} T_n(B')$ d'après

la définition de T' . D'autre part, on a :

$$T'(\bar{B}) \geq \psi'(\bar{B}) = \overline{\lim} T_n(\bar{B})$$

Car $T'(\bar{B}) = \inf \{T'(G), G \supset \bar{B}, G \in \mathcal{G}\}$ et $T'(G) \geq \psi'(\bar{B})$ dès que $G \supset \bar{B}$. Ainsi, T' vérifie les conditions de Prop. 2, et coïncide avec la fonctionnelle T de la limite en loi des A_n .

Corollaire - Soit A_n une suite d'EFA convergeant en loi, T_n leurs fonctionnelles, et T la fonctionnelle associée à la limite en loi des A_n . Alors, la restriction de T à $\mathcal{G}$ est la plus grande minorante sci de $\underline{\lim} T_n$ sur $\mathcal{G}$, et la restriction de T à $\mathcal{K}$ est la plus petite majorante scs de $\overline{\lim} T_n$ sur $\mathcal{K}$.

En effet, soit Φ une minorante sci de $\underline{\lim} T_n$ sur $\mathcal{G}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a donc $\Phi(B) \leq \underline{\lim} T_n(B) = \psi(B)$. En posant $\Phi(K) = \inf \{\Phi(G), G \supset K, G \in \mathcal{G}\}$ pour $K \in \mathcal{K}$, on a aussi bien (d'après les propriétés de $\mathcal{B}$) :

$$\Phi(K) = \inf \{\Phi(B), B \supset K, B \in \mathcal{B}\} \leq \inf \{\psi(B), B \supset K, B \in \mathcal{B}\}$$

c'est-à-dire $\Phi(K) \leq T(K)$. Par suite, pour tout $G \in \mathcal{G}$:

$$\Phi(G) = \sup \{\Phi(K), K \subset G, K \in \mathcal{K}\} \leq T(G)$$

puisque Φ et T sont semi-continues. T est donc bien la plus grande minorante sci de $\underline{\lim} T_n$ sur $\mathcal{G}$. On montre de la même manière qu'elle est la plus petite majorante scs de $\overline{\lim} T_n$ sur $\mathcal{K}$.

Voici maintenant deux autres critères de convergence en loi.

Critère 2 - $A_n \rightarrow A$ en loi si et seulement si il existe une fonction T sur $\mathcal{G}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

2-a : Pour tout $G \in \mathcal{G}$ et toute suite $\{G_n\}$ convergeant vers G dans $\mathcal{G}$, on a :

$$T(G) \leq \liminf T_n(G_n)$$

2-b : Pour tout $G \in \mathcal{G}$, il existe une suite $\{G_n\}$ convergeant vers G dans $\mathcal{G}$ et telle que

$$T(G) = \lim T_n(G_n)$$

Cette fonction T est alors la fonctionnelle associée à A (et, en particulier, est obligatoirement sci).

Critère 3 - $A_n \rightarrow A$ en loi si et seulement si il existe une fonction T sur $\mathcal{K}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

3-a : Pour tout $K \in \mathcal{K}$ et toute suite $\{K_n\}$ convergeant vers K dans $\mathcal{K}$, on a

$$T(K) \geq \overline{\lim} T_n(K_n)$$

3-b : Pour tout $K \in \mathcal{K}$, on peut trouver une suite $\{K_n\}$ convergeant vers K dans $\mathcal{K}$ et telle que

$$T(K) = \lim T_n(K_n)$$

Cette fonction T est alors la fonctionnelle associée à A (et, en particulier, est obligatoirement scs).

Montrons maintenant l'équivalence des critères 1, 2 et 3.

1 $\Rightarrow$ 2 - En effet, supposons 1 vérifié. Soit $G \in \mathcal{G}$ et $G_n \rightarrow G$ dans $\mathcal{G}$. On peut trouver un ouvert relativement compact $B \in \mathcal{G}$ avec $B \subset \bar{B} \subset G$. Comme $G_n \rightarrow G$, on a aussi $B \subset \bar{B} \subset G_n$ pour n assez grand. Donc :

$$\underline{\lim} T_n(G_n) \geq \underline{\lim} T_n(B) \geq T(B)$$

Mais G est la réunion des B tels que $B \in \mathcal{G}$, $\bar{B} \in \mathcal{K}$, $B \subset \bar{B} \subset G$, et T est sci. On a donc $T(G) = \sup \{T(B), B \in \mathcal{G}, \bar{B} \in \mathcal{K}, B \subset \bar{B} \subset G\} \leq \underline{\lim} T_n(G_n)$: 2-a est vérifiée.

Maintenant, choisissons une suite B_n dans $\mathcal{G}$ avec $\bar{B}_n \in \mathcal{K}$, $\bar{B}_n \subset B_{n+1}$ et $B_n \uparrow G$, et une suite $\varepsilon_k \downarrow 0$. Pour chaque k , on a $\overline{\lim} T_n(\bar{B}_k) \leq T(\bar{B}_k) \leq T(G)$, de sorte qu'il existe un entier N_k avec :

$$T_n(\bar{B}_k) \leq T(\bar{B}_k) + \varepsilon_k \leq T(G) + \varepsilon_k \quad \text{pour } n \geq N_k$$

On peut évidemment choisir les N_k de telle sorte que $N_{k+1} > N_k$. Posons alors $G_n = B_k$ pour $N_k \leq n < N_{k+1}$, et pour chaque n désignons par k_n l'entier k tel que $N_k \leq n < N_{k+1}$. Il vient :

$$T_n(G_n) \leq T(G) + \varepsilon_{k(n)}$$

Or $\varepsilon_{k(n)} \downarrow 0$. On en déduit $\overline{\lim} T_n(G_n) \leq T(G)$. D'autre part on a évidemment $G_n \uparrow G$, donc $G_n \rightarrow G$ dans $\mathcal{G}$. D'après la première partie de la démonstration, cela implique $T(G) \leq \underline{\lim} T_n(G_n)$. Donc $T_n(G_n) \rightarrow T(G)$, et le critère 2 est vérifié.

1 $\Rightarrow$ 3 - Supposons 1 vérifié. Soit K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}$. Choisissons $B \in \mathcal{G}$ avec $\bar{B} \in \mathcal{K}$, $\bar{B} \supset B \supset K$. Comme $K_n \rightarrow K \subset B$, on a $K_n \subset B$ pour n assez grand, donc $T_n(K_n) \leq T_n(\bar{B})$ et $\overline{\lim} T_n(K_n) \leq \overline{\lim} T_n(\bar{B}) \leq T(\bar{B})$ d'après le critère 1. Donc $\overline{\lim} T_n(K_n) \leq \inf \{T(\bar{B}), B \in \mathcal{G}, \bar{B} \in \mathcal{K}, B \supset K\} = T(K)$: 3-a est vérifié.

