N-515

LES FONCTIONNELLES DE MINKOWSKI

G. MATHERON

FONTAINEBLEAU AVRIL 1977

Les Fonctionnelles multilinéaires de Minkowski

TABLE

Les Fonctionnelles Multilinéaires de Minkowski

Dans ce qui suit, je me propose d'établir l'existence d'une fonctionnelle :

$$W : (A_1, A_2, \dots A_n) \longrightarrow W(A_1, A_2, \dots A_n)$$

définie sur l'espace produit $(C(\mathcal{K}))^n$, où $C(\mathcal{K})$ est l'espace des compacts convexes de $\mathbb{R}^n$, et possédant les propriétés suivantes :

~ W est continue sur $(C(\mathcal{K}))^n$, symétrique, soit :

(a) $$W(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_n}) = W(A_1, A_2, \dots A_n)$$

pour toute permutation $(i_1, i_2, \dots i_n)$ de $(1, 2, \dots n)$

~ W est positivement linéaire par rapport à chacun de ses arguments :

(b) $$W(\lambda A_1 \oplus \lambda' A'_1, A_2, \dots A_n) = \lambda W(A_1, \dots A_n) + \lambda' W(A'_1, \dots A_n)$$

pour tous λ, λ' positifs

~ W est croissante pour l'inclusion ($W(A_1, \dots A_n) \leq W(A'_1, \dots A_n)$ dès que $A_1 \subset A'_1$)

~ W est invariante pour les translations affectant séparément chacun des ses arguments A_i, et aussi pour toute rotation affectant simultanément tous les A_i.

~ Enfin, cette fonctionnelle vérifie une relation de Steiner généralisée : pour $\lambda_1, \dots \lambda_n \geq 0$ et $A_1, \dots A_n \in C(\mathcal{K})$ le volume de la somme de Minkowski $\lambda_1 A_1 \oplus \lambda_2 A_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n$ est donné par

(c) $$V(\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n) = \sum_{n^n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} W(A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_n})$$

(la sommation au second membre est étendue aux n^n éléments $(i_1, i_2, \dots i_n)$ de $\{1, 2, \dots n\}^n$). En particulier,

$$V(A) = W(A_1, \dots A_n) \quad \text{si } A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$$

Compte tenu de la propriété de linéarité (b), on peut présenter la formule de Steiner (c) sous une forme un peu plus générale.

Soient $A_1, A_2, \dots A_p$ des éléments de $C(\mathcal{K})$ en nombre p non nécessairement égal à n, et $q_1, \dots q_p$ des entiers ≥ 0 tels que

$$q_1 + q_2 + \dots + q_p = n$$

Nous définirons la fonctionnelle $W_{q_1 \dots q_p}$ en posant :

$$W_{q_1 \dots q_p}(A_1, \dots A_p) = W(A'_1, A'_2, \dots A'_n)$$

pour un choix des arguments A'_j comportant q_i termes égaux à A_i, $i = 1, 2 \dots p$. Avec ces notations, on aura :

$$\text{(d)} \qquad V(\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_p A_p) = \sum \frac{n!}{q_1! \dots q_p!} \lambda_1^{q_1} \dots \lambda_p^{q_p} W_{q_1 \dots q_p}(A_1, \dots A_p)$$

Pour $p = 2$, on retrouve en particulier les fonctionnelles mixtes classiques en géométrie intégrale.

De plus, nous montrerons que pour tout choix $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ de $n-1$ éléments dans $C(\mathcal{K})$, il existe une et une seule mesure $G_{A_1 \dots A_{n-1}}$ positive sur la sphère unité S_0 de $\mathbb{R}^n$ caractérisée par la propriété :

$$\text{(e)} \qquad W(A_1, \dots A_{n-1}, A_n) = \frac{1}{n} \int_{S_0} G_{A_1 \dots A_{n-1}}(du)\, \varphi_{A_n}(u)$$

pour tout $A_n \in C(\mathcal{K})$ caractérisé par sa fonction d'appui φ_{A_n}

Pour établir l'existence de la fonctionnelle W, nous examinerons d'abord le cas où les A_i sont suffisamment réguliers pour que leurs fonctions d'appui φ_{A_i} soient au moins deux fois continûment différentiables sur la sphère unité. Nous effectuerons ensuite un passage à la limite pour obtenir le résultat dans le cas général.

