

Fontainebleau

N-403

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 128

PARAMETRAGE DE CONTOURS OPTIMAUX

=====

G. MATHERON

Février 1975

PARAMETRAGE DE CONTOURS OPTIMAUX

Table des Matières

0 - <u>INTRODUCTION.</u>	1
1 - <u>LA CLASSE $\mathcal{B}$ ET LE CONE CONVEXE $\mathcal{C}$.</u>	4
2 - <u>L'OPTIMISATION DE $Q - \lambda V$.</u>	10
Théorème 2	13
Commentaire	15
Positivité de l'opérateur $q \rightarrow \Lambda$	18
3 - <u>GENERALISATION.</u>	19
Paramétrage non linéaire	20
4 - <u>LE CAS FINI.</u>	22
a/ Les relations tonnage-teneur	22
b/ Le cône convexe	25
c/ La fonction Λ	26
d/ Le théorème de projection	29
5 - <u>REALISATION PRATIQUE.</u>	30
5-1 - Théorème de Convergence et Conjecture	30
5-2 - Cas d'un cône Γ à base polygonale	34
5-3 - Conditions de réalisation pratique	37
5-4 - La méthode du bouclier de David	38
5-5 - Variation des conditions imposées	41
6 - <u>POST SCRIPTUM.</u>	43
7 - <u>RECHERCHE D'AUTRES ALGORITHMES.</u>	49
a/ Algorithme de l'ordre total	49
b/ Utilisation de cônes linéaires	52

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 128

PARAMETRAGE DE CONTOURS OPTIMAUX
=====

0 - INTRODUCTION

Cette note est inspirée par le problème, bien classique, de la recherche d'un contour optimal pour une exploitation à ciel ouvert. Il m'a semblé intéressant d'en donner une formulation paramétrique, permettant la construction des relations tonnage-teneur. Au lieu de chercher, séparément, pour chaque valeur λ du paramètre, le contour optimal B_λ correspondant, on cherche ici à déterminer d'un seul coup une fonction $\Lambda(x)$ telle que, pour chaque λ , le contour optimal B_λ soit l'ensemble $\{x : \Lambda(x) \geq \lambda\}$. Cette fonction Λ est, en fait, la projection de la teneur sur un certain cône convexe $\mathcal{F}$ de fonctions (d'où l'existence et l'unicité de Λ).

Les éléments du problème sont les suivants :

a/ Le gisement réel (dans $\mathbb{R}^3$) est généralement présenté sous forme discrétisée : il est découpé en blocs parallélépipédiques, définis chacun par leur centre $x \in E$, où E est donc un ensemble fini (l'ensemble des centres des blocs).

A chaque $x \in E$ sont affectées deux grandeurs (supposées connues) : le volume $V(x)$ du bloc centré en x et la teneur $q(x)$ de ce bloc, de sorte que la quantité de substance utile contenue dans ce bloc est $Q(x) = q(x) V(x)$. Pour chaque valeur du paramètre $\lambda \geq 0$, la valeur attribuée au bloc de centre x est $\mu_\lambda(x) = Q(x) - \lambda V(x)$.

Dans une formulation un peu plus générale, on supposera que la

valeur du bloc centré en x est $\mu(x; \lambda, \theta \dots)$ avec une fonction μ donnée dépendant (de manière non nécessairement linéaire) de plusieurs paramètres $\lambda, \theta \dots$

Par exemple, si la fonction de transfert $F_x(t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$ du bloc x est connue, on prendra :

$$\begin{aligned} \mu(x; \lambda, \theta) &= \int_{\theta}^{\infty} (t - \theta) f(x, t) dt - \lambda V(x) \\ &= \int_{\theta}^{\infty} [1 - F_x(t)] dt - \lambda V(x) \end{aligned}$$

Ici, (à un facteur près) λ et θ représentent, respectivement, les frais d'extraction et de traitement d'une tonne de minerai.

En fait, il n'y a pas lieu de se restreindre au cas où l'ensemble E est fini. Dans ce qui suit, E sera un ensemble quelconque, fini ou non, muni d'une σ -algèbre $\mathcal{A}$. Sur $(E, \mathcal{A})$ on se donnera, suivant les cas, diverses mesures bornées :

- Une mesure positive $V(dx)$ représentant le volume.
- Une mesure positive $Q(dx)$ représentant la quantité de substance utile. Nous supposons généralement que Q est absolument continue relativement à V , autrement dit qu'il existe une fonction $x \rightarrow t(x)$ positive appelée teneur telle que $Q(dx) = t(x) V(dx)$.
- Une mesure (non positive en général) μ représentant la valeur et dépendant d'un ou plusieurs paramètres $\lambda, \theta \dots$. Par exemple, dans le cas le plus simple :

$$(0-1) \quad \mu_{\lambda}(dx) = (t(x) - \lambda) V(dx)$$

et dans le cas d'une fonction de transfert :

$$(0-2) \quad \mu(\lambda, \theta ; dx) = \left[\int_0^{\infty} [1 - F_x(t)] dt - \lambda \right] V(dx)$$

En général, on supposera (ce qui est le cas pour les deux exemples précédents) que pour tout $A \in \mathcal{A}$ la fonction $\mu(\lambda, \theta ; A)$ est continue en (λ, θ) .

b/ Les contours autorisés.

Dans le cas d'une carrière, à chaque $x \in E$ correspond un cône $\Gamma(x)$ de sommet x et l'on s'impose la contrainte suivante : si l'on extrait x , on doit aussi extraire tout $y \in \Gamma(x)$. Il s'agit d'une relation de préordre, car si l'extraction de x entraîne celle de y et si l'extraction de y entraîne celle de z , alors celle de x entraîne celle de z . Autrement dit :

$$(0-3) \quad y \in \Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(y) \subset \Gamma(x) ; x \in \Gamma(x)$$

On interprètera $y \in \Gamma(x)$ par : y est un majorant de x , ou est au-dessus de x dans le préordre Γ .

Dans les problèmes usuels, où $\Gamma(x)$ est un cône convexe de sommet x , la relation $y \in \Gamma(x)$ est même un ordre (partiel) et pas seulement un préordre (car $y \in \Gamma(x)$ et $x \in \Gamma(y)$ entraînent alors $x = y$), mais cette particularité ne sera pas utilisée dans ce qui suit, où Γ peut être un préordre quelconque.

Dans ces conditions, un $B \subset E$ correspond à un projet de carrière possible si pour tout $x \in B$ on a $\Gamma(x) \subset B$, autrement dit si B contient les majorants de chacun de ses points.

Si E est fini, il n'y a pas lieu de s'imposer d'autres contraintes.

Dans le cas général, E sera un ensemble fini ou non muni du préordre défini par une application Γ de E dans $\mathcal{P}(E)$ vérifiant (0-3). Il n'est pas nécessaire de supposer $\Gamma(x) \in \mathcal{A}$ pour tout x (bien que cette relation soit vérifiée dans les applications envisageables). Mais il faut alors ne retenir parmi les ensembles B stables par Γ que ceux qui sont mesurables. Autrement dit, la classe $\mathcal{B}$ des ensembles admissibles est caractérisée par :

$$(0-4) \quad B \in \mathcal{B} \Leftrightarrow B \in \mathcal{A} \quad , \quad B = \bigcup \{ \Gamma(x), x \in B \}$$

Ceci implique que $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{B}$.

c/ Le problème.

Etant donnée une mesure (non positive) μ sur $(E, \mathcal{A})$, représentant la "valeur", et posant :

$$\gamma_{\mu} = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mu(B)$$

le problème est d'examiner si ce $\sup \gamma_{\mu}$ est atteint sur la classe $\mathcal{B}$ et, dans l'affirmative, de caractériser la classe des $B \in \mathcal{B}$ réalisant ce maximum. Plus généralement, si μ dépend d'un ou plusieurs paramètres $\lambda, \theta, \dots$, il s'agira de trouver une représentation paramétrique commode des ensembles optimaux correspondants.

1 - LA CLASSE $\mathcal{B}$ ET LE CONE CONVEXE $\mathcal{S}$.

Caractérisons la classe $\mathcal{B}$ ainsi définie par les relations (0-3) et (0-4). Le résultat essentiel est le suivant :

La classe $\mathcal{B}$ est stable pour la réunion et l'intersection dénombrables.

Soit B_i , $i \in I$ une famille dans $\mathcal{B}$. Si $x \in \bigcap B_i$ (resp. $\bigcup B_i$) on a $\Gamma(x) \subset B_i$ pour tout $i \in I$ (resp. pour un $i \in I$). Donc l'intersection (la réunion) B de cette famille vérifie $\Gamma(B) \subset B$. Si de plus I est dénombrable, on a aussi $B \in \mathcal{A}$, donc $B \in \mathcal{B}$.

Inversement, soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une classe d'ensembles mesurables stable pour la réunion et l'intersection dénombrables. Cela implique déjà $\emptyset$ et $E \in \mathcal{B}$, de sorte que $\mathcal{B}$ n'est pas vide. Pour tout $x \in E$, posons :

$$\Gamma(x) = \bigcap \{B : B \in \mathcal{B}, x \in B\}$$

L'application $x \rightarrow \Gamma(x)$ vérifie (0-3). Car, si $y \in \Gamma(x)$, tout $B \in \mathcal{B}$ contenant x contient aussi y et :

$$\Gamma(y) = \bigcap \{B \in \mathcal{B}, y \in B\} \subset \bigcap \{B \in \mathcal{B}, x \in B\} = \Gamma(x)$$

D'autre part, pour tout $B \in \mathcal{B}$ on a, d'après la définition, $\Gamma(x) \subset B$, donc $\Gamma(B) \subset B$. Toutefois, la réciproque ($B \in \mathcal{A}$ et $\Gamma(B) \subset B$ implique $B \in \mathcal{B}$) n'a pas de raison d'être vraie en général. Il faut (et il suffit) pour que cette réciproque soit vraie que $\mathcal{B}$ vérifie de plus : pour toute famille B_i , $i \in I$ non dénombrable dans $\mathcal{B}$, $\bigcap B_i$ (resp. $\bigcup B_i$) $\in \mathcal{A}$ entraîne $\bigcap B_i$ (resp. $\bigcup B_i$) $\in \mathcal{B}$. Ainsi :

Th. 1 - Une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ admet la représentation (0-4) pour un préordre Γ sur E si et seulement si pour toute famille B_i , $i \in I$ dénombrable ou non dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \bigcup B_i \in \mathcal{A} &\Rightarrow \bigcup B_i \in \mathcal{B} \\ \bigcap B_i \in \mathcal{A} &\Rightarrow \bigcap B_i \in \mathcal{B} \end{aligned}$$

(1-1)

Passons maintenant au cône convexe $\mathcal{S}$.

Etant donnée une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ stable pour l'union et l'intersection dénombrables, nous désignerons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ telles que $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ pour tout réel λ :

De $\{f > \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \geq \lambda + \frac{1}{n}\}$ résulte aussitôt que les ensembles $\{f > \lambda\}$ appartiennent aussi à $\mathcal{B}$.

Notons d'abord que $\mathcal{S}$ contient les constantes positives ou non ; que $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow \text{Sup}(f, g)$ et $\text{Inf}(f, g) \in \mathcal{S}$, autrement dit que $\mathcal{S}$ est réticulé ; et que $\mathcal{S}$ est stable pour les limites monotones séquentielles $\uparrow$ et $\downarrow$.

Les combinaisons linéaires finies à coefficients positifs :

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{B_i}, \quad c_i \geq 0, \quad B_i \in \mathcal{B}$$

d'indicatrices d'ensembles de $\mathcal{B}$ sont dans $\mathcal{S}$. En effet, si f est de cette forme, $\{f \geq \lambda\}$ est la réunion des $B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_p}$ tels que $c_{i_1} + \dots + c_{i_p} \geq \lambda$, donc est dans $\mathcal{B}$.

Inversement, tout $f \in \mathcal{S}$ est limite monotone de telles combinaisons linéaires finies. En effet, $\mathcal{S}$ étant réticulé, f_+ et $f_- \in \mathcal{S}$ dès que $f \in \mathcal{S}$, et il suffit donc d'établir la propriété pour $f \in \mathcal{S}$, $f \geq 0$. Posons

$$(1-2) \quad \left\{ \begin{aligned} f_n &= \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + 2^n \mathbf{1}_{\{f \geq 2^n\}} \\ &= \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\{f \geq \frac{k}{2^n}\}} \end{aligned} \right.$$

On a donc $f_n \in \mathcal{B}$, comme combinaison linéaire finie à coefficients ≥ 0 d'indicatrices d'ensembles de $\mathcal{B}$, et $f_n \uparrow f$. Il en résulte en particulier que $\mathcal{S}$ est un cône convexe. En résumé :

$\mathcal{S}$ est le cône convexe stable pour les continuités monotones séquentielles $\uparrow$ et $\downarrow$ engendré par les constantes (positives ou non) et les indicatrices des ensembles de $\mathcal{B}$.

En particulier, $\mathcal{S}$ est dénombrablement réticulé (i.e. : pour toute suite $\{f_n\}$ dans $\mathcal{S}$, $\sup f_n$ et $\inf f_n \in \mathcal{S}$) et stable pour la convergence ponctuelle ($\{f_n\} \subset \mathcal{S}$ et $\lim f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$ entraîne $f \in \mathcal{S}$).

Dans la suite, nous munirons $(E, \mathcal{A})$ d'une mesure $V \geq 0$ et nous désignerons encore par $\mathcal{S}$ la famille des classes de V -équivalences des $f \in \mathcal{S}$. Les propriétés précédentes restent alors vraies au sens V -presque partout.

Inversement, d'ailleurs :

Si $\mathcal{S}$ est un cône convexe de fonctions mesurables, contenant les constantes, réticulé et stable pour les convergences monotones séquentielles $\uparrow$ et $\downarrow$, il existe une classe $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ stable pour l'union et l'intersection dénombrables telle que :

$$(1-3) \quad f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Pour le voir, on note que pour tout $f \in \mathcal{S}$ on a :

$$f_+ = f \vee 0 \in \mathcal{S}, \text{ puis } f_+ \wedge a \in \mathcal{S} \text{ et}$$

$$1_{f>0} = \lim_{a \downarrow 0} 1_{f>a} \in \mathcal{S}. \text{ D'où } 1_{f \geq \lambda} \in \mathcal{S}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On prend alors pour $\mathcal{B}$ la classe des $\{f \geq \lambda\}, f \in \mathcal{S}$. Pour toute fonction mesurable g , la suite

$$g_n = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{1}{2^n} \mathbb{1}_{g \geq \frac{k}{2^n}}$$

vérifie $g_n \uparrow g$, ce qui justifie l'énoncé.

