

Fontainebleau

N-453

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 134

LE PARAMETRAGE TECHNIQUE

DES RESERVES

G. MATHERON

Décembre 1975

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 134

LE PARAMETRAGE TECHNIQUE DES RESERVES

- Table des Matières -

0 - <u>INTRODUCTION PEU REALISTE</u>	1
1 - <u>INTUITIONS SIMPLISTES: ZONEOGRAPHIE ET HISTOGRAMMES</u>	3
La relation tonnage-teneur de Lasky	3
Critique	5
Notion de paramétrage technique	7
2 - <u>LES FACTEURS DU PARAMETRAGE TECHNIQUE</u>	8
a - Les contours autorisés	8
b - La sélection	9
c - L'information	9
d - Les critères de sélection	10
e - La formule de valorisation	11
3 - <u>SELECTION LIBRE ET SIMPLE</u>	13
Optimisation économique	16
4 - <u>SELECTION LIBRE A DEUX NIVEAUX</u>	17
Cas où l'information de première sélection est connue.	18
Cas d'une zone d'homogénéisation	21
Cas où l'information I_1 n'est pas disponible	23
5 - <u>SELECTION SIMPLE SOUS CONTRAINTE</u>	27
Principe de l'analyse convexe	28
Ex. 1 : toit et murs de teneurs	31
Ex. 2 : ciel ouvert	32
Le cone convexe	33
Le théorème de projection	35

6 - <u>SELECTION DOUBLE SOUS CONTRAINTE</u>	40
Le paramétrage en (V,T)	41
Le paramétrage dual en (λ,θ)	41
Ex. 1 : toit et mur de teneur avec découverte	43
Ex. 2 : toit et mur de teneur avec sélection fine	43
Ex. 3 : ciel ouvert avec sélection libre du minerai	44
L'optimisation économique	45
7 - <u>L'ANALYSE CONVEXE EN POLYMETALLIQUE</u>	46
Exemples de formules de valorisation	52

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 134

LE PARAMETRAGE TECHNIQUE DES RESERVES

0 - INTRODUCTION PEU REALISTE.

L'objectif (idéal, jamais atteint) du paramétrage des réserves récupérables d'un gisement donné serait le suivant : en fonction des différents paramètres économiques $b = (b_1, \dots, b_N)$ représentant par exemple les cours des différentes substances utiles, les prix de revient de découverte, d'extraction, de traitement etc.. qui interviennent dans la formule de valorisation, trouver la meilleure manière (techniquement possible) d'exploiter ce gisement et donner les caractéristiques de ce projet optimal.

54 Du point de vue formel, et pour un gisement supposé parfaitement connu (tel, par exemple, que l'on connaisse les teneurs en chacun des points du gisement), on se donnerait :

~ L'ensemble \mathcal{P} de tous les projets possibles (techniquement réalisables). Cela implique : le choix de la découverte, du volume à extraire, dans le volume extrait le choix de ce qui est envoyé au minerai et au stérile, la combinatoire des chantiers et la cadence d'exploitation, le réglage de la laverie etc.. etc..

~ L'ensemble des valeurs possibles des paramètres économiques, par exemple, $b = (b_1, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$.

~ Une fonction $B(\omega, b)$ donnant (pour ce gisement parfaitement connu) la valeur du projet $\omega \in \mathcal{P}$ lorsque les conditions économiques sont $b = (b_1, \dots, b_N)$.

~ Pour chaque $b \in \mathbb{R}^N$, il existe un (ou plusieurs) projets $\omega = \omega(b)$ maximisant $B(\omega, b)$ à b fixé :

$$\gamma(b) = B(\omega(b), b) = \sup_{\omega \in \mathcal{P}} B(\omega; b)$$

Si les X_i sont des caractéristiques du projet ω (tonnage de minerai, tonnage d'un métal donné, découverte etc...), on obtient le paramétrage :

$$f_i(b) = X_i(\omega(b)) \quad \text{avec aussi} \quad \gamma(b) = \sup_{\omega \in \mathcal{P}} B(\omega, b)$$

Naturellement, cette manière de formuler le problème n'est pas réaliste, parce que

~ les caractéristiques réelles ne sont pas connues, mais seulement estimées avec une approximation grossière.

~ de toute façon, ce serait beaucoup trop compliqué. Il est hors de question d'espérer pouvoir optimiser à la fois et dans tous leurs détails infiniment complexes toutes les opérations qui constituent l'exploitation d'un gisement.

On va chercher à disjoindre le problème en problèmes partiels à peu près indépendants, et chercher des méthodes de simplification. Ces approximations seront d'autant plus légitimes que l'on ne dispose, en général, pour faire cette estimation que d'une information relativement sommaire qui ne permet pas une prévision fine des étapes plus lointaines de la mise en exploitation.

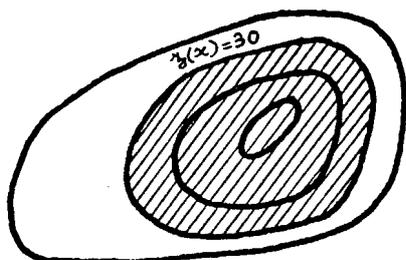
Considérons d'abord quelques cas simples (et idéaux).

I - INTUITION SIMPLISTE : ZONEOGRAPHIE ET HISTOGRAMMES

~ La relation tonnage-teneur de Lasky.

Vers 1950, S. Lasky s'est demandé comment variaient les réserves (récupérables) d'un porphyry copper en fonction du critère de sélection usuel (la teneur de coupure en Cu %). Il est ainsi arrivé à la notion capitale de relation tonnage/teneur.

Lasky partait d'une représentation simple de ses porphyry copper : la teneur $z(x)$ au point x était (implicitement) considérée comme une fonction régulière et continue de x , manifestant par exemple une décroissance régulière lorsque l'on s'éloigne du coeur riche du porphyry (aujourd'hui, c'est à la dérive et non à la teneur elle-même que l'on pourrait attribuer ces caractères). Il supposait cette fonction connue (parfaitement ou avec une très bonne approximation) et son point de vue était celui d'une zonéographie :



Si la teneur de coupure en Cu est z_0 , on exploitera le domaine limité par l'isoteneur z_0 , soit

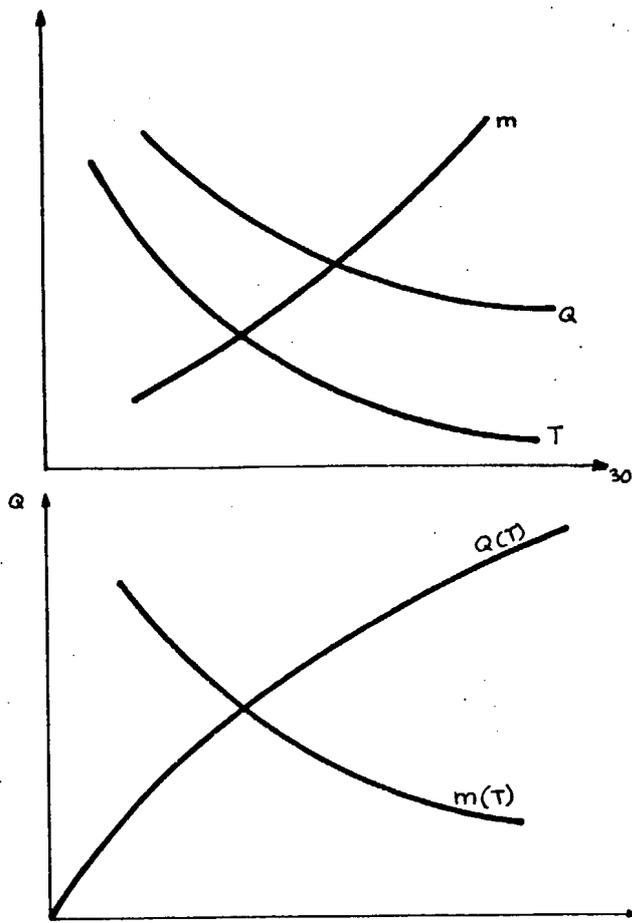
$$B_{z_0} = \{x : z(x) \geq z_0\}$$

avec le tonnage et la teneur :

$$(1-1) \quad T(z_0) = \int_{B_{z_0}} \lambda(dx) \quad Q(z_0) = \int_{B_{z_0}} Z(x) \lambda(dx)$$

($\lambda(dx) = dx$ ou, plus précisément, $\rho(x) dx$ où ρ est la densité).

Il obtient ainsi les courbes T et Q et $m = Q/T$ paramétrées en z_0 .



Q et T sont évidemment décroissantes
(et m croissante)

On peut donc éliminer z_0 et construire

$$Q = Q(T), m = m(T) \text{ etc...}$$

Ex. : la loi dite loi de Lasky
de la forme :

$$m = \alpha - \beta \log T$$

$Q(T)$ est croissante et concave.

En effet, si $T(dz)$ est le tonnage compris entre les isoteneurs z et $z + dz$:

$$(1-2) \quad T(z_0) = \int_{z_0}^{\infty} T(dz)$$

$$Q(z_0) = \int_{z_0}^{\infty} zT(dz)$$

Par suite, $\frac{dQ}{dz_0} = z_0 > 0$, mais $T(z_0)$ est fonction décroissante de z_0 , donc aussi z_0 fonction décroissante de T : la pente de la tangente décroît quand T augmente, et Q est concave.

Noter la relation

$$Q(z_0) = z_0 T(z_0) + \int_{z_0}^{\infty} T(z) dz$$

Donc :

$$m(T) = \frac{Q}{T} = z_0 + \frac{1}{T} \int_{z_0}^{\infty} T(z) dz \geq z_0$$

Puis $Q = mT$ donne $dQ = m dT + T dm$. Or $d\varphi = z_0 dT$. Donc

$$\frac{dm}{dT} = - \frac{m \cdot z_0}{T} \leq 0$$

Soit $z_0 dT = m dT + T dm$ et

$$\frac{dm}{dT} = - \frac{(m - z_0)}{T} \leq 0 \quad m \text{ décroît quand } T \text{ augmente}$$

aussi

Il y a ici une autre interprétation, en terme d'histogramme ou de loi de distribution $F(dz)$ des teneurs (ponctuelles). Si T_0 est le tonnage maximum ($\lim T(z_0)$ pour $z_0 \rightarrow 0$), on pose :

$$T(dz) = T_0 F(dz)$$

D'où :

$$\begin{aligned} T(z_0) &= T_0 (1 - F(z_0)) ; \quad Q(z) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} z F(dz) = \\ &= z_0 T(z_0) + T_0 \int_{z_0}^{\infty} (1 - F(z)) dz \end{aligned}$$

EXEMPLE : Loi de Lasky $m(T) = \alpha - \beta \log T$: donne $Q(T) = Tm(T)$
 $= \alpha T - \beta T \log T$. Donc $z = dQ/dT = (\alpha - \beta) - \beta \log T$ et par suite

$$T = T_0 e^{-z/\beta} \quad T_0 = e^{-\frac{\alpha - \beta}{\beta}} \quad (\text{Loi exponentielle})$$

(avec $m(z_0) - z_0 = \beta = C^{ste}$).

Inversement si $Q = Q(T)$ est croissante, concave et atteint son asymptote en $T = T_0$, on a une interprétation en $F(dz)$.

CRITIQUE.

Naturellement, au point de vue de la Géostatistique, cette manière simpliste de présenter les choses n'est pas tenable. Du fait des hypothèses (non réalistes) faites sur $Z(x)$: fonction très

régulière et connue - 3 notions, que l'on doit d'habitude très soigneusement distinguer - se trouvent ici confondues :

- ~ la zonéographie
- ~ l'histogramme des teneurs
- ~ la relation tonnage/teneur

Avec les VR habituelles, cette méthode conduirait à de graves surestimations. En aucun cas, en effet, on n'a le droit d'utiliser l'histogramme des teneurs ponctuelles (ou des carottes), mais tout au plus celui des teneurs de blocs ou unités minimales sur lesquelles portera la sélection effective (leur taille dépend du mode d'exploitation envisagé). Cela pose un premier problème (que l'on sait résoudre) :

~ comment prévoir l'histogramme des blocs en connaissant celui des carottes.

Mais ce n'est pas tout. Pour qu'il soit légitime d'identifier la relation tonnage/teneur avec la fonction de répartition des blocs, il faudrait :

~ que les teneurs réelles des blocs soient parfaitement connues au moins au moment de l'exploitation,

~ qu'aucune contrainte géométrique ne pèse sur la sélection (autrement dit que l'on soit entièrement libre de sélectionner chacun des blocs indépendamment des autres).

La première condition n'est jamais réalisée, sauf (à peu près) pour l'Uranium où l'on peut mesurer directement les radioactivités des blocs au moment de l'exploitation. Dans tous les autres cas, la teneur des blocs ne sera pas connue au moment de l'exploitation,

mais seulement estimée : sur la base d'une information plus riche peut-être que celle dont nous disposons aujourd'hui, mais avec une marge d'erreur encore importante.

Quant à la seconde condition, il sera rarement (ou jamais) possible en pratique d'aller extraire n'importe où un petit bloc riche en laissant en place ses voisins pauvres. Dans le cas d'un ciel ouvert, ces contraintes géométriques deviennent même l'aspect le plus important du problème.

Notion de paramétrage technique.

Pourtant, une idée simple et très importante se dégage du modèle de Lasky : c'est qu'il s'agit d'un paramétrage en fonction d'un seul paramètre technique - la teneur de coupure z_0 . Les paramètres économiques peuvent être très nombreux (les différents prix de revient, le cours du cuivre etc...) et intervenir par l'intermédiaire de formules de valorisation souvent complexes. Mais, quelle que soit la manière dont ces paramètres économiques interviennent, nous savons que dans tous les cas le meilleur choix possible d'un volume à exploiter pour obtenir un tonnage T donné de minerai sera celui qui maximise le métal contenu - c'est-à-dire l'ensemble $\{Z(x) \geq z_0\}$ avec $T(z_0) = T$ donné, et le métal contenu sera alors le $Q(T)$ de la courbe de Lasky.

Autrement dit, le problème de l'optimisation a été scindé en deux parties : un paramétrage technique :

~ en fonction du paramètre purement technique z (teneur de coupure), on détermine le projet maximisant Q à $T = T(z)$ donné et une optimisation économique :

~ on choisit ensuite le z_0 de manière à optimiser la formule de valorisation.

C'est cette démarche que nous allons essayer de généraliser : trouver, en premier lieu, en fonction d'un ou deux paramètres techniques, une famille d'optima (techniques) à l'intérieur de laquelle tombe forcément l'optimum économique, quel qu'il soit - ensuite réaliser l'optimisation économique sur ce paramétrage technique.

2 - LES FACTEURS DU PARAMETRAGE TECHNIQUE.

Nous les avons déjà rencontrés en critiquant la méthode zonéographique. Il convient de les revoir en détail.

[a] - Les caractéristiques technologiques (liées au choix d'un type d'exploitation) imposent des contraintes géométriques quant à la forme des volumes à extraire et/ou à enlever en découverte. Cela peut se traduire par la notion de contours autorisés.

Exemples :

~ Ciel ouvert : l'exploitation doit respecter la pente d'équilibre naturel. Si on extrait un point x , on doit aussi extraire le cône Γ_x (pointe en bas) ayant son sommet en ce point, et les contours autorisés sont nécessairement réunion de tels cônes.