1- Le tenseur des rayons de courbure

Dans ce qui suit, nous supposons la sphère unité S_0 rapportée (localement) à un système de coordonnées curvilignes y^α $(\alpha = 1, 2, \dots n-1)$. Ainsi, si $u = (u_1, \dots u_n)$ est un vecteur unité dans $\mathbb{R}^n$ $(\sum u_i^2 = 1)$, la métrique de S_0 est définie au voisinage de $u \in S_0$ par le tenseur métrique :

(1-1) $$g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha u^i \, \partial_\beta u_i \qquad \text{(sommation de } i = 1 \text{ à } n)$$

A cette métrique sont associés les symboles classiques de Christoffel, qui permettent le calcul des dérivées covariantes :

$$[\alpha\beta, \gamma] = \frac{1}{2} \left[\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \right]$$

soit, compte tenu de l'expression (1-1) du tenseur métrique :

$$[\alpha\beta, \gamma] = \partial_{\alpha\beta} u^i \, \partial_\gamma u_i$$

En posant, suivant l'usage, $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\gamma'} [\alpha\beta, \gamma']$, il vient :

(1-2) $$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\gamma'} \partial_{\alpha\beta} u^i \, \partial_{\gamma'} u_i$$

Si $V = V^\alpha \partial_\alpha u$ est un vecteur ~~du plan~~ de l'hyperplan tangent à S_0 en u, et V^α $\alpha = 1, \dots n-1$ ses coordonnées contravariantes, les composantes du tenseur dérivé covariante de V sont :

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\alpha'} V^{\alpha'}$$

Pour interpréter cette dérivée covariante, considérons la dérivée (ordinaire) $\partial_\beta V$ du vecteur $V = V(y^\alpha)$ considéré comme un élément de $\mathbb{R}^n$ dépendant des coordonnées y^α :

$$\partial_\beta V = \partial_\beta (V^\alpha \partial_\alpha u) = \partial_\beta V^\alpha . \partial_\alpha u + V^\alpha \partial_{\alpha\beta} u$$

et évaluons le vecteur $\partial_{\alpha\beta} u$, dont les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ sont les $\partial_{\alpha\beta} u^i$, $i = 1, 2 \dots n$. De $u_i u^i = 1$ résulte par dérivations successives

$$u^i \partial_\alpha u_i = 0 \quad , \quad u^i \partial_{\alpha\beta} u_i = - \partial_\alpha u^i \partial_\beta u_i = - g_{\alpha\beta}$$

Par suite :

$$\partial_{\alpha\beta} u = (u^i \partial_{\alpha\beta} u_i) u + g^{\gamma\gamma'} (\partial_{\alpha\beta} u^i \partial_{\gamma'} u_i) \partial_\gamma u$$

$$= - g_{\alpha\beta} u + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma u$$

(ce qui s'écrit aussi : $\nabla_{\alpha\beta} u = - g_{\alpha\beta} u$)

En reportant ce résultat dans l'expression de $\partial_\beta V$, il vient :

$$\partial_\beta V = \nabla_\beta V^\alpha . \partial_\alpha u - V^\alpha g_{\alpha\beta} u$$

Ainsi, les $\nabla_\beta V^\alpha$ sont les composantes contravariantes de la projection de $\partial_\beta V$ sur le plan tangent en u à S_0, et la composante normale de $\partial_\beta V$ est $- V^\alpha g_{\alpha\beta} u = - V_\beta u$.

