Fontainebleau N-540

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 136

LE FLUX DE POLYGONES POISSONIENS, ET LEURS CARACTERES MARKOVIENS

-=-=-=-=-=-

G. MATHERON Novembre 1977

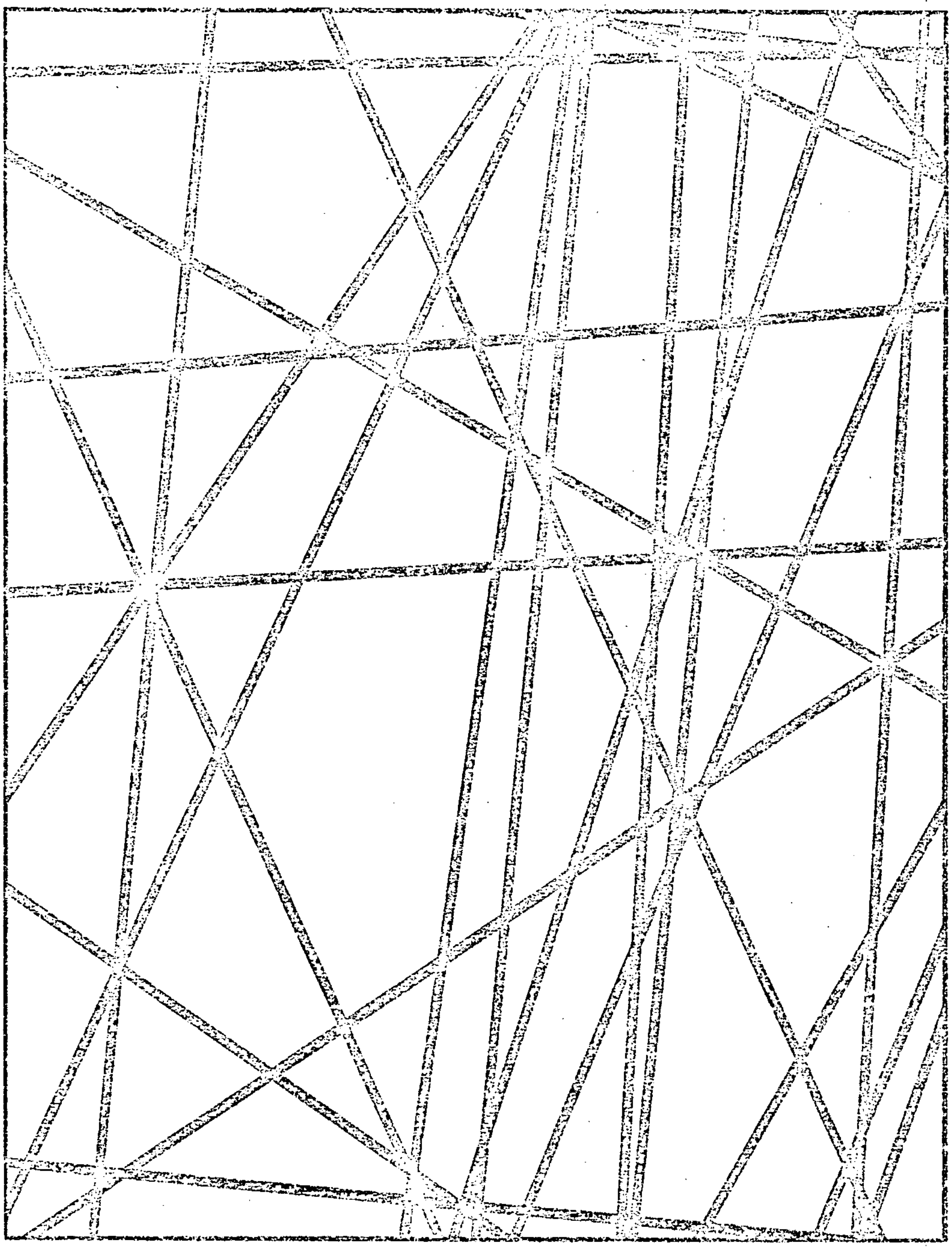


Figure 1 -- Les Polyèdres Poissoniens

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 136

LE FLUX DE POLYGONES POISSONIENS, ET LEURS CARACTERES MARKOVIENS

Table des Matières

NOTE GEOSTATISTIQUE N° 136

LE FLUX DE POLYGONES POISSONIENS, ET LEURS CARACTERES MARKOVIENS

-=-=-=-=-=-

0 - INTRODUCTION

Dans ce texte, je reprends l'étude des polygones poissoniens, à partir de la propriété d'invariance conditionnelle établie antérieurement. Je rappelle ce dont il s'agit : si A est un polygone poissonien (dans $\mathbb{R}^2$) et $A_\rho = A \ominus \rho\check{K}$ son érodé par un compact convexe K donné, alors :

~ du point de vue de la loi en volume, conditionnellement si $O \in A_\rho$, A_ρ est équivalent à A.

~ du point de vue de la loi en nombre, conditionnellement si $A_\rho \neq \emptyset$, A_ρ est encore équivalent à A.

Du point de vue de la loi en volume, le polygone convexe A contenant le point O est défini en loi par :

$$P(K \subset A) = \exp(-\psi(K)) \text{ , } K \text{ compact convexe contenant } 0, \text{ avec :}$$

$$\psi(K) = \int_{S_0} \varphi_K(u) \; G(du)$$

φ_K désignant la fonction d'appui du convexe K, et G une mesure ≥ 0 symetrique sur le cercle unité S_0. Du point de vue de la loi en nombre, $\exp\{-\psi(K)\}$ est la probabilité pour que l'érodé $A \ominus \check{K}$ ne soit pas vide.

Dans ce qui suit, j'adopte le point de vue de la loi en nombre, et je désigne par ϖ_n la probabilité, en nombre, pour que le polygone A ait n côtés.

Pour simplifier, nous supposons également que la mesure G, définissant la fonctionnelle ψ, est <u>sans atome</u> : de sorte que l'érodé $A_\rho = A \ominus \rho\check{K}$ est nécessairement un simplexe (un triangle) au moment où ρ atteint le module R de l'érosion ultime, et, en particulier, $A_R = \{o\}$. Le cas où G présente des atomes est un peu plus complexe, en ce sens que A_R peut être un segment de droite, et non plus seulement un point, et que, corrélativement, le polygone A_ρ, $\rho \downarrow R$ peut s'évanouir à l'état de trapèze (4 côtés dont 2 parallèles) et non plus seulement à l'état de triangle.

Si, maintenant, nous envisageons une érosion infinitésimale $\delta\rho$, on voit que, conditionnellement lorsque A a $n > 3$ côtés on doit avoir au 2ème ordre en $\delta\rho$:

$$P(A_{\delta\rho} \text{ a } n \text{ faces} | A \text{ a } n \text{ côtés}) = 1 - \psi_n \, \delta \, \rho$$

$$P(A_{\delta\rho} \text{ a } n-1 \text{ faces} | A \text{ a } n \text{ côtés}) = \psi_n \, \delta \, \rho$$

$$P(A_{\delta\rho} \text{ a moins de } n-1 \text{ faces} | A \text{ a } n \text{ côtés}) = 0$$

Si, d'autre part, on désigne par ψ la fonctionnelle définissant la loi de A $(P(A \ominus \rho\check{K} \neq \emptyset) = \exp(-\rho\ \psi(K)))$, <u>l'invariance conditionnelle</u> nous indique que l'effectif (le nombre moyen) de polygones à n côtés passe, dans cette érosion infinitésimale, de ϖ_n à $\varpi_n(1-\delta\rho\ \psi(K))$. En écrivant que la diminution de cet effectif est égale au nombre des polygones qui passent de n à n-1 côtés (si $n > 3$, ou qui s'évanouissent si $n = 3$) diminués du nombre des polygones qui passent de n+1 à n, on obtient l'équation :

$$\text{(0-1)} \qquad \varpi_n \, \psi(K) = \varpi_n \, \psi_n - \varpi_{n+1} \, \psi_{n+1}$$

qui exprime en somme le bilan de cette érosion infinitésimale. Notons que l'on a aussi :

$$\text{(0-2)} \qquad \psi(K) = \varpi_3 \, \psi_3$$

En effet, les polygones qui s'évanouissent (au nombre de $\psi(K)$) sont p.s. des triangles (puisque nous avons supposé la mesure G sans atomes). Or, en sommant (0-1) de $n = 3$ à N, on trouve :

$$\psi(K) \sum_{n=3}^{N} \varpi_n = \varpi_3 \, \psi_3 - \varpi_{N+1} \, \psi_{N+1}$$

En comparant avec (0-2), on en déduit que $\varpi_n\ \psi_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini :

(0-3) $$\lim_{n \to \infty} \varpi_n\ \psi_n = 0$$

Par suite, sommant (0-1) de n à l'infini, nous trouvons :

(0-4) $$\varpi_n\ \psi_n = \psi(K) \sum_{k=n}^{\infty} \varpi_k$$

En sens inverse, nous pouvons écrire :

$$\varpi_{n+1} = \varpi_n\ \frac{\psi_n - \psi(K)}{\psi_{n+1}}$$

(ce qui garantit $\psi_n \geq \psi(K)$; plus précisément, nous verrons plus loin que l'on a $\psi_n \downarrow \psi(K)$ pour $n \to \infty$), et, compte tenu de (0-2), il vient

(0-5) $$\varpi_n = \frac{\psi(K)}{\psi_n} \prod_{k=3}^{n-1} \frac{\psi_2 - \psi(K)}{\psi_k}$$

L'équation (0-4) montre que les constantes ψ_n, représentant les probabilités de transition de n à n-1, lors d'une érosion infinitisémale, sont déterminées par la seule loi de probabilité $\{\varpi_n\}$ du nombre des côtés du polygone. Inversement, (0-5) exprime que les probabilités ϖ_n se déduisent des constantes ψ_k.