Si la famille $\mathcal{B}$ est définie par un préordre Γ comme dans le Th. 1, le cone convexe $\mathcal{S}$ est constitué des fonctions f mesurables croissantes pour le préordre Γ , i.e. vérifiant :

$$(1-4) \quad y \in \Gamma(x) \Rightarrow f(y) \geq f(x)$$

En effet, soit f une fonction mesurable. Posons $B_\lambda = \{f \geq \lambda\} \in \mathcal{A}$ pour tout réel λ . Mais (B_λ étant dans $\mathcal{A}$) d'après la définition de $\mathcal{B}$ on a $B_\lambda \in \mathcal{B}$ si et seulement si $x \in B_\lambda$ et $y \in \Gamma(x) \Rightarrow y \in B_\lambda$. Mais ceci veut dire : $f(x) \geq \lambda$ et $y \in \Gamma(x) \Rightarrow f(y) \geq \lambda$. Cette condition est donc vérifiée si et seulement si f est croissante pour Γ .

REMARQUE - A toute fonction f mesurable, nous pouvons associer les familles d'ensembles mesurables :

$$A_\lambda^- = \{x : f(x) > \lambda\}, \quad A_\lambda^+ = \{x : f(x) \geq \lambda\}$$

(définis éventuellement presque partout seulement si l'on travaille sur des classes de V -équivalence de fonctions), λ parcourant la droite achevée $[-\infty, +\infty]$. Ce sont des familles décroissantes en λ vérifiant $A_{\lambda'}^- \subset A_\lambda^+$ et $A_\lambda^+ \subset A_{\lambda'}^-$, pour $\lambda > \lambda'$. Plus précisément :

$$A_{\lambda'}^- = \lim_{\lambda \downarrow \lambda'} \uparrow A_\lambda^+ = \bigcup_{\lambda > \lambda'} A_\lambda^+, \quad A_\lambda^+ = \bigcup_{\lambda > \lambda'} A_{\lambda'}^-$$

$$A_\lambda^+ = \lim_{\lambda \downarrow \lambda'} \downarrow A_{\lambda'}^- = \bigcap_{\lambda < \lambda'} A_{\lambda'}^-, \quad A_{\lambda'}^- = \bigcap_{\lambda < \lambda'} A_\lambda^+$$

Dans ces conditions, en tout $x \in E$, on a

$$(1-5) \quad f(x) = \sup \{ \lambda : x \in A_{\lambda}^+ \}$$

En effet, d'après la définition de A_{λ}^+ , $x \in A_{\lambda}^+$ équivaut à $f(x) \geq \lambda$, donc $\sup \{ \lambda : x \in A_{\lambda}^+ \} \leq f(x)$. Mais $x \in A_{f(x)}^+$ et par suite $\sup \{ \lambda : x \in A_{\lambda}^+ \} \geq f(x)$, d'où (1-5).

La réciproque est vraie, autrement dit :

Une famille A_{λ}^+ d'ensembles mesurables est associée à une fonction mesurable f par les formules réciproques :

$$A_{\lambda}^+ = \{ x : f(x) \geq \lambda \}$$

$$f(x) = \sup \{ \lambda : x \in A_{\lambda}^+ \}$$

si et seulement si la famille A_{λ}^+ est décroissante en λ et vérifie la continuité monotone :

$$(1-6) \quad A_{\lambda}^+ = \bigcap_{\lambda' < \lambda} A_{\lambda'}^+ \quad (\lambda, \lambda' \in [-\infty, +\infty])$$

En effet, il reste à montrer que si une famille croissante vérifie (1-6) et si f est définie par (1-5), alors $A_{\lambda}^+ = \{ x : f(x) \geq \lambda \}$. Posons $C_{\lambda} = \{ x : f(x) \geq \lambda \}$. Si $x \in A_{\lambda}^+$, on a $f(x) \geq \lambda$ par définition, donc $x \in C_{\lambda}$ et $A_{\lambda}^+ \subset C_{\lambda}$. Inversement, si $x \in C_{\lambda}$, on a $f(x) \geq \lambda$. D'après la définition (1-5), cela implique $x \in A_{\lambda'}^+$, pour tout $\lambda' < \lambda$. Donc $x \in \bigcap_{\lambda' < \lambda} A_{\lambda'}^+ = A_{\lambda}^+$, d'après (1-6), c'est-à-dire $C_{\lambda} \subset A_{\lambda}^+$ et $C_{\lambda} = A_{\lambda}^+$.

On a un énoncé analogue pour les ensembles :

$$A_{\lambda}^- = \{ x : f(x) > \lambda \}$$

à condition de remplacer (1-6) par :

$$(1-7) \quad A_{\lambda'}^- = \bigcup_{\lambda > \lambda'} A_{\lambda}^-$$

2 - L'OPTIMISATION DE $Q - \lambda V$.

Soit V une mesure ≥ 0 sur E , Q une mesure positive absolument continue par rapport à V et q sa densité, i.e. :

$$Q(dx) = q(x) V(dx)$$

(la mesure V est appelée volume, et la fonction positive q est la teneur). Pour l'instant, nous supposons essentiellement :

$$(2-1) \quad q \in L^2(E, \mathcal{A}, V)$$

(nous nous affranchirons ultérieurement de cette restriction). Désignons par $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} \cap L^2$ la restriction de $\mathcal{S}$ à L^2 . $\mathcal{S}_2$ est un cone convexe fermé dans L^2 . En effet, si une suite $\{f_n\}$ dans $\mathcal{S}_2$ converge vers f au sens de L^2 , on sait qu'on peut en extraire une suite partielle $\{f_{n_k}\}$ convergeant vers f presque partout pour V . Mais $\mathcal{S}$ est stable pour la convergence p.p., donc $f \in \mathcal{S} \cap L^2$, et $\mathcal{S}_2$ est fermé.

Nous pouvons donc appliquer le théorème des projections. Soit Λ la projection de q sur le cone convexe fermé $\mathcal{S}_2$. Λ est l'unique élément de $\mathcal{S}_2$ vérifiant :

$$(2-2) \quad \langle g, \Lambda - q \rangle \geq \langle \Lambda, \Lambda - q \rangle \quad \forall g \in \mathcal{S}_2$$

Mais $\mathcal{S}_2$ est un cone et $\Lambda \in \mathcal{S}_2$. Donc pour tout $a \geq 0$ on a $a\Lambda \in \mathcal{S}_2$ et par suite, d'après (2-2)

$$a \langle \Lambda, \Lambda - q \rangle \geq \langle \Lambda, \Lambda - q \rangle \quad \forall a \geq 0$$

ceci entraîne $\langle \Lambda, \Lambda - q \rangle = 0$.

Par suite, la projection Λ de la teneur q est caractérisée comme l'unique élément vérifiant :

$$(2-2) \quad \begin{cases} \Lambda \in \mathcal{S}_2 \\ \langle \Lambda, q \rangle = \langle \Lambda, \Lambda \rangle \\ \langle g, q \rangle \leq \langle g, \Lambda \rangle \quad \forall g \in \mathcal{S}_2 \end{cases}$$

En particulier, les constantes réelles (positives ou non) sont dans $\mathcal{S}_2$, donc $a \langle 1, q \rangle \leq a \langle 1, \Lambda \rangle$ pour tout $a \geq 0$ ou ≤ 0 . Par suite $\langle 1, q \rangle = \langle 1, \Lambda \rangle$, c'est-à-dire :

$$(2-3) \quad \int_E q(x) V(dx) = \int_E \Lambda(x) V(dx)$$

Λ a même valeur moyenne dans E que la teneur q .

Désignons par $\mathcal{S}_\Lambda$ le sous-cône des $f \in \mathcal{S}_2$ tels que l'on ait :

$$\langle \Lambda - q, f \rangle = 0$$

D'après (2-3) et la seconde relation (2-2), les constantes et Λ sont dans $\mathcal{S}_\Lambda$. $\mathcal{S}_\Lambda$ est manifestement fermé dans L^2 . Montrons qu'il est réticulé. En effet, si f et g sont dans $\mathcal{S}_\Lambda$, on trouve :

$$(2-4) \quad 0 = \langle f+g, \Lambda - q \rangle = \langle f \vee g, \Lambda - q \rangle + \langle f \wedge g, \Lambda - q \rangle$$

Or, $f \vee g$ et $f \wedge g$ sont dans $\mathcal{S}$, puisque $\mathcal{S}$ est réticulé, et par suite d'après (2-2), les deux termes du second membre de (2-4) sont ≥ 0 . Ils sont donc nécessairement nuls, et $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{S}_\Lambda$.

Etant fermé, réticulé et contenant les constantes, $\mathcal{S}_\Lambda$ contient les indicatrices $1_{f \geq \lambda}$, $1_{f > \lambda}$ pour tout réel λ et tout $f \in \mathcal{S}_\Lambda$.

En particulier, les ensembles

$$B_\lambda^+ = \{x : \Lambda(x) \geq \lambda\}$$

$$B_\lambda^- = \{x : \Lambda(x) > \lambda\}$$

sont dans $\mathcal{S}_\Lambda$, soit pour tout réel λ :

$$(2-5) \quad \int_{\Lambda \geq \lambda} q(x) V(dx) = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda(x) V(dx)$$

Cette relation est équivalente à :

$$\int \varphi(\Lambda) q V = \int \varphi(\Lambda) \Lambda V$$

pour toute fonction mesurable φ , et exprime (si V a été normée à l'unité, ce que l'on peut toujours supposer) que l'espérance de q conditionnelle en Λ est égale à Λ :

$$E(q|\Lambda) = \Lambda$$

En particulier, (2-5) implique $\langle \Lambda - q, \Lambda \rangle = 0$.

Comme $\mathcal{S}_2$ est engendré (par combinaisons linéaires positives) à partir des indicatrices 1_A , $A \in \mathcal{B}$, il en résulte que les relations (2-2) sont équivalentes au système suivant :

$$(2-6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \{\Lambda \geq \lambda\} \in \mathcal{B} & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \int_{\Lambda \geq \lambda} q(x) V(dx) = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda(x) V(dx) & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \int_A q(x) V(dx) \leq \int_A \Lambda(x) V(dx) & \forall A \in \mathcal{B} \end{array} \right.$$

qui caractérise donc la projection Λ de la teneur.

Passons maintenant au problème de la recherche des ensembles $B \in \mathcal{B}$ maximisant la mesure $\mu_\lambda = (q-\lambda) V$ pour un λ donné. Posons :

$$\gamma_\lambda = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mu_\lambda(B)$$

Le résultat essentiel est le suivant :

Th. 2 - Le Sup des $\mu_\lambda(B)$, $B \in \mathcal{B}$ est atteint par les ensembles

$$B_\lambda^- = \{\Lambda > \lambda\} \text{ et } B_\lambda^+ = \{\Lambda \geq \lambda\}$$

(définis V-p.p.). De plus, on a $B_\lambda^- \subset B_\lambda^+$ (V-p.p.), et tout autre $B \in \mathcal{B}$ maximisant μ_λ (s'il en existe) vérifie :

$$B_\lambda^- \subset A \subset B_\lambda^+ \quad (V \text{ p.p.})$$

Enfin, la classe $\mathcal{B}_\lambda$ des $B \in \mathcal{B}$ maximisant $\mu_\lambda(B)$ est stable pour la réunion et l'intersection dénombrables.

La démonstration repose essentiellement sur les relations (2-6) qui caractérisent Λ . D'après la 3ème de ces relations, pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a :

$$(a) \quad \mu_\lambda(A) = \int_A q \, dV - \lambda \int_A dV \leq \int_A (\Lambda - \lambda) dV \leq \int_{B_\lambda} (\Lambda - \lambda) dV$$

La dernière inégalité (avec $B_\lambda = B_\lambda^+$ ou $B_\lambda = B_\lambda^-$) résulte de ce que $\int_{\Lambda > \lambda} (\Lambda - \lambda) dV = \int_{\Lambda \geq \lambda} (\Lambda - \lambda) dV$ maximise évidemment $\int_A (\Lambda - \lambda) dV$, $A \in \mathcal{B}$ (où même ici $A \in \mathcal{A}$).

D'autre part, la seconde relation (2-6) donne :

$$(b) \quad \mu_\lambda(B_\lambda) = \int_{B_\lambda} (q - \lambda) dV = \int_{B_\lambda} (\Lambda - \lambda) dV$$

Par suite le Sup des $\mu_\lambda(A)$, $A \in \mathcal{B}$, soit γ_λ vérifie

$$\gamma_\lambda \leq \int_{B_\lambda} (\Lambda - \lambda) dV = \mu_\lambda(B_\lambda), \text{ d'après (a) et d'après (b)}$$

Donc $B_\lambda = B_\lambda^+$ ou B_λ^- réalise effectivement le Sup.