~ en stratiforme, choix d'un toit et d'un mur de teneur. On s'impose, par exemple, de ne prendre qu'une seule passe de puissance $\geq x$ mètres, ou peut-être deux ou plusieurs passes, séparées par des intercalaires de puissance $\geq y$ mètres etc...

Ces caractéristiques imposent aussi des contraintes concernant le niveau ou l'échelle auquel opérera la sélection.

[b]- La sélection elle-même peut être simple ou opérer à plusieurs niveaux. Par exemple, on a souvent affaire à une sélection double comportant :

~ une sélection d'extraction concernant le choix du volume V à extraire (qui doit être un contour autorisé). La découverte peut être considérée comme un cas particulier de sélection d'extraction.

~ une sélection du minerai (chacun des blocs v contenus dans le volume V à extraire pourra être envoyé soit au stérile soit au minerai).

Pour chacune de ces sélections, on doit préciser :

~ son support, c'est-à-dire la taille de la plus petite unité susceptible d'être sélectionnée. On parlera souvent de blocs pour le support de la sélection du minerai et de panneaux pour la sélection d'extraction (ceci implique que les blocs sont plus petits que les panneaux).

~ les contraintes géométriques qui pèsent sur la sélection. Par exemple, la réunion des panneaux sélectionnés pour l'extraction devra constituer un contour autorisé. Par contre, la sélection du minerai, au niveau des blocs v, sera souvent libre de toute contrainte, chaque petit bloc une fois extrait pouvant être envoyé au minerai ou au stérile indépendamment des autres.

[c]- L'Information sur la base de laquelle sont ou seront prises les décisions de sélection. On doit soigneusement distinguer :

~ l'information actuelle (disponible au moment où on procède au paramétrage des réserves : par exemple des sondages de

reconnaissance).

~ l'information future qui sera disponible au moment de prendre la décision définitive, mais ne l'est pas encore en général aujourd'hui. Par exemple, pour la sélection du minerai, on disposera des résultats des trous de tir au moment de décider si un bloc v doit être mis au stérile ou au minerai.

Ce décalage entre information actuelle et information future est la source d'une des principales difficultés du paramétrage : comme la sélection réelle sera basée sur une information future non encore disponible, nous ne pouvons pas prévoir à l'avance son effet sans anticiper, en probabilité, cette information future sur la base de l'information actuelle.

Cela ne sera pas trop grave en l'absence de contrainte (si les panneaux peuvent être sélectionnés indépendamment) car une reconstitution probabiliste globale sera possible. S'il y a des contraintes fortes (open pits par exemple) la prévision passe nécessairement par le niveau local. Elle nécessite alors un outillage plus puissant (les fonctions de transfert), ^{à moins qu} ~~et la donnée~~ de l'information ultime soit déjà disponible de l'information définitive.

d - Les critères utilisés pour chacune des sélections. En toute généralité, pour la sélection S_i (par exemple S_1 = sélection d'extraction, S_2 = sélection de minerai) on doit se donner un critère de la forme :

f_i (Information disponible au moment de la décision effective concernant S_i) $\geq z_i$.

Les z_i constitueront les paramètres du paramétrage technique

des réserves. Il y en aura donc, en principe, autant que de niveaux de sélection. Les fonctions critiques f_i (choisies à l'avance par nous) devront respecter en principe la condition suivante :

~ quelles que soient les valeurs des paramètres économiques, intervenant dans la formule de valorisation, et, si possible, quelle que soit cette formule elle-même (pourvu qu'elle reste plausible) l'optimum économique doit figurer parmi la famille de projets définis par les critères f_i .

En pratique, cependant, on utilise le plus souvent comme fonctions critiques les estimateurs $Z^*(v)$ formés avec l'information "future" disponible au moment de la décision pour estimer la teneur du bloc ou du panneau. Les paramètres du paramétrage technique seront donc des teneurs de coupure, différentes pour les différentes sélections. Par exemple, on aura :

- ~ une teneur de coupure z_1 pour la sélection d'extraction
- ~ une teneur de coupure z_2 pour la sélection du minerai.

[e] - La formule de Valorisation B intervient ensuite pour définir le choix optimal des paramètres techniques. Elle dépend d'une part d'un certain nombre de paramètres économiques (dont les valeurs sont supposées connues), de l'autre des caractéristiques du gisement. Ici intervient une notion importante, celle de zone de valorisation homogène : si l'on désigne par S_i ces zones d'homogénéisation, cela veut dire que la valeur $B(\cup S_i)$ de l'ensemble de ces zones est la somme :

$$B(\cup S_i) = \sum_i B(S_i)$$

des valeurs des différentes zones. Le plus souvent $B(S_i)$ sera une fonction $B(Q_i, T_i, V_i)$ des trois variables : Q_i , quantité de métal dans S_i , T_i tonnage de minerai sélectionné, V_i tonnage extrait total.

Nous admettrons que $B(Q_i, T_i, V_i)$ est croissante en Q_i , et décroissante en T_i et V_i .

Les deux cas les plus simples à considérer seront :

~ le cas où les zones d'homogénéisation sont identiques aux blocs (support de la sélection la plus fine)

~ le cas où le gisement entier (ou la portion à laquelle on s'intéresse) constitue une seule zone d'homogénéisation.

Un problème important pour l'optimisation économique : comment définir, ou choisir ces zones d'homogénéisation. Nous n'aborderons pas ce problème, qui met en jeu une combinatoire très complexe.

Ce problème disparaît dans le cas où la formule de valorisation est linéaire :

$$B = a Q - \lambda V - \theta T$$

Cette formule, très particulière, peut parfois servir de première approximation (et se révèle très éclairante pour les méthodes d'analyse convexe).

3 - SELECTION LIBRE ET SIMPLE.

Ici, le gisement est découpé en blocs (ou en panneaux) v_i et on peut sélectionner indépendamment chacun des v_i ($i = 1, \dots, N$). Parmi tous les choix possibles de k blocs, le meilleur serait celui qui maximise le métal récupéré $v \sum Z(v_i)$ (et cela quelle que soit la formule de valorisation). Mais on ne connaît pas les teneurs $Z(v_i)$, et on ne dispose (ou plutôt : ne disposera) que de leurs estimateurs $Z^*(v_i)$.

Nous supposons essentiellement que ces estimateurs vérifieront la condition de non biais conditionnel.

$$(3-1) \quad E[Z(v_i) | Z^*(v_i)] = Z^*(v_i)$$

(plus forte que la condition habituelle $E(Z(v_i) - Z^*(v_i)) = 0$ seule vérifiée par le krigeage : néanmoins, en pratique, on ne commettra pas de trop grosses erreurs en appliquant cette méthode au cas où $Z^*(v_i)$ est le krigeage).

A ce stade, la formule de valorisation $B(Z(v_i))$ devient une variable aléatoire. Le problème, lorsque les $Z^*(v_i)$ sont connus, consiste à trouver le sous ensemble $I \subset \{1, \dots, N\}$ maximisant une expression de la forme

$$\sum_I E[B(Z(v_i)) | Z^*(v_i)] \quad \text{ou} \quad E \left(B \left(\sum_I Z(v_i) \right), \sum_I v_i \right)$$

selon que les blocs individuels ou le gisement entier doivent être considérés comme zone d'homogénéisation.

Toutes choses égales, d'ailleurs, la fonction

$$z \rightarrow E[B(Z(v)) | Z^*(v) = z]$$

est croissante en z , quelle que soit la formule B , linéaire ou non, car $B(Z)$ est elle-même croissante en Z . Parmi les projets possibles comportant k blocs exactement, le meilleur sera donc toujours celui qui retient les k meilleures estimations $Z^*(v_i)$. Par conséquent, quelle que soit la formule B , homogène ou additive, la famille de projets définis par le critère $Z^*(v_i) \geq z$ avec comme paramètre technique une teneur de coupure appliquée à l'estimateur futur $Z^*(v_i)$ contient l'optimum économique. C'est donc ce paramétrage (technique) qu'il convient d'utiliser.

Au stade actuel, les estimateurs $Z^*(v_i)$ ne sont pas encore connus, si on ne dispose (par exemple) que des résultats de sondages de reconnaissance à large maille (ayant donné des résultats Z_α , $\alpha = 1, \dots, n$).

Pour un panneau v_i donné, on devrait donc calculer :

$$P(Z^*(v_i) \geq z | Z_\alpha)$$

probabilité (conditionnelle en Z_α) pour qu'il soit finalement sélectionné, et estimer $T(z)$ par :

$$T(z) = v \sum_i P(Z^*(v_i) \geq z | Z_\alpha)$$

Dans ce point de vue, on estime le $T(z)$ global par sommation des estimations locales de chacun des panneaux v_i . C'est une procédure assez lourde que l'on peut éviter ici. Car (pourvu que les panneaux soient assez nombreux) la sommation de ces diverses probabilités conditionnelles redonne approximativement (dans le cas stationnaire et ergodique) la probabilité non conditionnelle $P(Z^*(v) \geq z)$ pour un panneau de taille v , soit :

$$T(z) = N v P(Z^*(v) \geq z)$$

Il suffit donc de connaître la loi a priori de l'estimateur futur soit $F^*(dz)$.

D'après (3-1), $E(Z(v) | Z^*(v)) = Z^*(v)$, d'où l'on déduit :

$$E[Z(v) | Z^*(v) \geq z] = E[Z^*(v) | Z^*(v) \geq z]$$

D'où le paramétrage cherché, avec $T_0 = N v$:

$$(3-2) \quad \begin{cases} T(z_0) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} F^*(dz) \\ Q(z_0) = T_0 \int_{z_0}^{\infty} z F^*(dz) \end{cases}$$

Il est du type de Lasky (1-2) - mais F^* est la loi, de l'estimateur futur $Z^*(v)$ et non celle des teneurs des blocs $Z(v)$. De plus, la seconde relation (3-2) (mais non la première) présuppose la condition de non-biais conditionnel (3-1).

En pratique, on ne connaît pas la loi F^* des $Z^*(v)$ (non plus d'ailleurs que celle des $Z(v)$), sauf toutefois si l'information future est déjà disponible (dans ce cas, on forme effectivement les $Z^*(v_i)$ et on prend leur histogramme). Mais, moyennant certaines hypothèses de permanence, on peut obtenir une expression approchée de F^* à partir de l'histogramme des Z_α (information actuelle), Exactement comme dans le cas des fonctions de transfert.

Dans ce premier cas particulier très simple, l'opération a réussi : nous avons trouvé un paramètre technique z (teneur de coupure sur l'estimateur futur), tel que l'optimum économique

tombe dans la famille des projets définis par $\{Z^*(v_i) \geq z\}$, et de plus nous avons réussi à faire le paramétrage des réserves (c'est-à-dire de l'estimation de $T(z)$ et $Q(z)$ sur la base de la seule information actuelle) sans passer par l'intermédiaire encombrant d'estimations locales panneaux par panneaux, qui auraient nécessité le recours aux fonctions de transfert.

Optimisation Economique.

Il reste à réaliser l'optimisation économique, c'est-à-dire à choisir la valeur z_0 de z qui maximise la fonction B de valorisation. Ici, la structure de B intervient. Pour simplifier, supposons B additive (par rapport aux panneaux) en ce sens que la valorisation d'une réunion de panneaux est la somme des valeurs des panneaux :

$$B(\cup V_j) = \sum_j B(V_j)$$

où B est une fonction donnée de la teneur :

$$B(V_j) = H(Z(V_j))$$

Si H est linéaire en $Z(V_j)$

$$B(V_j) = V(a Z(V_j) - b)$$

(a : valeur du point de métal contenu, b frais d'exploitation), il n'y a pas de difficulté compte tenu de la condition de non biais (3-1) : pour un choix z de la teneur de coupure (sur $Z^*(V)$) on aura

$$E[B(V) | z] = \int_z^\infty V(a z^* - b) F^*(dz^*) = aQ(z) - b T(z)$$

L'optimum est atteint pour $z = z_0$ tel que $a d Q - b d T = 0$
Mais $dQ/dT = z$, et par suite :

$$z_0 = \frac{b}{a}$$

Par contre, si H n'est pas linéaire, on doit introduire l'espérance conditionnelle :

$$h(z) = E[H(Z(v)) | Z^*(V) = z]$$

ce qui nécessite la connaissance de la loi à 2 variables $(Z(V), Z^*(V))$.
La quantité à optimiser en z est alors :

$$E[B(V) | z] = \int_z^\infty h(\zeta) F^*(d\zeta)$$

z_0 est donc déterminé par la condition :

$$h(z_0) = 0$$

Si B n'est pas additive, le problème devient nettement plus difficile.

4 - SELECTION LIBRE A DEUX NIVEAUX.

Ici, on suppose qu'une première sélection S_1 (d'extraction), sur la base d'une information I_1 (pas nécessairement encore disponible au moment où on fait l'estimation) choisit les panneaux V_j à extraire. Puis, une deuxième sélection S_2 (du minerai) choisit dans chaque panneau V_j les blocs v_{ji} à envoyer au minerai, et cela sur la base d'une information future I_2 plus riche que I_1 .

Cas où l'Information de Première Sélection est connue.

~~La formulation est moins simple que dans le premier cas.~~

Supposons d'abord que l'information I_1 (utilisée pour la sélection des panneaux) soit déjà disponible (mais I_2 reste future).

A ce moment, pour un choix donné des panneaux V_j , $j \in J$ supposés sélectionnés les raisonnements faits au paragraphe 3 s'appliquent : l'optimum économique tombera dans la famille des projets $\{Z^*(v_{j,i}) \geq z\}$ définis par l'application d'une même teneur de coupure z aux estimateurs (futurs) $Z^*(v_{ji})$ des différents blocs contenus dans les panneaux sélectionnés.

On doit donc faire le même paramétrage qu'en (3-2), mais panneau par panneau, et, par conséquent, en utilisant la loi $F_j(dz|I_1)$ de la teneur $Z^*(v_j)$ d'un bloc v_j parcourant le panneau V_j conditionnée par l'information actuelle I_1 . Pour chaque panneau V_j on obtient donc une estimation (locale) des réserves récupérables :

$$(4-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_j(z_0) = V_j \int_{z_0}^{\infty} F_j^*(dz|I_1) \\ Q_j(z_0) = V_j \int_{z_0}^{\infty} z F_j^*(dz|I_1) \end{array} \right.$$

Les techniques du krigeage disjonctif sont très utiles pour estimer rapidement ces fonctions de transfert (ou paramétrage local des réserves) panneau par panneau.