Notons d'ailleurs que la relation (0-4) s'interprète par :

$$\frac{\psi_K}{\psi_n} = P(N = n | N \geq n)$$

où N désigne le nombre aléatoire des côtés de A. On a alors aussi

$\dfrac{\psi_k - \psi(K)}{\psi_k} = P(N > k | N \geq k)$, et la relation (0-5) admet l'interprétation triviale :

$$P(N = n) = \left(\prod_{k=3}^{n-1} P(N > k | N \geq k) \right) \times P(N = n | N \geq n)$$

Enfin, en sommant (0-4) de n à l'infini, on trouve, après interversion des deux signes de sommation :

$$(0\text{-}6) \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \varpi_k \, \phi_k = \phi(K) \sum_{k=n}^{\infty} (k+1-n)\, \varpi_k$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$E[\phi \mid N \geq n] = \phi_K \, E[N+1-n \mid N \geq n]$$

(ϕ désigne ici une V.A. dont l'espérance conditionnelle en N serait égale à ϕ_n). Pour $n = 3$, on trouve $E(\phi) = \phi_K \, E(N-2) = 2\, \phi_K$. Ainsi

$$(0\text{-}7) \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \varpi_n \, \phi_n = 2\, \phi_K$$

Dans ce qui suit, je me propose de dégager la signification géométrique de ces coefficients ϕ_n. Si l'on désigne par $K = \lim(A \ominus \check{A}_\rho)/\rho$ l'érosion infinitésimale du polygone poissonien par K, nous verrons que ϕ_n est l'espérance conditionnelle

$$\phi_n = E[\phi(K') \mid N = n]$$

et ce résultat nous permettra de mettre en évidence une propriété markovienne du flux de polygones défini par les érosions $\rho \to A_\rho$.

1 - PRELIMINAIRES GEOMETRIQUES.

Pour l'instant, A et K désignent des compacts convexes dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, on suppose A d'intérieur non vide et $K \subset A$, on pose pour $0 \leq \rho \leq 1$:

$$A_\rho = A \ominus \rho \check{K} \quad , \quad K_\rho = A \ominus \check{A}_\rho$$

$$K'_\rho = K(S_{A_\rho}) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}}{\varepsilon}$$

(S_{A_ρ} est le support de la mesure de surface associée à A_ρ). D'après les inclusions

$$K_o' \subset \frac{K_\rho}{\rho} \subset K_\rho' \subset K_1 \qquad (0 < \rho < 1)$$

on voit que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $K_1 = K_o'$

(ii) $K_\rho' = K_o'$ pour tout $\rho < 1$

(iii) $K_\rho = \rho K_o'$ pour tout $\rho \leq 1$

Notons ensuite que si les mesures de surface de A et A_{ρ_o} ont le même support, soit $S_A = S_{A_{\rho_o}}$, on a $K_{\rho_o}' = K_o'$ et donc $K_\rho = \rho K_o'$ pour tout $\rho \leq \rho_o$ (d'après les équivalences ci-dessus). La réciproque n'est pas vraie, en général, et $K_\rho' = K_o'$ n'entraine pas forcément $S_A = S_{A_\rho}$, sauf conditions supplémentaires sur K. Pour dégager de telles conditions, limitons-nous au cas où K est d'intérieur non vide. On sait que le support S_K de la mesure de surface de K est l'adhérence des directions extrémales pour K, soit :

$$S_K = \overline{E_x K}$$

avec $E_x K = \{$directions extrémales pour $K\}$. En ce qui concerne K_ρ', on trouve :

$$E_x K \cap S_{A_\rho} \subset E_x K_\rho' \subset (E_x K \cap S_{A_\rho}) \cup \partial S_{A_\rho}$$

puisque les directions extrémales de $K_\rho^o = K(S_{A_\rho})$ sont d'une part les directions extrémales de K contenues dans S_{A_ρ}, et d'autre part certaines directions de la frontière ∂S_{A_ρ}.

En particulier, si l'ensemble $E_x K$ des directions extrémales pour K est <u>fermé</u>, on a $E_x K = S_K$ et par suite :

$$S_K \cap S_{A_\rho} \subset E_x K_\rho' \subset (S_K \cap S_{A_\rho}) \cup \partial S_{A_\rho}$$

et, en passant aux adhérences :

$$S_K \cap S_{A_\rho} \subset S_{K'_\rho} \subset (S_K \cap S_{A_\rho}) \cup \partial S_{A_\rho}$$

Si, de plus, $S_K \supset S_A$, on a aussi $S_K \supset S_{A_\rho}$ pour tout ρ et les inclusions ci-dessus deviennent des égalités : $S_{K'_\rho} = S_{A_\rho}$. Dans ce cas, évidemment, $K'_\rho = K'_o$ équivaut à $S_{A_\rho} = S_A$. En résumé :

<u>Si $S_K \supset S_A$ et si de plus l'ensemble des directions extremales pour K est fermé, alors on a $K'_\rho = K'_o$ si et seulement si $S_{A_\rho} = S_A$.</u>

La boule unité de $\mathbb{R}^d$ vérifie toujours les conditions voulues pour que la proposition précédente soit applicable.

Dans le cas particulier de l'espace à $d = 2$ dimensions, on sait que l'ensemble des directions extrémales pour un compact convexe quelconque est toujours fermé (ce qui n'est plus vrai pour $d > 2$) :

<u>Dans l'espace à 2 dimensions, si $S_K \supset S_A$, $K'_\rho = K'_o$ équivaut à $S_{A_\rho} = S_A$.</u>

Interrogeons-nous, maintenant, sur la signification de la relation $S_{A_\rho} = S_A$.

Soit $\tilde{A} = (A_\rho \oplus \rho K)(S_{A_\rho})$ la solution <u>maximale</u> de l'équation $X \ominus \rho \check{K} = A_\rho$. Je dis que l'on a $S_{A_\rho} = S_A$ si et seulement si $A = \tilde{A}$.

En effet, on a $\tilde{A} \supset A$ par définition, et $S_{\tilde{A}} \subset S_{A_\rho}$, puisque $\tilde{A} = (A_\rho \oplus \rho K)(S_{A_\rho})$. Mais $A_\rho = \tilde{A} \ominus \rho \check{K}$ entraine aussi $S_{\tilde{A}} \supset S_{A_\rho}$. On a donc en fait

$$S_{\tilde{A}} = S_{A_\rho}$$

(ce résultat est intéressant par lui-même : pour tout compact convexe

C d'intérieur non vide, le support de la mesure de surface $(C \oplus K)(S_C)$ est S_C lui-même).

D'autre part, sur S_{A_ρ} , les fonctions d'appui de $\tilde{A}$ et de A_ρ vérifient :

$$\varphi_{\tilde{A}} = \varphi_{A_\rho} + \rho\, \varphi_K \quad , \quad \varphi_{A_\rho} = \varphi_A - \rho\, \varphi_K$$

On a donc $\varphi_{\tilde{A}} = \varphi_A$ sur $S_{\tilde{A}} = S_{A_\rho}$. On en déduit aussitôt :

$$\tilde{A} = A(S_{A_\rho})$$

Par suite, on a $\tilde{A} = A$ si et seulement si $S_A \subset S_{A_\rho}$, c'est-à-dire $S_A = S_{A_\rho}$, l'inclusion inverse étant toujours vraie.

A deux dimensions, on a toujours :

$$\tilde{A} = A_\rho \oplus \rho\, K'_\rho$$

et donc (pour d = 2) : $S_A = S_{A_\rho}$ si et seulement si $A = A_\rho \oplus \rho\, K'_\rho$.
En résumé :

Dans l'espace à 2 dimensions, et si $S_K \supset S_A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(j) $K'_\rho = K'_o$

(jj) $S_A = S_{A_\rho}$

(jjj) $A = A_\rho \oplus \rho\, K'_\rho$

Pour $d \geq 3$, les deux premières propriétés restent équivalentes, mais n'entrainent plus la troisième. C'èst essentuellement pour cette raison que, dans ce qui suit, nous ne considèrerons que le cas des polygones poissoniens dans $\mathbb{R}^2$ et non le cas général des polyèdres dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Si A, et par suite aussi A_ρ , sont des polygones, leurs nombres de côtés ne dépendent évidemment que des supports respectifs S_A et S_{A_ρ}. On a vu que (pourvu que $S_K \supset S_A$), le support $S_{K'_\rho}$ de la mesure périmétrique de K'_ρ est égal à S_{A_ρ}, et de même $S_{K'_\rho} = S_A$. Par suite, sous les mêmes conditions :

<u>Pour $0 \leq \rho < R$, le nombre de côtés du polygone A_ρ ne dépend que de K'_ρ (R désigne ici le module de l'érosion ultime,</u>

$$R = \mathrm{Sup}\{\rho \; : \; A \ominus \rho \check{K} \neq \emptyset\}$$

Lorsque ρ varie en croissant de 0 à R, et si $n(\rho)$ est le nombre de côtés des polygones A_ρ , K'_ρ et $n(\rho)$ varient par sauts. En particulier, K'_ρ reste constant tant que ρ reste inférieur à la valeur ρ_1 pour laquelle se produit le premier changement du nombre des côtés, et on a

$$A = A_\rho \oplus \rho\, K'_\rho \qquad \text{pour} \qquad 0 \leq \rho < \rho_1$$

2 - LA V.A. $\phi = \phi(K'_0)$.