Choisissons maintenant une suite B_k dans $\mathcal{G}$ avec $\bar{B}_k \in \mathcal{K}$, $B_k \downarrow K$, $B_k \supset \bar{B}_{k+1}$, et une suite $\varepsilon_k \downarrow 0$. Pour chaque k , on a $\underline{\lim} T_n(\bar{B}_k) \geq T(\bar{B}_k)$, d'après le critère 1, donc il existe un entier N_k tel que :

$$T_n(B_k) \geq T(\bar{B}_k) - \varepsilon_k \geq T(K) - \varepsilon_k \quad \text{pour } n \geq N_k$$

On peut évidemment choisir les N_k de sorte que $N_{k+1} > N_k$. Posons alors $K_n = \bar{B}_k$ pour $N_k \leq n < N_{k+1}$ et désignons par k_n l'entier k vérifiant $N_k \leq n < N_{k+1}$. Il vient :

$$T_n(K_n) \geq T(K) - \varepsilon_{k_n}$$

Comme $\varepsilon_{k_n} \downarrow 0$, il en résulte $T(K) \leq \underline{\lim} T_n(K_n)$. Mais d'autre part $K_n \downarrow K$, et donc $T(K) \geq \overline{\lim} T_n(K_n)$, d'après la première partie de la démonstration. Donc $T_n(K_n) \rightarrow T(K)$, et le critère 3 est vérifié.

2 $\Rightarrow$ 1 - Supposons le critère 2 vérifié, et soit $\{A_n\}$ une sous-suite convergeant en loi vers la limite A' associée à la fonctionnelle T' . Montrons $T = T'$, d'où résultera la convergence $A_n \rightarrow A'$ par unicité de la limite.

Soit $G \in \mathcal{G}$. D'après le critère 2, on peut trouver une

suite G_n convergeant vers G dans $\mathcal{G}$ avec $T(G) = \lim T_n(G_n)$. Mais (puisque $1 \Rightarrow 2$), la suite partielle T_{n_k} vérifie le premier énoncé du critère 2, d'où :

$$T(G) = \lim T_n(G_n) = \underline{\lim} T_{n_k}(G_{n_k}) \geq T'(G)$$

En sens inverse, puisque $A_{n_k} \rightarrow A'$, on peut trouver une suite G_{n_k} convergeant vers G dans $\mathcal{G}$ avec $T'(G) = \lim T_{n_k}(G_{n_k})$. Posons $G_N = G_{n_k}$ pour $n_k \leq N < n_{k+1}$, de sorte que $G_N \rightarrow G$. Alors, d'après le critère 2 :

$$T(G) \leq \underline{\lim} T_N(G_N) \leq \underline{\lim} T_{n_k}(G_{n_k}) = T'(G)$$

On conclut donc $T = T'$, et $P_n \rightarrow P'$. La démonstration de l'implication $3 \Rightarrow 1$ est analogue.

REMARQUE - Dans la démonstration de $2 \Rightarrow 1$ (ou $3 \Rightarrow 1$), on n'a pas utilisé le fait que T est la fonctionnelle d'un EFA. La convergence a donc lieu si le critère 2 (ou 3) est vérifié pour une fonction T quelconque sur $\mathcal{G}$ (ou sur $\mathcal{L}$) : la fonction T satisfait alors automatiquement les conditions voulues pour être la fonctionnelle d'un EFA.

Nous allons maintenant montrer que la convergence p.s. d'une suite d'EFA vers un EFA A entraîne la convergence en loi vers la même limite. Posons d'abord un lemme :

LEMME - Soit A_n une suite d'applications mesurables d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$, et pour chaque n , soit T_n la fonctionnelle associée à l'EFA A_n . Alors :

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{K}, & \overline{\lim} T_n(K) \leq P(\overline{\lim} A_n \in \mathcal{F}_K) \\ \forall G \in \mathcal{G}, & \underline{\lim} T_n(G) \geq P(\underline{\lim} A_n \in \mathcal{F}_G) \end{cases}$$

En effet, pour $K \in \mathcal{K}$ et pour toute suite F_N dans $\mathcal{H}$ telle que $F_N \downarrow F$, on a $F \in \mathcal{F}_K$ si et seulement si $F_N \in \mathcal{F}_K$ pour tout N . Or

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_N \overline{\bigcup_{n \geq N} A_n} = \lim \downarrow F_N \text{ avec } F_N = \overline{\bigcup_{n \geq N} A_n}. \text{ Par suite :}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{\lim} A_n \in \mathcal{F}_K) &= P\left(\bigcap_N \left\{ \overline{\bigcup_{n \geq N} A_n} \in \mathcal{F}_K \right\}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\overline{\bigcup_{n \geq N} A_n} \in \mathcal{F}_K\right) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} P(A_n \in \mathcal{F}_K) \\ &= \overline{\lim} T_n(K) \end{aligned}$$

Soit maintenant $G \in \mathcal{G}$. L'ouvert G rencontre $\underline{\lim} A_n$ si et seulement si il rencontre tous les A_n au-delà d'un certain rang. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(\underline{\lim} A_n \in \mathcal{F}_G) &= P\left(\bigcup_N \bigcap_{n \geq N} \{A_n \in \mathcal{F}_G\}\right) \\ &= \sup_N P\left(\bigcap_{n \geq N} \{A_n \in \mathcal{F}_G\}\right) \leq \sup_N \inf_{n \geq N} P(A_n \in \mathcal{F}_G) = \underline{\lim} T_n(G) \end{aligned}$$

Proposition 3 - Avec les mêmes notations que dans le lemme précédent, si la suite A_n converge P-p.s. vers A , alors les A_n convergent en loi vers A .

D'après le lemme, on a en effet pour $K \in \mathcal{K}$ et $G \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} P(\lim A_n \in \mathcal{F}_K) &= T(K) \geq \overline{\lim} T_n(K) \\ P(\lim A_n \in \mathcal{F}_G) &= T(G) \leq \underline{\lim} T_n(G) \end{aligned}$$

et il suffit d'appliquer le critère 1.

Voici quelques résultats complémentaires.

Proposition 4 - Soit A_n une suite d'EFA dont les fonctionnelles T_n constituent une suite décroissante (resp. croissante). Alors la suite A_n converge en loi vers un EFA dont la fonctionnelle T vérifie $T(K) = \lim \downarrow T_n(K)$, $K \in \mathcal{K}$ (resp. $T(G) = \lim \uparrow T_n(G)$, $G \in \mathcal{G}$).

Raisonnons, par exemple, dans le cas de la suite décroissante. La fonction T sur $\mathcal{K}$ définie par $T(K) = \inf T_n(K)$ est scs, comme $\inf$ de fonctions scs. Pour toute suite partielle A_{n_k} convergeant en loi vers un EFA de fonctionnelle T' , on a $T' = T$, d'après le corollaire de Prop. 2, puisque T est la plus petite majorante scs sur $\mathcal{K}$ de $\lim T_n = T$. Donc, par suite de l'unicité de la limite, la suite A_n converge elle-même en loi vers un EFA de fonctionnelle T .