Il reste maintenant à optimiser le choix J des panneaux à extraire; Si la formule de valorisation est linéaire, les choses

sont assez simples. Supposons B de la forme :

$$B = a Q - b T - c V$$

V : volume extrait, c prix de revient de l'extraction

T : tonnage traité, b prix de revient du traitement

Q : métal contenu, a valeur du point de métal

Alors, pour un choix J des panneaux et une valeur z du paramètre de coupure

$$E[B|J, z) = a \sum_{j \in J} [Q_j(z) - \frac{b}{a} T_j(z) - \frac{c}{a} V]$$

(V : volume d'un panneau). Pour un z donné, on doit donc retenir les panneaux V_j pour lesquels

$$a Q_j(z) - b T_j(z) - c V \geq 0$$

Mais ici (comme dans l'exemple précédent) la valeur optimale de z est $z_0 = b/a$ (car, une fois un panneau extrait, on optimise la valorisation $a Q - b T$, $c V$ étant déjà dépensé par hypothèse). Le critère de sélection des panneaux est donc :

$$Q_j(z_0) \geq z_0 T_j(z_0) + \frac{c}{a} V$$

ou, ce qui revient au même :

$$(4-2) \quad \int_{z_0}^{\infty} [1 - F_j^*(dz|I_1)] \geq \frac{c}{a}$$

Le second paramètre technique à utiliser est donc $z_1 = c/a$. La sélection des panneaux pour z_0 et z_1 donnés se fait selon le critère (4-2). Soit $J(z_0, z_1)$ l'ensemble des indices ainsi retenus :

$$j \in J(z_0, z_1) \Leftrightarrow E[Z^*(v_j) - z_0 \mid I_1] \geq z_1$$

On a alors le paramétrage à 2 paramètres :

$$T(z_0, z_1) = \sum_{j \in J(z_0, z_1)} T_j(z_0)$$

$$Q(z_0, z_1) = \sum_{j \in J(z_0, z_1)} Q_j(z_0)$$

$$V(z_0, z_1) = \sum_{j \in J(z_0, z_1)} V_j$$

Si la valorisation B n'est pas linéaire, mais reste additive au niveau des blocs $v_{j,i}$, rien d'essentiel n'est changé au paramétrage en z_0 . B est alors de la forme

$$B = \sum_{j \in J} \left[\left(\sum_{i \in I_j} H(Z(v_{ji})) \right) - cV \right]$$

où C est le prix d'extraction d'un panneau et $H(Z(v))$ la valorisation d'un bloc v (prix d'extraction exclu). Le paramètre z_0 est défini par la condition $h(z_0) = 0$ où h est la fonction :

$$h(z) = E[h(Z(v)) \mid Z^*(v) = z]$$

(il s'agit des blocs et de leurs estimateurs futurs). Mais cette fois le critère de sélection du panneau j devient :

$$\int_{z_0}^{\infty} h(z) F_j^*(dz \mid I_1) \geq C$$

Comme h dépend de manière complexe des paramètres économiques, il n'est plus possible dans ce cas de séparer complètement le paramétrage "technique" et l'optimisation économique.

Cas d'une Zone d'Homogénéisation.

Considérons maintenant le cas (très différent) d'une fonction de valorisation homogénéisante

$$B = H(Q, T) - bT - CV$$

où T est le tonnage total de minerai et Q le métal récupéré total.

là :

$$Q = v \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} z(v_{ji})$$

$$T = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} v_{ji}$$

$$V = \sum_{j \in J} V_j$$

Pour un choix J donné des panneaux à extraire, on doit sélectionner les blocs de manière à maximiser $H(Q, T) - bT$. A T donné (c'est-à-dire pour un nombre k donné de blocs), le meilleur choix consisterait à prendre les blocs les plus riches, car $H(Q, T)$ est croissante en Q. Mais on ne connaît pas les $Z(v)$. On choisira donc les k meilleurs $Z^*(v_{ji})$, car l'espérance conditionnelle

$$E \left[H \left(\sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} v z(v_{ji}) \right) \mid I_2 \right]$$

peut, raisonnablement, être considérée comme une fonction croissante de l'espérance conditionnelle de son argument. Il suit de là que le paramétrage technique $\{Z^*(v) \geq z_0\}$ est légitime, ici encore, pour la sélection des blocs. La suite est plus difficile. Si I_j désigne les indices i tels que $Z^*(v_{j,i}) \geq z$, on doit introduire les V.A. :

* (C I₁)
 ^ (C I₁)

$$\tau_j(z) = \sum_{j \in J_j} v_{ji} \quad , \quad \chi_j(z) = \sum_{j \in J} v_{ji} z(v_{ji})$$

et travailler sur l'espérance conditionnelle en I_1 :

$$E \left[H \left(\sum_{j \in J} \chi_j(z) \quad , \quad \sum_{j \in J} \tau_j(z) \right) - C \sum_{j \in J} v_j \middle| I_1 \right]$$

Or, des V.A. χ_j et τ_j , on sait seulement

$$E(\chi_j(z) | I_1) = Q_j(z) \quad ; \quad E(\tau_j(z) | I_1) = T_j(z)$$

mais on ne connaît pas leur loi (à J^2 variables). Une première approximation consistera à remplacer χ_j et τ_j par leurs espérances Q_j et T_j , c'est-à-dire à travailler sur :

$$H(\sum_J Q_j(z) \quad , \quad \sum_J T_j(z)) - C \sum_J V_j$$

Ceci conduit au critère de sélection des panneaux :

$$Q_j(z) \frac{\partial H}{\partial Q} + T_j(z) \frac{\partial H}{\partial T} \geq CV$$

Mais d'autre part la valeur optimale de z , réalisant le maximum de $H(Q, T)$ pour un choix J donné, doit vérifier

$$\sum_J \left(\frac{dQ_j}{dz} \frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{dT_j}{dz} \frac{\partial H}{\partial T} \right) = 0$$

Comme $dQ_j = z dT_j$ pour chaque j , cela se réduit à :

$$z \frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial H}{\partial T} = 0$$

Considérons alors le paramétrage technique (z_0, z_1) où, pour un z_0 donné, on choisit $J(z_0, z_1)$ selon le critère

$$Q_j(z_0) \geq z_0 T_j(z_0) + z_1 V$$

Le choix optimal de (z_0, z_1) est celui pour lequel

$$\begin{cases} z_0 \frac{\partial H}{\partial Q} + \frac{\partial H}{\partial T} = 0 \\ z_1 \frac{\partial H}{\partial Q} = C \end{cases}$$

étant entendu que, dans les dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial Q}$ et $\frac{\partial H}{\partial T}$, Q et T sont remplacés par leurs valeurs paramétrées en (z_0, z_1) . On peut résoudre ce système par une méthode d'itération, pourvu que le paramétrage technique en (z_0, z_1) soit connu.

Ainsi, dans ce cas, le paramétrage technique en (z_0, z_1) (le même que dans le cas où B est linéaire) est utilisable, moyennant l'approximation grossière consistant à remplacer τ_j et χ_j par leurs espérances conditionnelles T_j et Q_j .

Cas où I_1 n'est pas disponible.

Considérons maintenant le cas nettement plus difficile où l'information I_1 , sur la base de laquelle on choisit les panneaux, n'est pas encore disponible. Il s'agit donc, en somme, ici, d'anticiper en probabilité les futures fonctions de transfert.

Soit V un panneau, v un bloc aléatoire dans V . A I_1 connue, les fonctions de transfert sont

$$T(z) = E[1_{\{Z^*(v) \geq z\}} \mid I_1]$$

$$Q(z) = E[Z^*(v) 1_{\{Z^*(v) \geq z\}} \mid I_1]$$

Ce sont des fonctions de l'information future I_1 , et, par

leur intermédiaire, des V.A. lorsque I_1 redevient aléatoire. Le critère de sélection (dans le paramétrage technique (z_0, z_1) avec z au lieu de z_0 et λ au lieu de z_1) pour le panneau V est : (avec $V = 1$)

$$Q(z) - z T(z) - \lambda \geq 0$$

Donc, les quantités :

$$\begin{cases} V(z, \lambda) = P(Q(z) - z T(z) \geq \lambda) \\ T(z, \lambda) = V(z, \lambda) E[T(z) | Q(z) - z T(z) \geq \lambda] \\ Q(z, \lambda) = V(z, \lambda) E[Q(z) | Q(z) - z T(z) \geq \lambda] \end{cases}$$

donnent le paramétrage du métal récupéré, du tonnage de minerai et du volume extrait en fonction des deux paramètres techniques. En pratique, toutefois, on ne sait pas calculer ces espérances conditionnelles, et on va les remplacer par des krigeages disjonctifs.

Plaçons-nous d'abord à $Z_\alpha = \varphi(Y_\alpha)$ connus (c'est-à-dire conditionnellement à I_1 donné). φ est l'anamorphose gaussienne ponctuelle, φ_V celle des blocs v . Par KD, on forme la densité

$$\begin{cases} f_{KD}(x) = \sum \frac{H_n^*}{n!} H_n(x) g(x) \\ H_n^* = \sum_\alpha \lambda_n^\alpha H_n(Y_\alpha) \end{cases}$$

les λ_n^α , coefficients du KD, sont connus (et peuvent être calculés même si les $\{Y_\alpha\} = I_1$ ne sont pas encore donnés). On a alors :

$$\begin{cases} T(z_0) = \int_{x_0}^{\infty} f_{KD}(x) dx \\ Q(z_0) = \int_{x_0}^{\infty} \varphi_V(x) f_{KD}(x) dx \end{cases}$$

avec $\varphi_V(x_0) = z_0$

En posant

$$Q_n(z_0) = \int_{x_0}^{\infty} \varphi_V(\xi) H_n(\xi) g(\xi) d\xi$$

$$T_n(z_0) = \int_{x_0}^{\infty} H_n(\xi) g(\xi) d\xi$$

Ceci s'écrit donc :

$$\begin{cases} Q(z_0) = \sum_n \frac{Q_n(z_0)}{n!} H_n^* \\ T(z_0) = \sum_n \frac{T_n(z_0)}{n!} H_n^* \end{cases}$$

avec $H_0^* = 1$, $H_n^* = \lambda_n^\alpha H_n(Y_\alpha)$. Les Y_α étant inconnus, les H_n^* deviennent des V.A. de variances connues ($n \geq 1$)

$$E(H_n^*) = 0 \quad E(H_n^{*2}) = s_n^2 = n! \sum_{\alpha, \beta} \lambda_n^\alpha \lambda_n^\beta \rho_{\alpha\beta}^n$$

Nous ferons l'hypothèse de permanence :

$$Q(z_0) \equiv \varphi_Q(z_0; X) \quad ; \quad T(z_0) \equiv \varphi_T(z_0; X)$$

pour une même gaussienne réduite X , avec

$$\begin{cases} \varphi_Q(z_0; X) = Q_0(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n(z_0)}{n!} s_n H_n(x) \\ \varphi_T(z_0; X) = T_0(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(z_0)}{n!} s_n H_n(x) \end{cases}$$

Cette hypothèse (qui généralise le modèle hermitien) donne les valeurs correctes :

$$\left\{ \begin{aligned} E(\varphi_Q(z_0; X)) &= Q_0(z_0) \\ E(\varphi_T(z_0; X)) &= T_0(z_0) \\ \text{Var}(\varphi_Q(z_0; X)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n^2}{n!} s_n^2 \\ \text{Var}(\varphi_T(z_0; X)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n^2(z_0)}{n!} s_n^2 \\ \text{Cov}(\varphi_Q(z_0; X), \varphi_T(z_0; X)) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(z_0) Q_n(z_0)}{n!} s_n^2 \end{aligned} \right.$$

Ce modèle revient à considérer la loi à 2 variables (X, Y) de "densité"

$$f(X, Y) = g(X) g(Y) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n H_n(X) H_n(Y)}{n!} \right)$$

et à prendre :

$$\varphi_Q(z_0; x) = E \left[1_{\{Y \geq x_0\}} \varphi_V(Y) \mid X = x \right]$$

$$\varphi_T(z_0; x) = E \left[1_{\{Y \geq x_0\}} \mid X = x \right]$$

Le critère de sélection des panneaux est

$$(4-2) \quad \varphi_Q(z_0; X) - z_0 \varphi_T(z_0; X) - \lambda \geq 0$$

La fonction $1_{\{Y \geq x_0\}} (\varphi_V(Y) - z_0) = (\varphi_V(Y) - \varphi_V(x_0))_+$ étant croissante en Y, son espérance en X pour la loi f(X, Y) qui est justement $\varphi_Q(z_0; X) - z_0 \varphi_T(z_0; X)$ serait également croissante en X si f(X, Y) était une vraie loi (≥ 0). Le domaine en X défini par (4-2) serait donc de la forme :

$$\{X \geq \xi(z_0, \lambda)\}$$

avec une fonction ξ décroissante en z_0 et λ , défini en remplaçant l'inégalité par l'égalité dans (4-2).

Le paramétrage technique en (z_0, λ) s'écrit alors très simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(z_0, \lambda) = \int_{\xi(z_0, \lambda)}^{\infty} \varphi_T(z_0, x) g(x) dx \\ Q(z_0; \lambda) = \int_{\xi(z_0, \lambda)}^{\infty} \varphi_Q(z_0, x) g(x) dx \end{array} \right.$$

Ces calculs sont numériquement réalisables.

5 - SELECTION SIMPLE SOUS CONTRAINTE.

La contrainte s'exprime en disant que tout projet doit correspondre à un contour $A \in \mathcal{B}$ (appartenant à la famille \mathcal{B} des contours autorisés). Exemples :

~ ciel ouvert : $A \in \mathcal{B}$ si A respecte les conditions de pente d'équilibre, donc si A est réunion des cones Γ_x , $x \in A$.

~ toit et mur de teneur : ici le gisement est divisé en panneaux P_j . Dans chaque panneau, la partie exploitée doit être ou vide ou une tranche horizontale de puissance $\geq p$ donnée (par exemple). On admet, pour simplifier, que ces tranches horizontales peuvent être choisies indépendamment dans les différents panneaux P_j (donc, on néglige les conditions de raccordement).

Parmi les projets possibles A de volume $V(A) \leq v$ donné, on admet que le meilleur est celui qui maximise la quantité de métal $Q(A)$ (en l'absence de découverte, cette condition est

effectivement vérifiée par toute fonction plausible de valorisation pourvu que les zones d'homogénéisation soient : ou bien les blocs, ou bien le gisement entier).

Pour chaque v , il y a donc un (ou plusieurs) A_v réalisant

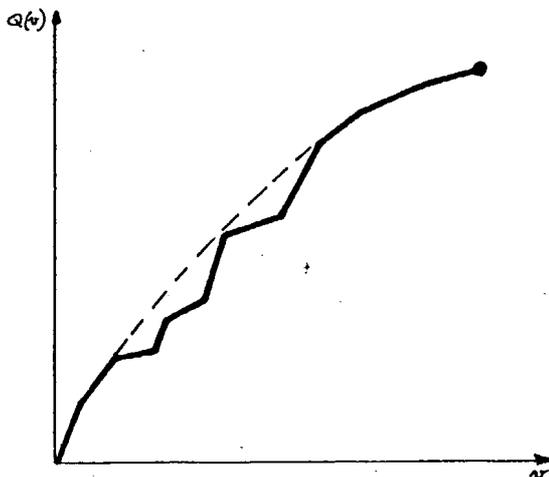
$$(5-1) \quad \text{Sup} \{Q(A) : A \in \mathcal{B}, V(A) \leq v\} = Q(v)$$

Si la teneur $q(x)$ est connue en chaque point x , $Q(A) = \int_A q(x)dx$ est connue pour chaque A , et la formule ci-dessus réalise (théoriquement) le paramétrage technique en v . Lorsque $q(x)$ n'est pas connu, rien d'essentiel n'est changé si l'information I sur la base de laquelle on choisit le contour A est actuellement disponible - ce que nous supposons ici. En effet, on forme pour chaque x l'estimateur $q^*(x) = E(q(x) | I)$ vérifiant la condition de non biais conditionnel, et on est ramené à maximiser

$$\int_A q^*(x)dx = Q^*(A) \quad (\text{car } E(Q(A) | I) = Q^*(A) \text{ pour chaque } A \in \mathcal{B})$$

Nous laisserons donc de côté l'astérisque, et écrirons $Q(A)$ au lieu de $Q^*(A)$.