Appliquons les résultats qui précèdent au cas où A est le polygone poissonien associé à la fonctionnelle ϕ définie par :

$$\text{(2-1)} \qquad \phi(K) = \int_0^{2\pi} G(d\theta)\; \varphi_K(\theta)$$

(G, mesure ≥ 0 symétrique sur le cercle unité). Si S_G est le support de la mesure G, on aura p.s. $S_G \supset S_A$. Choisissons donc un compact convexe K (par exemple le cercle unité) tel que $S_K \supset S_G$, de manière à ce que les équivalences (j) ci-dessus soient p.s. vérifiées, et aue A et K'_0 aient p.s. le même nombre de côtés.

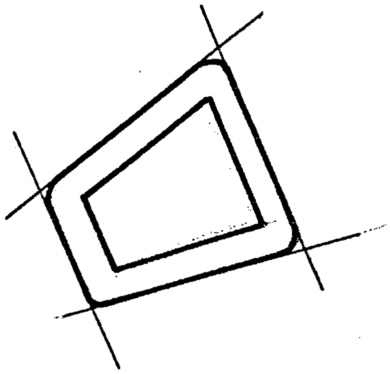
Nous allons considérer (du point de vue de la loi en nombre) le polygone A conditionnel en A_ρ . Du fait que A_ρ (et donc son volume $V(A_\rho)$) est fixé, A conditionné (en nombre) par A_ρ , lorsque $A_\rho \neq \emptyset$, est équivalent à A conditionné pour la loi en volume par A_ρ et $\{0 \in A_\rho\}$.

Notons que $A \ominus \rho \check{K} = A_\rho$ donné si et seulement si :

$$A_\rho \oplus \rho K \subset A \subset A_\rho \oplus \rho K'_\rho$$

et les nombres de côtés N(A) et $N(A_\rho)$ sont égaux si et seulement si $K'_\rho = K'_o$ ou encore si et seulement si $A = A_\rho \oplus \rho K'_\rho$.

Du point de vue de la loi en volume, conditionnellement en A_ρ donné et $0 \in A_\rho$, on aura $A = A_\rho \oplus \rho K'_\rho$ si et seulement si aucune droite du réseau, hormis celles qui constituent les côtés de $A_\rho \oplus \rho K'_\rho$, ne rencontre $A_\rho \oplus \rho K'_o$. Comme aucune de ces droites ne rencontre $A_\rho \oplus \rho K$, par hypothèse, cela a lieu avec la probabilité :



$$\exp\{\psi(A_\rho \oplus \rho K) - \psi(A_\rho \oplus \rho K'_\rho) =$$

$$= \exp\{\rho\, \psi(K) - \rho\, \psi(K'_\rho)\}$$

Telle est donc la probabilité conditionnelle pour que A et A_ρ aient le même nombre de côtés. Il en résulte que l'on a également pour la <u>loi en nombre</u> :

$$\text{(2-2)} \qquad P(N(A) = N(A_\rho) | A_\rho) = e^{-\rho[\psi(K'_\rho) - \psi(K)]}$$

Bien que nous ayons conditionné en A_ρ, cette probabilité ne dépend que de K'_ρ. Compte tenu de l'équivalence p.s. entre N(A) = = $N(A_\rho)$ et $K'_\rho = K'_o$, nous pouvons aussi écrire :

$$\text{(2-3)} \qquad P(K'_\rho = K'_o | K'_\rho) = e^{-\rho[\psi(K'_\rho) - \psi(K)]}$$

En terme d'espérance conditionnelle, nous pouvons écrire ceci sous la forme

$$E[1_{K'_\rho = K'_o} | K'_\rho] = e^{\rho\psi(K) - \rho\psi(K'_\rho)}$$

Donc, pour toute fonction f mesurable sur l'espace des compacts convexes, et telle que $f(\emptyset) = 0$, nous aurons :

(2-4) $$E[1_{K'_\rho = K'_o}\, f(K'_\rho)] = e^{\rho\psi(K)}\, E[e^{-\rho\psi(K'_\rho)}\, f(K'_\rho)]$$

Le premier membre de (2-4) peut, évidemment, être remplacé par $E[1_{K'_\rho = K'_o}\, f(K'_o)]$. En ce qui concerne le second membre, la propriété d'invariance conditionnelle nous donne :

$$E[e^{-\rho\psi(K'_\rho)}\, f(K'_\rho)] = e^{-\rho\psi(K)}\, E[e^{-\rho\psi(K'_o)}\, f(K'_o)]$$

En substituant dans (2-4), il vient donc :

$$E[1_{K'_\rho = K'_o}\, f(K'_o)] = E[e^{-\rho\psi(K'_o)}\, f(K'_o)]$$

Par suite, la probabilité conditionnelle de $K'_\rho = K'_o$ (i.e. de $N(A) = N(A_\rho)$)prise cette fois en K'_o (et non plus en K'_ρ) est :

(2-5) $$P(K'_\rho = K'_o | K'_o) = e^{-\rho\psi(K'_o)}$$

Maintenant, si nous nous souvenons que le nombre $N = N(A)$ des côtés du polygone A ne dépend que de K'_o (en fait : $N(A) = N(K'_o)$). nous pouvons prendre l'espérance conditionnelle en $N = n$ de la relation ci-dessus : il vient ainsi

(2-6) $$P(N(A) = N(A_\rho) | N = n) = E_n\left(e^{-\rho\psi(K'_o)}\right)$$

(avec la notation évidente $E_n(X) = E(X|N = n)$, espérance conditionnelle en N pour la loi en nombre). On en déduit la signification des coefficients ϕ_n définis plus haut :

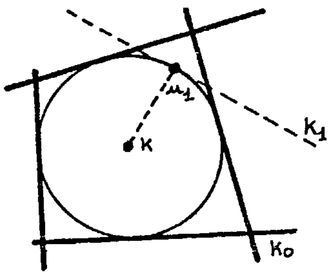
(2-7) $$\phi_n = E_n(\psi(K'_o)]$$

3 - LE PROCESSUS INVERSE.

D'après ce qui précède, pour $\rho > 0$ donné et $t \in (0,\rho)$, le processus défini en posant $K_t = K'_{\rho-t}$ est markovien et homogène. C'est un processus discontinu. Partant de K_o ($= K'_\rho$) donné, on a $K_t = K_o$ jusqu'à un temps T aléatoire de loi exponentielle et d'espérance $1/[\psi(K_o)-\psi(K)]$, soit

$$(3\text{-}1) \qquad T = \frac{S}{\psi(K_t)-\psi(K)} \quad , \quad S \text{ de loi exponentielle réduite.}$$

A l'instant T se produit un premier changement d'état conduisant à un état K_1 selon la loi $T_{K_o}(d\ K_1)$ que nous allons expliciter. Après quoi, on a à nouveau $K_t = K_1^o$ jusqu'à l'instant $T + T'$ avec $T' = S'/[\psi(K_1)-\psi(K)]$ etc...



L'état K_1 succédant à K_o est défini par le point u_1 du cercle unité tel que

$$(3\text{-}2) \qquad S_{K_1} = S_{K_o} \cup \{u_1\}$$

(puisque $K_1 = K(S_{K_1})$ est défini par le support S_{K_1} de sa mesure de surface, et que S_{K_1} se déduit de S_{K_o} par adjonction de la direction u_1 orthogonale à la droite du réseau poissonien que, dans sa croissance, $A_{\rho-t}$ vient juste de heurter en $t = T$. Et la loi de cette direction u_1 est :

$$\frac{\varphi_{K_o}(u_1) - \varphi_K(u_1)}{\psi(K_o) - \psi(K)} \ G(d\ u_1)$$

Compte tenu de (3-2), nous pouvons donc écrire, avec un léger abus de notation :

$$(3\text{-}3) \qquad T_{K_o}(d\ K_1) = \frac{\varphi_{K_o}(u_1) - \varphi_K(u_1)}{\psi(K_o) - \psi(K)} \ G(d\ u_1)$$

Le processus markovien homogène K_t est ainsi défini par les relations (3-3) et (3-1). Comme le $\rho > 0$ (tel que $K_o = K'_\rho$) a été choisi arbitraire, l'intervalle de définition $(0,\rho)$ du processus K_t peut être pris aussi grand que l'on veut. Autrement dit, on peut aussi bien le prolonger sur la demi-droite $(0,\infty)$. Le générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ de ce processus est défini par :

$$(3\text{-}4)\qquad (\mathcal{A}f)(K_o) = -\,[\psi(K_o)-\psi(K)]\ f(K_o) + [\psi(K_o)-\psi(K)]\int T_{K_o}(dK)f(K)$$