Ceci suggère d'introduire une relation d'ordre $\preceq$ sur l'ensemble des EFA, ou, ce qui revient au même, sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des probabilités sur σ_F , en posant $A \preceq A'$ si $T \leq T'$. Si l'on prend pour $\mathcal{B}$ une base dénombrable de topologie de E vérifiant les propriétés habituelles, on a $A \preceq A'$ si et seulement si $T(B) \leq T'(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$, ou encore si et seulement si $T(\overline{B}) \leq T'(\overline{B})$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Alors, l'ensemble $\mathcal{P}$ des probabilités sur σ_F est inductif pour l'ordre $\preceq$ et, aussi bien, pour l'ordre inverse $\succeq$. Plus généralement, tout sous-ensemble fermé de $\mathcal{P}$ est inductif, et

contient donc des éléments maximaux et des éléments minimaux, pour l'ordre $\leq$.

Soit, en effet, T_i , $i \in I$ une famille filtrante croissante de fonctionnelles associées à des EFA A_i . La fonction sur $\mathcal{G}$ définie par $T(G) = \sup \{T_i(G), i \in I\}$ est sci sur $\mathcal{G}$. D'autre part, on peut extraire de la famille T_i , $i \in I$ (non dénombrable) une suite croissante T_n telle que $T_n(B) \uparrow T(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. On en déduit, comme dans Prop. 4, que la suite A_n converge en loi vers un EFA A dont la fonctionnelle est T : A est donc le plus petit majorant des A_i pour l'ordre $\leq$. De plus, la probabilité P associée à A appartient à la fermeture dans $\mathcal{P}$ de l'ensemble $\{P_i, i \in I\}$. D'où résulte que toute partie fermée de $\mathcal{P}$ est inductive pour $\leq$ et $\geq$, et contient donc des éléments maximaux et des éléments minimaux.

En particulier, l'ensemble des majorants (ou des minorants) d'une famille quelconque A_j , $j \in J$ d'EFA est fermée dans $\mathcal{P}$ et contient donc des éléments minimaux (majorants minimaux des A_j , $j \in J$) ou maximaux (minorants maximaux). Plus généralement, soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{G}$ (resp. de $\mathcal{K}$) et ϕ une fonction quelconque croissante sur $\mathcal{C}$. Alors, l'ensemble des probabilités vérifiant $T \leq \phi$ (resp. $T \geq \phi$) sur $\mathcal{C}$ est fermé dans $\mathcal{P}$. Cela résulte d'une application immédiate du Critère 2. Donc :

Proposition 5 - Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{K}$ (resp. de $\mathcal{G}$), et ϕ une fonction sur $\mathcal{C}$ avec $0 \leq \phi \leq 1$. Alors, il existe des EFA minimaux (resp. maximaux) dont les fonctionnelles T majorent (resp. mineurent) ϕ sur $\mathcal{C}$. En particulier, toute famille d'EFA admet des majorants minimaux et des minorants maximaux.

- QUELQUES PROPRIETES DE LA FONCTIONNELLE T -

En vue d'étudier la convergence en loi dans le cas des EFA stationnaires (EFASt), nous utiliserons quelques propriétés de la fonctionnelle T que nous allons auparavant établir.

Dans ce qui suit $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{G}$ est une classe d'ouverts, et $\mathcal{B}$ la classe stable pour la réunion finie engendrée par $\mathcal{B}_0$. Nous supposons que $\mathcal{B}_0$ possède les propriétés suivantes :

a ~ les éléments de $\mathcal{B}_0$ (donc aussi ceux de $\mathcal{B}$) sont des ouverts relativement compacts. On désignera par $\mathcal{B}'_0$ et $\mathcal{B}'$ la classe des $\bar{B}$ tels que $B \in \mathcal{B}_0$ (resp. $\in \mathcal{B}$). $\mathcal{B}'$ coïncide avec la classe stable pour la réunion finie engendrée par $\mathcal{B}'_0$.

b ~ Tout ouvert $G \in \mathcal{G}$ vérifie la propriété :

$$G = \bigcup \{ B : B \in \mathcal{B}, \bar{B} \subset G \}$$

c ~ Tout compact $K \in \mathcal{K}$ vérifie :

$$K = \bigcap \{ \bar{B} : B \in \mathcal{B}, B \supset K \}$$

Il est facile de voir que chacune des deux propriétés b et c implique l'autre. D'autre part, on sait que lorsque E est un espace LCD, il existe une telle famille $\mathcal{B}_0$, que l'on peut même supposer dénombrable. Par exemple, dans un espace euclidien, on peut prendre pour $\mathcal{B}_0$ la classe des boules de centre et de rayons rationnels, ou encore celle des pavés ouverts de sommets rationnels.

Si $\mathcal{A}$ est une classe d'ensembles dans E stable pour la réunion finie et T une fonction sur $\mathcal{A}$, nous poserons par récurrence :

$$S_1(A_0 ; A_1) = T(A_0 \cup A_1) - T(A_0)$$

$$S_n(A_0 ; A_1, \dots, A_n) = S_{n-1}(A_0 ; A_1 \dots A_{n-1}) \\ - S_{n-1}(A_0 \cup A_n ; A_1, \dots, A_{n-1})$$

pour $A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A}$. Si T est la fonctionnelle d'un EFA et si les éléments de $\mathcal{A}$ sont des boréliens, $S_n(A_0 ; A_1, \dots, A_n) = P(\mathcal{F}_{A_1, \dots, A_n}^{A_0})$.

Ceci étant, d'après le Théorème de Choquet, une fonctionnelle T sur $\mathcal{G}$ (resp. sur $\mathcal{K}$) est la fonctionnelle d'un EFA si et seulement si :

$$\alpha - 0 \leq T \leq 1 \quad \text{et} \quad T(\emptyset) = 0$$

$$\beta - \text{Pour tout } n \text{ et } A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B} \text{ (resp. } \in \mathcal{B}'),$$

$$S_n(A_0 ; A_1, \dots, A_n) \geq 0$$

$$\gamma - \text{Pour tout } B_0 \in \mathcal{B}, \text{ on a :}$$

$$T(B_0) = \sup \{T(B) ; B \in \mathcal{B}, \bar{B} \subset B\}$$

$$(\text{resp. } T(\bar{B}_0) = \inf \{T(\bar{B}) ; B \in \mathcal{B}, B \supset \bar{B}_0\})$$

Nous allons montrer qu'il est possible d'affaiblir ces conditions, en restreignant β aux $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ (mais A_0 doit décrire $\mathcal{B}$ entier) et γ aux $B_0 \in \mathcal{B}_0$.

Dans le cas des ouverts $B \in \mathcal{B}$, ce résultat est dû à D.G. Kendall (sa démonstration fait intervenir la théorie des "weak incidence functions" dont nous n'avons pas besoin ici). La démonstration que je donne ici est à peu près la même dans le cas des ouverts et dans celui des compacts.