Principe de l'Analyse Convexe.



En pratique, toutefois, le problème (5-1) n'est pas facile à résoudre. Même en discrétisant le problème, on se heurte à une combinatoire très compliquée. La technique de l'analyse convexe consiste à

remplacer la courbe $Q(v)$ (croissante, mais non nécessairement concave) par son enveloppe concave. Pour cela, pour chaque $\lambda \geq 0$ posons :

$$(5-2) \quad \gamma(\lambda) = \sup_{A \in \mathcal{B}} \{Q(A) - \lambda V(A)\}$$

Désignons par \mathcal{B}_λ la famille des $A \in \mathcal{B}$ réalisant ce Sup, et par A_λ^- et A_λ^+ des éléments de \mathcal{B}_λ minimisant et maximisant respectivement $V(A)$ pour $A \in \mathcal{B}_\lambda$. Dans le cas général, on n'a pas nécessairement $A_\lambda^- \subset A_\lambda^+$.

On a, évidemment :

$$Q(A) - \lambda V(A) \leq \gamma(\lambda)$$

pour tout $A \in \mathcal{B}$ et tout $\lambda \geq 0$, avec égalité si et seulement si $A \in \mathcal{B}_\lambda$. Pour $V(A) \leq v$, on a a fortiori $Q(A) - \lambda v \leq \gamma(\lambda)$, et donc, d'après (5-1)

$$Q(v) - \lambda v \leq \gamma(\lambda)$$

avec égalité si et seulement si $v = V(A_\lambda)$ pour un $A_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$. En particulier, on a également

$$(5-3) \quad \gamma(\lambda) = \sup_{v \geq 0} \{Q(v) - \lambda v\}$$

Posons alors :

$$(5-4) \quad \hat{Q}(v) = \inf_{\lambda \geq 0} \{\gamma(\lambda) + \lambda v\}$$

nous obtenons ainsi l'enveloppe concave de $Q(v)$, c'est-à-dire sa plus petite majorante concave.

En effet, $\hat{Q}(v)$ est concave (comme Inf de fonctions affines)

et majore $Q(v)$ (car $Q(v) \leq \gamma(\lambda) + \lambda v$ pour tout λ , d'après (5-3)). Le sous graphe $\Gamma = \{(v, q) : q \leq Q(v)\}$ est l'ensemble convexe $\hat{\Gamma} = \bigcap_{\lambda} \{(v, q) : q - \lambda v \leq \gamma(\lambda)\}$.

Mais, d'après (5-3), un demi-plan $q - \lambda v \leq C$ contient le graphe de $Q(v)$ si et seulement si $C \geq \gamma(\lambda)$. Donc $\hat{\Gamma}$ est l'intersection des demi-plans $\{q - \lambda v \leq C\}$ contenant ce graphe - c'est-à-dire l'enveloppe convexe du graphe, et \hat{Q} est la plus petite majorante concave de Q .

On peut alors paramétrer les réserves en λ : pour chaque $\lambda \geq 0$, la droite d'appui $q - \lambda v = \gamma(\lambda)$ admet les deux points d'appui extrêmes $(V_{\lambda}^{-}, Q_{\lambda}^{-})$ et $(V_{\lambda}^{+}, Q_{\lambda}^{+})$ (ce qui signifie $V_{\lambda}^{-} \leq V_{\lambda} \leq V_{\lambda}^{+}$ pour tout autre point d'appui) associés aux deux ensembles A_{λ}^{-} et $A_{\lambda}^{+} \in \mathcal{B}_{\lambda}$. On obtient le paramétrage

$$\begin{aligned} V^{+}(\lambda) &= V(A_{\lambda}^{+}) & V^{-}(\lambda) &= V(A_{\lambda}^{-}) \\ Q^{+}(\lambda) &= Q(A_{\lambda}^{+}) & Q^{-}(\lambda) &= Q(A_{\lambda}^{-}) \end{aligned}$$

V^{+} et Q^{+} sont décroissantes et continues à gauche, V^{-} et Q^{-} décroissantes et continues à droite. De plus :

$$\gamma(\lambda) = Q^{+}(\lambda) - \lambda V^{+}(\lambda) = Q^{-}(\lambda) - \lambda V^{-}(\lambda)$$

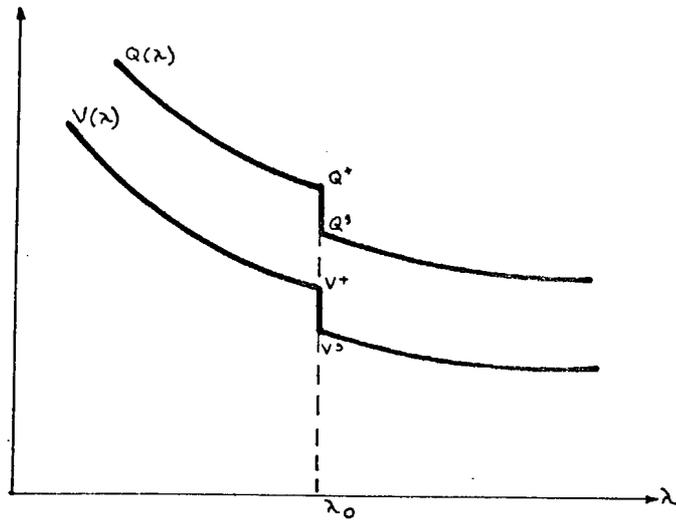
est convexe, décroissante et continue.

Ce paramétrage est unique, malgré les notations V^{+} , V^{-} etc.. car

$$V^{-}(\lambda) \downarrow V^{+}(\lambda_0) \quad , \quad Q^{-}(\lambda) \downarrow Q^{+}(\lambda_0) \quad \text{pour } \lambda \uparrow \lambda_0$$

$$V^{+}(\lambda) \uparrow V^{-}(\lambda_0) \quad , \quad Q^{+}(\lambda) \uparrow Q^{-}(\lambda_0) \quad \text{pour } \lambda \downarrow \lambda_0$$

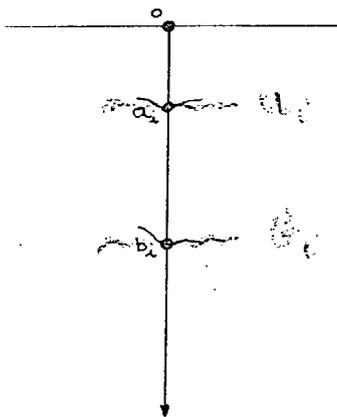
(cela résulte de $V^{+}(\lambda) \geq V^{-}(\lambda) \geq V^{+}(\lambda_0)$ pour $\lambda \uparrow \lambda_0$, etc..)



En conclusion, si l'on accepte de remplacer le graphe de $Q(v)$ par son enveloppe concave (ou, plus précisément, par les points d'appui des droites d'appui de cette enveloppe qui seuls correspondent à des projets réels), on peut remplacer le problème (5-1) par le problème beaucoup plus simple (5-2).

Exemple 1 : toit et mur de teneur.

Soit à déterminer les cotes a_i et b_i du toit et du mur sur chaque panneau P_i . Pour chaque i , on connaît le krigeage $Z_i^*(x)$ de la tranche horizontale de cote x , de sorte que :

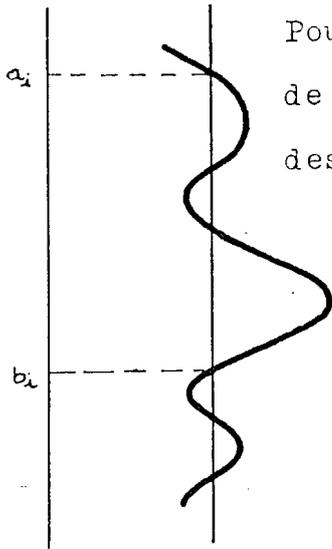


$$Q - \lambda V = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} (Z_i^*(x) - \lambda) dx$$

On obtient le paramétrage en λ en optimisant indépendamment les différents termes

$$\int_{a_i}^{b_i} (Z_i^*(x) - \lambda) dx$$

puisque'il n'y a pas de condition de raccordement entre panneaux



Pour chaque λ , il n'y a qu'un très petit nombre de possibilités (car $Z^*(x) < \lambda$ pour x juste au dessus de a_i ou juste au dessous de b_i).

Pour chaque panneau :

$$T_i(\lambda) = (b_i - a_i)$$

$$Q_i(\lambda) = \int_{a_i}^{b_i} Z_i^*(x) dx$$

puis $T(\lambda) = \sum T_i(\lambda)$; $Q(\lambda) = \sum Q_i(\lambda)$

Exemple 2 : Ciel ouvert.

Ici, les contraintes de pente d'équilibre naturel imposent d'extraire tout le cône Γ_x de sommet x dès que x est extrait. Ceci s'exprime par une relation d'ordre (ou de préordre). Posons

$$y \geq x \text{ si } y \in \Gamma_x \quad (y \text{ est au dessus de } x \text{ dans le préordre } \Gamma)$$

Si on extrait x , on doit aussi extraire tous ses majorants.

La famille \mathcal{B} des contours autorisés est donc constituée des ensembles stables pour le préordre Γ :

(a) $B \in \mathcal{B}$ si et seulement si $x \in B \Rightarrow \Gamma_x \subset B$

Nous nous limitons au cas fini (gisement discrétisé) :

L'espace E de référence ne contient qu'un nombre fini de points x (centre des blocs du milieu réel).

Dans ce cas, il n'y a pas lieu de distinguer entre \cup ou \cap finie et infinie (et tous les Sup seront effectivement atteints).

Une famille \mathcal{B} est associée à un préordre Γ si et seulement si elle est stable pour \cup et \cap .

Si \mathcal{B} est défini par un préordre Γ selon la relation (a), il est immédiat que \mathcal{B} est stable pour \cup et \cap .

Inversement, soit \mathcal{B} stable pour \cup et \cap . Pour tout x , on pose $\Gamma_x = \cap \{B : B \in \mathcal{B}, x \in B\}$. La relation $y \in \Gamma_x$ est réflexive ($x \in \Gamma_x$) et transitive : car si $y \in \Gamma_x$, tout B contenant x contient aussi y , donc $\Gamma_y \subset \Gamma_x$: c'est un préordre. Par définition, $x \in B \in \mathcal{B}$ entraîne $\Gamma_x \subset B$. Inversement si $\Gamma_x \subset A$ pour tout $x \in A$, $A = \cup \{\Gamma_x, x \in A\}$ est dans \mathcal{B} comme réunion d'ensembles $\Gamma_x \in \mathcal{B}$.

Le cône convexe \mathcal{S} des fonctions Γ -croissantes.

Une fonction f sur l'espace (fini) E est Γ -croissante si $y \in \Gamma_x$ entraîne $f(y) \geq f(x)$.

L'ensemble \mathcal{S} des fonctions Γ -croissantes est un cône convexe, réticulé (stable pour Inf et Sup), contient les constantes (positives et négatives) et les indicatrices $1_B, B \in \mathcal{B}$.

On a $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ pour tout λ réel.

En effet, soit $f \in \mathcal{S}$ et $x \in E$. $x \in \{f \geq \lambda\}$, c'est-à-dire $f(x) \geq \lambda$ entraîne $f(y) \geq \lambda$ pour tout $y \in \Gamma_x$, c'est-à-dire $\Gamma_x \subset \{f \geq \lambda\}$. Donc $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$.

Inversement, si $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ pour tout λ , on a $x \in \{f \geq f(x)\} \in \mathcal{B}$, donc $\Gamma_x \subset \{f \geq f(x)\}$. Cela veut dire

$y \in \Gamma_x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$, i.e. $f \in \mathcal{F}$.

\mathcal{F} est le cone convexe engendré par -1 et les indicatrices 1_B , $B \in \mathcal{B}$.

Ce cone convexe est contenu dans \mathcal{F} . Inversement, soit $f \in \mathcal{F}$. Quitte à remplacer f par $(f - \inf f) \in \mathcal{F}$, on peut supposer $f \geq 0$. En effet, soient $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ la suite finie des valeurs de λ correspondant à des $B_i^+ = \{f \geq \lambda\}$ distincts. On a $f = \lambda_i$ sur $B_i \setminus B_{i+1}$, et $B_i \supset B_{i+1}$, donc

$$f = \sum_i \lambda_i (1_{B_i} - 1_{B_{i+1}}) = \lambda_1 1_{B_1} + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) 1_{B_{i+1}}$$

f est donc une combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 d'indicatrices d'ensembles de \mathcal{B} .

Pour $f \in \mathcal{F}$, et λ réel, posons

$$A_\lambda^+ = \{f \geq \lambda\} \quad , \quad A_\lambda^- = \{f > \lambda\}$$

On a :

$$(b) \quad A_{\lambda_0}^+ = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} A_\lambda \quad ; \quad A_{\lambda_0}^- = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} A_\lambda$$

(avec $A_\lambda = A_\lambda^+$ ou A_λ^- indifféremment). En particulier A_λ^+ et A_λ^- sont des fonctions décroissantes de λ .

En effet, pour $\lambda < \lambda_0$, on a $A_{\lambda_0}^+ \subset A_\lambda^-$ d'après la définition, donc $A_{\lambda_0}^+ \subset \bigcap_{\lambda < \lambda_0} A_\lambda$. Inversement, soit $x \in \bigcap_{\lambda < \lambda_0} A_\lambda^+$: on a $f(x) \geq \lambda$ pour tout $\lambda < \lambda_0$, donc $f(x) \geq \lambda_0$ et par suite $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} A_\lambda^+ \subset A_{\lambda_0}^+$.

Cette propriété entraîne :

$$f(x) = \text{Sup} \{ \lambda : x \in A_\lambda^+ \}$$

En effet $x \in A_\lambda^+$ équivaut à $f(x) \geq \lambda$. Donc $\text{Sup} \{ \lambda : x \in A_\lambda^+ \} = f(x)$.

Inversement, si on se donne une famille A_λ^+ vérifiant la première relation (b), la fonction $f(x) = \text{Sup} \{ \lambda : x \in A_\lambda^+ \}$ vérifie $\{f \geq \lambda\} = A_\lambda^+$ - et $f \in \mathcal{G}$ si et seulement si les A_λ^+ sont des contours autorisés.

Le Théorème de Projection.