Il y a un rapport étroit entre ce processus K_t et le polygone poissonien A (ou $K_o' = K(S_A)$). Prenons, en effet, comme origine des temps $t = 0$ l'érosion ultime R (aléatoire) et $K_o = \lim_{\rho \downarrow R} K_\rho' = K_-'(R)$ (dérivée à gauche). La loi de $K_R' = K_o$ est :

$$(3\text{-}5)\qquad \frac{\psi(K_o)}{\psi_3}\ \Pi_3(d\,K_o)$$

c'est-à-dire la loi de K_o' conditionnelle en $N(A) = 3$ et pondérée par $\psi(K_o')$. On a posé $\psi_3 = E_3\ \psi(K_o') = \int \Pi_3\ (d\ K_o')\ \psi(K_o')$. Plus généralement, il résulte clairement de (2-5) que la loi de K_ρ' prise conditionnellement pour $N(A_\rho) = n$ et pour la valeur de ρ correspondant au passage de n à $n-1$ coté est :

$$\frac{\psi(K')\ \Pi_n(dK')}{\psi_n}$$

Munissons donc le processus K_t défini en (3-4) de la <u>loi initiale</u> (3-5). Alors, si nous introduisons <u>un temps d'arrêt T</u>, <u>indépendant du processus K_t et admettant la même loi exponentielle</u> que l'érosion ultime R , soit :

$$P(T \geq t) = e^{-\psi(K)t}$$

<u>K_T sera équivalent à K_o'</u> , <u>et A lui-même sera équivalent à l'intégrale de K_t</u> entre 0 et T, soit

$$(3\text{-}6)\qquad A \equiv \int_0^T K_t\ dt$$

Plus généralement, le processus A_ρ , $0 \leq \rho < \infty$ sera équivalent au processus défini par :

$$A'_\rho = \begin{cases} \emptyset \text{ si } \rho > T \\ \int_0^{T-\rho} K_t \, dt \quad \text{si } \rho \leq T \end{cases}$$

En particulier K'_ρ <u>sera équivalent</u> à $K_{T-\rho}$, <u>et constituera donc lui-même un processus markovien</u>.

Cette conclusion n'est pas banale. Lorsque $A = A_o$ est fixé, A_ρ est déterminé, puisque $A_\rho = A \ominus \rho \check{K}$, et donc aussi K'_ρ . Mais il n'est nullement évident a priori que K'_ρ possède la propriété markovienne.

Pour établir ces différents points, nous allons être amenés à expliciter la loi (en nombre) du polygone poissonien A.

<u>4 - FORME EXPLICITE DE LA LOI EN NOMBRE DU POLYGONE POISSONIEN</u>.

Tout compact convexe A de $\mathbb{R}^2$ peut être mis sous la forme

$$A = A_R \oplus \int_0^R K'_\rho \, d\rho$$

Si A est le polygone poissonien associé à une mesure $G \geq 0$ <u>sans atome</u> sur le cercle unité, l'érodé ultime est p.s. un point (dans le cas général, ce serait un segment de droite), et donc, à une translation près :

$$A = \int_0^R K'_\rho \, d\rho$$

Plaçons-nous conditionnellement en $N(A) = n$ fixé. Lorsque ρ varie de 0 à R, K'_ρ prend n-2 valeurs successives que nous désignerons par K_n , K_{n-1} ,...K_3 (K_p est la valeur de K'_ρ pour les valeurs de ρ telles que $N(A_\rho) = p$). Par suite, on peut toujours décomposer A de la manière suivante (à une translation près) :

(4-1) $$A = \ell_3 K_3 \oplus \ell_4 K_4 \oplus \dots \oplus \ell_n K_n$$

$K_p = K(S_{K_p})$ est le polygone à p côtés circonscrit à K défini par $S_{K_p} = \{u_1,\dots,u_p\}$. La suite S_{K_3}, $S_{K_4}\dots$ S_{K_n} des supports est croissante ($S_{K_{p+1}} = S_{K_p} \cup \{u_{p+1}\}$), de sorte la donnée du n-tuple <u>ordonné</u> $\{u_1, u_2, u_3, u_4\dots u_n\}$ suffit à définir $K_3,\dots K_n$. Les trois premiers u_i, qui déterminent K_3 , peuvent être permutés arbitrairement, mais à partir du rang 4 , l'ordre intervient de manière explicite. Les 3 premiers points, u_1, u_2 et u_3 ne peuvent pas être choisis tout-à-fait arbitrairement, puisque $K_3 = K(u_1, u_2, u_3)$ doit être un triangle : il faut que 0 appartienne à l'enveloppe convexe de $\{u_1,u_2,u_3\}$ ou encore, si l'on désigne par θ_i les angles associés à ces vecteurs unités, supposés rangés dans l'ordre $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq 2\pi$, on doit avoir

(4-2) $$\sin(\theta_2-\theta_1) \geq 0 \ , \ \sin(\theta_3-\theta_2) \geq 0 \ , \ \sin(\theta_1-\theta_3) \geq 0$$

Par contre, les points $u_4,\dots u_n$ peuvent être absolument quelconques sur le cercle unité.

D'après (4-1), nous connaitrons la loi de A si nous déterminons la loi simultanée des n-2 V.A ≥ 0 $\ell_3 ,\dots \ell_n$ et des (n-2) polygones $K_3 \dots K_n$ (ou des n-2 V.A $\ell_3\dots \ell_n$ et des n points u_1, $u_2 \dots u_n$ du cercle unité).

Cherchons d'abord la <u>loi en volume</u>. La relation (4-1) ne définit A qu'à une translation h près. Posons donc :

$$A_0 = \ell_3 K_3 \oplus \dots \oplus \ell_n K_n$$

$$A = A_0 \oplus h$$

Du point de vue de la loi en volume, on doit avoir $0 \in A$, c'est-à-dire $h \in \check{A}_0$: le domaine de variation de la translation h, lorsque A_0 est donnée, a une extension $\check{A}_0$ de surface $V(A_0) = V(A)$.

Posons

$$\rho_i = \varphi_A(u_i)$$

En remarquant $\varphi_{K_i}(u_j) = \varphi_K(u_j)$ pour $j \leq i$ (puisque $S_{K_i} = \{u_1, u_2, \ldots \ldots u_i\}$) et en désignant par h_1 et h_2 les coordonnées de h, on a donc :

$$(4\text{-}3)\quad \left[\begin{array}{l}
\rho_1 = \ell_3\, \varphi_K(u_1) + \ldots \qquad + \ell_n\, \varphi_K(u_1) + h_1 \cos u_1 + h_2 \sin u_1 \\
\rho_2 = \ell_3\, \varphi_n(u_2) + \ldots \qquad + \ell_n\, \varphi_K(u_2) + h_1 \cos u_2 + h_2 \sin u_2 \\
\rho_3 = \ell_3\, \varphi_K(u_3) + \ldots \qquad + \ell_n\, \varphi_K(u_3) + h_1 \cos u_3 + h_2 \sin u_3 \\
\rho_4 = \ell_3\, \varphi_{K_3}(u_4) + \ell_4\, \varphi_K(u_4) + \ldots + \ell_n\, \varphi_K(u_4) + h_1 \cos u_4 + \\
\qquad\qquad + h_2 \sin u_4 \\
\text{- -} \\
\rho_n = \ell_3\, \varphi_{K_3}(u_n) + \ell_4\, \varphi_{K_4}(u_n) + \ldots + \ell_{n-1}\, \varphi_{K_{n-1}}(u_n) + \ell_n\, \varphi_K(u_n)
\end{array}\right.$$

$$+ h_1 \cos u_n + h_2 \sin u_n$$

Nous désignerons par $\Delta(u_1, \ldots u_n)$ le déterminant de ce système :

$$(4\text{-}4)\qquad \Delta(u_1, \ldots u_n) = \frac{D(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_n)}{D(\ell_3 \ldots \ell_n,\ h_1, h_2)}$$

La loi, <u>en volume</u>, de A est définie par l'élément différentiel :

$$(4\text{-}5)\qquad \frac{1}{6}\; e^{-\psi(A)}\, d\rho_1 \ldots d\rho_n\, G(du_1) \ldots G(du_n)$$

$$= \frac{1}{6}\; e^{-\psi(A)}\, d\,\ell_3 \ldots d\,\ell_n\, dh_1\, dh_2\, |\, \Delta(u_1 \ldots u_n)\, |\, G(du_1) \ldots G(du_n)$$

Pour avoir A à une translation près seulement, nous devons intégrer (4-5) en $h = (h_1, h_2)$ dans le domaine $\check{A}_0$ dont la surface est $V(A_0) = V(A)$, ce qui donne :

$$(4\text{-}6)\qquad \frac{1}{6}\; V(A)\; e^{-\psi(A)}\, d\ell_3 \ldots d\ell_n\; |\, \Delta(u_1, \ldots u_n)\, |\; G(du_1) \ldots G(du_n)$$

(le facteur 1/6 = 1/3! provient du fait que u_1, u_2, u_3 peuvent être permutés arbitrairement, contrairement aux $u_4, \ldots u_n$). Si nous désignons par EV l'espérance de la surface de A pour la loi en nombre, nous obtenons l'élément différentiel associé à la loi <u>en nombre</u> en multipliant (4-6) par $EV/V(A)$. Compte tenu de $\psi(A) = \ell_3\ \psi(K_3) + \ldots + \ell_n\ \psi(K_n)$, nous trouvons donc l'expression explicite suivante de la <u>loi en nombre</u> (conditionnelle en $N(A) = n$) :

$$(4\text{-}7) \quad \varpi_n\ \Pi_n(dA) = \frac{EV}{6}\ e^{-\ell_3\ \psi(K_3)\ldots\ell_n\ \psi(K_n)}\ |\Delta(u_1\ldots u_n)|\, G(du_1)\ldots$$
$$\ldots\ G(du_n)\ d\,\ell_3\ldots d\,\ell_n$$

De cette expression résultent des conséquences remarquables.