Proposition 2-1 - Une fonctionnelle T sur $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) est la restriction de la fonctionnelle d'un EFA si et seulement si :

$$\alpha - 0 \leq T \leq 1 \text{ et } T(\emptyset) = 0$$

β' - Pour tout n , $A_0 \in \mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}_0$ (resp. $\mathcal{B}_0'$) :

$$S_n(A_0 ; A_1, \dots, A_n) \geq 0$$

γ' - Pour tout $B_0 \in \mathcal{B}_0$, on a :

$$T(B_0) = \sup\{T(B) ; B \in \mathcal{B}, \bar{B} \subset B_0\}$$

$$(\text{resp. } T(\bar{B}_0) = \inf\{T(\bar{B}) , B \in \mathcal{B}, B \supset \bar{B}_0\})$$

Il faut donc montrer $\beta' \Rightarrow \beta$ et $\gamma' \Rightarrow \gamma$.

$\beta' \Rightarrow \beta$ - Raisonnons, par exemple, dans le cas des ouverts. Soit $A_0 \in \mathcal{B}$ et $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0$. Par définition, on a pour tout $A \in \mathcal{B}_0$

$$\begin{aligned} S_n(A_0 ; B_1, \dots, B_{n-1}, B_n \cup A) &= \\ S_{n-1}(A_0 ; B_1, \dots, B_{n-1}) - S_{n-1}(A_0 \cup A \cup B_n ; B_1, \dots, B_{n-1}) &= \\ S_{n-1}(A_0 ; B_1, \dots, B_{n-1}) - S_{n-1}(A_0 \cup A ; B_1, \dots, B_{n-1}) &+ \\ + S_{n-1}(A_0 \cup A ; B_1, \dots, B_{n-1}) - S_{n-1}(A_0 \cup A \cup B_n ; B_1, \dots, B_{n-1}) &= \\ = S_n(A_0 ; B_1, \dots, B_{n-1}, A) + S_n(A_0 \cup A ; B_1, \dots, B_{n-1}, B_n) \end{aligned}$$

Donc, d'après β' , cette expression est positive. En raisonnant par récurrence, on en déduit que β est vraie.

$\gamma' = \gamma$ - La technique de la démonstration consiste à établir que la fonction $(-S_1)$ vérifie la même propriété γ' que T elle-même relativement à son premier argument.

Examinons d'abord le cas des ouverts. Soient $B_0 \in \mathcal{B}_0$ et $B_1 \in \mathcal{B}$, de sorte que $S_1(B_0 ; B_1) = T(B_0 \cup B_1) - T(B_0)$. Comme S_1 est non croissante en son premier argument B_0 , pour tout $B \in \mathcal{B}$ tel que $\bar{B} \subset B_0$, on trouve :

$$\begin{aligned} T(B_0 \cup B_1) - T(B) &\geq S_1(B ; B_1) \geq S_1(B_0 ; B_1) = \\ &= T(B_0 \cup B_1) - T(B_0) \end{aligned}$$

Prenons l'Inf pour $B \in \mathcal{B}$, $\bar{B} \subset B_0$. D'après γ' , il vient :

$$S_1(B_0 ; B_1) = \inf \{ S_1(B ; B_1) ; B \in \mathcal{B}, \bar{B} \subset B_0 \}$$

c'est-à-dire :

$$\lim S_1(B ; B_1) = S_1(B_0 ; B_1)$$

la limite étant prise selon la famille filtrante croissante des $B \in \mathcal{B}$, $\bar{B} \subset B_0$. Or $S_1(B ; B_1) = T(B \cup B_1) - T(B)$ et $\lim T(B) = T(B_0)$. Donc $\lim T(B \cup B_1) = T(B_0) + S_1(B_0 ; B_1) = T(B_0 \cup B_1)$, c'est-à-dire :

$$T(B_0 \cup B_1) = \sup \{ T(B \cup B_1) ; B \in \mathcal{B}, \bar{B} \subset B_0 \}$$

Cette relation est établie pour $B_0 \in \mathcal{B}_0$ et $B_1 \in \mathcal{B}$. Donc, si B_1 est dans $\mathcal{B}_0$, pour chaque $B \in \mathcal{B}$ nous avons aussi :

$$T(B \cup B_1) = \sup \{ T(B \cup B') ; B' \in \mathcal{B}, \bar{B}' \subset B_1 \}$$

Par suite, pour B_0 et B_1 dans $\mathcal{B}_0$:

$$T(B_0 \cup B_1) = \text{Sup}\{T(B \cup B'), B, B' \in \mathcal{B}, \bar{B} \subset B_0, \bar{B}' \subset B_1\}$$

Ceci entraine, a fortiori, que γ' est vérifiée pour tout $B \in \mathcal{B}_1$, où $\mathcal{B}_n$ est la classe des réunions de $n+1$ éléments de $\mathcal{B}_0$. Par récurrence, elle est donc valable pour tout n et tout $B \in \mathcal{B}_n$, c'est-à-dire pour tout $B \in \mathcal{B}$: γ est donc vérifiée.

Considérons maintenant le cas des compacts. Soit $B_0 \in \mathcal{B}_0$, $B_1 \in \mathcal{B}$, et $B \in \mathcal{B}$ avec $B \supset \bar{B}_0$. On trouve cette fois :

$$\begin{aligned} S_1(\bar{B}_0 ; \bar{B}_1) &\geq S_1(\bar{B} ; \bar{B}_1) = T(\bar{B} \cup \bar{B}_1) - T(\bar{B}) \\ &\geq T(\bar{B}_0 \cup \bar{B}_1) - T(\bar{B}) \end{aligned}$$

Par suite

$$S_1(\bar{B}_0 ; \bar{B}_1) = \text{Sup}\{S_1(\bar{B} ; \bar{B}_1), B \in \mathcal{B}, B \supset \bar{B}_0\}$$

En introduisant la limite selon la famille filtrante décroissante des $B \in \mathcal{B}$, $B \supset \bar{B}_0$:

$$S_1(\bar{B}_0 ; \bar{B}_1) = \lim [T(\bar{B} \cup \bar{B}_1) - T(\bar{B})] = \lim T(\bar{B} \cup \bar{B}_1) - T(\bar{B}_0)$$

d'où résulte $T(\bar{B}_0 \cup \bar{B}_1) = \lim T(\bar{B} \cup \bar{B}_1)$, soit :

$$T(\bar{B}_0 \cup \bar{B}_1) = \text{Inf} \{T(\bar{B} \cup \bar{B}_1), B \in \mathcal{B}, B \supset \bar{B}_0\}$$

relation vraie pour $B_0 \in \mathcal{B}_0$ et $B_1 \in \mathcal{B}$. On en déduit, comme ci-dessus, pour $B_0 \in \mathcal{B}_0$ et $B_1 \in \mathcal{B}_0$:

$$T(\bar{B}_0 \cup \bar{B}_1) = \text{Inf} \{T(\bar{B} \cup \bar{B}'), B, B' \in \mathcal{B}, B \supset \bar{B}_0, B' \supset \bar{B}_1\}$$

A fortiori, donc, γ' est vraie sur la classe $\mathcal{B}'_1$ constituée des réunions de deux éléments de $\mathcal{B}'_0$. Par une récurrence immédiate, on en déduit γ .