L'inclusion $B_\lambda^- \subset B_\lambda^+$ (V-p.p.) résulte de la définition même de ces ensembles. Soit maintenant $A \in \mathcal{B}$ un autre ensemble optimal (s'il en existe), c'est-à-dire tel que $\mu_\lambda(A) = \gamma_\lambda$. D'après les inégalités (a), cela entraîne $\mu_\lambda(A) = \int_A (\Lambda - \lambda) dV$, donc $\int_A q dV = \int_A \Lambda dV$, c'est-à-dire $\langle \Lambda - q, 1_A \rangle = 0$. Par suite, 1_A appartient au sous-cône réticulé $\mathcal{S}_\Lambda \subset \mathcal{S}_2$ des $f \in \mathcal{S}_2$ telles que $\langle \Lambda - q, f \rangle = 0$. L'égalité :

$$\int_C q dV = \int_C \Lambda dV$$

a donc lieu sur tout C appartenant à l'algèbre engendrée par A , B_λ^+ et B_λ^- . Donc nous avons :

$$\mu_\lambda(A) = \int_{A \cap B_\lambda^-} (\Lambda - \lambda) + \int_{(A \cap B_\lambda^+) \cap \beta B_\lambda^-} (\Lambda - \lambda) + \int_{A \cap \beta B_\lambda^+} (\Lambda - \lambda)$$

Le second terme est nul, puisque $\Lambda = \lambda$ sur $B_\lambda^+ \cap \beta B_\lambda^-$. Le troisième est ≤ 0 , et $= 0$ si et seulement si $A \subset B_\lambda^+$ (V-p.p.), puisque $\Lambda \leq \lambda$ sur βB_λ^+ . Enfin, le premier terme est $\leq \int_{B_\lambda^-} (\Lambda - \lambda) = \gamma_\lambda$, avec égalité si et seulement si $A \cap B_\lambda^- = B_\lambda^-$, c'est-à-dire $B_\lambda^- \subset A$ (V-p.p.). Donc l'égalité $\mu_\lambda(A) = \gamma_\lambda$ entraîne bien

$$B_\lambda^- \subset A \subset B_\lambda^+ \quad (\text{V-p.p.})$$

La classe $\mathcal{B}_\lambda$ des $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu_\lambda(B) = \gamma_\lambda$ est stable pour les convergences monotones séquentielles $\uparrow$ et $\downarrow$. Si B et B' sont dans $\mathcal{B}_\lambda$, on a $\mu_\lambda(B \cup B') + \mu_\lambda(B \cap B') = \mu_\lambda(B) + \mu_\lambda(B') = 2 \gamma_\lambda$.

Comme $\mu_\lambda(B \cup B')$ et $\mu_\lambda(B \cap B')$ sont $\leq \gamma_\lambda$, il en résulte $\mu_\lambda(B \cup B') = \mu_\lambda(B \cap B') = \gamma_\lambda$, soit $B \cup B'$ et $B \cap B' \in \mathcal{B}_\lambda$: $\mathcal{B}_\lambda$ est donc stable pour $\cup$ et $\cap$ dénombrables.

COROLLAIRE - Pour $\lambda > \lambda'$, on a $B_\lambda^+ \subset B_{\lambda'}^-$, (V-p.p.).

En effet, si $\lambda > \lambda'$ strictement, $\Lambda(x) \geq \lambda$ entraîne $\Lambda(x) > \lambda'$.

Commentaire.

La fonction Λ permet le "paramétrage des réserves", en fonction du "paramètre économique" λ . Pour un λ donné, les ensembles minimisant $\mu_\lambda(B)$ sur les "projets possibles" $B \in \mathcal{B}$ sont B_λ^- , B_λ^+ (et, éventuellement, des ensembles intermédiaires). Pour chaque λ , on posera :

$$\begin{aligned} V_\lambda^+ &= V(B_\lambda^+) & ; & & V_\lambda^- &= V(B_\lambda^-) \\ Q_\lambda^+ &= Q(B_\lambda^+) & ; & & Q_\lambda^- &= Q(B_\lambda^-) \end{aligned}$$

Ce sont les quantités de minerai et de substance utile associées aux deux projets optimaux B_λ^+ et B_λ^- . Quant à la quantité

$$\gamma_\lambda = Q_\lambda^+ - \lambda V_\lambda^+ = Q_\lambda^- - \lambda V_\lambda^-$$

elle représente le "bénéfice optimal" associé à λ . Notons les résultats suivants :

γ_λ est continu et décroissant en λ ; Q_λ^+ et V_λ^+ sont décroissants et continus à gauche ; Q_λ^- et V_λ^- sont décroissants et continus à droite.

En effet, soit $\lambda > \lambda'$. On a :

$$\gamma_{\lambda'} = \mu_{\lambda'}(B_{\lambda'}) \geq \mu_{\lambda'}(B_\lambda) \geq \mu_\lambda(B_\lambda) \geq \mu_\lambda(B_{\lambda'}) \geq \mu_{\lambda'}(B_{\lambda'}) - \varepsilon$$

pour $\lambda - \lambda'$ assez petit (la 1ère et la 3ème inégalité résultent de la maximalité, la 2ème de $\mu_{\lambda'} \geq \mu_{\lambda}$, et la quatrième de la continuité de $\lambda \rightarrow \mu_{\lambda}(A) = Q(A) - \lambda V(A)$ uniforme en $A \in \mathcal{A}$). Si $\lambda' \uparrow \lambda$, il en résulte $\mu_{\lambda'}(B_{\lambda}') \rightarrow \mu_{\lambda}(B_{\lambda})$, et de même si $\lambda \downarrow \lambda'$ $\mu_{\lambda}(B_{\lambda}) \rightarrow \mu_{\lambda'}(B_{\lambda}')$: γ_{λ} est bien continu et décroissant. Les propriétés de décroissance et de continuité à gauche de V_{λ}^{+} et Q_{λ}^{+} résultent, par continuité monotone, de la relation (1-6), qui s'écrit :

$$B_{\lambda'}^{+} = \bigcap_{\lambda < \lambda'} B_{\lambda}^{+}$$

De même, les propriétés de V_{λ}^{-} et Q_{λ}^{-} proviennent de :

$$B_{\lambda'}^{-} = \bigcup_{\lambda > \lambda'} B_{\lambda}^{-}$$

Il est intéressant de mettre ce paramétrage en relation avec le problème qui consiste à trouver $A \in \mathcal{B}$ (s'il existe) maximisant $Q(A)$ pour un volume $V(A) \leq v$ donné. Le résultat est le suivant :

S'il existe un λ tel que $v = V(B_{\lambda}^{+})$ (resp. $v = V(B_{\lambda}^{-})$) alors B_{λ}^{+} (resp. B_{λ}^{-}) réalise $\text{Sup } \{Q(A), A \in \mathcal{A}, V(A) \leq v\}$. Dans le cas général, $\lambda_0 = \text{Inf } \{\lambda : V(B_{\lambda}^{-}) \leq v\}$ vérifie $V(B_{\lambda_0}^{-}) \leq v \leq V(B_{\lambda_0}^{+})$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$Q(A) \leq Q_{\lambda_0}^{-} + \lambda_0(v - V_{\lambda_0}^{-}) = Q_{\lambda_0}^{+} - \lambda_0(V_{\lambda_0}^{+} - v)$$

avec égalité si et seulement si A est l'un des ensembles maximisant $Q - \lambda_0 V$.

En effet, si $v = V(B_{\lambda}^{+})$ (ou $V(B_{\lambda}^{-})$) pour un λ , $Q(B_{\lambda}^{+}) - \lambda V(B_{\lambda}^{+}) \geq Q(A) - \lambda V(A)$ donne $Q(B_{\lambda}^{+}) \geq Q(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}$ tel que $V(A) \leq v = V(B_{\lambda}^{+})$: $Q(B_{\lambda}^{+})$ réalise donc le maximum de $Q(A)$ à $V(A) \leq v$.

Dans le cas général, posons $\lambda_0 = \inf \{ \lambda : V(B_\lambda^-) \leq v \}$. Comme V_λ^- est continu à droite, il en résulte $V(B_{\lambda_0}^-) \leq v$. On a aussi $V(B_{\lambda_0}^+) \geq v$, car V_λ^+ est continu à gauche : si $V(B_{\lambda_0}^+) < v$, il existe $\lambda < \lambda_0$ tel que $V(B_\lambda^-) \leq V(B_\lambda^+) < v$ contrairement à la définition de λ_0 .

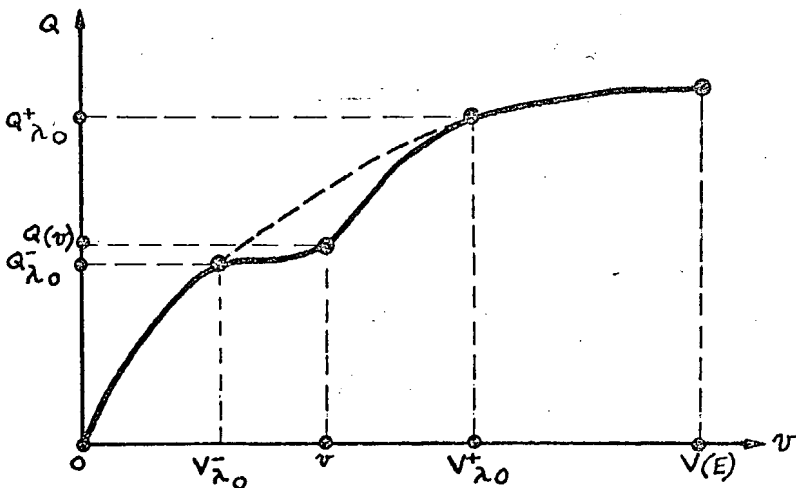
Compte tenu de la maximalité de $B_{\lambda_0}^+$ (par exemple), on trouve ensuite $Q(A) - \lambda_0 V(A) \leq Q(B_{\lambda_0}^+) - \lambda_0 V(B_{\lambda_0}^+)$, donc, pour tout A tel que $V(A) \leq v \leq V_{\lambda_0}^+$:

$$Q(A) \leq Q_{\lambda_0}^+ + \lambda_0(v - V_{\lambda_0}^+) = Q_{\lambda_0}^- + \lambda_0(v - V_{\lambda_0}^-)$$

avec égalité si et seulement si $Q(A) - \lambda_0 V(A) = Q(B_{\lambda_0}^+) - \lambda_0 V(B_{\lambda_0}^+) = \gamma_{\lambda_0}$, donc si A réalise l'optimum de $Q - \lambda_0 V$ (ce qui implique $B_{\lambda_0}^- \subset A \subset B_{\lambda_0}^+$).

Graphiquement, considérons la fonction $v \rightarrow Q(v)$ avec :

$$Q(v) = \sup \{ Q(A), A \in \mathcal{B}, V(A) \leq v \}$$



C'est une fonction non décroissante.

L'ensemble

$$\{(Q, v), Q \leq Q(v)\}$$

n'est pas convexe, en général, mais son enveloppe convexe est l'inter-

section des demi-plans $\{(Q, v), Q - \lambda v \leq \gamma_\lambda\}$ et les points d'appui de chaque demi-plan $\{Q - \lambda_0 v \leq \gamma_{\lambda_0}\}$ sont les deux points $(Q_{\lambda_0}^-, v_{\lambda_0}^-)$

et $(Q_{\lambda_0}^+, V_{\lambda_0}^+)$, plus, éventuellement, les $(Q(A), V(A))$ pour les autres $A \in \mathcal{B}$ maximisant $Q - \lambda_0 V$.

EXEMPLE - Si E est la demi-droite positive $\mathbb{R}_+$, V la mesure de Lebesgue et si $\mathcal{B}$ est formé des intervalles (ouverts ou fermés) $(0, x)$, on a $Q(v) = \int_0^v q(x) dx$, et l'enveloppe convexe de $\{(Q, v), Q \leq Q(v)\}$ permet d'obtenir sans peine les B_λ^- , B_λ^+ et les Q correspondants : il suffit de prendre les points d'appui de la droite d'appui parallèle à $Q - \lambda V = \text{Cste}$. C'est cette enveloppe convexe qui définit l'intégrale $\int_0^x \Lambda(y) dy$. Par dérivation, on en déduit $\Lambda(y)$ elle-même - qui est la meilleure approximation de q par une fonction décroissante.

Positivité de l'opérateur $q \rightarrow \Lambda$.

L'opérateur de projection sur le cône $\mathcal{S}$ est positif : autrement dit :

$$(1-7) \quad q \leq q' \Rightarrow \Lambda \leq \Lambda'$$

Montrons d'abord que, si $q \leq q'$, on a $B_\lambda^- \subset B_\lambda'^+$ (V-p.p.) pour chaque λ . Posons $C = B_\lambda^- \cap B_\lambda'^+ \in \mathcal{B}$. On a $\mu_\lambda(C) \leq \mu_\lambda(B_\lambda^-)$, puisque B_λ^- est optimal, donc $\mu_\lambda'(B_\lambda^- \setminus C) \geq \mu_\lambda(B_\lambda^- \setminus C) \geq 0$. Mais $B_\lambda'^+ \cup (B_\lambda^- \setminus C) = B_\lambda'^+ \cup B_\lambda^- \in \mathcal{B}$ et $\mu_\lambda'(B_\lambda'^+ \cup (B_\lambda^- \setminus C)) = \mu_\lambda'(B_\lambda'^+) + \mu_\lambda'(B_\lambda^- \setminus C) \leq \mu_\lambda'(B_\lambda'^+)$ (par maximalité) donne $\mu_\lambda'(B_\lambda^- \setminus C) \leq 0$. Donc :

$$\mu_\lambda'(B_\lambda^- \setminus C) = \mu_\lambda(B_\lambda^- \setminus C) = 0$$

et par différence $V(B_\lambda^- \setminus C) = 0$. Donc

$$B_\lambda^- \subset B_\lambda'^+ \quad \text{V-p.p.}$$

Cela veut dire :

$$\Lambda > \lambda \Rightarrow \Lambda' \geq \lambda$$

Or, pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, on a $x \in B_{\Lambda(x)-\varepsilon}$, $\Lambda(x) > \Lambda(x)-\varepsilon$, donc $\Lambda'(x) \geq \Lambda(x)-\varepsilon$. Par suite, en faisant $\varepsilon \downarrow 0$, on a bien $\Lambda' \geq \Lambda$.

3 - GENERALISATION.

Dans le théorème précédent, nous avons supposé $q \in L^2(E, \mathcal{A}, V)$ et nous devons maintenant lever cette restriction.

La première étape consiste à établir l'existence de $B \in \mathcal{B}$ maximisant $\mu(A)$, $A \in \mathcal{B}$ pour une mesure bornée μ quelconque.

Th. 3 - Soit μ une mesure bornée (non positive) sur $(E, \mathcal{A})$ et V une mesure positive quelconque telle que $V \geq |\mu|$. Alors, il existe deux ensembles B^- et B^+ tels que :

$$\mu(B^+) = \mu(B^-) = \sup_{A \in \mathcal{B}} \mu(A)$$

et $B^- \subset B^+$ (V. p.p.). De plus, l'ensemble $\mathcal{B}_0$ des $B \in \mathcal{B}$ maximisant $\mu(A)$, $A \in \mathcal{B}$ est stable pour l'union et l'intersection dénombrables, et tout $B \in \mathcal{B}_0$ vérifie : $B^- \subset B \subset B^+$ (V-p.p.).