L'espace fini E est muni d'une mesure V (volume) attribuant une masse $V(\{x\}) > 0$ à chaque $x \in E$. De plus, on se donne une mesure $Q(dx) \geq 0$ avec $Q(dx) = q(x) V(dx)$: $q(x)$ est la teneur ≥ 0 de x . On pose (pour $\lambda \geq 0$)

$$\mu_\lambda = Q - \lambda V$$

et on cherche les contours $B \in \mathcal{B}$ réalisant le Sup de $\mu_\lambda(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$. Posons

$$(c) \quad \gamma(\lambda) = \text{Sup}_{B \in \mathcal{B}} \mu_\lambda(B) = \text{Sup}_{B \in \mathcal{B}} (Q(B) - \lambda V(B))$$

Soit \mathcal{B}_λ la famille (non vide) des $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu_\lambda(B) = \gamma(\lambda)$

\mathcal{B}_λ est stable pour \cup et \cap , et, en particulier, contient un plus petit et un plus grand élément :

$$\underline{B_\lambda^- = \cap \mathcal{B}_\lambda \quad ; \quad B_\lambda^+ = \cup \mathcal{B}_\lambda}$$

En effet, si B et B' sont dans \mathcal{B}_λ , on trouve

$$\mu_\lambda(B \cup B') + \mu_\lambda(B \cap B') = \mu_\lambda(B) + \mu_\lambda(B') = 2 \gamma(\lambda)$$

Comme $B \cup B'$ et $B \cap B'$ sont dans \mathcal{B} , on a aussi

$$\mu_\lambda(B \cup B') \leq \gamma(\lambda) \quad ; \quad \mu_\lambda(B \cap B') \leq \gamma(\lambda)$$

et donc les égalités, c'est-à-dire $B \cup B'$ et $B \cap B'$ dans \mathcal{B}_λ .

$$\underline{\lambda > \lambda_0 \Rightarrow B_\lambda^+ \subset B_{\lambda_0}^-}$$

Ecrivons B au lieu de B_λ^+ , B_0 au lieu de $B_{\lambda_0}^-$. On a $C = B \cap B_0 \in \mathcal{B}$, et $\mu_{\lambda_0} \geq \mu_\lambda$. $C \in \mathcal{B}$ entraîne $\mu_\lambda(C) \leq \mu_\lambda(B)$, soit $\mu_\lambda(B \setminus C) \geq 0$, donc aussi $\mu_{\lambda_0}(B \setminus C) \geq 0$. Alors

$$\mu_{\lambda_0}(B \cup B_0) = \mu_{\lambda_0}(B_0) + \mu_{\lambda_0}(B \setminus C) \geq \gamma(\lambda_0)$$

Donc $\mu_{\lambda_0}(B \setminus C) = \mu_\lambda(B \setminus C) = 0$. Par différence, $(\lambda - \lambda_0) V(B \setminus C) = 0$, donc $B = C$ (puisque E est fini et V strictement > 0), c'est-à-dire $B \subset B_0$.

La famille B_λ^+ est continue à droite (et B_λ^- continue à gauche)

$$\underline{B_{\lambda_0}^+ = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda \quad ; \quad B_{\lambda_0}^- = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} B_\lambda}$$

En effet, $\gamma(\lambda)$ est continue (car convexe) et $\gamma(\lambda) \downarrow \gamma(\lambda_0)$ pour $\lambda \uparrow \lambda_0$. Mais on voit facilement que $\mu_\lambda(B_\lambda) \rightarrow \mu_{\lambda_0}(\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda)$. D'où $\mu_{\lambda_0}(\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda) = \gamma(\lambda_0)$. Comme $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda \supset B_{\lambda_0}^+$, cela entraîne $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda = B_{\lambda_0}^+$.

On peut alors définir une fonction Λ en posant :

$$\Lambda(x) = \text{Sup} \{ \lambda : x \in B_\lambda^+ \}$$

Cette fonction vérifie :

$$\Lambda \in \mathcal{S} , \quad B_\lambda^+ = \{ \Lambda \geq \lambda \} ; \quad B_\lambda^- = \{ \Lambda > \lambda \}$$

De plus, $\Lambda \geq 0$ et :

$$(d) \quad \Lambda(x) = \int_0^\infty 1_{B_\lambda^+}(x) \, d\lambda \quad (\forall x \in E)$$

Par définition, B_λ^+ est l'élément maximal de \mathcal{B} tel que :

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A (q-\lambda)V \leq \int_{B_\lambda^+} (q-\lambda)V$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(e) \quad \int 1_A (q-\lambda)V \leq \int 1_{B_\lambda^+} (q-\lambda)V$$

Soit alors f une fonction positive et Γ -croissante, et

$$A_\lambda^+ = \{ f \geq \lambda \} \in \mathcal{B}$$

d'où

$$f(x) = \int_0^\infty 1_{A_\lambda^+}(x) \, d\lambda$$

Mettons A_λ^+ au lieu de A dans E et intégrons en λ de 0 à l'infini. Il vient :

$$\int f(x) q(x) V(dx) - \frac{1}{2} \int f^2(x) V(dx) \leq \int \Lambda q V - \frac{1}{2} \int \Lambda^2 V$$

Soit, dans l'espace $L^2(\underline{E}, \underline{V})$:

$$\langle f, q \rangle - \frac{1}{2} \|f\|^2 \leq \langle \Lambda, q \rangle - \frac{1}{2} \|\Lambda\|^2$$

ou - ce qui revient au même :

$$(f) \quad \|\Lambda - q\|^2 \leq \|f - q\|^2$$

pour toute f positive dans \mathcal{S} : mais cette relation exprime que Λ est la projection de q sur le cône convexe \mathcal{S}_+ des fonctions positives Γ -croissantes.

En fait, Λ est aussi la projection de q sur le cône \mathcal{S} lui-même. En effet, la projection Λ de q sur \mathcal{S}_+ est caractérisée comme l'unique $\Lambda \in \mathcal{S}$ vérifiant :

$$(g) \quad \begin{cases} \langle \Lambda, q \rangle = \|\Lambda\|^2 \\ \langle f, q \rangle \leq \langle f, \Lambda \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}_+ \end{cases}$$

Prenons $f = 1_{B_\lambda^+}$ dans la dernière relation (g) : il vient :

$$\int 1_{B_\lambda^+} q \, v \leq \int 1_{B_\lambda^+} \Lambda$$

On a, en fait, l'égalité. En effet, soit $\lambda_0 < \lambda_1 \dots$ la suite (finie) des valeurs de discontinuité ($B_{\lambda_i}^- \subset B_{\lambda_i}^+$ strictement).

Pour $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$, on a donc

$$B_{\lambda_i}^- = B_\lambda^+ = B_\lambda^- = B_{\lambda_{i+1}}^+$$

Les ensembles

$$\delta B_i = B_{\lambda_i}^+ \setminus B_{\lambda_i}^- = B_{\lambda_i}^+ \setminus B_{\lambda_{i+1}}^+$$

forment une partition finie de E , et $\Lambda = \lambda_i$ sur δB_i , soit :

$$\Lambda = \sum \lambda_i \mathbb{1}_{\delta B_i} = \sum (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \mathbb{1}_{B_{\lambda_i}^+}$$

Mais, pour tout λ , $\gamma(\lambda) = \mu_\lambda(B_\lambda^+) = \mu_\lambda(B_\lambda^-)$ entraîne, pour chaque i , $\mu_{\lambda_i}(\delta B_i) = 0$, donc, puisque $\Lambda = \lambda_i$ sur δB_i :

$$\int_{\delta B_i} q V = \int_{\delta B_i} \Lambda(x) V(dx)$$

puis, par sommation :

$$\int_{B_\lambda^+} q V = \sum_i \int_{\delta B_i \cap B_\lambda^+} q V = \sum_i \int_{\delta B_i \cap B_\lambda^+} \Lambda V = \int_{B_\lambda^+} \Lambda V$$

soit, pour tout $\lambda \geq 0$

$$(h) \quad \int_{\Lambda \geq \lambda} q(x) V(dx) = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda(x) V(dx)$$

Pour $\lambda = 0$, on trouve $\int q V = \int \Lambda V$. Par suite, pour toute constante b positive ou négative, (g) entraîne :

$$\langle f-b, q \rangle \leq \langle f-b, \Lambda \rangle \quad f \in \mathcal{S}_+$$

Or $f-b$, $f \in \mathcal{S}_+$ est la forme générale des $g \in \mathcal{S}$ (positives ou non). Par suite, on a aussi :

$$\langle g, q \rangle \leq \langle g, \Lambda \rangle \quad g \in \mathcal{S}$$

et Λ est bien la projection de q sur \mathcal{S} .

Conséquence : Le paramétrage des réserves est entièrement défini par la fonction Λ , par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{\lambda}^{+} = \{\Lambda \geq \lambda\} \quad ; \quad B_{\lambda}^{-} = \{\Lambda > \lambda\} \\ V_{\lambda}^{+} = \int_{\Lambda \geq \lambda} V(dx) \quad ; \quad V_{\lambda}^{-} = \int_{\Lambda > \lambda} V(dx) \\ Q_{\lambda}^{+} = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda(x) V(dx) \quad ; \quad Q_{\lambda}^{-} = \int_{\Lambda > \lambda} \Lambda(x) V(dx) \end{array} \right.$$

Cela résulte de la relation (h).

Tout se passe donc comme dans la formulation zonéographique à la manière de Lasky, à condition de remplacer la vraie teneur q par sa projection Λ sur le cône convexe \mathcal{S} des fonctions Γ -croissantes.

6 - SELECTION DOUBLE SOUS CONTRAINTES.

Les contours autorisés sont ici des couples $(A, A') \in \mathcal{B}$ où A' est le volume sélectionné pour l'extraction et $A \subset A'$ le volume sélectionné pour minerai. Nous poserons $\omega = (A, A')$, et les $\omega \in \mathcal{B}$ seront appelés les projets autorisés. Pour tout $\omega = (A, A')$, on pose :

$$V(\omega) = V(A') = \text{volume à extraire}$$

$$T(\omega) = V(A) = \text{volume (ou tonnage) de minerai récupéré}$$

$$Q(\omega) = Q(A) = \text{métal récupéré}$$

(avec évidemment $V(\omega) \geq T(\omega)$).

Le thème général est celui d'une dualité entre le paramétrage en (V, T) et le paramétrage dual en (λ, θ) .

Le Paramétrage en (V,T).

Posons, pour $v \geq T \geq 0$

$$(6-1) \quad Q(v,T) = \text{Sup} \{Q(\omega), \omega \in \mathcal{B}, T(\omega) \leq T, V(\omega) \leq v\}$$

C'est une fonction croissante de chacune des variables, qui constitue un paramétrage technique admissible (sous la seule hypothèse que, de deux projets conduisant aux mêmes valeurs de V et T, le meilleur est celui qui donne la plus grande quantité de métal : notons, toutefois, que cette hypothèse n'est pas vérifiée par toutes les formules de valorisation. Par exemple, une formule B additive par rapport à des panneaux V_j : $B(\cup V_j) = \sum B_j(V_j)$ peut la mettre en défaut (exemple du Togo..). Par contre, si le gisement ou la portion de gisement auquel on s'intéresse constitue une zone de valorisation homogène, $B = B(Q,T,V)$ ne dépend que des quantités totales Q,T,V et doit être, en général, croissante en Q (cas du toit et mur de teneur). Si B est additive par rapport aux blocs et si la sélection des blocs (pour minerai) est libre, l'hypothèse est encore acceptable : cas des open pits).

Mais ce paramétrage technique est, en pratique, inaccessible à cause de la complexité de la combinatoire mise en jeu. On va donc ici encore remplacer $Q(v,T)$ par son enveloppe concave, ce qui revient à utiliser le paramétrage dual :

Le paramétrage dual en λ, θ .

Posons pour $\lambda, \theta \geq 0$

$$(6-2) \quad \gamma(\lambda, \theta) = \text{Sup}_{\omega \in \mathcal{B}} (Q(\omega) - \lambda V(\omega) - \theta T(\omega))$$

Pour $T(\omega) \leq T$ et $V(\omega) \leq V$, on a $Q(\omega) - \lambda V - \theta T \leq \gamma(\lambda, \theta)$ et par suite aussi

$$\gamma(\lambda, \theta) = \sup_{v \geq T \geq 0} (Q(v, T) - \lambda v - \theta T)$$

Désignons alors par $\hat{Q}(v, T)$ l'enveloppe concave de $Q(v, T)$ dont le sous graphe (ensemble des (v, T, Q) tels que $q \leq \hat{Q}(v, T)$) est

$$\hat{\Gamma} = \{(v, T, q) : v \geq 0, T \geq 0, q - \lambda v - \theta T \leq \gamma(\lambda, \theta)\}$$

Il en résulte :

$$\hat{Q}(v, T) = \inf_{\lambda, \theta \geq 0} (\gamma(\lambda, \theta) + \lambda v + \theta T)$$

Pour obtenir un paramétrage en (λ, θ) , considérons la famille $\mathcal{B}_{\lambda, \theta}$ des ω réalisant le Sup dans (6-2) (j'admets sans discussion ici que le Sup est atteint : en pratique, le problème est discrétisé de sorte que la famille \mathcal{B} est finie et que ce problème ne se pose pas). Les points $(Q(\omega), V(\omega), T(\omega))$ pour $\omega \in \mathcal{B}_{\lambda, \theta}$ sont les points d'appui du plan limite $q - \lambda v - \theta T = \gamma(\lambda, \theta)$ du sous-graphe de $Q(v, T)$: ils appartiennent au graphe de l'enveloppe concave $\hat{Q}(v, T)$, et constituent d'ailleurs les seuls points de ce graphe correspondant à des projets réels.

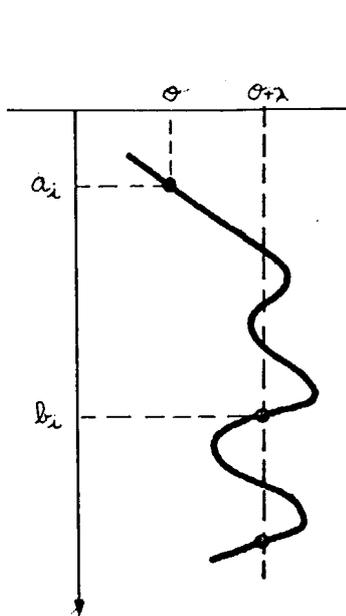
Pour obtenir un paramétrage utilisable, on fixe l'un des paramètres; par exemple $\theta = \theta_0$, et on construit le paramétrage en λ (à $\theta = \theta_0$ fixé) comme dans le paragraphe précédent. En faisant ensuite varier θ_0 , on obtient le paramétrage cherché en (λ, θ) .

Exemple 1 : Toit et Mur de teneur avec découverte.

Avec les notations du paragraphe 5, on a ici :

$$Q(\omega) - \lambda V(\omega) - \theta T(\omega) = \sum_i \left[\int_{a_i}^{b_i} Z^*(x) dx - \lambda(b_i) - \theta(b_i \dots a_i) \right]$$

Comme on choisit (a_i, b_i) librement dans chacun des panneaux, on doit optimiser



$$\int_{a_i}^{b_i} Z^*(x) dx - (\lambda + \theta) b_i + \theta a_i$$

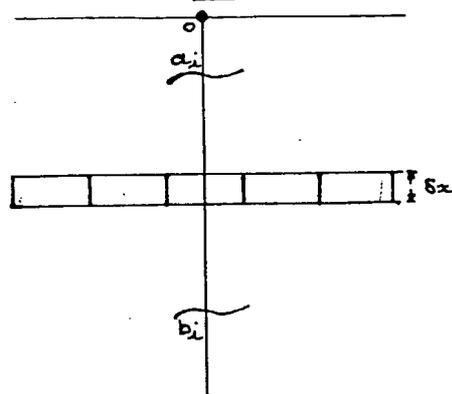
indépendamment pour chacun des panneaux P_i : il n'y a qu'un petit nombre de combinaisons : on doit avoir $Z^*(x) < \theta$ au dessus de a et $\geq \theta$ au dessous ; de même $Z^*(x) < \lambda + \theta$ au dessous de b et $\geq \lambda + \theta$ au dessus. On obtient donc très vite le paramétrage :

$$Q(\lambda, \theta) = S \sum_i \int_{a_i}^{b_i} Z^*(x) dx$$

$$T(\lambda, \theta) = S \sum_i (b_i - a_i)$$

$$V(\lambda, \theta) = S \sum_i b_i$$

Exemple 2 : Toit et Mur de teneur et sélection fine du minerais.