Soit maintenant $A \in C_0(\mathcal{X})$ un compact convexe suffisamment régulier pour que sa fonction d'appui φ soit deux fois continûment différentiable sur S_0. La frontière ∂A de A est l'enveloppe des hyperplans d'équation :

$$x^i u_i = \varphi(u)$$

Compte tenu des hypothèses faites sur φ, les coordonnées x^i des points $x \in \partial A$ peuvent être biunivoquement paramétrées en $u \in S_0$: c'est la représentation sphérique classique de ∂A. Ce paramétrage s'obtient aussi en fonction des coordonnées curvilignes locales y^α sur S_0 en résolvant le système :

$$(1\text{-}3) \qquad \begin{cases} x^i u_i = \varphi(u) \\ x^i \partial_\alpha u_i = \partial_\alpha \varphi \end{cases}$$

Soit

$$x = \varphi u + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \, \partial_\beta u$$

Le système (1-3) entraîne, évidemment, $u^i \partial_\alpha x_i = 0$. Il existe donc un tenseur R^β_α, une fois covariant et une fois contravariant tel que :

$$(1\text{-}4) \qquad \partial_\alpha x = R^\beta_\alpha \, \partial_\beta u$$

C'est le tenseur des rayons de courbure de ∂A. Sous forme covariante $R_{\beta\alpha} = g_{\beta\beta'} R^{\beta'}_\alpha = \partial_\alpha x^i \partial_\beta u_i$, on voit que ce tenseur est symétrique. Car, en dérivant la seconde relation (1-3), on trouve :

$$\partial_\beta x^i \partial_\alpha u_i = \partial_{\beta\alpha}\varphi - x^i \partial_{\beta\alpha} u_i = \partial_\alpha x^i \partial_\beta u_i$$

Compte tenu de

$$\partial_{\alpha\beta} u = -g_{\alpha\beta} u + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma u$$

$$x = \varphi u + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha\varphi \partial_\beta u$$

on obtient

$$x^i \partial_{\beta\alpha} u_i = -g_{\alpha\beta}\varphi + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'}\varphi \partial_{\beta'} u^i \partial_\gamma u_i$$

$$= -g_{\alpha\beta}\varphi + \Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta} \partial_{\alpha'}\varphi$$

et il vient plus précisément :

$$\partial_\beta x^i \partial_\alpha u_i = \partial_{\alpha\beta}\varphi + g_{\alpha\beta}\varphi - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \partial_\gamma\varphi$$

Soit :

$$(1\text{-}5) \quad \begin{cases} R_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\varphi + \nabla_{\alpha\beta}\varphi \\ R^\alpha_\beta = \varphi\,\delta^\alpha_\beta + \nabla^\alpha_\beta\varphi \end{cases}$$

∂A étant convexe, ce tenseur symétrique R^α_β est de type positif (relativement à la métrique définie par $g_{\alpha\beta}$). Ses valeurs propres sont les rayons de courbure principaux $R_1, \dots R_{n-1}$. En particulier, $\operatorname{Det} R = R_1 \cdots R_{n-1}$ est l'inverse de la courbure totale, et la mesure de surface de A est

$$(1\text{-}6) \qquad G_A = \operatorname{Det} R \; G_B$$

(G_B ; mesure de surface de la boule unité, est la mesure associée à la notion habituelle d'angle solide)

Compléments Si nous supposons φ 3 fois continûment différentiable, nous avons la relation :

$$(1\text{-}7) \qquad \nabla_\gamma R^\beta_\alpha = \nabla_\alpha R^\beta_\gamma$$

Pour le voir, partons de $R_{\alpha\beta} = \partial_\beta x^i \partial_\alpha u_i$, d'où :

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma \partial_\beta x^i \cdot \partial_\alpha u_i + \partial_\beta x^i \nabla_\gamma \partial_\alpha u_i$$

Comme $\nabla_{\gamma\alpha} u = - g_{\gamma\alpha} u$, il reste seulement :

$$\nabla_\gamma R_{\alpha\beta} = \nabla_\gamma \partial_\beta x^i \cdot \partial_\alpha u_i$$

Mais $\nabla_\gamma \partial_\beta x^i = \nabla_\beta \partial_\gamma x_i$; et par suite $\nabla_\gamma R_{\alpha\beta} = \nabla_\beta R_{\alpha\gamma}$.