<u>Loi de A à $N = n$ et $K_3,\ldots K_n$ fixés.</u>

D'après (4-7), la loi à $N = n$ et $K_3,\ldots K_n$ (i.e. $u_1,\ldots u_n$) fixés admet la densité :

$$\psi(K_3)\ldots\psi(K_n)\ e^{-\ell_3\ \psi(K_3)\ldots\ell_n\ \psi(K_n)}\ d\,\ell_3\ldots d\,\ell_n$$

Donc : $\ell_3,\ldots\ell_n$ sont indépendantes et obéissent à des lois exponentielles. Plus précisément, posons :

$$\ell_p = \frac{S_p}{\psi(K_p)} \qquad (p = 3,\ 4,\ldots n)$$

Alors les S_p sont des V.A. indépendantes de loi exponentielle réduite. Comme la loi des S_p ne dépend pas des K_p fixés, les S_p sont donc elles-mêmes indépendantes des K_p.

Ce résultat mérite le nom de théorème.

<u>THEOREME</u> - <u>A $N(A) = n$ fixé, le polygone poissonien A (du point de vue de la loi en nombre) est de la forme</u> :

$$(4\text{-}8) \qquad A = \frac{S_3}{\psi(K_3)}\ K_3 \oplus \ldots \oplus \frac{S_n}{\psi(K_n)}\ K_n$$

<u>$S_3,\ldots S_n$ étant n-2 V.A. exponentielles réduites indépendantes entre elles et indépendantes de $K_3\ldots K_n$.</u>

D'après (4-8), on a

$$\psi(A) = S_3 + \ldots + S_n$$

On retrouve donc, comme corollaire immédiat, un résultat bien connu : à $N = n$ fixé, $\psi(A)$ est une V.A. de loi $(\Gamma, n-2)$. Nous verrons ultérieurement comment utiliser la relation (4-8) pour déterminer la loi du volume.

Loi de $K_3 \ldots K_n$.

Pour achever de déterminer la loi de A à $N = n$ fixé, il faut maintenant expliciter la loi de $K_3, \ldots K_n$, ou, ce qui revient au même, celle de $(u_1, \ldots u_n)$. Après intégration en $\ell_3, \ldots \ell_n$, l'expression (4-7) nous donne cette loi sous la forme :

$$(4\text{-}9) \quad \varpi_n \, \Pi_n(dK_3, \ldots dK_n) = \frac{EV}{6} \; \frac{|\Delta(u_1, \ldots u_n)|}{\psi(K_3) \ldots \psi(K_n)} \; G(du_1) \ldots G(du_n)$$

Le domaine de variation de $(u_1, \ldots u_n)$ sur le cercle unité à la puissance n est limité par la seule condition que 0 appartient à l'enveloppe convexe (ou triangle) de $\{u_1 \; u_2 \; u_3\}$. On peut aussi remplacer le facteur 1/6 par 1/3 et imposer, de plus, à u_2 d'être situé entre u_1 et u_3 (lorsque l'on va de u_1 à u_3 dans le sens direct). Le domaine de variation est alors défini par :

$$(4\text{-}10) \qquad \sin(u_2 - u_1) \geq 0 \; , \; \sin(u_3 - u_2) \geq 0 \; , \; \sin(u_1 - u_3) \geq 0$$

Pour $n = 3$, on trouve

$$\Delta(u_1 \; u_2 \; u_3) = \varphi_K(u_1) \sin(u_3 - u_2) + \varphi_K(u_2) \sin(u_1 - u_3) + \varphi_K(u_3) \sin(u_2 - u_1)$$

et donc

$$\varpi_3 \, \psi(K_3) \, \Pi_3(dK_3) = \frac{EV}{3} \, \Delta(u_1 \; u_2 \; u_3) \, G(du_1) \, G(du_2) \, G(du_3)$$

Un calcul relativement facile montre que l'intégrale du second membre dans le domaine $\mathcal{D}$ défini par les conditions (4-10) est égale à $\psi(K)$. Nous retrouvons donc la relation

$$\varpi_3 \ \psi_3 = \psi(K)$$

que nous avions obtenue plus haut par un raisonnement direct. De même, nous trouverons :

$$(4\text{-}11) \qquad \varpi_3 = \frac{EV}{3} \int_{\mathcal{D}} \frac{\Delta(u_1 \ u_2 \ u_3)}{\psi(K_3)} \quad G(du_1) \ G(du_2) \ G(du_3)$$

Cette expression se prête à un calcul numérique effectif, bien que le domaine $\mathcal{D}$ défini par (4-10) ne soit pas très simple.

Pour $\underline{n > 3}$, un examen attentif de la structure du système (4-3) montre que l'on a :

$$(4\text{-}12) \quad |\Delta(u_1,\dots u_n)| = |\Delta(u_1 \ u_2 \ u_3)| [\varphi_{K_3}(u_4) - \varphi_K(u_4)] \dots$$
$$\dots [\varphi_{K_{n-1}}(u_n) - \varphi_K(u_n)]$$

En reportant cette expression dans (4-9), on obtient donc :

$$\varpi_n \ \Pi_n(dK_3,\dots dK_n) = \varpi_3 \Pi_3(dK_3) (\varphi_{K_3}(u_4) - \varphi_K(u_4)] \times \dots$$
$$\dots [\varphi_{K_{n-1}}(u_n) - \varphi_K(u_n)] \times \frac{G(du_n)\dots G(du_n)}{\psi(K_n)\dots\psi(K_n)}$$

Si nous rapprochons ce résultat de l'expression (3-3) de la probabilité de transition $T_K(dK')$ associée au processus inverse, nous trouvons finalement :

$$(4\text{-}13) \left\{ \begin{array}{l} \varpi_n \ \Pi_n(dK_3\dots dK_n) = \dfrac{\psi(K_3) \ \Pi_3(dK_3)}{\psi_3} \ \dfrac{\psi(K_3)-\psi(K)}{\psi(K_3)} \quad T_{K_3}(dK_4)\dots \\ \qquad \dots \dfrac{\psi(K_{n-1})-\psi(K)}{\psi(K_{n-1})} \quad T_{K_{n-1}}(dK_n) \ \dfrac{\psi(K)}{\psi(K_n)} \end{array} \right.$$

(on a aussi utilisé la relation $\varpi_3 = \psi(K)/\psi_3$).

5 - INTERPRETATION.

Or, revenons au processus inverse K_t défini en (3-4) arrêté au temps aléatoire T de loi exponentielle $\psi(K) \exp(-t\ \psi(K))$. Désignons par T_3, T_4... les instants (aléatoires) des changements d'état successifs de K_t , et prenons comme loi initiale la loi $(\psi(K_3)/\psi_3)$ $\Pi_3(dK_3)$. Alors, la probabilité pour que le temps d'arrêt T tombe entre T_{n-1} et T_n (donc pour que K_T ait n côtés) et que l'on ait $K_t = K_3$ de 0 à T_3 , $K_t = K_4$ de T_3 à T_4 ... $K_t = K_n$ de T_{n-1} à T est donné, justement, par le second membre de (4-12). De plus, à K_3... ...K_n fixés, les intervalles de temps successifs séparant les changements d'états sont de la forme :

$$T_3 = \frac{S_3}{\psi(K_3)} \quad , \quad T_4 - T_3 = \frac{S_4}{\psi(K_n)} \quad \dots \quad T - T_{n-1} = \frac{S_n}{\psi(K_n)}$$

avec S_3,...S_n indépendantes et de même loi exponentielle réduite. On a donc les équivalences en loi :

$$T \equiv R$$

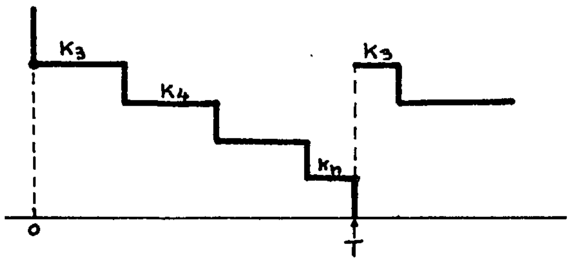
$$K_{T-\rho} \equiv K'_\rho \qquad (0 \leq \rho \leq T \equiv R)$$

qui permettent d'identifier le processus inverse K_t au processus K'_{R-t} . En particulier, A lui-même vérifie l'équivalence annoncée :

$$(3\text{-}6) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &\equiv \int_0^T K_t \, dt \\ A_\rho &\equiv \int_0^{T-\rho} K_t \, dt \end{aligned} \right.$$

Les processus stationnaires directs et inverses.