Il s'agit, par exemple, d'un gisement d'Uranium. Dans chaque panneau, on extrait une tranche horizontale (a_i, b_i) . (on ne tient pas compte d'une découverte éventuelle.)

Au moment de l'exploitation, une sélection fine du minerai est faite sur des parallélépipèdes v de hauteur δx .

Sur ces blocs v , le critère $Z^*(v) \geq \theta$ permet le paramétrage technique d'un volume donné (une tranche a_i, b_i) supposé extrait. Cela conduit aux fonctions de transfert de chaque tranche horizontale $(x, x+\delta x)$ pour chaque panneau P_i (de surface S_i).

$$\begin{cases} T_i(x; \theta) = S_i \delta x \int_{\theta}^{\infty} F_i^*(x; dz) \\ Q_i(x; \theta) = S_i \delta x \int_{\theta}^{\infty} z F_i^*(x; dz) \end{cases}$$

On a alors pour la tranche (a_i, b_i)

$$Q_i - \lambda V_i - \theta T_i = S_i \int_{a_i}^{b_i} (Q_i(x; \theta) - \theta T_i(x; \theta) - \lambda) dx$$

Pour chaque θ donné, a_i et b_i se déterminent comme dans le paragraphe 5 (avec $Q_i(x, \theta) - \theta T_i(x, \theta)$ au lieu de $Z^*(x)$). On obtient ainsi a_i et b_i en fonction de λ et θ , et, par sommation en i , le paramétrage $Q(\lambda, \theta)$, $T(\lambda, \theta)$, $V(\lambda, \theta)$.

Exemple 3 : Ciel ouvert avec sélection libre du minerai.

Chaque contour autorisé devant être réunion de blocs v , on discrétise le problème au niveau de v . Pour chaque bloc v_x (de centre x , $x \in E$ où E est fini), on forme les fonctions de transfert $T(x; \theta)$ et $Q(x; \theta)$. Pour chaque θ fixé, on est ramené au problème à un paramètre λ avec $q(x) = Q(x; \theta) - \theta T(x; \theta)$. D'où le paramétrage.

REMARQUE : Dans le premier exemple, l'information définitive est supposée connue. Dans les deux derniers, on suppose connue l'information I_1 nécessaire à la sélection d'extraction (i.e. le choix des a_i , b_i ou du contour autorisé V). Par contre, l'information I_2 utilisée pour la sélection du minerai n'est pas connue. C'est une circonstance assez générale : c'est seulement pour une sélection libre que l'on peut anticiper, en probabilité, son résultat lorsque l'information correspondante n'est pas encore disponible. Dès qu'il y a contrainte, le paramétrage global ne peut s'obtenir que par sommation d'estimations locales, et l'information nécessaire doit être déjà là.

L'optimisation économique.

Il reste à choisir les valeurs de λ et θ optimales pour la formule de valorisation B donnée. Je n'examine que le cas d'une zone unique d'homogénéisation où B est de la forme $B(Q, V, T)$. Pour λ et θ donnés, $V = V(\lambda, \theta)$ est connu, mais Q et T sont deux V.A. d'espérance $Q(\lambda, \theta)$ et $T(\lambda, \theta)$. Il faudrait, théoriquement, calculer l'espérance de $E(B(Q, V, T))$, à λ et θ donnés, et l'optimiser en λ et θ . En première approximation, on se contentera de remplacer Q , V et T par leurs espérances dans l'expression de $B(Q, V, T)$. Il s'agit donc d'optimiser

$$B(V(\lambda, \theta), T(\lambda, \theta), Q(\lambda, \theta))$$

Plaçons-nous en un point (λ, θ) où Q , V et T sont différentiables (le cas général en résultera par continuité). Des deux expressions

$$dQ = \lambda dv + \theta dT = \frac{\partial Q}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial Q}{\partial \theta} d\theta$$

résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \theta \frac{\partial T}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial V}{\partial \theta} + \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{array} \right.$$

D'où

$$\frac{\partial B}{\partial \lambda} = \frac{\partial V}{\partial \lambda} \left(\lambda \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B}{\partial V} \right) + \frac{\partial T}{\partial \lambda} \left(\theta \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B}{\partial T} \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B}{\partial V} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B}{\partial T} \right)$$

L'optimum, caractérisé par $\frac{\partial B}{\partial \lambda} = \frac{\partial B}{\partial \theta} = 0$ s'obtient donc en résolvant le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} V = V(\lambda, \theta) \quad , \quad T = T(\lambda, \theta) \quad , \quad Q = Q(\lambda, \theta) \\ \lambda \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B}{\partial V} = 0 \quad ; \quad \theta \frac{\partial B}{\partial Q} + \frac{\partial B}{\partial T} = 0 \end{array} \right.$$

On doit pouvoir obtenir assez vite une solution approchée en utilisant une méthode d'itération : partir de (λ_0, θ_0) , en déduire V_0, T_0, Q_0 par les premières équations, puis λ_1, θ_1 par les secondes et réitérer.

7 - L'ANALYSE CONVEXE EN POLYMETALLIQUE .

C'est dans le cas polymétallique que les techniques de l'analyse convexe prennent tout leur intérêt. Si l'on désigne par Z^1, Z^2, \dots, Z^n les teneurs du minerai en diverses substances, les unes utiles, les autres nuisibles, la première idée qui vient à l'es-

prit consiste à utiliser une formule d'équivalence du type

$$(7-1) \quad Z = a_i Z^i$$

où les poids a_i (positifs pour les substances utiles, négatifs pour les substances nuisibles) sont des paramètres économiques, ajustés de manière à ce que Z représente la valeur contenue par tonne de minerai (par exemple). On peut alors traiter le problème comme s'il n'y avait qu'une seule substance. Mais, en réalité, les a_i sont des paramètres susceptibles de variation, et, d'autre part, la formule linéaire (7-1) est en général trop simple pour représenter adéquatement les relations d'équivalence économique. D'où l'idée de réaliser un paramétrage technique à n-1 paramètres techniques, n étant le nombre des paramètres techniques figurant dans la formule de valorisation : dans le cas d'une zone unique d'homogénéisation, ces paramètres seront les p teneurs Z^i et, par exemple, divers volumes T, V^1, V^2, \dots (représentant le minerai traité, le volume extrait, le volume de la découverte etc...) soit

$$B = B(Z^1, \dots, Z^p ; T, V^1, V^2, \dots ; b_1, b_2, \dots)$$

où les b_i sont divers paramètres économiques.

Le problème est alors le suivant : Soit \mathcal{B} l'ensemble des projets ω réalisables. A chaque $\omega \in \mathcal{B}$ est associé un vecteur $X(\omega) \in \mathbb{R}^n$, dont les coordonnées $X^i(\omega)$, $i = 1, \dots, n$ sont les $Z^j(\omega)$, $T(\omega)$, $V^k(\omega)$, et nous devons, en principe, résoudre le problème :

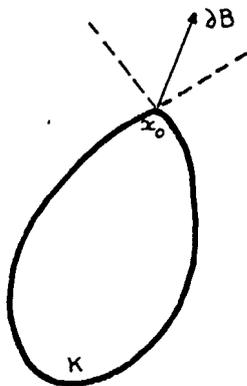
$$(7-2) \quad \gamma = \sup_{\omega \in \mathcal{B}} B(X(\omega))$$

Autrement dit, nous devons maximiser B sur l'ensemble $X(\mathcal{B})$ dans \mathbb{R}^n - problème pratiquement insoluble (N.B. : dans cette formulation générale, on raisonne comme si les $X^i(\omega)$ étaient connues, ou encore comme s'il était légitime de remplacer l'espérance $E(B(X(\omega)) | I)$ conditionnelle à l'information I par $B(X^*(\omega))$ avec $X^*(\omega) = E(X(\omega) | I)$.

L'idée directrice de la méthode va consister à remplacer le nuage $X(\mathcal{B})$ par son enveloppe convexe dans \mathbb{R}^n , que nous désignerons par K ou $K(\mathcal{B})$: il faudra simplement se souvenir, chaque fois que l'on considèrera un hyperplan d'appui à K , que les seuls points d'appui dont on soit sûr qu'ils appartiennent à $X(\mathcal{B})$ (c'est-à-dire correspondent à des projets ω réels) sont les points d'appui extrémaux. A cette réserve près, nous remplaçons le problème (7-2) par le problème beaucoup plus simple :

$$(7-2') \quad \gamma' = \sup_{x \in K(\mathcal{B})} B(x)$$

Les fonctions de valorisation plausibles sont soit croissantes soit décroissantes en chaque X^i , de sorte que le Sup, dans γ' , correspond nécessairement à un (ou plusieurs) points frontière de $K(\mathcal{B})$.



Les candidats x_0 possibles sont donc les points où le gradient ∂B_{x_0} de B en x_0 vérifie la relation

$$\forall x \in K : \langle x - x_0, \partial B_{x_0} \rangle \leq 0 \quad (7-3)$$

En chaque $x_0 \in \partial K$ (frontière de K), l'ensemble des vecteurs u vérifiant :

$$\forall x \in K \quad \langle x - x_0, u \rangle \leq 0$$

constitue un cone convexe G_{x_0} appelé cone des normales (extérieures) en x_0 . Le problème peut donc s'énoncer comme suit :

$$(7-3) \quad \sim \text{trouver les points } x_0 \in \partial K \text{ tels que } \partial B_{x_0} \in G_{x_0}$$

(une fois ces points trouvés, il faut encore sélectionner ceux qui correspondent au maximum absolu).

Comme B est croissante (par exemple) en x^1, \dots, x^k et décroissante en x^{k+1}, \dots, x^n , son gradient ∂B en tout point x appartient nécessairement à l'octant $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}_-^{n-k}$ que nous appellerons l'octant B_+ .

Parmi les points x_0 de la frontière ∂K , nous n'avons donc à nous préoccuper que de ceux où le cone des normales G_{x_0} rencontre l'octant B_+ .

Le convexe K est intersection de ses demi-espaces d'appui :

$$K = \bigcap_{x_0 \in \partial K} \bigcap_{u \in G_{x_0}} \{x : \langle x - x_0, u \rangle \leq 0\}$$

et la frontière ∂K peut être paramétrée en u . En principe, u décrit \mathbb{R}^n , mais il n'y a en réalité que $n-1$ paramètres, puisque l'on peut changer u en λu ($\lambda > 0$). Moyennant une convention (par exemple $\sum u_i^2 = 1$), le domaine de u est une variété S de dimension $n-1$. En pratique, on fixera $u_1 = 1$, si X^1 est la teneur de la substance utile principale, dont on est sûr que l'influence économique est strictement positive dans tous les cas : S est alors \mathbb{R}^{n-1} .

A chaque $u \in S$, on associe les points $x_0 \in \partial K$ réalisant :

$$\gamma(u) = \sup_{x \in K} \langle x, u \rangle$$

Parmi ces points, seuls d'ailleurs sont à considérer ceux qui correspondent à des projets réels :

$$\gamma(u) = \sup_{\omega \in \mathcal{B}} \langle X(\omega), u \rangle$$

Soit \mathcal{B}_u les $\omega \in \mathcal{B}$ réalisant ce Sup. Si \mathcal{B}_u contient plusieurs éléments, on désignera par Γ_u l'enveloppe convexe de $\{X(\omega), \omega \in \mathcal{B}_u\}$. D'où le paramétrage technique cherché :

$$u \rightarrow \Gamma_u, \quad u \in S \cap B^+$$

(on n'a besoin de l'expliciter que pour les $u \in S$ appartenant à l'octant B^+).

Avec ce paramétrage, le problème (7-3) devient :

~ trouver $u \in S \cap B^+$ tel qu'il existe $x_0 \in \Gamma_u$ avec $\partial B_{x_0} = u$ (à un facteur positif près).

En pratique, on remplacera ce paramétrage multivoque $u \rightarrow \Gamma_u$ par un paramétrage univoque

$$X(u) = X(\omega(u))$$

où $\omega(u)$ est l'un des projets de \mathcal{B}_u , choisi à l'aide d'une convention auxiliaire simple. (analogue à celle qui consiste à choisir les fonctions $Q^+(\lambda)$ et $V^+(\lambda)$ dans le cas $n = 2$).

On peut alors utiliser une méthode d'itération :

~ partant d'un $u_0 \in S \cap B^+$ arbitraire, on forme $X(u_0) = x_0$.

~ on choisit u_1 proportionnel à ∂B_{x_0} , et on réitère.

Une fois $x_0 \in \partial K$ trouvé, il reste à vérifier qu'il s'agit bien du maximum absolu. Cette condition est réalisée automatiquement lorsque l'ensemble :

$$(7-4) \quad \{y : B(y) \geq B(x_0)\} \quad \text{est convexe.}$$

En effet, dans ce cas, le gradient ∂B_{x_0} étant orienté vers l'extérieur de K , les deux convexes K et $\{B > B(x_0)\}$ sont séparés strictement par l'hyperplan $\langle x-x_0, \partial B_{x_0} \rangle = 0$.

Les fonctions de valorisation B vérifiant (7-4) au moins sur un domaine \mathcal{D} dont on est sûr, au départ, qu'il contient l'optimum, vont donc présenter un intérêt particulier. Voici un premier résultat .

Si B est continument différentiable sur un ouvert convexe \mathcal{D} , les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a/ $\{B \geq b_0\} \cap \mathcal{D}$ est convexe pour tout b_0

b/ $B(y) \geq B(x_0) \Rightarrow \langle y-x_0, \partial B_{x_0} \rangle \geq 0 \quad (x_0, y \in \mathcal{D})$

c/ Si $x_0, y \in \mathcal{D}$ et $B(y) = B(x)$, alors $B(\lambda y + (1-\lambda)x) \geq B(y)$
pour $\lambda \in [0, 1]$

Il est évident que a/ \Rightarrow b/ et a/ \Leftrightarrow c/. On démontre b \Rightarrow c/ en se plaçant sur la droite contenant x et y : sur cet espace à 1 dimension, b/ entraîne que B doit être croissante jusqu'à un certain $z_0 \in [x, y]$, et ensuite décroissante, et c/ en résulte.

Exemples de formules de valorisation.

En général, B est positivement homogène :

$$B(\lambda X) = \lambda B(X) \quad (\lambda \geq 0)$$

Plus précisément, on aura souvent, en notations explicites :

$$(7-5) \quad B(Q^1, \dots, Q^p ; T, v^1, v^2, \dots) = T f\left(\frac{Q^i}{T}\right) - b_j v^j$$

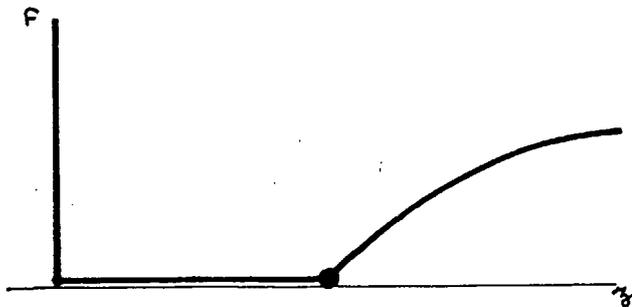
Une fonction B de cette forme vérifie les propriétés a/, b/, c/ si et seulement si la fonction f est concave. Plus précisément :

Si \mathcal{D} est le cône convexe défini dans \mathbb{R}^n par $T f(Q/T) > 0$, B vérifie a/, b/ et c/ si et seulement si f est concave sur le domaine de \mathbb{R}^p défini par $\{f > 0\}$, et B est alors elle-même concave sur \mathcal{D} .