Nous dirons qu'une fonctionnelle T sur une classe $\mathcal{A}$ stable pour l'union finie est complètement monotone si les fonctions S_n correspondantes vérifient β (ou, ce qui revient au même, vérifient β' pour une classe $\mathcal{A}_0$ engendrant $\mathcal{A}$ par réunion finie).

COROLLAIRE - Soit T une fonction complètement monotone sur $\mathcal{K}$ (resp. sur $\mathcal{G}$) et T' sa plus petite majorante scs sur $\mathcal{K}$ (resp. sa plus grande minorante sci sur $\mathcal{G}$). Alors T' est complètement monotone. En particulier, si $0 \leq T \leq 1$ et $T(\emptyset) = 0$, T' est la plus petite fonctionnelle d'EFA majorant T sur $\mathcal{K}$ (resp. la plus grande fonctionnelle d'EFA minorant T sur $\mathcal{G}$). Enfin, le résultat subsiste si T est défini seulement sur $\mathcal{B}'$ (resp. sur $\mathcal{B}$).

Raisonnons, par exemple, dans le cas des compacts. Posons :

$$T'(G) = \sup \{ T(K) ; K \in \mathcal{K}, K \subset G \} \quad G \in \mathcal{G}$$

$$T'(K) = \inf \{ T'(G) ; G \in \mathcal{G}, G \supset K \} \quad K \in \mathcal{K}$$

de sorte que T' est la plus petite majorante scs de T sur $\mathcal{K}$, et que T' est sci sur $\mathcal{G}$. Il faut montrer que T' est complètement monotone sur $\mathcal{G}$, i.e.

$$\begin{aligned} S'_n(G_0 ; G_1, \dots, G_n) &= - T'(G_0) + \sum_{i \geq 0} T'(G_0 \cup G_i) - \\ &- \sum_{0 < i_1 < i_2} T'(G_0 \cup G_{i_1} \cup G_{i_2}) + \dots - (-1)^n T'(G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_n) \geq 0 \end{aligned}$$

Pour chaque $i = 0, 1, \dots, n$, prenons une suite $B_n(i)$ d'ouverts relativement compacts vérifiant $\overline{B}_n(i) \subset B_{n+1}(i)$ et $B_n(i) \uparrow G_i$. Si un compact K est contenu dans $G_0 \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_k}$, il est couvert par $\bigcup_n (B_n(o) \cup B_n(i_1) \cup \dots \cup B_n(i_k))$, donc

$$K \subset B_n(o) \cup \dots \cup B_n(i_k) \subset \overline{B}_n(o) \cup \dots \cup \overline{B}_n(i_k) \subset G_0 \cup \dots \cup G_{i_k}$$

pour n assez grand. Donc :

$$T'(G_0 \cup \dots \cup G_{i_k}) = \lim_n T(\overline{B}_n(o) \cup \dots \cup \overline{B}_n(i_k))$$

Par suite, les relations de monotonie complète, vérifiées par les fonctions S_n associées à T , passent à la limite et sont valables pour les fonctions S'_n associées à T' .

- APPLICATION AUX EFAST -

Maintenant, E est l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$. Un EFA A , défini par une probabilité P sur σ_F , est stationnaire si et seulement si P est invariante par translation. Il suffit pour cela que la fonctionnelle T soit invariante, sur $\mathcal{G}$ ou sur $\mathcal{S}$, pour les translations. L'ensemble des EFAST est fermé, et donc compact, pour la convergence en loi. En effet, soit P_n une suite de probabilités invariantes par translation et convergeant vers P . Pour toute fonction continue f sur $\mathcal{F}$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \int f(F) P(dF) &= \lim \int f(F) P_n(dF) = \lim \int f(F_h) P_n(dF) \\ &= \int f(F_h) P(dF) \end{aligned}$$

En reprenant un raisonnement fait par D.G. Kendall dans le cas de l'espace à une dimension, nous allons montrer que toute fonctionnelle complètement monotone, bornée sur $\mathcal{G}$, et invariante par translation est nécessairement sci.

Dans ce qui suit, $\mathcal{B}_0$ désignera la classe des pavés ouverts.

$$\Pi(a_i, b_i) = \{x : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

et $\mathcal{B}$ la classe des réunions finies de pavés ouverts. Si Π est un pavé ouvert, et si $B \in \mathcal{B}$ vérifie $\bar{B} \subset \Pi$, on peut trouver un autre pavé $\Pi' \in \mathcal{B}_0$ tel que :

$$\bar{B} \subset \Pi' \subset \bar{\Pi}' \subset \Pi$$

Par suite, une fonction T complètement monotone sur $\mathcal{B}$ vérifie la condition γ' de la Prop. 2-1 si et seulement si :

$$(2-1) \quad T(\Pi) = \sup \{T(\Pi') : \Pi' \in \mathcal{B}_0, \bar{\Pi}' \subset \Pi\}$$

et par suite :

LEMME 2-1 - Soit T une fonction complètement monotone sur la classe $\mathcal{B}$ des réunions finies de pavés ouverts dans $\mathbb{R}^n$ et vérifiant $0 \leq T \leq 1$. Alors T est la fonctionnelle d'un EFA sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si (2-1) est vérifié pour tout pavé ouvert Π .

Supposons de plus T invariante par translation sur la classe $\mathcal{B}_0$ des pavés ouverts (stationnaire d'ordre 1^{er}, dans la terminologie de Kendall). Alors, pour $\Pi = \{x : a_i < x_i < b_i\}$, $T(\Pi)$ ne dépend que des longueurs $\ell_i = b_i - a_i$ des arêtes de Π , soit :

$$T(\Pi) = f(\ell_1, \dots, \ell_n)$$

D'après le lemme, T sera la fonctionnelle d'un EFA si et seulement si :

$$(2-2) \quad f(\ell_1, \dots, \ell_n) = \sup_{\ell'_i < \ell_i} f(\ell'_1, \dots, \ell'_n)$$

pour $\ell_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Or cette condition est automatiquement vérifiée dès que T est complètement monotone.

En effet, la fonction f est croissante en chacune des variables ℓ_i , de sorte que (2-2) sera vérifiée si et seulement si f est continue à gauche par rapport à chacune des variables ℓ_i . Or, en fait, f est même continue par rapport à chacune de ces variables. Pour le voir, raisonnons par exemple sur la première coordonnée ℓ_1 . Fixons $\ell_2, \dots, \ell_n$ (toutes > 0) et écrivons $f(\ell_1)$ au lieu de $f(\ell_1, \dots, \ell_n)$. Soient u, v et w trois nombres > 0 . En appliquant la condition de positivité de la fonction S_2 aux pavés Π_0 , Π_1 et Π_2 pour lesquels ℓ_1 est u, v ou w, nous obtenons

$$- f(u) + f(u+v) + g(u+w) - f(u+v+w) \geq 0$$

donc

$$f(u+v) - f(u) \geq f(u+v+w) - f(u+w)$$

Or, f étant croissante et bornée, ceci entraîne que f est continue en tout $\ell = u+w > 0$. Nous concluons :

Proposition 2-2 - Soit T une fonction complètement monotone sur $\mathcal{G}$ (ou sur $\mathcal{B}$), invariante par translation et vérifiant $0 \leq T \leq 1$ et $T(\emptyset) = 0$. Alors T est la fonctionnelle d'un EFAST.