Considérons le processus inverse K_t muni de sa loi initiale $(\psi(K_3)/\psi_3)$ $\Pi_3(dK_3)$ et de son temps d'arrêt T. Décrit en sens inverse, de T vers 0, nous obtenons le processus $K'_\rho = K_{T-\rho}$ associé à l'érosion de A. Convenons de prolonger le processus K_t au-delà du temps



d'arrêt T, en le faisant repartir à 0 à partir de la nouvelle origine des temps T : K_{t+T} identique en loi à K_t (muni de T) et indépendant de lui. Et ainsi à l'infini.

Désignons par $\tilde{K}_t$ le processus ainsi prolongé à l'infini. C'est un processus de Markov, caractérisé par la loi "infinitésimale" suivante : si $\tilde{K}_t$ est donné, on a

$$\tilde{K}_{t+\delta t} = \tilde{K}_t \quad \text{avec la probabilité} \quad 1 - \psi(K_t)\delta t$$

$\tilde{K}_{t+\delta t}$ admet la loi $T_{\tilde{K}_t}(dK)$ avec la probabilité $(\psi(K_t)-\psi(K))\delta t$ ou la loi initiale $\frac{\psi(K_3)}{\psi_3}\ \Pi_3(dK_3)$ avec la probabilité $\psi(K)\delta t$. Autrement dit, le générateur infinitésimal de $\tilde{K}_t$ est défini par

$$\text{(5-1)} \quad \tilde{\mathcal{A}} f(K_o) = - \psi(K_o)\ f(K_o) + (\psi(K_o)-\psi(K)) \int T_{K_o}(dK')\ f(K')$$
$$+ \frac{\psi(K)}{\psi_3} \int \psi(K')\ f(K')\ \Pi_3\ (dK')$$

Ce processus est stationnaire pour la loi initiale :

$$\text{(5-2)} \qquad \Pi(d\ K_o) = \sum_{n\geq 3} \varpi_n\ \Pi_n(d\ K_o)$$

identique à la loi de l'érodé infinitésimal K_o' du polygone poissonien (ou encore à la loi de K_T, i.e. celle de K_t immédiatement avant le temps d'arrêt T). Pour le voir, remarquons que, pour $n > 3$, (4-12) donne :

$$\varpi_n\ \Pi_n(dK_3,\ldots dK_n) = \varpi_{n-1}\ \Pi_{n-1}(dK_3,\ldots dK_n)[\psi(K_{n-1})-\psi(K)]\ T_{K_{n-1}}(dK_n)\ \frac{1}{\psi(K_n)}$$

d'où résulte (pour $n > 3$)

(5-3)
$$\varpi_n \int \psi(K_n)\, f(K_n)\, \Pi_n(d\, K_n) =$$
$$= \varpi_{n-1} \int \Pi_{n-1}(d\, K_{n-1})\, [\psi(K_{n-1})-\psi(K)] \int T_{K_{n-1}}(d\, K_n)\, f(K_n)$$

Or, si nous écrivons

$$\int \Pi(d\, K_o)\, \tilde{\mathcal{A}} f(K_o) = - \sum_{n\geq 3} \varpi_n \int \Pi_n(d\, K_o)\, \psi(K_o)\, f(K_o)$$
$$+ \frac{\psi(K)}{\psi_3} \int \psi(K')\, f(K')\, \Pi_3(d\, K_o)$$
$$+ \sum_{n\geq 3} \varpi_n \int [\psi(K_o)-\psi(K')]\, \Pi_n(dK_o) \int \psi(K')\, f(K')\, T_{K_o}(dK')$$

il résulte de (5-3) et de $\varpi_3 = \psi(K)/\psi_3$ que l'on a bien :

$$\int \Pi(d\, K_o)\, \tilde{\mathcal{A}} f(K_o) = 0$$

Donc la loi stationnaire de processus $\tilde{K}_t$ est bien identique à la loi Π de K_o' .

Désignons maintenant par K_t' le processus déduit du processus stationnaire $\tilde{K}_t$ par <u>renversement du temps</u> ($K_t' = \tilde{K}_{-t}$ par exemple). En un point t quelconque, par exemple t = 0, la loi stationnaire de $K_t' = K_o'$ est $\Pi(d\, K_o')$. L'évolution de K_t' de t = 0 jusqu'au temps d'arrêt R de loi exponentielle $\psi(K) \exp(-r\, \psi(K))$ est la même que celle des érodés K_ρ' d'un polygone poissonien A. En $\rho = R$ se produit un retour à zéro (c'est-à-dire un retour à l'état initial de loi $\Pi(d\, K')$, indépendemment de l'évolution antérieure.

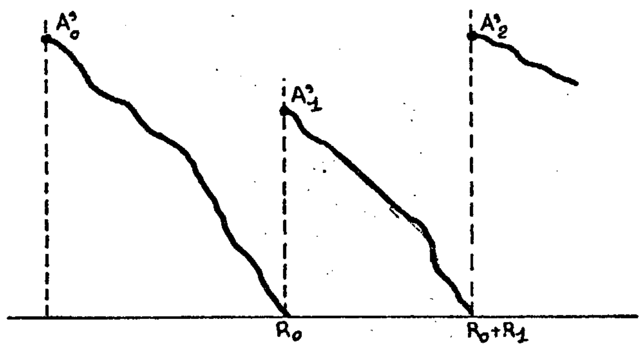
De la même manière, nous pouvons stationnariser le processus A_ρ lui-même. Pour cela, considérons d'abord le processus inverse (correspondant à ρ décroissant).

Au processus (markovien) K_t, nous associons son intégrale

$$A_t = \int_0^t K_\tau\, d\tau$$

qui est, évidemment, encore un processus markovien (car K_t se déduit de A_t par dérivation). Comme ci-dessus, nous arrêtons A_t au temps d'arrêt T, et le prolongeons au-delà de T en le faisant repartir, après chaque temps d'arrêt, selon la même loi initiale ($A_o = \{o\}$, K'_o de loi $\Pi(d\ K'_o)$). Nous obtenons ainsi le processus stationnaire $\tilde{A}_t$, dont la loi stationnaire $\Pi(dA)$ est celle des polygones poissoniens. (C'est également la loi de $\tilde{A}_t$ immédiatement avant un temps d'arrêt).

Par renversement du temps, nous déduisons de $\tilde{A}_t$ un processus $A'_t = \tilde{A}_{-t}$ qui décrit l'érosion elle-même : en termes imagés, A'_t représente le processus obtenu en érodant les uns après les autres



les différents polygones poissoniens. Partant d'un premier polygone A'_o , nous avons $A'_t = A'_o \ominus t\check{K}$ jusqu'à $t = R_o$, érosion ultime de A'_o . En $t = R_o$, nous repartons avec un nouveau polygone indépendant du premier, et ainsi de suite....

<u>REMARQUE</u>. Le fait que la même loi $\Pi(dA)$ régit A'_t en un instant t quelconque, mais donné, ou, aussi bien, immédiatement après un temps d'arrêt R est une variante du paradoxe bien connu dans le cas du processus poissonien. Immédiatement après un temps d'arrêt, A' passe par un maximum, puisqu'il ne peut que décroître ensuite jusqu'au temps d'arrêt suivant. On s'attendrait donc à ce que A', après un temps d'arrêt, soit plus grand, en moyenne, que le polygone A'_t observé en un instant donné. Mais il n'en est rien, car le polygone observé à l'instant t est sélectionné suivant une loi pondérée par la longueur R, tandis que le polygone observé après un temps d'arrêt ressort d'une loi en nombre.

$R = R(A)$ a une loi exponentielle d'espérance $1/\psi(K)$. Si nous choisissons A selon la loi $\psi(K)\ R(A)\ \Pi(dA)$ pondérée par R, et choisissons ρ selon une loi uniforme sur (O,R), nous obtenons un érodé $A_{\underline{\rho}}$ dont la loi est définie par :

$$E[f(A_{\underline{\rho}})] = \psi(K)\ E \int 1_{0\leq\rho\leq R}\ f(A_\rho)\ d\rho$$

Or, d'après l'invariance conditionnelle :

$$E(1_{0\leq\rho\leq R}\ f(A_\rho)) = e^{-\rho\ \psi(K)}\ E[f(A)]$$

En intégrant, il vient donc :

$$E[f(A_{\underline{\rho}})] = E(f(A))$$

Ainsi, l'équivalence en loi du processus A' observé immédiatement après un temps d'arrêt ou en un instant t qualconque est une conséquence directe de l'invariance conditionnelle.

6 - CALCUL DES ϖ_n , ET PASSAGE A LA LOI EN VOLUME.