Par exemple, pour $p = 1$ (une seule substance), la formule

$$B(Q, T, v^j) = T f\left(\frac{Q}{T}\right) - b_j v^j$$

vérifie ces conditions si et seulement si f est concave sur $f > 0$. La fonction B est alors elle-même concave.



Ce résultat est intéressant, car beaucoup de formules de valorisation usuelle sont de ce type : par exemple

$$f(m) = \begin{cases} a & \text{si } m \geq m_0 \\ 0 & \text{si } m < m_0 \end{cases}$$

où $f(m) = a(m-m_0)_+^\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) etc...

Démontrons d'abord un lemme :

Soit B une fonction de $k + k'$ variables, de la forme :

$$B(X^i, V^j) = f(X^i) - b_j V^j \quad (i = 1, \dots, k ; j = 1, \dots, k')$$

définie sur $X \in \mathcal{D}_1$, $V \in \mathbb{R}_+^{k'}$ ouverts convexes, avec $b_j > 0$.

Alors B vérifie les propriétés a/ b/ c/ sur $\mathcal{D}_1 \times \mathbb{R}_+^{k'}$ si et seulement si f est concave sur \mathcal{D}_1 - et B est elle-même concave sur son domaine.

En effet, soit X et X' dans \mathcal{D}_1 . On veut montrer

$$(7-6) \quad f(\alpha X + (1-\alpha) X') \geq \alpha f(X) + (1-\alpha) f(X') \quad (\alpha \in [0, 1])$$

dès que B vérifie a/, b/, c/.

Choisissons V et V' dans $\mathbb{R}_+^{k'}$ telles que

$$f(X) - \langle b, V \rangle = f(X') - \langle b, V' \rangle$$

ce qui est toujours possible. Comme B vérifie la propriété c/,

on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha X + (1-\alpha) X') - \alpha \langle b, V \rangle - (1-\alpha) \langle b, V' \rangle \\ \geq \alpha (f(X) - \langle b, V \rangle) + (1-\alpha) (f(X') - \langle b, V' \rangle) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, justement, (7-6). Inversement, si (7-6) est vérifiée, B est concave.

Il reste à montrer :

Soit f une fonction sur \mathbb{R}^p , et $\mathcal{D} = \{f > 0\}$. Alors, la fonction $(X, T) \rightarrow T f\left(\frac{X}{T}\right)$ est concave sur le cône $\bigcup_{T \geq 0} T\mathcal{D}$ dans \mathbb{R}^{p+1} si et seulement si f est concave sur \mathcal{D} .

Or ce résultat est immédiat, si l'on remarque que le sous-graphe de $T f(X/T)$ est le cône de sommet 0 dans \mathbb{R}^{p+1} et de base $1 \times \Gamma$, où Γ est le sous graphe de f dans \mathbb{R}^p : le cône est convexe si et seulement si Γ est convexe. L'intersection de ce cône avec $\bigcup T \mathcal{D}$ est convexe si et seulement si $\Gamma \cap \mathcal{D}$ est convexe, et le théorème en résulte.

Comme l'ensemble $\{\varphi, T, V\}$ des projets possibles est fini, son enveloppe ~~convexe~~^{convexe} est un polyèdre. Si un projet (φ_0, T_0, V_0) est extrême sur cette enveloppe, il correspond à un sommet du polyèdre, et il existe au moins un plan d'appui passant par ce point et ne contenant aucun autre projet possible. Donc, il existe λ_0 et β_0 tels que :

$$\varphi_0 - \beta_0 T_0 - \lambda_0 V_0 > \varphi - \beta_0 T - \lambda_0 V$$

pour tout projet (φ, T, V) différent. Mais le projet (φ'_0, T'_0, V'_0) obtenu à partir des valeurs β_0 et λ_0 des deux paramètres vérifie (4-6), c'est-à-dire, en particulier

$$\varphi'_0 - \beta_0 T'_0 - \lambda_0 V'_0 \geq \varphi_0 - \beta_0 T_0 - \lambda_0 V_0$$

Puisque $(\varphi'_0, T'_0, V'_0) = (\varphi_0, T_0, V_0)$: tout ~~projet~~^{point} extrême ~~est~~ correspond donc à un projet obtenu par la règle (4-2)

$$p_u = \frac{\text{Volume pores reliés}}{\text{Volume total}} \times 100$$
 qui est de l'ordre de 5 à 10% plus faible que la porosité totale.

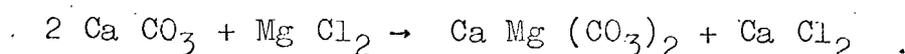
1-2 La porosité primaire

La porosité primaire ou intergranulaire, parfois appelée porosité originelle est une caractéristique inhérente à la matrice. Le caractère de la porosité primaire est dû à l'arrangement des cristaux ou des grains. Les roches carbonatées ont souvent une porosité primaire assez faible et une porosité secondaire forte: leur porosité primaire est souvent d'origine intercrystalline.

1-3 La porosité secondaire

Généralement appelée porosité induite, la porosité secondaire est due à la dissolution, à des fractures et fissures, à des modifications minéralogiques (dolomitisation, recristallisation), à une cimentation et une compaction.

Le phénomène de dolomitisation est dû à une transformation moléculaire de la calcite par substitution d'ions Mg^{++} aux ions Ca^{++} suivant la réaction.



ce qui donnerait une diminution de volume de l'assemblage de l'ordre de 12 à 13% et donc une création de pores (par la circulation plus libre des eaux de dissolution éliminant la calcite plus rapidement).

Les roches carbonatées contiennent aussi des pores dues aux inclusions végétales (vacuoles).

PREMIERE PARTIE

LA POROSITE

- Définition.
- Méthodes utilisées pour sa détermination.
- Les diagraphies.
- Détermination de la porosité à partir des diagraphies.

La porosité est l'un des paramètres qui permettent de déceler l'existence d'hydrocarbures ou de gaz. Elle est déterminée d'une part par l'étude pétrographique et l'étude pétrophysique des carottes, d'autre part par le traitement des mesures électriques (Logs, ou diagraphies) effectuées dans le puits.

Si $z = z'$, ces deux critères réunis constituent une condition nécessaire et suffisante: il en sera ainsi, en première approximation, si ~~le projet~~ $V = \sum_j V_j$ ~~est positif et grand~~ contient un nombre élevé de panneaux: en pareil cas, l'échange de deux panneaux z et z' ne peut que faire peu modifier le coût, et z' est à peu près égal à z .

Mal, en toute rigueur, la condition (4-5) n'est pas nécessaire, et seule que le critère (4-2) peut laisser échapper quelques points de la courbe optimale.

Exemple: Soient deux panneaux contenant chacun deux blocs avec les valeurs suivantes:

$$\begin{array}{l} V_1 \quad z_1 = 2 \text{ et } z'_1 = 12 \\ V_2 \quad z_2 = 10 \text{ et } z'_2 = 10 \end{array}$$

Cherchons le projet optimal pour $V=1$ (un seul panneau) et $T=20$ (2 blocs): visiblement, c'est le projet V_2 coupé à $z = z_2 = 10$ qui valse et optimum. Mais:

$$Q_2(z_2) - z_2 T_2(z_2) = 0$$

$$Q_1(z_2) - z_2 T_1(z_2) = 2$$

ce qui contredit (4-5). Par contre, si on a $z' = 2 = z_1$ et

$$Q_2(z_1) - z_1 T_2(z_1) = 16$$

$$Q_1(z_1) - z_1 T_1(z_1) = 10$$

et (4-5') est bien vérifiée

Caractérisation des optima vérifiant le critère (4-2)

On fait que le critère (4-2) s'introduit naturellement lorsque la valorisation est linéaire, on peut s'attendre à ce que les points optimaux qui's permet d'atteindre soit associés à l'ensemble convexe de la surface optimale $Q = Q(T, V)$. De fait, il en est bien

"Mout est la terre dure
Sanz iave et sanz humour..."

Conon de Béthune

Dans cette partie, nous nous sommes attachés à définir la porosité et à voir comment on l'approche habituellement dans l'industrie pétrolière.

Nous proposons ensuite une méthode d'estimation de la porosité à partir des logs - le cokrigeage.

Nous montrons également comment on peut utiliser l'Analyseur de Textures pour étudier localement la roche réservoir ainsi que la méthode qui permet d'étudier la réponse des "outils de porosité".

- 1 - La porosité - Les diagraphies.
- 2 - Estimation de la porosité - Le cokrigeage.
- 3 - Etude locale de la roche réservoir.
- 4 - Etude de la réponse d'un log à un paramètre donné.
- 5 - Annexes.

$$\exists [T_{J'}(z) - T_{J'}(z')] \geq \exists [T_J(z) - T_J(z')] \quad (19'10)$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \varphi_J(z) - \varphi_{J'}(z') \geq \exists [T_J(z) - T_J(z')] + \varphi_{\delta J}(z) - \varphi_{\delta J'}(z') \\ 0 = T_J(z) - T_J(z') + T_{\delta J}(z) - T_{\delta J'}(z) \end{cases}$$

En multipliant par \exists la seconde relation, et en retranchant de la première, il vient donc :

$$\varphi_J(z) - \varphi_{J'}(z') \geq (\varphi_{\delta J}(z) - \exists T_{\delta J}(z)) - (\varphi_{\delta J'}(z') - \exists T_{\delta J'}(z'))$$

Parsuivi, si J n'est pas optimal, on peut trouver un choix J' (par exemple un choix optimal) tel que $\varphi_J(z) - \varphi_{J'}(z') < 0$, c'est-à-dire :

$$\varphi_{\delta J}(z) - \exists T_{\delta J}(z) < \varphi_{\delta J'}(z') - \exists T_{\delta J'}(z')$$

Comme

$$\varphi_{\delta J}(z) - \exists T_{\delta J}(z) = \sum_{j \in \delta J} (\varphi_j(z) - \exists T_j(z))$$

on peut également trouver un j annexe $j \in J$ et un j' annexe $j' \notin J$ tels que :

$$\varphi_j(z) - \exists T_j(z) < \varphi_{j'}(z') - \exists T_{j'}(z')$$

Inversement donc, pour que J soit optimal, il suffit que

$$\varphi_j(z) - \exists T_j(z) \geq \varphi_{j'}(z') - \exists T_{j'}(z')$$

(4-5)

pour tout $j \in J$ et tout $j' \notin J$.

En raisonnant en sens inverse (en échangeant le rôle de J et J') on obtient

pour que J' soit optimal, on figure cette fois non plus le j annexe j qui réalise T dans l'ensemble J des j annexes choisis, mais le j annexe j qui réalise T dans l'ensemble J' obtenu en remplaçant le j annexe j par le j annexe j' : pour que J soit optimal, il faut que t'annex

$$(4-5') \quad \varphi_j(z) - \exists T_j(z) \geq \varphi_{j'}(z') - \exists T_{j'}(z')$$

pour tout $j \in J$ et $j' \notin J$.

ECOLE DES MINES DE NANCY

ETUDE DE LA RELATION POROSITE - DIAGRAMMES

Par

P. JOATHON

C. HUIJBREGTS

Stage de Troisième Année S.N.P.A. - PAU - 1969

Option Morphologie Mathématique

2 - METHODES -

Soit maintenant J' un autre droit de panneaux, ~~correspondant~~ ^{correspondant} au même volume extrait

$$V = \sum_J V_J = \sum_{J'} V_{J'}$$

et z' le niveau de coupeur déterminant, dans J' , le même tonnage T déterminera :

$$\sum_{J'} T_{J'}(z') = \sum_J T_J(z) = T$$

Il faut comparer les quantités de métal \odot correspondantes, soit $\rho_J(z)$ et $\rho_{J'}(z')$.

Désignons par δJ l'ensemble des panneaux appartenant à J mais non à J' , et par $\delta J'$ l'ensemble des panneaux de J' qui n'ont pas dans J .

Il est clair que l'on a

$$(4-4) \begin{cases} 0 = T_J(z) - T_{J'}(z') = T_{J_1}(z) - T_{J_1}(z') + T_{\delta J}(z) - T_{\delta J'}(z') \\ \rho_J(z) - \rho_{J'}(z') = \rho_{J_1}(z) - \rho_{J_1}(z') + \rho_{\delta J}(z) - \rho_{\delta J'}(z') \end{cases}$$

D'autre part, il existe un \bar{z} compris entre z et z' tel que :

$$\rho_{J_1}(z) - \rho_{J_1}(z') = \bar{z} [T_{J_1}(z) - T_{J_1}(z')]$$

Notons encore ici : Comme, par hypothèse, les tonnages $T_J(z)$ et $T_{J'}(z')$

sont égaux, on a

$$z > z' \text{ si et seulement si } T_{J_1}(z) \leq T_{J_1}(z')$$

(en effet, si, pour le coupeur z , le tonnage $T_{J_1}(z)$ est $\leq T$, il faut diminuer le niveau de coupeur de manière à augmenter le tonnage T_{J_1} , et inversement)

Or, \bar{z} est compris entre z et z' , donc $\bar{z} \leq z$ en même temps que $z' \leq \bar{z}$.

Poursuiv, dans tout les cas :

3 - Les différents outils, même s'ils relèvent théoriquement du même procédé, ont des définitions différentes. C'est en particulier le cas des deux neutrons étudiés (PGAC et SPES) qui ne rendent pas compte des mêmes phénomènes de la même façon.

4 - Le carottage doit se faire suivant une politique d'échantillonnage cohérente. Il est préférable d'avoir une vision moins précise de la pétrophysique du milieu en différents endroits de la zone réservoir, que d'avoir une connaissance précise d'une zone compacte restreinte. Dans le cas particulier qui nous intéresse, quatre carottes de 7 à 10 m régulièrement disposées auraient donné des renseignements plus utilisables.

D'une façon générale, on aura une connaissance meilleure du milieu par un carottage discontinu formé de carottes de 7 à 10 m de long et disposées dans toute la zone réservoir.

Nous avons justifié le paramètre (4-3), fondé sur le critère (4-2) en supposant linéaire la formule de valorisation. Mais ce paramètre reste valable sous des conditions beaucoup plus générales, et peut être utilisé ~~comme~~, en particulier, lorsque la formule de valorisation est du type homogène $B(Q, T, V)$. Plus précisément, nous allons montrer que ce paramètre contient nécessairement les optima techniques (Q maximum si V et T fixés). La démonstration suivante, un peu technique, peut être omise en première lecture -

Justification du paramètre (4-3)

On cherche le (ou les) projets maximisant Q si T et V donnés. Soit J un ensemble de projets V_j (tels que $\sum V_j = V$ donné). Si v est le volume d'un bloc, on maximisera Q sur ces choix J de projets en sélectionnant les $N = T/v$ meilleurs blocs contenus dans l'union des V_j ~~possibles~~. Il existera donc un volume β (fonction de J et de T) tel que les blocs de teneur $> \beta$ soient tous sélectionnés, aucun bloc de teneur $< \beta$ ne le soit, et parmi les blocs de teneur $= \beta$ (s'il y en a plusieurs) certains (choisis arbitrairement) seront pris, ~~mais~~ ^{mais} par tous nécessairement, de manière à obtenir exactement le tonnage T . Soit alors, pour simplifier, qu'il n'y ait pas deux blocs ayant exactement la même teneur. Dans ce cas, β est déterminé exactement par:

$$\sum_J T_j(\beta) = T$$

et le tonnage total correspondant est alors

$$Q_J(\beta) = \sum_J Q_j(\beta)$$

SIXIÈME PARTIE

CONCLUSION

Cette étude nous conduit donc à un certain nombre de résultats importants :

1 - Il est possible d'estimer un paramètre - ici la porosité - à partir de la réponse d'un log. Toutefois, dans le cas particulier que nous avons traité, l'existence de différentes zones dans le réservoir - mises en évidence par les quatre covariances du log SONIC - alors que nous ne connaissons la porosité que dans une de ces zones, fausse le résultat. Nous étions donc dans un cas défavorable mais la méthode a pu tout de même être appliquée.