En effet, soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ la décomposition de Jordan de μ , $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$ et $V \geq |\mu|$ une majorante de $|\mu|$. En posant :

$$Q = 2 \mu_+ + V - |\mu|$$

on a :

$$\mu = Q - V$$

avec une mesure Q positive absolument continue par rapport à V ,
soit $Q = q V$. Pour tout $A \in \mathcal{O}$, il vient :

$$Q(A) = 2 \mu_+(A) - |\mu(A)| + V(A) \leq \mu_+(A) + V(A) \leq 2 V(A)$$

Par suite la densité q vérifie $0 \leq q \leq 2$ et (a fortiori) appartient à $L^2(E, \mathcal{O}, V)$. Il suffit donc d'appliquer le théorème 2 ci-dessus avec $\lambda = 1$ pour obtenir l'énoncé précédent.

COROLLAIRE - Si μ et μ' sont deux mesures bornées telles que $\mu - \mu' \geq 0$, B^- et B'^+ le plus petit et le plus grand $B \in \mathcal{B}$ majorant $\mu(B)$ et $\mu'(B)$ respectivement, on a $B^- \supset B'^+$ ($\mu' - \mu$ p.p.) et $B^+ \supset B'^+$ ($|\mu| + |\mu'|$ p.p.).

(même démonstration qu'au paragraphe 2).

Passons maintenant au paramétrage non linéaire.

Soit μ_λ , $\lambda \geq 0$ une famille de mesures bornées (non positives) décroissante en λ :

$$\lambda \geq \lambda' \Rightarrow \mu_\lambda \leq \mu_{\lambda'}$$

Quitte à remplacer μ_λ par $\lim_{\lambda \uparrow \lambda'} \mu_\lambda$, nous pouvons supposer μ_λ continue à gauche, soit :

$$\lambda \uparrow \lambda_0 \Rightarrow \mu_\lambda(A) \downarrow \mu_{\lambda_0}(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Enfin, nous supposons que les μ_λ sont absolument continues par rapport à une même mesure $V \geq 0$, soit :

$$\mu_\lambda = \rho_\lambda V$$

où ρ_λ est une famille de fonctions, décroissante et continue à gauche en λ .

D'après ce qui précède, pour chaque λ il existe un (V-p.p.) plus grand et un plus petit $B \in \mathcal{B}$, soit B_λ^+ et B_λ^- , réalisant

$$\gamma_\lambda = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mu_\lambda(B)$$

Pour $\lambda_0 > \lambda$ et $(\lambda - \lambda_0)$ assez petit, on a :

$$\mu_{\lambda_0}(B_\lambda) + \varepsilon \geq \mu_\lambda(B_\lambda) \geq \mu_\lambda(B_{\lambda_0}) \geq \mu_{\lambda_0}(B_{\lambda_0}) \geq \mu_{\lambda_0}(B_\lambda)$$

On en déduit que γ_λ est continu à gauche

$$\lambda \uparrow \lambda_0 \Rightarrow \gamma_\lambda \downarrow \gamma_{\lambda_0}$$

et aussi $\mu_{\lambda_0}(B_\lambda) \rightarrow \mu_{\lambda_0}(B_{\lambda_0}) = \gamma_{\lambda_0}$ pour $\lambda \uparrow \lambda_0$. Par conséquent : $\mu_{\lambda_0}(\bigcap_{\lambda > \lambda_0} B_\lambda) = \gamma_{\lambda_0}$, ce qui entraîne : $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda^+ \subset B_{\lambda_0}^+$. Mais $\lambda < \lambda_0$ entraîne aussi $B_\lambda^+ \supset B_{\lambda_0}^+$ (V-p.p.) d'après Th. 3, Corollaire. Par suite (V-p.p.) :

$$B_{\lambda_0}^+ = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda^+$$

La famille B_λ^+ étant continue à gauche, la fonction Λ définie par :

$$\Lambda(x) = \sup \{ \lambda : x \in B_\lambda^+ \}$$

vérifie :

$$B_\lambda^+ = \{ x : \Lambda(x) \geq \lambda \}$$

Définissons alors la mesure μ_Λ et sa densité ρ_Λ par :

$$\mu_\Lambda = \rho_\Lambda V \quad ; \quad \rho_\Lambda(x) = \rho_{\Lambda(x)}(x)$$

Alors : Λ est l'unique fonction du cône $\mathcal{G}$ vérifiant :

$$(3-1) \quad \begin{cases} \forall \lambda & : \int_{\Lambda \geq \lambda} \mu_\Lambda = 0 \\ \forall A \in \mathcal{B} & : \int_A \mu_\Lambda \leq 0 \end{cases}$$

La démonstration est à peu près la même que pour le paramétrage $Q - \lambda V$ du paragraphe 2.

Sous cette forme générale, qui ne fait plus appel au théorème des projections ni à l'espace L^2 , on voit que le paramétrage des réserves est toujours possible.

Nous allons maintenant procéder à un examen plus détaillé du cas fini.

4 - LE CAS FINI.

Le cas fini est le plus important pour les applications : il est d'ailleurs beaucoup plus simple, car $\mathcal{B}$ est une famille finie, de sorte que l'on sait d'avance que $\sup \{ \mu(B) ; B \in \mathcal{B} \}$ est atteint, sans qu'il y ait lieu d'établir de théorème d'existence. Nous allons donc donner un exposé indépendant de ce qui précède, valable pour E fini, et, dans le paragraphe suivant, examiner les conditions de la mise en oeuvre pratique.

E est un ensemble fini. A chaque $x \in E$ est affecté un poids (volume) $V(\{x\}) > 0$ et une quantité $Q(\{x\}) = q(x) V(\{x\})$, où $q(x)$ est la teneur en x ($q \geq 0$). Enfin, on se donne une famille $\mathcal{B}$ de domaines autorisés, stable pour $\cup$ et $\cap$, ainsi que le préordre correspondant défini par :

$$(4-1) \quad \Gamma(x) = \cap \{ B : B \in \mathcal{B}, x \in B \}$$

a/ - Les relations tonnage/teneur.

(Ici, la famille $\mathcal{B}$ peut être quelconque : nous n'utilisons

la stabilité pour $\cup$ et $\cap$ et le préordre (4-1) qu'à partir du sous-paragraphe b/). Pour tout $v \geq 0$, posons :

$$(4-2) \quad Q(v) = \text{Sup} \{Q_B, B \in \mathcal{B}, V_B \leq v\}$$

Ceci définit une fonction Q sur $\mathbb{R}_+$, non décroissante (mais non nécessairement concave, ni continue).

D'autre part, pour chaque $\lambda \geq 0$, posons :

$$\gamma(\lambda) = \text{Sup} \{Q_B - \lambda V_B, B \in \mathcal{B}\}$$

Comme E est fini, il existe un, ou plusieurs, B_λ tels que $Q(B_\lambda) - \lambda V(B_\lambda) = \gamma(\lambda)$ (en général, il n'y a pas de relations simples entre les B_λ si $\mathcal{B}$ n'est pas stable pour $\cup$ et $\cap$). Pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a évidemment :

$$Q(B) - \lambda V(B) \leq \gamma(\lambda) \quad \forall B \in \mathcal{B}, \quad \forall \lambda \geq 0$$

avec égalité pour $B = B_\lambda$. D'après (4-2), ceci entraîne pour tout $v \geq 0$

$$(4-3) \quad Q(v) - \lambda v \leq \gamma(\lambda)$$

avec égalité seulement si $v = V(B_\lambda)$ pour un $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ réalisant le maximum $\gamma(\lambda)$.

En effet, soit $B_0 \in \mathcal{B}$ un des éléments tels que $V(B_0) \leq v$ et $Q(v) = Q(B_0)$. On a donc :

$$Q(v) - \lambda v \leq Q(B_0) - \lambda V(B_0) \leq \gamma(\lambda)$$

c'est-à-dire (4-3). L'égalité n'est réalisée que si $B_0 \in \mathcal{B}_\lambda$ et $v = V(B_0)$.

Posant maintenant :

$$(4-4) \quad \hat{Q}(v) = \text{Sup } \{q : \forall \lambda \geq 0, q - \lambda v \leq \gamma(\lambda)\}$$

nous obtenons l'enveloppe concave de $Q(v)$ (i.e. sa plus petite majorante concave) (donc continue) telle que $\hat{Q}(v) \geq Q(v)$ et $\hat{Q}(v) = Q(v)$ si et seulement si $v = V(B_\lambda)$ pour un $\lambda \geq 0$ et un $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$: les points $(V(B_\lambda), Q(B_\lambda))$ sont les points d'appui des droites d'appui de l'enveloppe concave.

On peut alors paramétrer les réserves en λ . Pour chaque $\lambda \geq 0$, il y a deux points d'appui extrêmes $(V_\lambda^-, Q_\lambda^-)$ et $(V_\lambda^+, Q_\lambda^+)$ (i.e. $V_\lambda^- \leq V_\lambda \leq V_\lambda^+$ pour tout autre point d'appui V_λ, Q_λ) associé à deux ensembles B_λ^- et $B_\lambda^+ \in \mathcal{B}$.

Par définition :

$$(a) \quad \gamma_\lambda = Q_\lambda^- - \lambda V_\lambda^- = Q_\lambda^+ - \lambda V_\lambda^+$$

Pour ε assez petit :

$$\lambda = \lambda_0 - \varepsilon \Rightarrow Q_\lambda^- = Q_{\lambda_0}^+ \text{ et } V_\lambda^- = V_{\lambda_0}^+$$

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \Rightarrow Q_\lambda^+ = Q_{\lambda_0}^- \text{ et } V_\lambda^+ = V_{\lambda_0}^-$$

Cela résulte tout simplement de ce que les points d'appui sont en nombre fini et signifie que les applications :

$\lambda \rightarrow V_\lambda^+, \lambda \rightarrow Q_\lambda^+$ sont décroissantes et continues à gauche.

$\lambda \rightarrow V_\lambda^-, \lambda \rightarrow Q_\lambda^-$ sont décroissantes et continues à droite.

$\lambda \rightarrow \gamma_\lambda$ est décroissante et continue.

(la continuité de γ_λ résulte immédiatement de (a), compte tenu des semi-continuités déjà établies ; la décroissance est évidente, puisque $\gamma_\lambda = \text{Sup } \{Q_B - \lambda V_B ; B \in \mathcal{B}\}$).

b/ - Le Cône $\mathcal{S}$.

Nous supposons maintenant $\mathcal{B}$ stable pour $\cup$ et $\cap$, et utilisons le préordre Γ associé.

Nous dirons qu'une fonction f est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si elle est croissante pour le préordre Γ . Il en résulte que $\mathcal{S}$ est un cône convexe, stable pour Sup et Inf, contient les constantes (positives ou non) et les indicatrices 1_B , $B \in \mathcal{B}$.

Si f est Γ -croissante, on a $1_{f \geq \lambda} \in \mathcal{B}$. En effet, si $x \in \{f \geq \lambda\}$, i.e. $f(x) \geq \lambda$, on a $f(y) \geq f(x) \geq \lambda$, donc $y \in \{f \geq \lambda\}$ pour tout $y \in \Gamma(x)$. Inversement, si $\{g \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ pour tout λ , g est Γ -croissante : $x \in \{g \geq g(x)\} \in \mathcal{B}$ donne $\Gamma(x) \subset \{g \geq g(x)\}$, donc $g(y) \geq g(x)$ pour tout $y \in \Gamma(x)$. Par suite :

On a $f \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{B}$ pour tout réel λ .

Voici une autre caractérisation :

$\mathcal{S}$ est le cône convexe engendré par -1 et les indicatrices 1_B , $B \in \mathcal{B}$.

En effet, soit $f \in \mathcal{S}$. Quitte à remplacer f par $f - \inf f$ (ce qui est loisible, puisque les constantes sont dans $\mathcal{S}$), on peut supposer $f \geq 0$. On pose alors :

$$f_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^n} \left(1_{f \geq \frac{k}{2^n}} - 1_{f \geq \frac{k+1}{2^n}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} 1_{f \geq \frac{k}{2^n}}$$

f_n est une combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 d'indicatrices 1_B , $B \in \mathcal{B}$ (puisque $\{f \geq \lambda\} \in \mathcal{S}$) et $f_n \uparrow f$, donc f est du même type. Inversement, toute f de la forme $C + \sum C_i 1_{B_i}$, $C_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{B}$ est Γ -croissante, donc est dans $\mathcal{S}$.

c/ - La fonction $\Lambda \in \mathcal{G}$.

Pour chaque λ , on posera pour abrégé :

$$\begin{cases} \mu_\lambda = (q - \lambda)V \\ \gamma_\lambda = \sup \{ \mu_\lambda(B), B \in \mathcal{B} \} \end{cases}$$

Ce Sup est atteint (puisque $\mathcal{B}$ est fini). Désignons par $\mathcal{B}_\lambda$ la classe (non vide) des $B \in \mathcal{B}$ tels que $\mu_\lambda(B) = \gamma_\lambda$. $\mathcal{B}_\lambda$ est stable pour $\cup$ et $\cap$.

En effet, si B et B' sont dans $\mathcal{B}_\lambda$, on trouve :

$$\mu_\lambda(B \cup B') + \mu_\lambda(B \cap B') = \mu_\lambda(B) + \mu_\lambda(B') = 2 \gamma_\lambda$$

et (par maximalité) $\mu_\lambda(B \cup B')$ et $\mu_\lambda(B \cap B')$ sont $\leq \gamma_\lambda$. On a donc $\mu_\lambda(B \cup B') = \mu_\lambda(B \cap B') = \gamma_\lambda$, c'est-à-dire $B \cup B'$ et $B \cap B' \in \mathcal{B}_\lambda$.

En particulier, $\mathcal{B}_\lambda$ contient un plus petit et un plus grand éléments :

$$B_\lambda^- = \cap \mathcal{B}_\lambda ; B_\lambda^+ = \cup \mathcal{B}_\lambda$$

et $B_\lambda^- \subset B \subset B_\lambda^+$ pour tout $B \in \mathcal{B}_\lambda$.