Pour calculer ϖ_n (probabilité pour que A ait n côtés) nous devons intégrer (4-12), ce qui est (en principe) possible puisque nous connaissons les expressions explicites de Π_3 et de $T_{K'}(dK'')$. La relation (5-3) appliquée avec f = 1 nous donne :

$$\varpi_n\ \psi_n = \varpi_{n-1}(\psi_{n-1} - \psi(K))$$

relation de récurrence déjà rencontrée. Avec f = $1/\psi$ nous obtenons une relation nouvelle, non évidente :

$$\varpi_n = \varpi_{n-1}\ E_n\ \frac{\psi(K_{n-1})-\psi(K)}{\psi(K_n)}$$

En comparant ces deux relations, il vient donc :

$$\frac{\psi_{n-1} - \psi(K)}{\psi_n} = E_n\ \frac{\psi(K_{n-1})-\psi(K)}{\psi(K_n)}$$

De même, la relation (0-5) nous dit :

$$\varpi_n = \frac{\psi(K)}{\psi_n} \prod_{k=3}^{n-1} \frac{\psi_k - \psi(K)}{\psi_k}$$

Or, en intégrant (4-12), nous trouvons

$$\varpi_n = \frac{\psi(K)}{\psi_3} \; E_3 \prod_{k=3}^{n-1} \frac{\psi(K_k) - \psi(K)}{\psi(K_{k+1})}$$

Donc

$$\prod_{k=3}^{n-1} \frac{\psi_k - \psi(K)}{\psi_{k+1}} = E_3 \prod_{k=3}^{n-1} \frac{\psi(K_k) - \psi(K)}{\psi(K_{k+1})}$$

REMARQUE POUR LE CALCUL DE ϖ_3. Pour le calcul de ϖ_3, selon la formule (4-11), de même que ci-dessous pour le passage aux lois en volume, il y a tout intérêt à particulariser le compact convexe K qui sert à éroder A. Jusqu'à présent, nous n'avons introduit aucune hypothèse limitative (sinon que le support S_K de la mesure périmétrique G_K associé à K doit contenir p.s. le support S_A associé au polygone poissonien A). Le cercle unité convient dans tous les cas. Mais il y a un choix plus intéressant : c'est de prendre pour K le compact convexe défini par

$$G_K = G$$

c'est-à-dire dont la mesure périmétrique soit justement la mesure G définissant la fonctionnelle ψ. Avec ce choix, on a :

$$\psi(K) = \int G(du)\ \varphi_K(u) = 2\ V(K)$$

et, plus généralement, pour tout K' compact convexe :

$$\psi(K') = \int G(du)\ \varphi_{K'}(u) = \int G_{K'}(du)\ \varphi_K(u)$$

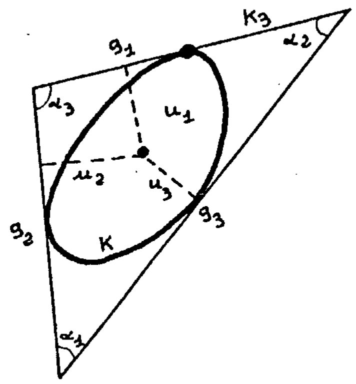
Donc, si K' est de la forme $K' = K(S')$, on a $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur $S_{K'}$ et par suite :

(6-1) $$V(K') = \frac{1}{2}\ \psi(K')$$

Revenons au calcul de ϖ_3 selon (4-11). Avec le choix $G_K = G$, on a

$$\psi(K_3) = 2\, V(K_3)$$

Posons $\rho_i = \varphi_K(u_i)$, désignons par α_1, α_2, α_3 les angles (u_2, u_3), (u_3, u_1), (u_1, u_2) et par g_1, g_2, g_3 les côtés du triangle K_3, i.e.



$$g_i = G_{K_3}(\{u_i\}) \quad , \ i = 1,2,3$$

Alors :

$$\Delta(u_1\, u_2\, u_3) = \rho_1 \sin \alpha_1 + \rho_2 \sin \alpha_2 + \rho_3 \sin \alpha_3$$

$$\psi(K_3) = 2\, V(K_3) = g_1\, \rho_1 + g_2\, \rho_2 + g_3\, \rho_3$$

La quantité à intégrer est ainsi :

$$\frac{\Delta(u_1\, u_2\, u_3)}{\psi(K_3)} = \frac{\Sigma\, \rho_i \sin \alpha_i}{\Sigma\, g_i\, \rho_i}$$

Mais, si nous désignons par $D = D(K_3)$ le diamètre du cercle circonscrit au triangle K_3, la géométrie élémentaire nous donne la relation

$$\frac{\sin \alpha_1}{g_1} = \frac{\sin \alpha_2}{g_2} = \frac{\sin \alpha_3}{g_3} = \frac{1}{D(K_3)}$$

Par suite, la quantité à intégrer dans le domaine $\mathcal{D}$ est l'inverse du diamètre du cercle circonscrit :

$$\frac{\Delta(u_1, u_2, u_3)}{\psi(K_3)} = \frac{1}{D(K_3)}$$

et

(6-2) $$\varpi_3 = \frac{E\, V}{3} \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{D(K_3)}\, G(du_1)\, G(du_2)\, G(du_3)$$

(comme $G = G_K$ est, en dimension, l'inverse d'une longueur, $1/D(K_3)$ a la dimension d'une longueur, et la formule (6-2) est homogène).

Passage aux lois en volume.

A $N = n$ et K_3 , K_n fixés, A est de la forme (4-8), et par suite son volume est :

$$V(A) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{S_i\ S_j}{\psi(K_i)\ \psi(K_j)} \int G_{K_i}(du)\ \varphi_{K_j}(u)$$

$$= \sum_{i\geq 3} \frac{S_i^2}{(\psi(K_i))^2}\ V(K_i) + \sum_{j>i\geq 3} \frac{S_i\ S_j}{\psi(K_i)\ \psi(K_j)} \int G_{K_i}\ \varphi_{K_j}$$

Notons que, pour $j > i$, on a $\varphi_{K_j} = \varphi_{K_i}$ sur S_{K_i} et donc $\int G_{K_i}\ \varphi_{K_j} = 2\ V(K_i)$. Ainsi :

$$V(A) = \sum_{i\geq 3} \frac{S_i}{\psi(K_i)}\ V(K_i) \left(\frac{S_i}{\psi(K_i)} + \frac{2\ S_{i+1}}{\psi(K_{i+1})} +\dots \frac{2\ S_n}{\psi(K_n)} \right)$$

Avec le choix $G_K = G$, on a d'après (6-1), $\psi(K_i) = 2\ V(K_i)$ et la formule se simplifie :

$$V(A) = \sum_{i\geq 3} \left(\frac{S_i^2}{2\ \psi(K_i)} + S_i \sum_{j>i}^{n} \frac{S_j}{\psi(K_j)} \right)$$

Prenons l'espérance (conditionnelle en $N = n$). Comme les S_i sont des exponentielles réduites indépendantes, on trouve :

$$E(S_i^2) = 2 \quad , \quad E(S_i\ S_j) = 1 \quad \text{pour} \quad i \neq j$$

et par suite :

$$E_n\ V = \sum_{i\geq 3} \sum_{j=i}^{n} E_n\ \frac{1}{\psi(K_j)}$$

c'est-à-dire :

$$(6\text{-}3) \qquad E_n\ V = \sum_{j=3}^{n} E_n\ \frac{j-2}{\psi(K_j)}$$

(L'espérance conditionnelle $E_n(1/\psi(K_j))$ doit être évidemment calculée à partir de la loi Π_n définie en (4-12).

Les probabilités p_n en volume sont ensuite données par :

(6-4) $$p_n = \frac{\varpi_n\ E_n\ V}{E\ V}$$

<u>REMARQUE</u>. Sous forme intégrale, (et sans conditionnement en N), $A = \int_0^R K'_\rho\ d\rho$ donne :

$$V(A) = \int_0^R d\rho \int_0^\rho d\rho' \int G_{K'_{\rho'}}\ \varphi_{K_\rho}$$

Or, pour $\rho' \leq \rho$, $\int G_{K'_{\rho'}}\ \varphi_{K_\rho} = \int G_{K'_{\rho'}}\ \varphi_{K'_{\rho'}} = 2\ V(K'_{\rho'})$

Ainsi :

$$V(A) = 2 \int_0^R (R-\rho)\ V(K'_\rho)\ d\rho$$

Mais (avec le choix $G_K = G$), on a ici $2\ V(K'_\rho) = \psi(K'_\rho)$ et aussi :

$$\psi(A_\rho) = \int_\rho^R \psi(K'_\tau)\ d\tau$$

Alors

$$V(A) = \int_0^R d\rho \int_\rho^R \psi(K'_\tau)\ d\tau$$

soit

$$V(A) = \int_0^R \psi(A_\rho)\ d\rho$$

D'après l'invariance conditionnelle, on aura donc :

$$E\ V = E\ \psi(A)\ .\int_0^\infty e^{-\rho\psi(K)}\ d\rho = \frac{E\ \psi(A)}{\psi(K)}$$

Par ailleurs $E\ \psi(A) = \sum (n-2)\ \varpi_n = 2$, et finalement (à cause du choix $G_K = G$) :

(6-5) $$E\ V = \frac{2}{\psi(K)}$$

En reportant dans (6-4) et (6-5), il vient ainsi :

$$(6\text{-}6) \qquad p_n = \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n} (j-2)\, E_n \frac{\phi(K)}{\phi(K_j)}$$

(Sous cette forme, plus homogène du point de vue dimensionnel, il n'est plus nécessaire d'avoir l'égalité $G = G_K$, mais seulement la proportionnalité $G_K = a\, G$ avec une constante a arbitraire).