Si nous supposons $\mathrm{Det}\, R \neq 0$ en tout $u \in S_0$, le tenseur $R^\alpha{}_\beta$ admet un inverse C^α_β qui est le <u>tenseur de courbure</u>. Ce tenseur vérifie la relation

$$\nabla_\alpha \left(\frac{C^\alpha{}_\beta}{\mathrm{Det}\, C} \right) = 0$$

Autrement dit ($\mathrm{Det}\, R = 1/\mathrm{Det}\, C$ étant un scalaire), le tenseur $(1/\mathrm{Det}\, C)\, C^\alpha_\beta = \mathrm{Det}\, R\; C^\alpha_\beta$ est conservatif.

Notons aussi la réciproque suivante : si φ est deux fois continûment différentiable sur S_0, elle est la fonction d'appui d'un compact convexe si et seulement si le tenseur symétrique $R^\alpha_\beta = \varphi\, \delta^\alpha_\beta + \nabla^\alpha_\beta \varphi$ est de type positif

<u>2- La mesure $G_{A_1, \dots A_{n-1}}$</u>

Soient maintenant $A_1, \dots A_{n-1} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi_1, \dots \varphi_{n-1}$ leurs fonctions d'appui que nous supposons (pour l'instant) deux fois continûment différentiables. Soit $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-1}$ et $\varphi = \varphi_A = \varphi_1 + \dots + \varphi_{n-1}$ sa fonction d'appui. D'après (1.5), le tenseur de courbure $R = R_A$ associé à A est la somme $R_1 + \dots + R_{n-1}$ des tenseurs de courbure R_i associés à chacun des A_i, et sa mesure de surface G_A admet la densité :

$$\mathrm{Det}\, R = \mathrm{Det} \left(\sum_{i=1}^{n-1} R_i \right)$$

Développons cette expression. De

$$\mathrm{Det}\, R = \sum_{\sigma \in (n-1)!} (-1)^\sigma\, R^1_{\sigma(1)}\, R^2_{\sigma(2)} \cdots R^{n-1}_{\sigma(n-1)}$$

où la somme est étendue aux $(n-1)!$ permutations σ de $(1, 2, \dots n-1)$

résulte alors, en remplaçant R^α_β par $\sum_i R^\alpha_{i,\beta}$:

$$\mathrm{Det}\, R = \sum_{I \in (n-1)^{n-1}} \sum_{\sigma \in (n-1)!} (-1)^\sigma R^1_{i_1,\sigma(1)} \cdots R^{n-1}_{i_{n-1},\sigma(n-1)}$$

où $I = (i_1, \dots i_{n-1})$ décrit $\{1, 2, \dots (n-1)\}^{n-1}$. Il est commode de réécrire ceci sous la forme :

$$(2\text{-}1) \qquad \mathrm{Det}\, R = \sum_{I \in (n-1)^{n-1}} g_{i_1, \dots i_{n-1}}$$

où la fonction $g_{i_1,\dots i_{n-1}}$ représente l'expression symétrisée :

$$g_{i_1,\dots i_{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma,\tau} (-1)^\sigma R^1_{\tau(i_1),\sigma(1)} \cdots R^{n-1}_{\tau(i_{n-1}),\sigma(n-1)}$$

où σ et τ décrivent chacune les $(n-1)!$ permutations de $\{1, 2, \dots (n-1)\}$

Notons que $g_{i_1,\dots i_{n-1}}$, tout comme $\mathrm{Det}\, R$, est un scalaire (invariant par changement des coordonnées locales y^α). Notons aussi que l'on peut, dans cette sommation, remplacer $R^j_{\tau(i_j),\sigma(j)}$ par $R^{\tau(j)}_{i_j,\tau\sigma(j)}$, et par suite :

$$(2\text{-}2) \qquad g_{i_1,\dots i_{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma,\tau} (-1)^{\sigma+\tau} R^{\tau(1)}_{i_1,\sigma(1)} \cdots R^{\tau(n-1)}_{i_{n-1},\sigma(n-1)}$$