Si $\lambda > \lambda'$, on a $B_\lambda^+ \subset B_{\lambda'}^-$. Plus généralement :

Soient μ et μ' deux mesures sur E avec $\mu' \geq \mu$, B^+ le plus grand des $B \in \mathcal{B}$ maximisant $\mu(B)$ et B'^- le plus petit des $B \in \mathcal{B}$ maximisant $\mu'(B)$. On a $B^+ \subset B'^-$ ($\mu' - \mu$ p.p.).

En effet, $C = B \cap B' \in \mathcal{B}$, donc $\mu(C) \leq \mu(B)$, soit $\mu(B \setminus C) \geq 0$ et donc aussi $\mu'(B \setminus C) \geq 0$. Mais alors $\mu'(B \cup B') = \mu'(B') + \mu'(B \setminus C) \geq \gamma(\mu')$, donc $\mu'(B \setminus C) = \mu(B \setminus C) = 0$, et $B \subset B'$ au sens $(\mu' - \mu)$ -p.p.

La famille B_λ^+ est continue à gauche, et la famille B_λ^- continue à droite :

$$(4-1) \quad B_{\lambda_0}^+ = \bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda \quad ; \quad B_{\lambda_0}^- = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} B_\lambda$$

En effet, si $\lambda < \lambda_0$, on a $B_{\lambda_0}^+ \subset B_\lambda$ d'après ce qui précède. Inversement, $\gamma(\lambda)$ est continue en λ de sorte que

$$\gamma(\lambda) = \mu_\lambda(B_\lambda) \geq \mu_{\lambda_0}(B_\lambda) \geq \mu_{\lambda_0}(B_{\lambda_0}^+) = \gamma(\lambda_0)$$

entraîne $\lim_{\lambda \uparrow \lambda_0} \mu_{\lambda_0}(B_\lambda) = \mu_{\lambda_0}(\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda) = \gamma(\lambda_0)$.

Donc $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda \in \mathcal{B}_{\lambda_0}$ et par suite $\bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda \subset B_{\lambda_0}^+$. Mais $B_\lambda \supset B_{\lambda_0}^+$ pour tout $\lambda < \lambda_0$, d'où l'égalité. Même démonstration pour la continuité à droite de $B_{\lambda_0}^-$.

Définissons alors Λ par :

$$(4-2) \quad \Lambda(x) = \text{Sup } \{\lambda : x \in B_\lambda^+\}$$

Alors, $\Lambda \in \mathcal{S}$ et :

$$(4-3) \quad B_\lambda^+ = \{\Lambda \geq \lambda\} \quad ; \quad B_\lambda^- = \{\Lambda > \lambda\}$$

En effet, d'après la continuité à gauche :

$$\Lambda(x) \geq \lambda_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, x \in B_{\lambda_0 - \varepsilon}^+ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda < \lambda_0} B_\lambda^+ = B_{\lambda_0}^+$$

et ceci entraîne $\Lambda \in \mathcal{S}$.

Soient $\lambda_0 \leq \lambda_1 < \dots$ la suite (finie) des points de discontinuité ($B_{\lambda_i}^- \subset B_{\lambda_i}^+$ strictement).

Pour $\lambda_i < \lambda < \lambda_{i+1}$, on a

$$B_{\lambda}^{+} = B_{\lambda}^{-} = B_{\lambda_i}^{-} = B_{\lambda_{i+1}}^{+}$$

Les ensembles :

$$\delta B_i = B_{\lambda_i}^{+} \setminus B_{\lambda_i}^{-} = B_{\lambda_i}^{+} \setminus B_{\lambda_{i+1}}^{+}$$

forment une partition finie de E et l'on a :

$$(4-4) \quad \Lambda = \sum_i \lambda_i (1_{B_{\lambda_i}^{+}} - 1_{B_{\lambda_i}^{-}}) = \sum_i (\lambda_i - \lambda_{i-1}) 1_{B_{\lambda_i}^{+}}$$

Or, pour tout λ , $\gamma(\lambda) = \mu_{\lambda}(B_{\lambda}^{+}) = \mu_{\lambda}(B_{\lambda}^{-})$. Cela entraîne, pour chaque i : $\mu_{\lambda_i}(\delta B_i) = 0$. Comme $\Lambda(x) = \lambda_i$ sur δB_i , on en déduit :

$$\int_{\delta B_i} q = \lambda_i V(\delta B_i) = \int_{\delta B_i} \Lambda(x) V(dx)$$

Puis, les δB_i formant une partition de E :

$$\int_{B_{\lambda}^{+}} q(x) V(dx) = \sum_i \int_{\delta B_i \cap B_{\lambda}^{+}} q V = \sum_i \int_{\delta B_i \cap B_{\lambda}^{+}} \Lambda V = \int_{B_{\lambda}^{+}} \Lambda$$

soit pour tout λ réel :

$$(4-5) \quad \int_{\Lambda \geq \lambda} q = \int_{\Lambda \geq \lambda} \Lambda \quad (\forall \lambda \geq 0)$$

Si $A \in \mathcal{B}$, on a pour chaque i :

$$\int_{A \cap \delta B_i} q \leq \int_{A \cap \delta B_i} \Lambda = \lambda_i V(A \cap \delta B_i)$$

En effet, $B_i^{+} \cap A \in \mathcal{B}$ et $B_i^{-} \cup (B_i^{+} \cap A) = B_i^{-} \cup (\delta B_i \cap A) \in \mathcal{B}$.

Par suite :

$$\mu_{\lambda_i}(B_i^{-} \cup (B_i^{+} \cap A)) = \gamma(\lambda_i) + \mu_{\lambda_i}(A \cap \delta B_i) \leq \gamma(\lambda_i)$$

c'est-à-dire $\mu_{\lambda_i}(A \cap \delta B_i) \leq 0$, ou $Q(A \cap \delta B_i) \leq \lambda_i V(A \cap \delta B_i)$

Par sommation en i , on en tire :

$$(4-6) \quad \forall A \in \mathcal{B} : \int_A q \leq \int_A \Lambda$$

Les deux relations (4-5) et (4-6) caractérisent $\Lambda \in \mathcal{S}$.

En effet, soit Λ une fonction de $\mathcal{S}$ vérifiant ces relations.

Posons

$$B_\lambda^+ = \{\Lambda \geq \lambda\} ; \quad B_\lambda^- = \{\Lambda > \lambda\}$$

D'après (4-6), pour tout $A \in \mathcal{B}$, on trouve :

$$\int_A (q-\lambda)V \leq \int_A (\Lambda-\lambda)V \leq \int_{B_\lambda} (\Lambda-\lambda)V$$

avec $B_\lambda = B_\lambda^+$ ou B_λ^- : la seconde inégalité vient de ce que B_λ réalise manifestement le Sup de $\int_B (\Lambda-\lambda)V$, $B \in \mathcal{B}$, B_λ^- et B_λ^+ étant le plus petit et le plus grand élément réalisant ce Sup. On a donc $\gamma(\lambda) \leq \int_{B_\lambda} (\Lambda-\lambda)V$. D'après (4-6) cela signifie $\gamma(\lambda) \leq \int_{B_\lambda} (q-\lambda)V$ et donc :

$$\int_{B_\lambda} (q-\lambda)V = \gamma(\lambda)$$

Si $A \subset B_\lambda^-$ strictement, on trouve ensuite :

$$\int_A (q-\lambda)V \leq \int_A (\Lambda-\lambda)V < \int_{B_\lambda^-} (\Lambda-\lambda) = \gamma(\lambda)$$

puisque $\int_{B_\lambda^- \setminus A} (\Lambda-\lambda)$ est > 0 strictement. Donc B_λ^- est le plus petit

$B \in \mathcal{B}$ réalisant $\gamma(\lambda)$. On vérifie de même que B_λ^+ est le plus grand $B \in \mathcal{B}$ réalisant $\gamma(\lambda)$.

d/ - Le Théorème de Projection.

La relation (4-5) équivaut à :

$$\langle q, f \rangle = \langle \Lambda, f \rangle$$

pour toute $f \in \sigma(\Lambda)$ et entraîne, en particulier :

$$\langle q - \Lambda, \Lambda \rangle = 0$$

De son côté, (4-6) équivaut à :

$$\langle q - \Lambda, f \rangle \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

La réciproque est vraie :

THEOREME - Λ est la projection de q sur le cône $\mathcal{S}$ dans $L^2(\underline{E}, \underline{A}, \underline{V})$,
c'est-à-dire l'unique élément $\Lambda \in \mathcal{S}$ vérifiant :

$$(4-7) \quad \begin{cases} \forall f \in \mathcal{S} : \langle q - \Lambda, f \rangle \leq 0 \\ \langle q - \Lambda, \Lambda \rangle = 0 \end{cases}$$

Il est immédiat que ces relations caractérisent la projection $\Pi_{\mathcal{S}} q$ de q sur $\mathcal{S}$. On vient de voir que Λ les vérifie : donc $\Lambda = \Pi_{\mathcal{S}} q$. Comme $\Pi_{\mathcal{S}} q$ est caractérisé par (4-7), on voit qu'inversement (4-7) entraîne (4-5) et (4-6).

5 - REALISATION PRATIQUE.

5-1 - Un théorème de Convergence et une Conjecture.

Commençons par exposer une méthode d'itération qui jouera un rôle capital. Soient q une fonction quelconque sur E (supposé fini) et $X_0 ; X_1, X_2, \dots, X_p \in \mathcal{S}$ $p+1$ fonctions Γ -croissantes sur E . On désignera par $\mathcal{S}(X_1, \dots, X_p)$ ou $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}$ le cône convexe stable pour Sup et Inf engendré par $X_1, \dots, X_p$: on a $Y \in \mathcal{S}_p$ si et seulement si $Y = f(X_1, \dots, X_p)$ pour une fonction f de p variables croissantes au sens :

$$x_i \geq x'_i, i = 1, \dots, p \Rightarrow f(x_1, \dots, x_p) \geq f(x'_1, \dots, x'_p)$$

On se propose d'approcher $\Lambda_{\mathcal{S}_p} = \Pi_{\mathcal{S}_p} q$ par une méthode d'itération :

On pose :

$$Y_1 = \Pi_{\mathcal{S}(X_0, X_1)} q$$

$$Y_2 = \Pi_{\mathcal{S}(Y_1, X_2)} q$$

et par récurrence pour $1 \leq r \leq p$, k entier ≥ 0 :

$$(5-1) \quad Y_{kp+r} = \Pi_{\mathcal{S}(Y_{kp+r-1}, X_r)} q$$

(X_0 sert donc une seule fois, à titre de 1ère approximation ; au contraire $X_1, \dots, X_p$ sont indéfiniment réutilisés). On a donc :

$$(5-1') \quad Y_n = \Pi_{\mathcal{S}(Y_{n-1}, X_i)} q$$

où $i = n$ modulo p . On remarque que la mise en oeuvre de cette méthode suppose que l'on soit capable de trouver $\Pi_{\mathcal{S}(YX)} q$, c'est-à-dire la meilleure approximation de q par une fonction croissante de (Y, X) .

Si l'on pose $Y' = \Pi_{\mathcal{S}(Y, X)} q$, Y' est caractérisée comme l'unique élément de $\mathcal{F}(Y, X)$ vérifiant :

$$(5-2) \quad \begin{cases} \langle q - Y', Y' \rangle = 0 \\ \langle q - Y', f \rangle \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(Y, X) \end{cases}$$

On note aussi que l'on peut remplacer q par $E(q|Y, X)$, considérée comme fonction $\bar{q}(X, Y)$ des deux variables X et Y : c'est donc un problème qui se pose dans l'espace $\mathbb{R}^2$.

Comme $Y_n = \Pi_{\mathcal{G}(Y_{n-1}, X_i)} q$ est une meilleure approximation de q que Y_{n-1} , on a

$$\|q - Y_n\| \leq \|q - Y_{n-1}\|$$

La suite $\|q - Y_n\|$ est décroissante. D'après (5-2), $q - Y_n$ est orthogonale à Y_n , donc :

$$\|q\|^2 = \|q - Y_n\|^2 + \|Y_n\|^2$$

La suite $\|Y_n\|$ est croissante et admet une limite $\leq \|q\|$. On a un résultat plus fort :

LEMME - $\|Y_n - Y_{n-1}\|^2 \leq \|Y_n\|^2 - \|Y_{n-1}\|^2$

En particulier, $\|Y_n\| \geq \|Y_{n-1}\|$ avec égalité si et seulement si $Y_n = Y_{n-1}$.

En effet, Y_n est de la forme $Y_n = f(Y_{n-1}, X_i)$ où f est croissante (au sens $(x, y) \geq (x', y')$ si $x \geq x'$ et $y \geq y'$). Si $g(Y_n, Y_{n-1})$ est une fonction croissante en (Y_n, Y_{n-1}) , la fonction substituée $g[f(Y_{n-1}, X_i), Y_{n-1}]$ est encore croissante en (Y_{n-1}, X_i) comme on le vérifie immédiatement. On a donc :

$$\mathcal{G}(Y_n, Y_{n-1}) \subset \mathcal{G}(Y_{n-1}, X_i)$$

Comme $Y_n = \Pi_{\mathcal{G}(Y_{n-1}, X_i)} q$ est dans $\mathcal{G}(Y_n, Y_{n-1})$, Y_n est également la projection de q sur ce sous-cône :

$$Y_n = \Pi_{\mathcal{G}(Y_n, Y_{n-1})} q$$

D'après (5-2), cela entraîne pour $Y_{n-1} \in \mathcal{G}(Y_n, Y_{n-1})$:

$$\langle q, Y_{n-1} \rangle \leq \langle Y_n, Y_{n-1} \rangle$$

Mais $\langle q, Y_{n-1} \rangle = \|Y_{n-1}\|^2$, d'après (5-2), puisque Y_{n-1} est la projection de q sur le cône correspondant. Donc :

$$\|Y_{n-1}\|^2 \leq \langle Y_n, Y_{n-1} \rangle$$

Par suite :

$$\|Y_n - Y_{n-1}\|^2 = \|Y_n\|^2 + \|Y_{n-1}\|^2 - 2 \langle Y_n, Y_{n-1} \rangle \leq \|Y_n\|^2 - \|Y_{n-1}\|^2$$

d'où le lemme. Passons au théorème.