2 - L'étude des courbes de covariances nous donne des renseignements fondamentaux sur les structures du milieu étudié. Ces structures sont liées à l'échelle envisagée. Ici, nous en distinguons trois :

- à l'échelle ponctuelle nous avons les renseignements donnés par l'étude des films.

- l'échelle pétrophysique, de l'ordre du mètre. Remarquons que cette structure se retrouve aussi bien sur les covariances des logs que sur celle de la porosité pétrophysique. On peut penser que le fait que le domaine d'intégration des logs a justement une longueur de l'ordre du mètre influe sur les résultats (en les régularisant).

- l'échelle de l'ordre de 30 à 40 m qui traduit l'existence de paquets de porosité relativement homogène. Cette structure apparaît lors de l'étude du réservoir par zone.

Grand A - NL France 17 + 3 + 2

1^{er} Sem Fr 29

NSF fr 9

1^{er} Sem Anglais 29

NSF 19 anglais

NL 14 anglais

Documents à remettre

Programme détaillé

Carton pour le cocktail 17^h - ~~18h~~ le lundi

Liste des participants

Merc. 20 motif KD amphicomme aux groupes NL NSF

Mardi ^{obv. midi} ~~17h~~ [Sim : thèse en commun exemples 2 groupes]

Judi 21 motif ~~groupes communs~~ Fondation transferts ^{ch. 1} Delf.) exemples de Sim.

Judi ^{obv. midi} 2^{ème} demi-journée Sim fin

Vendredi Région de la Seine motif

Avoir n. d. ex. d'ill. de KD Point Newman

Banquet : Judi 21

On voit donc que l'indice d'hydrogène a une influence non négligeable.

On peut écrire $\rho_e = \rho_B = (1-\phi) C_{ma} \rho_{ma} + \phi C_f \rho_f$. Il y a lieu d'effectuer une correction lorsque la zone envahie contient des hydrocarbures résiduels (S_{ro} saturation en hydrocarbures).

$$\rho_e = (1-\phi) C_{ma} \rho_{ma} + \phi [(1 - S_{ro}) C_{mf} \rho_{mf} + S_{ro} C_h \rho_h]$$

Dans le cas de formation gazeuse et si P est la salinité de la boue :

$$P = \frac{\rho_p^m}{10^6}$$

$$\Delta\rho_b = 1.07 \phi S_{ro} [1.11 + .65 P - 1.24 \rho_h]$$

et pour la porosité apparente $\phi_{\Delta} = \frac{\rho_{ma} - \rho_b}{\rho_{ma} - \rho_{mf}}$

$$\Delta \phi_d = \frac{1.07 \phi S_{ro} [1.11 + .65P - 1.24 \rho_h]}{\rho_{ma} - 1 - .7 P}$$

Le FDC ou densité log compense corrige l'effet de trou en utilisant deux détecteurs. On peut déterminer ρ_B par une abaque de correction.

(3) Le neutron :

Le neutron émet des neutrons rapides dans la formation qui sont ralentis par les atomes d'hydrogène et de chlore et, après avoir atteint le niveau thermique d'énergie, sont absorbés par eux. Par conséquent la mesure sera influencée par la concentration en hydrogène.

Le détecteur de rayon Gamma de capture est à 40 ou 50 cm (GNT : SPES).

Le détecteur de neutrons lents est à 40 ou 50 cm (SPES) ou à 32 cm (PGAC).

La zone mesurée a une bonne définition verticale et un rayon dépendant de la porosité (formation saturée en liquide protonique : eau, huile)

- ρ_{ma} : densité de matrice (dolomie 2,85 à 2,87)
- ρ_f : densité de fluide (en général filtrat)
- ρ_B : densité globale
- ϕ : porosité (dans les formations gazéifères la valeur risque d'être trop faible ; porosité apparente trop forte).

On a :

$$\rho_B = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_{ma}$$

L'effet de trou est faible de 10 à 15". Une correction de mud cake est nécessaire.

La constante est $\tau = 2$ à 4 s (augmente suivant la densité). La vitesse du défilement est $1''/\tau$.

La densité réelle est reliée à la densité électronique par la relation :

$$\rho_e = C \rho_b$$

ρ_e : densité électronique (nombre d'électrons/unité de volume)

ρ_b : densité réelle

avec $C = 2 \frac{Z}{A}$

Z : nombre atomique

A : poids atomique

Différentes valeurs de C ont été établies.

Elément	C	Composé	C
H	1.9841	$C_a CO_3 / Mg CO_3$	0.9977
C	.9991	H ₂ O	1.1101
O	1.0000	H ₂ O + Na Cl (200,000 ppm)	1.0797
Na	.9569	Huile	1.1407
Si	.9968		
Cl	.9588		
Ca	.9980		

K : coefficient de sonde

R_s : valeur de shunt

Si $S = 5$ la résistivité du milieu de l'échelle $R_{me} = K R_s$ est choisie comme 10, 100, 1000 ; 2, 20, 200 ; 5, 50, 500.

On obtient :

$$R_{LL7} = G_i R_{x_0} + (1 - G_i) R_t$$

G_i est un facteur géométrique dépendant du diamètre de la zone d'invasion.

La vitesse maximale d'enregistrement est de 40 m/mn. Les effets perturbateurs sont la colonne de boue, le diamètre du puits (négligeable si le trou $< 12''$), la nature de la boue (salinité).

(2) Density Log :

Le formation density log (Gamma-Gamma) permet d'approcher la densité de la formation (il s'agit en fait de la densité électronique). On mesure la réponse à une excitation γ (effet Compton)

L'atténuation du faisceau est :

$$N = N_0 e^{-cd\ell}$$

- N : nombre de rayons γ dispersés vers le détecteur.
- N_0 : nombre de rayons γ émis par la source
- c : constante
- d : densité électronique

ℓ : espacement source détecteur (les rayons diffusés par effet Compton ne sont pas à plus de 15 cm). Le spacing de l'appareil est de 16". La zone de pénétration étant faible, on ne mesurera que la zone envahie.

R_m la résistivité de la boue de forage.

La résistivité de la matrice est généralement très élevée (dolomie $R > 1000 \Omega.m$) par contre celle des eaux de formation varie entre $10 \Omega.m$ à $25^\circ C$ et $0,01 \Omega.m$ à $140^\circ C$.

Le laterolog 7 (7 électrodes) est un appareil à grand rayon d'action (il permet donc d'atteindre la zone non envahie) et où l'influence du sondage est négligeable jusqu'à 40 cm.

Si R_{mf} est la résistivité du filtrat de boue, les meilleures conditions sont obtenues pour $R_{mf} < R_w$ (erreur par défaut) mais on peut aller jusqu'à :

$$\frac{R_{mf}}{R_w} = 5 \quad (\text{erreur par excès})$$

si la zone envahie est faible. En particulier pour les zones gazéifères la mesure de R_t est possible si $\frac{R_m}{R_w} > 4$.

L'appareil agit par focalisation : le courant est constant en A_0 , variable en A_1, A_2 de manière à ce que le potentiel en M_1, M_1', M_2, M_2' soit le même. Le maximum du courant de garde est 500 mA.

$$A_1 A_2 = 2 \text{ m.}$$

$$O_1 O_2 = 0,80 \text{ m. (32")}$$

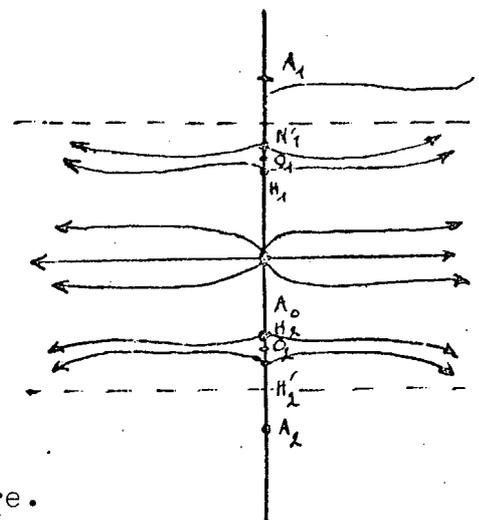
$$\text{Rapport d'étalement : } \frac{A_0 O_1}{A_0 O_2} = \frac{O_1 O_2}{A_1 A_2} = 2,5$$

La gamme va de 0 à $\infty \Omega.m$
(0 et 10 divisions du diagramme)

La formule de calibration est :

$$R_a = K R_s \frac{S}{10-S}$$

S : déflexion en divisions du galvanomètre.



3 - DIAGRAPHIES

3-1 Généralités

Les diagraphies enregistrées à partir des réponses des différents outils utilisés dans un puits foré permettent de déterminer :

- des corrélations : d'interprétation qualitative, elles indiquent les relations (lithologie, sédimentations) entre différents puits pour un réservoir donné.

- Une information qualitative sur la perméabilité (Gamma-ray, micro-laterolog et diagraphies de résistivité).

- la porosité et la saturation en eau, de même que la saturation en hydrocarbures : ces données sont obtenues à partir des diagraphies de densité (Gamma-Gamma), de résistivité (laterolog 7), acoustique (sonique) et nucléaires (neutron, gamma-ray).

Nous examinerons en premier lieu les différents outils déjà cités, leur principe et leur réponse, et ensuite les résultats que l'on peut escompter de la lecture des diagraphies.

3-2 Diagraphies :

(1) - Le laterolog 7

Il s'agit d'un outil de résistivité. On sait que la résistivité (inversement la conductivité) des formations est fonction principalement de la porosité et de la saturation en eau (ou en hydrocarbures) et de la zone d'invasion (zone envahie par les eaux du puits).

Soit R_{x_0} la résistivité de la zone envahie (flushed zone)

R_t la résistivité de la zone non envahie

R_w la résistivité de l'eau de formation

En général, les carottes sont brisées irrégulièrement, avec des zones broyées, et des récupérations variables (entre 85 et 100%). On opère alors un grossissement à la prise de vue de l'empreinte. Ce grossissement photographique est destiné à compenser le rapport longueur disponible/longueur théorique. Celle-ci peut être choisie à partir de bases variées (caisses de 1 m, par carotte - 2 à 5 m - par intervalle carotte en continu).

C'est la troisième solution qui a été retenue.

Les films ainsi réalisés défilent devant une cellule photo-électrique dont les variations de courant produites sont enregistrées graphiquement sur le papier d'un galvanomètre enregistreur.

Il est possible de faire varier la vitesse de défilement du film et celle du papier.

La cellule a un diamètre de 3 cm mais il est possible d'y insérer un cache carré. C'est donc une surface de 7 cm^2 environ (rond) ou de 4 cm^2 (carré) qui est intégrée à tout instant pendant le défilement.

Exemples de formules de valorisation.

En général, B est positivement homogène :

$$B(\lambda X) = \lambda B(X) \quad (\lambda \geq 0)$$

Plus précisément, on aura souvent, en notations explicites :

$$(7-5) \quad B(Q^1, \dots, Q^p ; T, V^1, V^2, \dots) = T f\left(\frac{Q^1}{T}\right) - b_j V^j$$

Une fonction B de cette forme vérifie les propriétés a/, b/, c/ si et seulement si la fonction f est concave. Plus précisément :

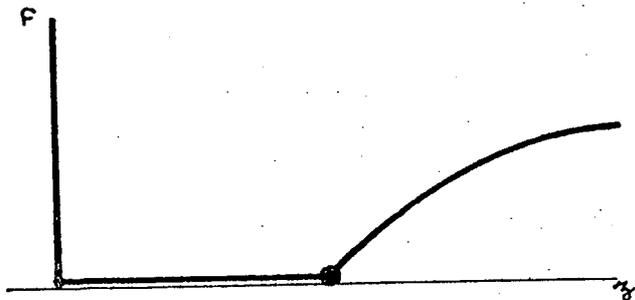
Si \mathcal{D} est le cône convexe défini dans \mathbb{R}^n par $T f(Q/T) > 0$, B vérifie a/, b/ et c/ si et seulement si f est concave sur le domaine de \mathbb{R}^p défini par $\{f > 0\}$, et B est alors elle-même concave sur \mathcal{D} .

Par exemple, pour $p = 1$ (une seule substance), la formule

$$B(Q, T, V^j) = T f\left(\frac{Q}{T}\right) - b_j V^j$$

vérifie ces conditions si et seulement si f est concave sur $f > 0$.

La fonction B est alors elle-même concave.



Ce résultat est intéressant, car beaucoup de formules de valorisation usuelle sont de ce type : par exemple

$$f(m) = \begin{cases} a & \text{si } m \geq m_0 \\ 0 & \text{si } m < m_0 \end{cases}$$

Can log n

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{ax+b} g_p(x, y) dx$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}} \int_{x_0}^{\infty} e^{ax+b} \frac{1}{2(1-p^2)} (x^2 + y^2 - 2pxy) dx$$

$$ax - \frac{1}{2(1-p^2)} (x^2 - 2pxy) = -\frac{1}{2(1-p^2)} [x^2 - 2pxy - 2a(1-p^2)x]$$

$$= -\frac{1}{2(1-p^2)} [x - py - a(1-p^2)]^2 + \frac{[py + a(1-p^2)]^2}{2(1-p^2)}$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-p^2}} e^{b - \frac{y^2}{2(1-p^2)} + \frac{[py + a(1-p^2)]^2}{2(1-p^2)}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-p^2)} [x - py - a(1-p^2)]^2} dx$$

$$\frac{x - py - a(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2}} = z$$

$$e^{b - \frac{y^2}{2} + \frac{a p(1-p^2)y}{\sqrt{1-p^2}} + \frac{a^2(1-p^2)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 - G\left(\frac{x_0 - py - a(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2}}\right) \right]$$

$$= e^{b + \frac{a^2}{2}} g(y - ap) \left[1 - G\left(\frac{x_0 - py - a(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2}}\right) \right]$$

$$A_{y_0}(y) = e^{b + \frac{a^2}{2}} g(y - ap) \left[1 - G\left(\frac{x_0 - py - a(1-p^2)}{\sqrt{1-p^2}}\right) \right]$$

$$- e^{b + ax_0} g(y) \left[1 - G\left(\frac{x_0 - py}{\sqrt{1-p^2}}\right) \right]$$

$$E(e^{ax+b}) = e^{b + \frac{a^2}{2}}$$

Пинера комм x_0 y > y_0

$$\int_{y_0}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax+b} g_p(ax, y)$$