Sous cette forme (2-2), on peut voir que le scalaire $g_{i_1,\dots i_{n-1}}$ est ≥ 0. En effet, pour chaque i, le tenseur R_i est symétrique et positif, donc de la forme

$$R^\alpha_{i,\beta} = \sum_{k=1}^{n-1} V_i^{k,\alpha} V^k_{i,\beta}$$

D'après la forme même de la relation (2-2), il suffit de montrer que $g_{i_1,\dots i_{n-1}}$ est ≥ 0 dans le cas particulier où les tenseurs R_i s'expriment chacun à l'aide d'un seul vecteur V_i, soit

$$R^\alpha_{i,\beta} = V_i^\alpha V_{i,\beta}$$

De plus (en un point $u_0 \in S_0$ donné) nous pouvons choisir les coordonnées locales y^α sur S_0 de manière à ce que le tenseur métrique soit $g_{\alpha\beta}(u_0) = \delta_{\alpha\beta}$ en u_0, c'est à dire en ce point $V^\alpha = V_\alpha$ pour tout champ de vecteur. Avec $R_{i\,\alpha\beta} = V_i^\alpha V_i^\beta$, le scalaire (2-2) vaut alors en u_0 :

$$g_{i_1 \dots i_{n-1}}(u_0) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma,\tau} (-1)^{\sigma+\tau} V_{i_1}^{\tau(1)} V_{i_1}^{\sigma(1)} \dots V_{i_{n-1}}^{\tau(n-1)} V_{i_{n-1}}^{\sigma(n-1)}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \left[\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} V_{i_1}^{\sigma(1)} \dots V_{i_{n-1}}^{\sigma(n-1)} \right]^2$$

Il est donc bien ≥ 0 -

Au stade, nous avons établi le résultat suivant : Si $A_1, \dots A_{n-1} \in C_0(S_K)$ sont assez réguliers, nous leur associons la <u>mesure positive</u>

$$G_{A_1 \dots A_{n-1}} = g_{1,2,\dots(n-1)}\, G_B$$

admettant la densité ≥ 0

$$g_{1,2,\dots(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma,\tau} (-1)^{\sigma+\tau} R_{1,\sigma(1)}^{\tau(1)} \dots R_{n-1,\sigma(n-1)}^{\tau(n-1)}$$

Par construction, cette mesure dépend <u>symétriquement</u> de ses arguments $A_1, \dots A_{n-1}$, soit

$$G_{A_{i_1} \dots A_{i_{n-1}}} = G_{A_1 \dots A_{n-1}}$$

pour toute permutation de $(i_1, \dots i_{n-1})$ et apparaît comme une fonction <u>linéaire</u> positive de chacun d'entre eux

$$G_{A_1 \oplus A'_1, A_2, \dots A_{n-1}} = G_{A_1, \dots A_{n-1}} + G_{A'_1, \dots A_{n-1}}$$

De plus, d'après (2-1), la mesure de surface G_A associée à $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_{n-1}$ est

(2-3) $$G_A = \sum_{I \in (n-1)^{n-1}} G_{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots A_{i_{n-1}}}$$

3- La formule de Steiner

Soient maintenant $A_1, \dots A_n \in C_0(S_0)$ n compacts convexes suffisamment reguliers pour que leurs fonctions d'appui soient deux fois continûment differentiables. Nous designerons par φ_i (au lieu de φ_{A_i}) ces fonctions d'appui, et de même nous ecrivons $G_{i_1, \dots i_{n-1}}$ au lieu de $G_{A_{i_1} \dots A_{i_{n-1}}}$. Pour $\lambda_1, \dots \lambda_n \geq 0$, le volume de $\lambda_1 A_1 \oplus \lambda_2 A_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n$ est donné par :

$$V(\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n) = \frac{1}{n} \int_{S_0} G_{\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n} (\lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n)$$

A partir de (2-3), on trouve sans peine :

$$G_{\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n} = \sum_{I \in n^{n-1}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} G_{A_{i_1}, \dots A_{i_{n-1}}}$$