Th. 5-1 - La suite $\{Y_n\}$ converge vers une limite Y_0 , et cette limite est atteinte au bout d'un nombre fini d'itérations ($Y_n = Y_0$ pour $n \geq N$)

Remarquons d'abord que chaque Y_n est égal à $\Pi_{\mathcal{S}(Y_n)} q$, c'est-à-dire à la projection de q sur le cône $\mathcal{S}_n$ engendré par les indicatrices des $\{Y_n \geq \lambda\}$. Soit $\mathcal{B}_n$ la famille des ensembles $\{Y_n \geq \lambda\}$. C'est une sous-famille de $\mathcal{B}$, totalement ordonnée par l'inclusion. Comme $\mathcal{B}$ est fini, il n'existe qu'un nombre fini N de telles sous-familles, et par suite la suite $\{Y_n\}$ comprend au plus N termes distincts.

Le reste suit facilement : on considère la suite partielle $n \rightarrow Y_{np}$. Il existe alors deux entiers $n_0 < n_1 \leq N$ tels que $Y_{n_0 p} = Y_{n_1 p}$. Comme la suite $\|Y_n\|$ est croissante, on a $\|Y_{n_0 p}\| = \|Y_{n_0 p+1}\| = \dots = \|Y_{n_1 p}\|$, donc aussi (d'après le lemme) $Y_{n_0 p+k} = Y_{n_0 p}$, $k = 1, 2, \dots, (n_1 - n_0)p$. Enfin, d'après le procédé de construction par récurrence, $Y_{n_0 p} = Y_{n_1 p}$ entraîne $Y_{n_1 p+r} = Y_{n_0 p+r}$ pour tout $r \geq 0$.

Par suite on a bien $Y_n = Y_{n_0 p}$ dès que $n \geq n_0 p$ (comme $n_0 < n_1 \leq N$, on a $n_0 \leq (N-1)p$).

Conjecture - Cette limite Y_0 ne dépend pas de l'approximation initiale, et $Y_0 = \Pi_{\mathcal{S}(X_1, \dots, X_p)}^q$

Je ne suis pas à même de démontrer cette conjecture. Un énoncé équivalent est :

Il existe un et un seul $Y_0 \in \mathcal{S}$ (à savoir la projection de q sur $\mathcal{S}(X_1, \dots, X_p)$) tel que :

$$Y_0 = \Pi_{\mathcal{S}(X_1, Y_0)}^q = \dots = \Pi_{\mathcal{S}(X_p, Y_0)}^q$$

Remarquons que si cette conjecture se révélait fausse, la limite Y_0 constituerait néanmoins une très bonne approximation de la vraie projection, et le procédé conserverait toute sa valeur pratique.

5-2 - Cas où Γ est un cône convexe à base polygonale.

Dans les applications, $\Gamma(x)$ est un cône convexe de sommet x dans $\mathbb{R}^3$ (plus précisément la restriction d'un tel cône au sous-ensemble fini $E \subset \mathbb{R}^3$). Il existe donc une famille φ_i , $i \in I$ de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow \varphi_i(y) \geq \varphi_i(x), \quad i \in I$$

Quitte à modifier légèrement Γ , nous supposons I fini, ce qui revient à approximer la base du cône Γ par un polygone. Soit p le nombre de ces formes : le préordre Γ est défini par p formes linéaires :

$$(5-3) \quad y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow \varphi_1(y) \geq \varphi_1(x), \dots, \varphi_p(y) \geq \varphi_p(x)$$

Th. 5-2 - Le préordre Γ étant défini par (5-3), une fonction F sur E est Γ -croissante si et seulement si il existe une fonction f croissante sur $\mathbb{R}^p$ au sens :

$$\xi_i \geq \xi'_i, i = 1, 2, \dots, p \Rightarrow f(\xi_1, \dots, \xi_p) \geq f(\xi'_1, \dots, \xi'_p)$$

telle que en tout $x \in E$:

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$$

Il est immédiat que tout F de la forme indiquée est Γ -croissante. Si p est ≤ 3 , la réciproque est immédiate. Si p est ≥ 3 , on peut supposer qu'il existe 3 formes linéairement indépendantes, par exemple φ_1 , φ_2 et φ_3 (si ce n'est pas le cas, on se ramène sans peine à un problème analogue dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^1$), de sorte que tout $x \in \mathbb{R}^3$ est biunivoquement défini par ses trois premières coordonnées en "axes φ ", soient :

$$\xi_1 = \varphi_1(x), \xi_2 = \varphi_2(x), \xi_3 = \varphi_3(x)$$

L'application de E dans $\mathbb{R}^p$, associant à $x \in E$ le point ξ de coordonnées :

$$\xi_i = \varphi_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, p$$

est donc injective. Désignons par E' l'image de E dans $\mathbb{R}^p$ par cette application, et munissons $\mathbb{R}^p$ de l'ordre F' défini par :

$$\xi \in \Gamma'(\xi') \Leftrightarrow \xi_i \geq \xi'_i, i = 1, 2, \dots, p$$

Soit F une fonction Γ -croissante sur E . Nous devons montrer qu'il existe $\bar{F}$ Γ' -croissante sur $\mathbb{R}^p$ telle que :

(a)
$$F(x) = \bar{F}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$$

Définissons d'abord f sur E' en posant :

$$f(\xi) = F(x) \quad (\xi = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)), x \in E)$$

ce qui est possible, puisque $x \rightarrow \xi$ est une bijection de E sur E' .

Ensuite, en tout $\xi \in \mathbb{R}^p$, posons :

$$\bar{f}(\xi) = \inf \{f(\xi'), \xi' \in \Gamma'(\xi) \cap E'\}$$

(ceci implique $\bar{f}(\xi) = -\infty$ si $\Gamma'(\xi) \cap E' = \emptyset$, ou simplement $\bar{f}(\xi) = 0$ si on se limite - ce qui est loisible - aux fonctions ≥ 0). Cette fonction $\bar{f}$ prolonge f sur $\mathbb{R}^p$, (donc vérifie (a). En effet, si $\xi \in E'$ et $\xi' \in \Gamma'(\xi) \cap E'$, on a $f(\xi) \leq f(\xi')$. Car, si x et x' sont les points de E tels que $f(\xi) = F(x)$ et $f(\xi') = F(x')$, on a (par définition de Γ') $x' \in \Gamma(x)$, donc $F(x') \geq F(x)$, puisque F est Γ -croissante. Par suite $\bar{f}(\xi) = f(\xi)$ sur E' .

Il reste à vérifier que $\bar{f}$ est Γ' -croissante, ce qui est immédiat : si $\xi \in \Gamma'(\xi_0)$, on a $\Gamma(\xi) \subset \Gamma(\xi_0)$, donc, d'après la définition de $\bar{f}$, $\bar{f}(\xi) \geq \bar{f}(\xi_0)$.

On notera que la fonction $\bar{f}$ que nous avons utilisée ici est la plus petite fonction sur $\mathbb{R}^p$ vérifiant les conditions voulues.

REMARQUE - D'après ce théorème, le cône $\mathcal{S}$ est identique à la famille des $Y = f(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ où f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^p$. Si, dans l'énoncé du théorème 5-1, on prend $X_1 = \varphi_1, \dots, X_p = \varphi_p$, la projection de q sur $\mathcal{S}(X_1, \dots, X_p)$ est donc identique à $\Lambda = \Pi q$ - et (si la conjecture est vraie) - peut être obtenue par un nombre fini d'itérations.

5-3 - Conditions de réalisation pratique.

Le principe de base consiste à définir les "gros blocs" en axes φ et non en les coordonnées initiales. Cela revient tout simplement à discrétiser les fonctions φ_i . L'avantage énorme de ce procédé est de supprimer le problème de l'affinage d'un contour défini au niveau des gros blocs. Car les contours obtenus à l'aide des gros blocs définis en axes φ sont automatiquement dans $\mathcal{B}$, et n'ont donc pas besoin d'être affinés.

L'espace E utilisé est donc constitué des centres des petits blocs, en nombre généralement énorme (200 000 par exemple). Tout va reposer sur la possibilité de résoudre économiquement le :

Problème - Si X et Y sont deux fonctions Γ -croissantes sur E , trouver une bonne approximation de $\Pi_{\mathcal{S}(X,Y)}^q$.

C'est un problème à deux dimensions, donc soluble par la méthode de programmation dynamique.

On désignera par $\bar{V}(dX, dY)$ et $\bar{Q}(dX, dY)$ les images des mesures V et $Q = qV$ par $x \rightarrow (X, Y)$. On a d'ailleurs simplement $\bar{Q} = \bar{q} \bar{V}$ avec $\bar{q}(X, Y) : E(q|X, Y)$.

Le problème (plan) est de projeter $\bar{q}$ sur le cône $\mathcal{S}(X, Y)$ des fonctions croissantes de 2 variables dans $L^2(\mathbb{R}^2, \bar{V})$. En fait, X et Y sont discrétisées. Si elles prennent n et n' valeurs distinctes, $\bar{V}$ est concentrée sur un $E' \subset \mathbb{R}^2$ comportant au plus $n n'$ points (en général moins), soit 100 points si $n = n' = 10$. L'algorithme de programmation dynamique doit marcher rapidement. Si l'on veut discrétiser la projection $\Lambda_0 = \Pi_{\mathcal{S}(X,Y)} \bar{q}$, on se donnera a priori

dés nombres $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \infty$. Pour chaque i , on désignera par B_i l'élément de $\mathcal{B}$ maximisant $(\bar{q} - \lambda_i)\bar{V}$, et sur $\delta B_i = B_i \setminus B_{i+1}$, on posera

$$\lambda'_i = \frac{\int_{\delta B_i} \bar{q} \bar{V}}{\int_{\delta B_i} \bar{V}} = E(\bar{q} | \delta B_i)$$

La solution discrétisée cherchée est :

$$\Lambda_0 = \sum \lambda'_i 1_{\delta B_i}$$

c'est-à-dire $\Lambda_0(x) = \lambda'_i$ pour $x \in \delta B_i$.

Dans cette méthode, c'est le calcul de $\bar{V}(dX, dY)$ et de $\bar{q}(X, Y)$ qui risque de prendre le plus de temps, car il nécessite le balayage de tout E (200 000 points). La méthode d'itération directe suivante serait donc prohibitive :

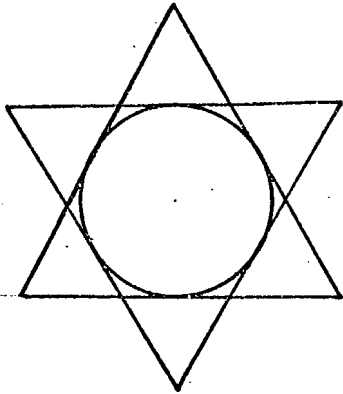
Chaque $x \in E$ ayant été informé par $X_0(x)$ (approximation initiale), $X_i(x) = \varphi_i(x)$ et $Y_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, former $\bar{V}_n(dY_n, dX_i)$ et $E(q | Y_n, X_i) = \bar{q}(Y_n, X_i)$. Projeter $\bar{q}$ sur $\mathcal{G}(Y_n, X_i)$, d'où $\bar{Y}_{n+1}(Y_n, X_i)$. Substituer pour chaque x , $Y_{n+1}(x) = \bar{Y}_{n+1}(Y_n(x), X_i(x))$.

Car elle implique un nombre excessif de balayage de E . D'où la méthode d'approximation suivante :

5-4 - Méthode du Bouclier de David.

On retiendra 6 formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ pour définir (à peu près) Γ . Si le vrai cône Γ est de révolution, on lui substituera un cône dont la base est un hexagone régulier : cet hexagone est l'intersection de deux triangles équilatéraux symétriques

associés : le premier à $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, et le second à $(\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)$.



Principe de la méthode : Approximer (séparément) $\Pi_{\mathcal{G}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}^q$ par Λ_1 et $\Pi_{\mathcal{G}(\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)}^q$ par Λ_2 . Puis approximer $\Pi_{\mathcal{G}(\Lambda_1, \Lambda_2)}^q$ par Λ_3 .

Sous réserve de vérification, on peut espérer que Λ_3 sera une bonne approximation de Λ :

la méthode ne nécessiterait donc que 4 balayages de E entier.

En effet, pour calculer Λ_1 on peut travailler entièrement en coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ discrétisées.

Par exemple, on retiendra 10 valeurs distinctes pour chaque φ_i , en posant :

$\bar{\varphi}_i(x) = k$ si $\varphi_i(x)$ appartient à l'intervalle $(t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, 10$, $t_0 = -\infty$, $t_{11} = +\infty$ et en choisissant les classes $(t_k, t_{k+1}]$ de manière à ce qu'elles contiennent chacune à peu près le même nombre de points.

En coordonnées discrétisées $(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3)$, E' contient au plus 1000 points (en pratique sans doute 2 ou 300). Chacun des $\xi \in E'$ (c'est-à-dire chaque gros bloc en axes φ) sera informé une fois pour toutes par : son poids $\bar{V}(\xi) = \sum_{x \in \xi} V(x)$ où x décrit le "gros bloc" ξ et sa teneur :

$$\bar{q}(\xi) = \frac{1}{\bar{V}(\xi)} \sum_{x \in \xi} q(x) V(x)$$

Ceci nécessite un seul parcours de E entier.