Voici une conséquence concernant la convergence en loi :

Proposition 2-3 - Une suite A_n d'EFAST converge en loi si et seulement si $T_n(G)$ admet une limite $T(G)$ pour tout ouvert G relativement compact (ou simplement pour tout $B \in \mathcal{B}$), et T est alors la fonctionnelle associée à $\lim A_n$.

La condition est nécessaire. Supposons en effet $A_n \rightarrow A$ et prenons pour $\mathcal{B}_0$ la classe dénombrable des pavés ouverts dont les sommets ont des coordonnées rationnelles. Comme $\mathcal{B}$ est dénombrable on peut (par le procédé cantorien usuel) construire une suite partielle n_k telle que $T_{n_k}(B)$ ait une limite $T'(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. La fonction T' ainsi définie sur $\mathcal{B}$ est complètement monotone, comme limite simple de fonctions monotones, et vérifie les conditions $0 \leq T' \leq 1$, $T'(\emptyset) = 0$. Désignons encore par T' son plus petit prolongement sur $\mathcal{G}$. T' est complètement monotone sur $\mathcal{G}$ et on vérifie sans peine que l'invariance des T_n par translation se transmet à T' . Donc T' est la fonctionnelle d'un EFAST A' (d'après Prop. 2-2). Si T est la fonctionnelle de A , on a $T \leq T'$, car pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$T(B) \leq \underline{\lim} T_n(B) \leq \lim T_{n_k}(B) = T'(B)$$

Mais T est la plus grande minorante sci de $\underline{\lim} T_{n_k}$ sur $\mathcal{B}$ pour toute suite partielle A_{n_k} et convergeant en loi. Comme T est sci, on a $T = T'$. Par suite de l'unicité de la limite, la suite T_n converge elle-même vers $T = T'$, et T' est la fonctionnelle de A .

Ainsi, $T(B) = \lim T_n(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Si G est un ouvert relativement compact, le même raisonnement appliqué à la classe dénombrable

$\mathcal{B} \cup \{G\}$ montre que l'on a également $T(G) = \lim T_n(G)$.

La condition est suffisante. En effet, supposons $T_n(B) \rightarrow T(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$. Si A_{n_k} est une suite partielle convergeant vers un EFAST A' de fonctionnelle T' , on a $T' = T$ d'après la première partie de la démonstration. D'après l'unicité de la limite, on a donc $A_n \rightarrow A'$ en loi et $\lim T_n(G) = T'(G)$ pour tout $G \in \mathcal{G}$ relativement compact.

De la même manière :

Proposition 2-3'- Une suite A_n d'EFAST converge en loi si et seulement si $T_n(\bar{G})$ admet une limite $T(\bar{G})$ pour tout ouvert G relativement compact (ou simplement pour tout $G \in \mathcal{B}$), et T est alors la fonctionnelle associée à $\lim A_n$.

Notons bien que ce résultat n'entraîne pas $\lim T_n(K) = T(K)$ pour tout compact K ; en particulier ceci peut être faux pour les compacts $K \neq \bar{K}$, par exemple pour les compacts d'intérieur vide. Ainsi, si A_n est un processus de Poisson de densité $\theta_n \uparrow \infty$, A_n converge en loi vers $A = \mathbb{R}^n$ p.s. Mais pour $K \in \mathcal{K}$ non vide et d'intérieur vide :

$$T(K) = 1 > \lim T_n(K) = 0$$

On peut démontrer directement Prop. 2-3' de la même manière que Prop. 2-3. Mais il est plus simple d'en faire un corollaire de Prop. 2-3 et de la :

Proposition 2-4 - Si T est la fonctionnelle d'un EFAST, on a $T(G) = T(\bar{G})$ pour tout ouvert $G \in \mathcal{G}$.

En effet, désignons par B_n la boule ouverte de rayon $1/n$. Pour tout $F \in \mathcal{F}$, la suite $F \oplus \overline{B}_n$ converge vers F dans $\mathcal{F}$. Comme la convergence p.s. entraîne la convergence en loi, la suite d'EFAS $A_n = A \oplus \overline{B}_n$ converge en loi vers A . La fonctionnelle T_n sur $\mathcal{G}$ associée à A_n est définie par $T_n(G) = P(A \oplus \overline{B}_n \in \mathcal{F}_G)$. Mais $A \oplus \overline{B}_n \in \mathcal{F}_G$ si et seulement si $A \oplus \overline{B}_n$ rencontre G , donc si et seulement si A rencontre $G \oplus \overline{B}_n = G \oplus B_n$. Donc $T_n(G) = T(G \oplus B_n)$.

D'après Prop. 2-3, il en résulte $T(G) = \lim T(G \oplus B_n)$. Mais si $\overline{G}$ est compact, $T(G \oplus B_n) \downarrow T(\overline{G})$ et par suite $T(G) = T(\overline{G})$. Si G n'est pas relativement compact, on prendra la suite $G \cap B'_n$ où B'_n est la boule ouverte de rayon n . Alors $G \cap B'_n \uparrow G$, $\overline{G \cap B'_n} \uparrow \overline{G}$, comme on le vérifie sans peine, donc $T(G \cap B'_n) \uparrow T(G)$ et $T(\overline{G \cap B'_n}) \uparrow T(\overline{G})$ puisque T est une capacité. Comme $G \cap B'_n$ est relativement compacte, il vient $T(G \cap B'_n) = T(\overline{G \cap B'_n})$, donc à nouveau $T(G) = T(\overline{G})$.

De cette proposition résultent des propriétés de continuité de T sur la famille des convexes ouverts et sur celle des compacts convexes d'intérieur non vide.

Proposition 2-5 - La restriction à $C(\mathcal{G})$ de la fonctionnelle T d'un EFAST est continue en tout ouvert convexe relativement compact $G \neq \emptyset$. De même la restriction de T à $C(\mathcal{K})$ est continue en tout $K \in C(\mathcal{K})$ d'intérieur non vide.

On rappelle (lemme 3-5-1 de Random Sets and Integral Geometry) que l'application $F \rightarrow \overset{\circ}{F}$ de $C(\mathcal{F})$ dans $C(\mathcal{G})$ est continue, et que $F = \overline{\overset{\circ}{F}}$ pour tout fermé convexe d'intérieur non vide.

Soit G_n une suite dans $C(\mathcal{G})$ convergeant vers un ouvert non

vide (nécessairement convexe) $G \in C(\mathcal{G})$. Nous pouvons extraire une suite partielle G_{n_k} telle que $\lim \overline{G_{n_k}} = F \in C(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{F}$. Comme l'application $F \rightarrow \overset{\circ}{F}$ est continue sur $C(\mathcal{F})$, on a aussi $G = \lim G_{n_k} = \lim \overset{\circ}{G_{n_k}} = \overset{\circ}{F}$. Comme $\overset{\circ}{F} = G$ n'est pas vide, on a donc aussi $F = \overline{G}$. Par suite de l'unicité de la limite F , on a $\overline{G} = \lim \overline{G_n}$ dans $\mathcal{G}$, ce que l'on peut énoncer sous forme de lemme :

LEMME 2-2 - L'application $G \rightarrow \overline{G}$ est continue sur $C(\mathcal{G}) \setminus \emptyset$.