(somme etendue aux n^{n-1} choix possibles de $(i_1, \dots i_{n-1})$ dans $\{1, 2, \dots n\}^{n-1}$) Pour le voir, il suffit de remplacer $\lambda_{n-1} A_{n-1} \oplus \lambda_n A_n$ par A'_{n-1} d'appliquer (2-3) et de tenir compte de la linearité en A'_{n-1}. Il vient ainsi :

$$V(\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n) = \frac{1}{n} \sum_{I \in n^n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \int G_{i_1, \dots i_{n-1}} \varphi_{i_n}$$

soit :

(3-1) $$V(\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n A_n) = \sum \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} W(A_{i_1}, \dots A_{i_{n-1}}; A_{i_n})$$

avec

(3-2) $$W(A_{i_1}, \dots A_{i_{n-1}}; A_{i_n}) = \frac{1}{n} \int G_{i_1, \dots i_{n-1}} \varphi_{i_n}$$

Dans cette ecriture, l'ensemble terminal A_{i_n} semble jouer un rôle different des autres. En fait il n'en est rien, on a $W(A_1, \dots A_{n-1}; A_n) = W(A_1, \dots A_{n-2}, A_n; A_{n-1}) = \dots$, soit $= W(A_1, A_2, \dots A_n)$ avec une fonctionnelle W <u>symetrique</u> en ses n arguments.

Pour le voir, prenons la dérivée de (3-1) en λ_n pour $\lambda_n = 0$. A gauche, nous obtenons :

$$n W_1(\lambda_1 A_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_{n-1} A_{n-1} ; A_n) = \sum_{(n-1)^{n-1}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \int G_{i_1 \cdots i_{n-1}} \varphi_n$$

avec une sommation étendue à $\{1, 2, \ldots (n-1)\}^{n-1}$. A droite, nous obtenons deux sortes de termes, selon que $i_n = n$ ou $i_n \neq n$, soit :

$$\frac{1}{n} \sum_{(n-1)^{n-1}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-1}} \varphi_n + \frac{n-1}{n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \sum_{(n-1)^{n-1}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n} \varphi_{i_{n-1}}$$

En égalant ces deux expressions, nous trouvons donc :

$$\text{(3-3)} \qquad \sum_{(n-1)^{n-1}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-1}} \varphi_n = \sum_{(n-1)^{n-1}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-1}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n} \varphi_{i_{n-1}}$$

Dérivons à nouveau cette relation en λ_{n-1} et prenons $\lambda_{n-1} = 0$

Nous trouvons :

$$(n-1) \sum_{(n-2)^{n-2}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-2}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n-1} \varphi_n =$$

$$\sum_{(n-2)^{n-2}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-2}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n} \varphi_{n-1}$$
$$+ (n-2) \sum_{(n-2)^{n-2}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-2}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-3}, n-1, n} \varphi_{i_{n-2}}$$

En échangeant les indices n et $n-1$ et en ~~ajoutant~~ retranchant membre à membre, on fait disparaître les termes où figurent les mesures $G_{i_1, \ldots i_{n-3}, n-1, n}$, et il vient :

$$\sum \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-2}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n-1} \varphi_n = \sum \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-2}} \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n} \varphi_{n-1}$$

S'agissant d'une identité par rapport aux coefficients λ_i, il en résulte :

$$\int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n-1} \varphi_n = \int G_{i_1, \ldots i_{n-2}, n} \varphi_{n-1}$$

Autrement dit :

La fonctionnelle W ~~[illegible]~~ défini en posant :

(3-4) $$W(A_1,\dots,A_n) = \frac{1}{n}\int G_{A_1,\dots A_{n-1}}\, \varphi_{A_n}$$

dépend symétriquement de ses n arguments, et on a :

(3-5) $$V(\lambda_1 A_1 \oplus\dots\oplus \lambda_n A_n) = \sum_{n^n} \lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_n}\, W(A_{i_1},\dots,A_{i_n})$$

De plus, W est positivement linéaire et croissante pour l'inclusion relativement à chacun de ses arguments.

D'après (3-4), en effet, W est bien positivement linéaire et croissante en A_n, puisque $G_{A_1,\dots A_{n-1}}$ est une mesure positive. Comme W est symétrique, elle possède les mêmes propriétés vis à vis de chacun de ses arguments.