On choisira une approximation initiale sur E' : par exemple

$$X_0 = \Pi_{\mathcal{G}(\bar{\varphi}_2, \bar{\varphi}_3)} \bar{q}$$

D'autres X_0 sont réalisables : voici un procédé pour obtenir une approximation initiale peut-être meilleure : on remarque que la fonction $\bar{q}$ sur E' peut s'écrire :

$$\bar{q} = \sum_{\xi \in E'} \bar{q}(\xi) 1_{\{\xi\}}$$

Il n'est pas exact que la projection d'une somme soit la somme des projections. Mais cette somme constitue probablement une bonne approximation initiale, soit :

$$X_0 = \sum_{\xi \in E'} \bar{q}(\xi) \pi_{(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)} 1_{\{\xi\}}$$

avec :

$$\pi 1_{\{\xi\}}(\xi_0) = \frac{1_{\Gamma'(\xi)}(\xi_0)}{V(\Gamma(\xi))} \int_{\Gamma'(\xi)} \bar{q}(\xi') \bar{V}(d\xi')$$

sous forme explicite :

$$X_0(\xi) = \sum_{\xi' \in E' \cap \Gamma''(\xi)} \frac{1}{V(\Gamma'(\xi'))} \sum_{\eta \in \Gamma'(\xi')} \bar{q}(\eta) \bar{V}(\eta)$$

où Γ'' désigne l'ordre inverse ($\xi' \in \Gamma''(\xi)$ si $\xi \in \Gamma'(\xi')$).

On calcule ensuite les Y_n par des itérations

$$Y_n = \pi_{\int(Y_{n-1}, \bar{\varphi}_1)} \bar{q}$$

ne nécessitant le balayage que de E' (1000 points) et non de E (200 000) - donc réalisables. Ceci conduira à Λ_1 . Λ_2 se construit de la même manière à partir de $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$: ceci nécessite un second parcours de E . Chaque point x de E doit ensuite être informé des valeurs $\Lambda_1(x)$ et $\Lambda_2(x)$ (3ème parcours). Pendant ce même 3ème parcours, on informe la plan (discrétisé) des (Λ_1, Λ_2) . On calcule

alors Λ_3 , et il reste à informer $x \in E$ par $\Lambda_3(x) = \Lambda_3[\Lambda_1(x) \wedge \Lambda_2(x)]$ (4ème parcours de E).

Raffinement - Ayant obtenu Λ_3 discrétisée (par exemple) en 10 valeurs $\lambda_1, \dots, \lambda_{10}$, on peut souhaiter améliorer l'approximation entre deux valeurs λ_i et λ_j en cadrant la zone pratiquement intéressante des valeurs de λ .

Cela est possible en éliminant les points x où $\Lambda_3(x) \geq \lambda_j$ et ceux où $\Lambda_3(x) < \lambda_i$ (i.e. en remplaçant V par $1_{\lambda_i \leq \Lambda_3 < \lambda_j} V = V'$). On recommence les mêmes opérations sur ce nouvel ensemble $E_0 \subset E$. Ceci aboutit à une nouvelle fonction $\Lambda_4(x)$ sur E_0 vérifiant (en principe) $\lambda_i \leq \Lambda_4 < \lambda_j$ et permettant de resserrer l'approximation dans cette fourchette.

5-5 - Variation des conditions imposées.

a/ - On peut souhaiter faire varier l'angle de talus à respecter, c'est-à-dire le cône Γ . On commencera par l'angle le plus faible, i.e. le plus grand cône Γ_0 correspondant à l'ordre le plus sévère, avec la solution Λ_0 . Si $\Gamma_1 \subset \Gamma_0$, Λ_0 est encore Γ_1 -croissante. De plus, si le cône Γ_1 est peu différent du cône Γ_0 , Λ_0 est relativement proche de Λ_1 . Autrement dit, dans le calcul de la solution Λ_1 associé à Γ_1 , Λ_0 constituera une excellente approximation initiale X_0 (ce qui réduira le nombre des itérations).

b/ - Cas de la double coupure.

Ici, λ représente toujours la teneur limite à l'extraction (i.e. le prix de l'extraction de l'unité de volume), mais il intervient un deuxième paramètre θ , teneur limite au traitement

(i.e. : prix du traitement de l'unité de volume).

Si $F_x(dt)$ est la fonction de transfert en $x \in E$ et si x est extrait, on récupère le volume $[1-F_x(\theta)] V(\{x\})$ à la teneur $\int_{\theta}^{\infty} t F_x(dt)$; la valeur par unité de volume extrait est :

$$q_{\theta}(x) = \int_{\theta}^{\infty} (t-\theta) F_x(dt) = \int_{\theta}^{\infty} [1-F_x(t)] dt$$

Il s'agit donc d'optimiser $\int_B (q_{\theta}(x) - \lambda) V(dx)$, autrement dit on doit appliquer la même méthode avec q_{θ} au lieu de q . Si Λ_{θ} est (une approximation de) $\Pi_{\mathcal{S}} q_{\theta}$ et si θ' est voisin de θ , ici encore Λ_{θ} constituera une bonne approximation initiale X_0 de $\Lambda_{\theta'}$, ce qui diminuera le nombre des itérations.

Noter que si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ sont les k valeurs de θ auxquelles on a décidé de s'intéresser, lors du passage aux coordonnées φ il conviendra d'informer chaque $\xi \in E'$ de toutes les valeurs $q_{\theta_i}(\xi)$, $i = 1, \dots, k$ à la fois, de manière à réduire le nombre des parcours de E .

c/ - On peut aussi traiter par la même méthode le cas d'un paramétrage non linéaire. Si μ_{λ} ne dépend pas linéairement de λ , les contours optimaux sont encore les :

$$B_{\lambda} = \{\Lambda \geq \lambda\}$$

où $\Lambda \in \mathcal{S}$ est caractérisé par les relations (3-1). En passant en axes φ , les résultats précédents subsistent. Les approximations Λ_1 et Λ_2 en axe φ se construisent par itérations (la méthode de programmation dynamique s'applique sans changement dans $\mathbb{R}^2$), et de même Λ_3 s'obtient (par programmation dynamique, à partir de Λ_1 et Λ_2).

6 - POST SCRIPTUM.

La conjecture relative à la méthode d'itération est fausse en réalité. Voici un contre-exemple très simple.

$\mathcal{B}$ va être la famille stable pour $\cup$ et $\cap$ engendrée par trois ensembles seulement. Ceci conduit à un graphe à 8 points disposés au sommet du cube de base de $\mathbb{R}^3$ avec les coordonnées

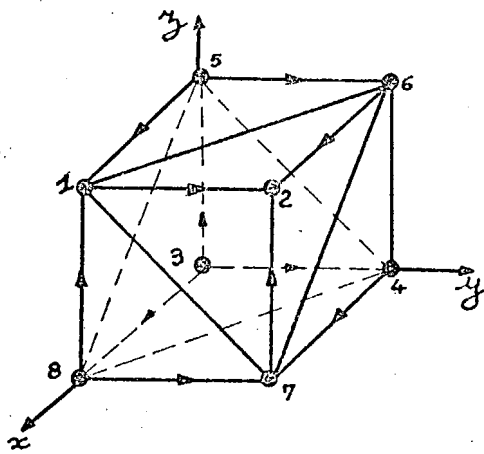


Fig. 1 : q

On trouve facilement Λ (Figure 2).

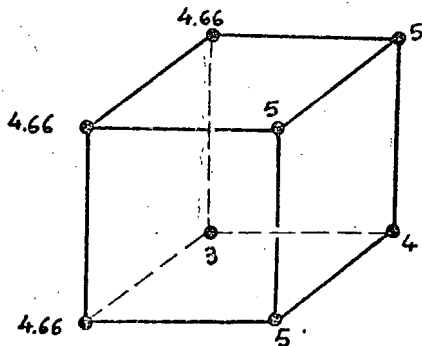


Fig. 2 : Λ

$$x = 1_{B_1} \quad y = 1_{B_2} \quad z = 1_{B_3}$$

avec un ordre Γ défini par l'octant positif

$$(x,y,z) \in \Gamma(x',y',z') \text{ si}$$

$$x \geq x' , y \geq y' , z \geq z'$$

Je prends $V = 1$ sur chacun des huit points, et q comme indiqué sur la Figure 1.

Pour appliquer la méthode d'itération, partons, par exemple, de

$$X_0 = \Pi_{xy} q$$

$\bar{q}(x,y) = E(q|xy)$ est donné Fig. 3

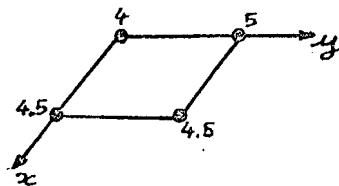
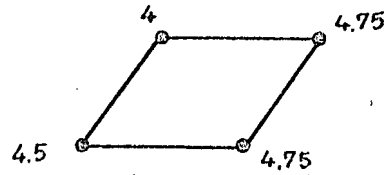


Fig. 3 : $\bar{q}(x,y)$

De sorte que $X_0 = \Pi_{xy} q$ est (dans le plan des xy) :



et, à trois dimensions (Fig. 4). Nous devons ensuite passer à

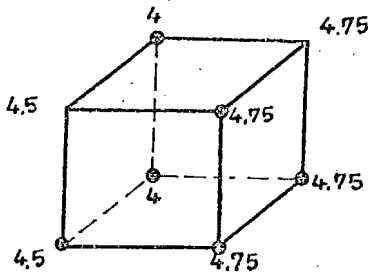


Fig. 4

$$X_0 = \Pi_{xy} q$$

$$Y_1 = \Pi_{(X_0, z)} q$$

Pour cela, nous allons nous placer en axes (X_0, z) . Cela donne la figure 5, où chaque point est informé des deux nombres : le premier est $\bar{q} = E(q|X_0, z)$ le second est $\bar{V} = V(X_0, z)$.

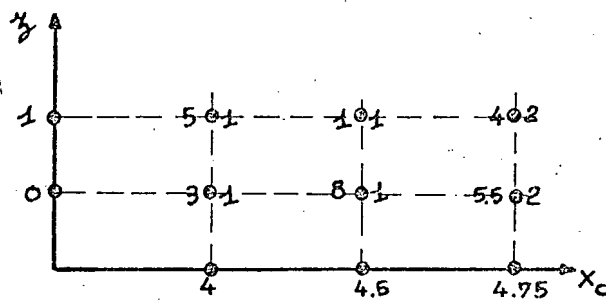


Figure 5 ($\bar{q}$ et $\bar{V}$ en axes X_0, z)

On en déduit $\Pi_{(X_0, z)} q = Y_1$ en axes (X_0, z) :

4, 6.1	4, 6.1	4, 75.2
3.1	4, 6.1	4, 75.2

et en axes (x, y, z) (Fig. 6)

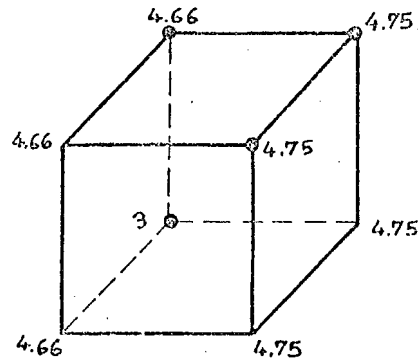


Fig. 6 : $Y_1 = \Pi_{(X_0, z)} q = Y_0$

Il est ensuite facile de vérifier $\Pi_{(Y_1, x)} q = Y_1$ et $\Pi_{(Y_1, y)} q = Y_1$.
L'itération est bloquée, et on n'a pas $Y_0 = \Lambda$ comme on le voit en comparant les figures 2 et 6.

Si, au lieu de $X_0 = \Pi_{(x, y)} q$, nous étions partis de $X_0 = \Pi_{(y, z)} q$ ou de $X_0'' = \Pi_{(z, x)} q$, nous serions arrivés à la même limite Y_0 , comme on peut le vérifier facilement.

Il ressort de cela :

1°/ que la conjecture est fausse

2°/ qu'il n'est probablement pas bon de partir de l'approximation initiale X_0 obtenue en projetant q sur l'un des trois plans de coordonnées.

Il est sans doute préférable de prendre pour X_0 une fonction a priori davantage liée à q . Voici deux procédés possibles : On peut prendre pour $X_0(\xi)$ la somme des minorants de $\xi \in \mathbb{R}^3$ dans l'ordre Γ , soit, en désignant par Γ' le cône opposé ($\xi' \in \Gamma'(\xi) \Leftrightarrow \xi \in \Gamma(\xi')$)

$$X_0(\xi) = \int_{\Gamma'(\xi)} q(\xi') \, V(d\xi')$$

On peut encore prendre $X'_0(\xi)$ égal à la somme changée de signe des majorants de ξ dans l'ordre Γ

$$X'_0(\xi) = - \int_{\Gamma(\xi)} q(\xi') V(d\xi')$$

Ici, cela donne (Fig. 7 et 8)

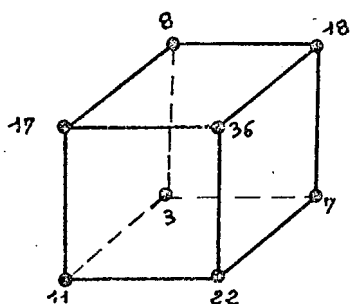


Fig. 7 : X_0

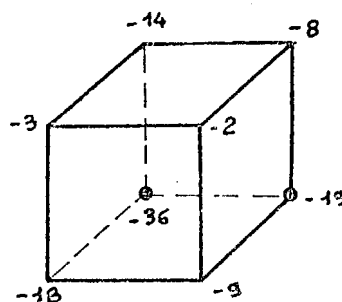


Fig. 8 : X'_0

Il se trouve (mais ce n'est évidemment pas une circonstance générale) qu'ici X_0 est une remarquable approximation initiale : on vérifie facilement, en effet, que :

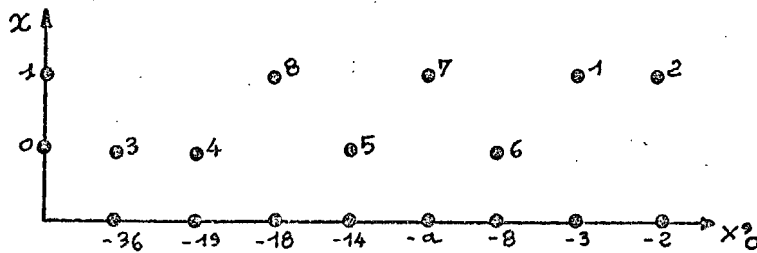
$$\Pi_{X_0} q = \Lambda$$

A plus forte raison $\Pi_{(X_0, x)} q = \Pi_{(X_0, y)} q = \Pi_{(X_0, z)} q = \Lambda$ de sorte que l'on trouve $Y_1 = \Lambda$ dès la première itération.