D'après ce lemme, on trouve :

$$T(G) \leq \underline{\lim} T(G_n) \leq \overline{\lim} T(\overline{G_n}) \leq T(\overline{G})$$

et comme $T(\overline{G}) = T(G)$ (Prop. 2-4), il en résulte $T(G) = \lim T(G_n)$.

Soit maintenant $K \in C(\mathcal{K})$ avec $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, et K_n une suite convergent vers K dans $C(\mathcal{K})$. D'après le lemme 3-5-1 rappelé ci-dessus, on a aussi $\lim \overset{\circ}{K_n} = \overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Donc, puisque $K = \overline{\overset{\circ}{K}}$:

$$T(K) = T(\overset{\circ}{K}) \leq \underline{\lim} T(\overset{\circ}{K_n}) \leq \overline{\lim} T(K_n) \leq T(K)$$

Comme $\overset{\circ}{K_n} \neq \emptyset$ pour n assez grand, on a aussi $T(\overset{\circ}{K_n}) = T(K_n)$, et par suite $T(K) = \lim T(K_n)$.

Le résultat relatif à $C(\mathcal{G})$ ne peut pas être amélioré : si $G_n \downarrow \{x\}$ dans $C(\mathcal{G})$, on a $G_n \rightarrow \emptyset$ dans $C(\mathcal{G})$, mais $T(G_n) \downarrow T(\{x\})$, et $T(\{x\})$ n'est pas nul en général. Par contre, on peut se demander si T est continue sur $C(\mathcal{K})$ entier. On peut noter que T est continue en tout $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$: si $K_n \rightarrow \{x\}$ dans $C(\mathcal{K})$, ou même simplement dans $\mathcal{K}$, il existe $x_n \in K_n$, $x = \lim x_n$. Donc

$\lim T(K_n) \geq \lim T(\{x_n\}) = T(\{x\})$, puisque $T(\{x_n\}) = T(\{x\})$
 $= C^{ste}$ par stationnarité. Comme $\overline{\lim} T(K_n) \leq T(\{x\})$, on a bien
 $\lim T(K_n) = T(\{x\})$.

Notons déjà quelques lemmes (valables pour un EFA quelconque dans $\mathbb{R}^n$).

LEMME 2-3 - L'application $(K \times K') \rightarrow \mathcal{F}_{K,K'}$, de $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F}) = \mathcal{K}(\mathcal{F})$ est continue.

En effet, soient K_n et K'_n deux suites convergeant dans $\mathcal{K}$ vers K et K' . Il existe un compact K_0 tel que $K_n \cup K'_n \subset K_0$ pour tout n . Soit $F \in \mathcal{F}_{K,K'}$. Il existe $x \in F \cap K$ et $x' \in F \cap K'$, donc aussi des suites $\{x_n\}$ et $\{x'_n\}$ avec $x_n \in K_n$, $x'_n \in K'_n$, $x = \lim x_n$, $x' = \lim x'_n$. En posant $F_n = F \cup \{x_n\} \cup \{x'_n\}$, on a $F_n \in \mathcal{F}_{K_n,K'_n}$ et $F = \lim F_n$ dans $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}_{K,K'} \subset \varprojlim \mathcal{F}_{K_n,K'_n}$. Soit maintenant n_k une suite partielle et, pour chaque k , $F_{n_k} \in \mathcal{F}_{K_{n_k},K'_{n_k}}$ avec $F = \lim F_{n_k}$. Il existe $x_{n_k} \in F_{n_k} \cap K_{n_k}$ et $x'_{n_k} \in F_{n_k} \cap K'_{n_k}$, et ces deux suites admettent des valeurs d'adhérence $x \in F \cap K$ et $x' \in F \cap K'$ (puisque les K_n et les K'_n sont $\subset K_0$ fixe). Donc $F \in \mathcal{F}_{K,K'}$, et $\varprojlim \mathcal{F}_{K_n,K'_n} \subset \mathcal{F}_{K,K'}$.

LEMME 2-4 - Soient K_n et K'_n deux suites convergeant vers K et K' dans $\mathcal{K}$, et telles que $T(K) = \lim T(K_n)$ et $T(K') = \lim T(K'_n)$. Alors $T(K_n \cup K'_n)$ converge vers $T(K \cup K')$.

D'après le lemme précédent, $\mathcal{F}_{K_n,K'_n}$ converge vers $\mathcal{F}_{K,K'}$.

et $K_n \cup K'_n \rightarrow K \cup K'$ à cause de la continuité de $\cup$. Comme P est une probabilité régulière, on a :

$$\overline{\lim} P(\mathcal{G}_{K_n, K'_n}) = \overline{\lim} [T(K_n) + T(K'_n) - T(K_n \cup K'_n)] =$$

$$T(K) + T(K') - \underline{\lim} T(K_n \cup K'_n) \leq P(\mathcal{F}_{K, K'}) = T(K) + T(K') - T(K \cup K')$$

Donc $\underline{\lim} T(K_n \cup K'_n) \geq T(K \cup K')$. Comme on a toujours $\overline{\lim} T(K_n \cup K'_n) \leq T(K \cup K')$, on conclut $T(K \cup K') = \lim T(K_n \cup K'_n)$.

LEMME 2-5 - Soit K_n une suite convergeant dans $\mathcal{K}$ vers K , et K' un compact contenu dans $\mathcal{K}$. Il existe une suite K'_n convergeant vers K' avec $K'_n \subset K_n$ pour tout n .

Si $K = \emptyset$, le résultat est trivial. Si $K \neq \emptyset$, les K_n sont non vides au delà d'un certain rang, et pour tout $\varepsilon > 0$, on a $K \subset K_n \oplus B_\varepsilon$ pour n assez grand. On peut donc trouver une suite $\varepsilon_n \downarrow 0$ avec $K \subset K_n \oplus B_{\varepsilon_n}$. Pour tout $x \in K$ il existe donc pour chaque n un $x_n(x) \in K_n$ tel que $d(x, x_n(x)) \leq \varepsilon_n$. Posons $K'_n = \overline{\bigcup_{x \in K} \{x_n(x)\}}$. On a $K'_n \subset K' \oplus B_{\varepsilon_n}$ et $K' \subset K'_n \oplus B_{\varepsilon_n}$, donc $\lim K'_n = K'$ dans $\mathcal{K}$, et $K'_n \subset K_n$.

LEMME 2-6 - Soit T la fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ associée à un EFA. Alors l'ensemble $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$ des points de continuité de T est stable pour la réunion finie.