7 - UN EXEMPLE : RESEAU POISSONIEN HEXAGONAL.

Nous ne savons pas effectuer les calculs explicites dans le cas des polygones poissoniens isotropes, et nous considèrerons le cas plus simple où la mesure G est de la forme :

$$G = \lambda \sum_{k=o}^{5} \delta_{\frac{k\pi}{3}}$$

(réseau hexagonal isotrope : il n'y a que 3 directions possibles, égqlement probables, pour les droites du réseau, et ces directions font entre elles des angles de 120°).

Prenons pour K l'hexagone régulier défini par les droites du réseau, tel que :

$$\phi(K) = 6$$

Alors $\phi(K_3)\ldots\phi(K_6)$ sont déterminés (non aléatoires) :

$$\phi(K_6) = \phi(K) = 6 \ , \quad \phi(K_5) = 7 \ , \quad \phi(K_4) = 8 \ , \quad \phi(K_3) = 9$$

En contrepartie, puisque la mesure G a des atomes, il n'est plus vrai que les polygones s'évanouissent tous à l'état de triangle : un pourcentage notable d'entre eux s'évanouira à l'état de trapèze (ou de parallèlogramme). Nous poserons donc :

$$\varpi_4 = \varpi_4' + \varpi_4''$$

ϖ_4' : probabilité pour que A soit un quadrilatère et passe par érosion à l'état de triangle.

ϖ_4'' : probabilité pour que A soit un quadrilatère et s'évanouisse par érosion sans passer par l'état de triangle.

Dans le premier cas, nous disons que A est un polygone <u>court</u>, dans le second que A est un polygone <u>long</u>.

La relation $\varpi_3 \; \psi_3 = \psi(K)$ n'est plus vérifiée ici, on a seulement

$$\psi(K) = \varpi_3 \; \psi_3 + \varpi_4'' \; \psi_4$$

De même, la relation

$$\varpi_n \; \psi(K) = \varpi_n \; \psi_n - \varpi_{n+1} \; \psi_{n+1}$$

reste vraie pour $n \geq 4$. Pour $n = 3$, il vient seulement :

$$\varpi_3 \; \psi(K) = \varpi_3 \; \psi_3 - \varpi_4' \; \psi_4$$

Au total, il vient explicitement (compte tenu des valeurs de ψ_n)

$$\left[\begin{array}{l} \varpi_5 = 6 \; \varpi_6 \\ 2 \; \varpi_4 = 7 \; \varpi_5 \\ 3 \; \varpi_3 = 8 \; \varpi_4' \\ 9 \; \varpi_3 + 8 \; \varpi_4'' = 6 \end{array}\right.$$

Mais la dernière relation est une conséquence des 3 premières et de $\sum \varpi_i = 1$. Nous complèterons le système en écrivant :

$$\left[\begin{array}{l} \varpi_3 + \varpi_4 + \varpi_5 + \varpi_6 = 1 \\ \varpi_4 + 2 \; \varpi_5 + 3 \; \varpi_6 = 1 \end{array}\right.$$

(cette dernière relation équivaut à $\sum (n-2) \; \varpi_n = 2$). Avec $\varpi_5 = 6 \; \varpi_6$, $\varpi_4 = 21 \; \varpi_6$, la dernière relation donne $36 \; \varpi_6 = 1$. Donc :

$$\varpi_6 = \frac{1}{36}\ ,\ \varpi_5 = \frac{1}{6}\ ,\quad \varpi_4 = \frac{7}{12}\quad ,\quad \varpi_3 = \frac{2}{9}$$

Pour ϖ'_4 (quadrilateres courts), on a $3\ \varpi_3 = 8\ \varpi'_4$ donc

$$\varpi'_4 = \frac{1}{12}\quad ,\quad \varpi''_4 = \frac{1}{2}$$

Pour passer à la loi en volume, il faut calculer les quantités $\frac{E_n\ V}{E\ V}$. Or ici, à $N = n > 3$ fixés, deux éventualités sont possibles. Ou bien on a affaire à un polygone du genre <u>court</u> (s'évanouissant à l'état de triangle) et dans ce cas :

$$A = S_3 \frac{K_3}{\psi_3} \oplus \dots \oplus \frac{S_n\ K_n}{\psi_n} \tag{7-1}$$

ou bien on a affaire à un polygone du genre <u>long</u> s'évanouissant à l'état de segment de droite. Dans ce cas, le terme $S_3\ K_3/\psi_3$ est remplacé par A_R , et on peut montrer, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 4, que l'on a $A_R = S_o\ L_o/\psi(L_o)$ et donc

$$A = S_o \frac{L_o}{\psi(L_o)} \oplus \dots \oplus \frac{S_n\ K_n}{\psi_n} \tag{7-2}$$

$(S_o, S_4 \dots S_n)$ étant des exponentielles réduites indépendantes. Le segment L_o est orienté selon l'une des 3 directions du réseau, et se retrouve dans les contours de $K_4, \dots K_n$. On a ici, avec $G_K = G$

$$\int G_{K_j}\ \varphi_{L_o} \doteq \int G_{L_o}\ \varphi_{K_j} = \int G_{L_o}\ \varphi_K = \int G\ \varphi_{L_o} = \psi(L_o)$$

En fait, on n'a pas $G_K = G$ mais seulement la rélation de proportionnalité

$$G_K = \frac{\psi(K)}{2}\ E\ V\ G$$

et par suite

$$\int G_{K_j}\ \varphi_{L_o} = \frac{\psi(K)}{2}\ E\ V\ G$$

De même, pour $i \leq j$

$$\int G_{K_i}\, \varphi_{K_j} = \frac{\psi(K)}{2}\; E\, V\, \psi_i$$

Donc, dans le cas d'un polygone long de n côtés :

$$V(A) = \frac{\psi(K)}{2}\; E\, V \left[S_o \sum_{k=4}^{n} \frac{S_k}{\psi_k} + \sum_{i\geq 4} S_i \left(\frac{S_i}{2\psi_i} + \frac{S_{i+1}}{\psi_{i+1}} + \ldots + \frac{S_n}{\psi_n} \right) \right]$$

et dans le cas d'un polygone <u>court</u>

$$V(A) = \left[\sum_{i\geq 3} S_i \left(\frac{1}{2} \frac{S_i}{\psi_i} + \frac{S_{i+1}}{\psi_{i+1}} + \ldots + \frac{S_n}{\psi_n} \right) \right] \frac{\psi(K)\; E\, V}{2}$$

Autrement dit, la formule relative au polygone long s'obtient en faisant $\psi_3 = \infty$ dans la formule relative au polygone court.

Désignons par E_n' et E_n'' les espérance conditionnelles relatives, respectivement aux polygones courts et longs : il vient :

$$E_n'' V = \frac{E\, V}{2} \sum_{j=4}^{n} (j-2)\, \frac{\psi(K)}{\psi_j}$$

$$E_n' V = \frac{E\, V}{2} \sum_{j=3}^{n} (j-2)\, \frac{\psi(K)}{\psi_j}$$

Comme $\varpi_n' = \varpi_n/7$ et $\varpi_n'' = (6/7)\varpi_n$, il vient finalement pour $n > 3$:

$$E_n V = \frac{1}{7}\, E_n' V + \frac{6}{7}\, E_n'' V$$

$$= \frac{1}{7}\, \frac{E\, V}{2}\, \frac{\psi(K)}{\psi_3} + \frac{E\, V}{2} \sum_{j=4}^{n} (j-2)\, \frac{\psi(K)}{\psi_j}$$

et pour $n = 3$

$$E_3 V = \frac{E\, V}{2}\, \frac{\psi(K)}{\psi_3}$$

En substituant dans

$$p_n = \varpi_n \frac{E_n V}{EV}$$

il vient

$$p_3 = \frac{1}{2} \varpi_3 \frac{\psi(K)}{\psi_3}$$

et pour $n \geq 4$

$$p_n = \frac{1}{2} \varpi_n \left[\frac{1}{7} \frac{\psi(K)}{\psi_3} + \sum_{j=4}^{n} (j-2) \frac{\psi(K)}{\psi_j} \right]$$

Numériquement :

	ϖ_n	p_n	$p_n/\varpi_n = E_n\ V/E\ V$
$n = 3$	$\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$	$\frac{2}{27} = \frac{32}{432}$	$\frac{1}{3}$
$n = 4$	$\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$	$\frac{67}{144} = \frac{201}{432}$	$\frac{67}{84}$
$n = 5$	$\frac{1}{6} = \frac{6}{36}$	$\frac{25}{72} = \frac{150}{432}$	$\frac{25}{12}$
$n = 6$	$\frac{1}{36}$	$\frac{49}{432}$	$\frac{49}{12}$

On voit que les hexagones sont, en moyenne, 12 fois plus gros que les triangles....