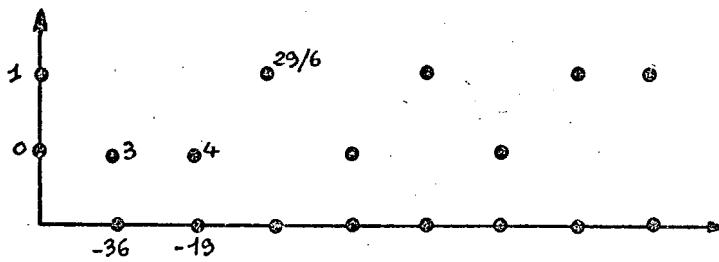
X'_0 conduit également à la solution exacte Λ , quoiqu'un peu moins vite. Si l'on projette en premier lieu q sur le plan des (y, X'_0) , on trouve du premier coup $\Pi_{(y, X'_0)} q = \Lambda$. Mais il n'en est pas de même si l'on commence par le plan des (z, X'_0) ou des (x, X'_0) . Si l'on part de (z, X'_0) on obtient le trajet le plus long : en premier lieu,

$$Y_1 = \Pi_{(z, X'_0)} q = X'_0$$

la première itération ne change pas X'_0 . Calculons ensuite $Y_2 = \prod_{(x, X'_0)} q$. En axe (x, X'_0) , chaque point a le volume 1, et $\bar{q}(x, X'_0)$ est :



de sorte qu'en axe (x, X'_0) , Y_2 est :



(les points non marqués correspondent tous à $Y_2 = 29/6 = 4,88$).

En axe (x, y, z) cela donne :

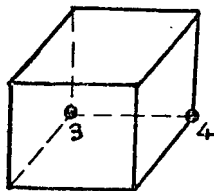
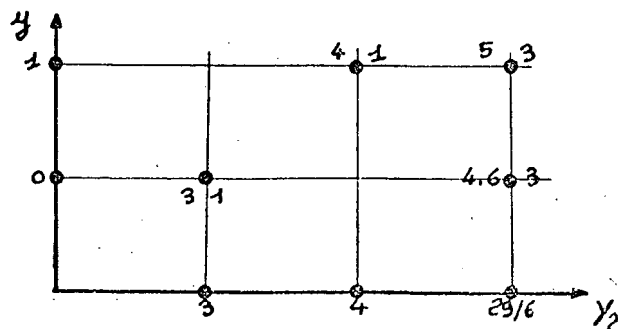


Fig. 9 : $Y_2 = \prod_{x, X'_0} q$

($Y_2 = \frac{29}{6}$ sur les points non marqués).

Passons à $Y_3 = \prod_{Y_2, y} q$. En axes (Y_2, y) , on obtient :



(le premier chiffre est $\bar{q}$, le second $\bar{V}$) et Y_3 est identiquement $Y_3 = E(q|Y_2, y) = \Lambda$.

En conclusion

Au lieu de prendre pour X_0 la projection sur l'un des plans de coordonnées, je suggère la procédure suivante :

~ prendre la somme des Γ -minorants et la somme changée de signe des Γ -majorants de chaque point ξ :

$$X'_0(\xi) = \int_{\Gamma'(\xi)} q(\xi') V(d\xi')$$

$$X''_0(\xi) = - \int_{\Gamma(\xi)} q(\xi') V(d\xi')$$

et partir de l'approximation initiale :

$$X_0 = \Pi_{(X'_0, X''_0)} q$$

~ D'où $Y_1 = \Pi_{(X_0, x)} q$, $Y_2 = \Pi_{(Y_1, y)} q$ etc... jusqu'à un $Y_n = Y_0$ suffisamment stabilisé (le critère est le ralentissement de la croissance de $\|Y_n\|$).

A titre de vérification, former

$$Z' = \Pi_{(X'_0, Y_0)} q ; \quad Z'' = \Pi_{(X''_0, Y_0)} q$$

$$\text{et } Z = \Pi_{(X_0, Y_0)} q .$$

Si l'un de ces trois éléments a une norme (significativement) plus forte que $\|Y_0\|$, faire une nouvelle itération en partant de cet élément (s'il y en a plusieurs, partir de celui dont la norme est la plus forte).

Une autre procédure possible consisterait à incorporer X_0 à la séquence servant à faire l'itération :

$$Y_1 = \prod_{X_0 x} q, \quad Y_2 = \prod_{Y_1 y} q, \quad Y_3 = \prod_{Y_2 z} q$$

puis $Y_4 = \prod_{Y_3 X_0} q$ (au lieu de $\prod_{Y_3 x} q$) et ainsi de suite. C'est l'expérience qui permettra de juger laquelle de ces deux procédures est la meilleure (on peut aussi les combiner de diverses manières).

7 - RECHERCHE D'AUTRES ALGORITHMES.

Voici quelques autres possibilités, qui permettront peut-être d'améliorer la procédure.

a/ - Algorithme de l'ordre total.

On se place soit dans $\mathbb{R}^2$ (coordonnées (x,y)) soit dans $\mathbb{R}^3$ (coordonnées (x,y,z)) avec un ordre Γ défini par le quadrant ou l'octant positif.

On fait choix d'un ordre total, noté $\succcurlyeq$, compatible avec Γ (i.e. : $(x,y) \in \Gamma(x',y') \Rightarrow (x,y) \succcurlyeq (x',y')$). Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \succcurlyeq (x',y') \Leftrightarrow x > x', \text{ ou } x = x' \text{ et } y \geq y'$$

Soit $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_N$ les points de E ordonnés par $\succcurlyeq$. On amorce la récurrence en posant :

ξ_1			
ξ_3	ξ_2		
ξ_6	ξ_5	ξ_4	
ξ_{10}	ξ_9	ξ_8	ξ_7

$$f_1(\xi_1) = q(\xi_1)$$

$$f_1(\xi_n) = 0, \quad n > 1$$

Au stade n , on a une fonction f_n vérifiant

a/ $f_n(\xi_{n+1}) = \dots = f_n(\xi_N) = 0$

b/ f_n est Γ -croissante

c/ pour tout $\lambda > 0$ tel que $\{f_n(\xi) = \lambda\} \neq \emptyset$, on a :

$$\int_{f_n=\lambda} q(\xi) V(d\xi) = \int_{f_n=\lambda} f_n(\xi) V(d\xi) = \lambda V(\{f_n = \lambda\})$$

Construction de f_{n+1} :

Soit $q_{n+1} = q(\xi_{n+1})$. On compare ξ_{n+1} à ses deux majorants immédiats : l'un est ξ_n , l'autre un certain ξ_i (l'indice $i > n$ dépend du cas de figure : mais, si $\xi_{n+1} = (x, y)$, alors $\xi_i = (x, y+1)$).

Si $q_{n+1} \leq \inf(f_n(\xi_n), f_n(\xi_i))$, on pose :

$$f_{n+1}(\xi_j) = f_n(\xi_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$f_{n+1}(\xi_{n+1}) = q_{n+1}$$

$$f_{n+1}(\xi_{n+2}) = \dots = f_{n+1}(\xi_N) = 0$$

Si $q_{n+1} > \inf(f_n(\xi_n), f_n(\xi_i)) = \lambda_0$, désignons par C'_0 la classe Γ -connexe engendrée dans $\{f_n = \lambda_0\}$ par le (ou les) majorants immédiats $\xi_0 (= \xi_i \text{ ou } \xi_n)$ de ξ_{n+1} tels que $f_n(\xi_0) = \lambda_0$.

Si, pour chaque $\xi \in E$ de coordonnées (x, y) on désigne par S_ξ l'ensemble constitué par $\xi = (x, y)$, ses deux majorants immédiats $(x+1, y)$ et $(x, y+1)$ et ses deux minorants immédiats $(x-1, y)$ et $(x, y-1)$, $C'_0 \subset \{f_n = \lambda_0\}$ est donc la classe stable pour S_ξ engendrée par ξ_0 dans $\{f_n = \lambda_0\}$.

On pose $C_0 = \{\xi_{n+1}\} \cup C'_0$ et :

$$\lambda_1 = \frac{Q(C_0)}{V(C_0)} = \frac{a_{n+1} + \int_{C_0} f_n(\xi) V(d\xi)}{\int_{C_0} V(d\xi)}$$

On compare ensuite λ_1 à l'inf. de f_n sur l'ensemble des majorants immédiats de C_0 : soit, en posant

$$s_{(x,y)} = \{(x+1, y), (x, y+1)\}$$

$$\lambda_1' = \inf \{f_n(\xi'), \xi' \in \bigcup_{\xi \in C_0} s_\xi\}$$

et on désigne par C_1 la classe Γ -connexe engendrée dans $\{f_n = \lambda_1'\}$ par les $\xi' \in \bigcup \{s_\xi, \xi \in C_0\}$.

Si $\lambda_1 \leq \lambda_1'$, on posera ::

$$f_{n+1}(\xi) = \lambda_1 \quad \xi \in C_0$$

$$f_{n+1}(\xi) = f_n(\xi) \quad \xi \notin C_0$$

Si $\lambda_1 > \lambda_1'$; on prendra

$$\lambda_2 = \frac{Q(C_0 \cup C_1)}{V(C_0 \cup C_1)} = \frac{\lambda_1 V(C_0) + \lambda_1' V(C_1)}{V(C_0) + V(C_1)}$$

On formera ensuite λ_2' et la classe C_2 - Γ -connexe, etc...

Cette procédure n'est pas infaillible, en ce sens qu'elle ne conduit pas tout-à-fait à $\Pi_{(x,y)} q$, mais à une fonction f qui en diffèrera en général fort peu.

On peut alors améliorer les choses en formant de manière analogue f' en utilisant l'autre ordre total :

$$(x,y) \succcurlyeq (x',y') \Leftrightarrow \begin{array}{l} y > y' \\ \text{ou } y = y' \text{ et } x \geq x' \end{array}$$

Si $f = f'$, on doit avoir une excellente approximation de Λ si $f \neq f'$: on peut passer en axes $(f; f')$ et appliquer une seconde fois la procédure approchée ci-dessus. Cela donnera deux nouvelles approximations g et g' , etc...

Dans $\mathbb{R}^3$, la même procédure est en principe applicable (mais plus lourde, du fait que chaque ξ a maintenant 3 majorants immédiats). Comme il y a cette fois trois ordres totaux, on aboutit à 3 approximations f, f', f'' , puis, en passant en axes (f, f', f'') trois nouvelles approximations (g, g', g'') etc...

REMARQUE : Utilisée dans $\mathbb{R}^2$, cette procédure permet de calculer les itérations :

$$Y_1 = \Pi_{(x, X_0)}^q, \quad Y_2 = \Pi_{(y, Y_1)}^q, \quad Y_3 = \Pi_{(z, Y_2)}^q, \dots$$

jusqu'à un Y_n stabilisé ($Y_n \# Y_0$). Elle ne supprime pas la nécessité de recourir à cette itération.

Au contraire, si on l'utilise dans $\mathbb{R}^3$, on obtient, au prix d'une procédure plus lourde, mais en une seule fois une approximation de $\Pi_{(x, y, z)}^q$.

b/ - Utilisation de Cônes linéaires.

On a désigné par $\mathcal{C}(X_1, \dots, X_p)$ le cône convexe constitué des fonctions $f(X_1, \dots, X_p)$ où f est une fonction croissante de chacun de ses arguments.

On peut aussi considérer le sous-cône beaucoup plus simple constitué des combinaisons linéaires à coefficients positifs des

fonctions 1, -1 et $X_1, \dots, X_p$. Nous désignerons par $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_p)$ ce cône linéaire positif :

$$f \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_p) \Leftrightarrow f = C + \sum \lambda_i X_i \quad (\lambda_i \geq 0)$$

(C est une constante positive ou non).

Si p n'est pas très élevé, on peut former rapidement la projection de q sur le cône linéaire, soit

$$f_1 = \Pi_{\mathcal{L}(X_1, \dots, X_p)} q$$

La procédure est la suivante (il en existe peut-être de meilleures) :

Former les α_i minimisant $\|q - \bar{q} - \sum_{i=1}^p \alpha_i (X_i - \bar{X}_i)\|^2$

$$(\bar{f} = \frac{1}{V(E)} \int_E f(\xi) V(d\xi))$$

Si les α_i sont tous ≥ 0 , $\alpha_i = \lambda_i$ et

$$f_1 = \Pi_{\mathcal{L}} q = \bar{q} + \sum \alpha_i (X_i - \bar{X}_i)$$

Si les α_i ne sont pas tous nuls, résoudre les p-systèmes obtenus en supprimant soit X_1 , soit X_2 etc... Si l'un ou plusieurs donnent des α_i tous ≥ 0 , le meilleur d'entre eux est f_1 . Si aucun des systèmes ne donne des α_i tous positifs, résoudre les $p(p-1)/2$ systèmes obtenus en enlevant deux fonctions X_i , etc... Pour p de l'ordre de 4 ou 5 ceci doit être très rapide.

On améliore ensuite f_1 en projetant q sur $\mathcal{S}(f_1)$, problème à une seule dimension tout à fait simple : sur $\{f_1 = \lambda\}$, on pose

$$g_1 = \int_{\{f_1=\lambda\}} q . \text{ Cette fonction}$$

$$g_1 = \prod \mathcal{G}(f_1)^q$$

peut servir d'approximation initiale. $X_0 = g_1$ a une procédure d'itération du type ci-dessus.

On peut aussi penser à des itérations du type :

$$f_2 = \prod \mathcal{L}(x_1, \dots, x_p, g_1)^q$$

$$g_2 = \prod \mathcal{G}(f_2)^q$$

(mais il n'est pas sur que l'on obtienne des améliorations notables).

Ceci pourrait être essayé à deux dimensions (comme substitut éventuel à la programmation dynamique). On partirait de 4 fonctions : les 2 coordonnées x et y et les deux fonctions

$$x'_0 = \int_{\Gamma'(\xi)} q(\xi') V(d\xi')$$

$$x''_0 = - \int_{\Gamma(\xi)} q(\xi') V(d\xi')$$

D'où

$$f_1 = \prod \mathcal{L}(x, y, x'_0, x''_0)^q$$

$$g_1 = \prod \mathcal{G}(f_1)^q$$

etc...