En effet, soit K et K' dans $\mathcal{H}$ et K''_n une suite convergeant dans $\mathcal{K}$ vers $K \cup K'$, de sorte que $T(K \cup K') \geq \overline{\lim} T(K''_n)$. D'après

le lemme 2-5, on peut trouver deux suites K_n et K'_n convergeant vers K et K' respectivement dans $\mathcal{K}$, avec $K'_n \cup K_n \subset K''_n$. En appliquant le lemme 2-5, on trouve $\lim T(K''_n) \geq \lim T(K_n \cup K'_n) = T(K \cup K')$. Donc $\lim T(K''_n) = T(K \cup K')$, et $K \cup K' \in \mathcal{K}$.

LEMME 2-7 - Pour tout EFAST, T est continue en tout $I \in \mathcal{J}$ (ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$ fixées).

Cela résulte du lemme 2-6 et de $T(\{x\}) = C^{ste}$, $x \in \mathbb{R}^n$

LEMME 2-8 - Avec les mêmes notations, T est continue en $K \in \mathcal{K}$ si et seulement si $T(K) = \sup \{T(I), I \in \mathcal{J}, I \subset K\}$, où $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des parties finies de $\mathbb{R}^n$.

La condition est nécessaire, car la famille filtrante $T(I)$, $I \subset K$ converge vers K dans $\mathcal{K}$. Inversement, supposons-la vérifiée, et soit K_n une suite convergeant vers K dans $\mathcal{K}$. Pour tout $I \subset K$, on peut trouver $I_n \subset K_n$, $I_n \in \mathcal{J}$, $I_n \rightarrow I$ dans $\mathcal{K}$, donc, d'après le lemme 2-7 : $\lim T(K_n) \geq \lim T(I_n) = T(I)$. D'après l'hypothèse, il en résulte $\lim T(K_n) \geq \sup \{T(I), I \in \mathcal{J}, I \subset K\} = T(K)$. Donc $T(K_n)$ converge vers $T(K)$, et T est continue en K .

Proposition 2-6 - Soit T la fonctionnelle sur $\mathcal{K}$ associée à un EFAST A . T est continue en tout $I \in \mathcal{J}$. T est continue en $\bar{G}$ pour tout ouvert G relativement compact si et seulement si A est séparable.

Le premier énoncé n'est autre que le lemme 7. Si A est séparable, on a $T(G) = \sup \{T(I), I \in \mathcal{J}, I \subset G\}$ pour tout ouvert G

relativement compact. Comme $T(\bar{G}) = T(G)$, la condition du lemme 2-8 est a fortiori vérifiée par $\bar{G}$, et T est continue en $\bar{G}$. Inversement, si T est continue en $\bar{G}$, on a $T(G) = T(\bar{G}) = \sup\{T(I), I \in \mathcal{J}, I \subset G\}$ puisque la famille filtrante des $I \subset G$ converge vers $\bar{G}$ dans $\mathcal{K}$. Mais cela exprime que A est séparable.

Proposition 2-7 - Soit A un EFAST isotrope, c'est-à-dire dont la fonctionnelle T sur $\mathcal{K}$ est invariante pour les translations et les rotations. Alors T est continue sur $C(\mathcal{K})$.

Nous savons déjà que la restriction de T à $C(\mathcal{K})$ est continue en tout compact convexe d'intérieur non vide, et il faut examiner le cas des compacts convexes de dimension $< n$.

Soit d'abord K un simplexe de dimension $k < n$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe de $k+1$ points $x_1, \dots, x_{k+1}$ non situés dans une même variété de dimension $< k$, et soit K_n une suite convergeant vers K dans $C(\mathcal{K})$. Pour chaque $i = 1, \dots, k+1$, il existe $x_n(i) \in K_n$, $x_n(i) \rightarrow x_i$. Désignons par K'_n l'enveloppe convexe de $\{x_n(1), \dots, x_n(k+1)\}$ de sorte que $K'_n \rightarrow K$ dans $C(\mathcal{K})$. Pour n assez grand, les K'_n sont des simplexes (sinon, leur limite K serait de dimension $< k$). Si V est la variété de dimension k contenant K , on peut pour chaque n trouver une rotation transformant K'_n en $K''_n \subset V$ avec $\lim K''_n = K$. En appliquant la proposition 2-5 dans l'espace V identifié à $\mathbb{R}^k$, on trouve $T(K) = \lim T(K''_n)$. Mais, à cause de l'invariance de T par rotation, on a $T(K_n) > T(K'_n) = T(K''_n)$, donc $\underline{\lim} T(K_n) > T(K)$. Donc $T(K_n)$ converge vers $T(K)$.

Soit maintenant K un point de continuité de la restriction de T à $C(\mathcal{K})$, et K' un simplexe, tel que $K \cup K'$ soit convexe.

Alors, $K \cup K'$ est un point de continuité de la restriction de T à $C(\mathcal{K})$.

En effet, soit K_n'' une suite convergeant vers $K \cup K'$ dans $C(\mathcal{K})$. On peut trouver une suite $K_n' \subset K_n''$ de simplexes convergeant vers K' , et aussi une suite $K_n \subset K_n''$ de compacts convexes convergeant vers K (voir lemme 2-5). D'après le lemme 2-4, il vient $\underline{\lim} T(K_n'') \geq \lim T(K_n \cup K_n') = T(K \cup K')$. Donc $T(K \cup K') = \lim T(K_n'')$.

Tout polyèdre convexe est réunion d'une suite finie $K_1 \cup \dots \cup K_k$ de simplexes, telle que $K_1 \cup \dots \cup K_k$, est convexe pour tout $k' \leq k$. D'après le résultat précédent, donc, tout polyèdre convexe est un point de continuité.

Soit alors K un compact convexe de dimension $k < n$. Il est limite dans $C(\mathcal{K})$ des polyèdres convexes $K' \subset K$. En appliquant la proposition 2-5 à la variété V contenant K , identifiée à $\mathbb{R}^k$, on a $T(K) = \sup \{T(K'), K' \subset K\}$. Soit $K_n \rightarrow K$ dans $C(\mathcal{K})$. Pour chaque $K' \subset K$, il existe une suite $K_n' \subset K_n$ de polyèdres convexes dont la dimension est k (pour n assez grand) et convergeant vers K' . On a donc, d'après ce qui précède : $\underline{\lim} T(K_n) \geq \lim T(K_n') = T(K')$, et par suite $\underline{\lim} T(K_n) \geq \sup \{T(K')\} = T(K)$. Donc $T(K) = \lim T(K_n)$.

COROLLAIRE - Dans le cas à 1 dimension, T est continue sur $C(\mathcal{K})$.

Si de plus l'EFAST correspondant est séparable, la restriction de T à $\mathcal{K}$ est continue en $K \in \mathcal{K}$ dès que K est réunion dénombrable de compacts convexes.

A une dimension, T est isotrope donc continue sur $C(\mathcal{K})$ d'après Prop. 2-7. Si A est séparable, l'ensemble $\mathcal{K}$ des points de conti-

nuité de la restriction de T à $C(\mathcal{G})$ contient l'anneau convexe, et aussi la classe stable pour la réunion dénombrable engendrée par $C(\mathcal{G})$ (vérification immédiate).