4 - Passage à la limite, et Continuité

Au stade où nous sommes parvenus, nous n'avons pas encore défini la fonctionnelle W sur $(C_0(\mathcal{K}))^n$ entier, mais seulement sur le sous-espace dense constitué des n-tuples $(A_1,\dots A_n)$ où chacun des A_i a une fonction d'appui 2 fois continuement différentiable.

Pour abréger, désignons par $A = (A_1,\dots A_n)$ un élément générique de $(C_0(\mathcal{K}))^n$, et par $A_k = (A_{1,k},\dots A_{n,k})$ une suite de n tuples convergeant vers A dans $(C_0(\mathcal{K}))^n$ et tels que chacun des $A_{i,k}$ ait une fonction d'appui 2 fois continuement différentiable.

Prenons $\lambda_1,\dots\lambda_n \geq 0$, de sorte que la suite

$$A_k(\lambda) = \lambda_1 A_{1,k} \oplus\dots\oplus \lambda_n A_{n,k}$$

converge vers $A(\lambda) = \lambda_1 A_1 \oplus\dots\oplus \lambda_n A_n$ dans $C_0(\mathcal{K})$, et naturellement aussi :

$$V(A(\lambda)) = \lim V(A_k(\lambda)) \quad \text{pour tout } \lambda$$

Nous avons vu que l'on a pour chaque q

(4-1) $$V(A_q(\lambda)) = \sum \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} W(A_{i_1,q}, \cdots A_{i_n,q})$$

~~Comme~~ Avec des coefficients λ_i ~~...~~ strictement positifs, par exemple $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, ce qui implique que chacune des suites $q \to W(A_{i_1,q}, \cdots A_{i_n,q})$ est bornée, et que la suite des n^n-tuples $q \to W(A_{i_1,q}, \cdots A_{i_n,q})$, $(i_1, \cdots i_n) \in n^n$ admet (dans $\mathbb{R}^{n^n}$) une valeur d'adhérence $W(i_1, \cdots i_n)$, $(i_1, \cdots i_n) \in n^n$.

La relation (4-1) entraîne alors :

$$V(A(\lambda)) = \sum \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} W(i_1, \cdots i_n)$$

pour tout choix des coefficients $\lambda_i \geq 0$. Il en résulte que la valeur d'adhérence $W(i_1, \cdots i_n)$, $(i_1, \cdots i_n) \in n^n$ est unique, donc que la suite des $W(A_{i_1,q}, \cdots A_{i_n,q})$ converge dans $\mathbb{R}^{n^n}$ vers une limite égale à cette valeur d'adhérence. Ainsi, en désignant cette limite par

$$W(A_{i_1}, \cdots A_{i_n}) = \lim W(A_{i_1,q}, \cdots A_{i_n,q})$$

nous avons bien

(4-2) $$V(A(\lambda)) = \sum \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n} W(A_{i_1}, \cdots A_{i_n})$$

Cette relation (4-2), valable pour tout choix des coefficients $\lambda_i \geq 0$, garantit l'existence et l'unicité de la fonctionnelle $W(A_1, \cdots A_n)$ sur $(C_0(\mathcal{X}))^n$. La fonctionnelle ainsi prolongée, est évidemment, encore <u>symétrique</u>, <u>croissante</u> et <u>positivement linéaire</u> en chacun de ses arguments. Il suffit de reprendre le raisonnement précédent dans le cas d'une suite quelconque dans $(C_0(\mathcal{X}))^n$ pour voir que cette fonctionnelle est, de plus, <u>continue</u> sur $(C_0(\mathcal{X}))^n$

La relation (3-4) passe également à la limite.

Autrement dit : quels que soient $A_1, \dots A_{n-1} \in C_0(\mathcal{K})$, il existe une mesure positive unique $G_{A_1, \dots A_{n-1}}$ telle que l'on ait

$$(4\text{-}3) \qquad W(A_1, A_2, \dots A_n) = \frac{1}{n} \int G_{A_1, \dots A_{n-1}} \varphi_{A_n}$$

pour tout $A_n \in C_0(\mathcal{K})$.

En effet, prenons $(n-1)$ suites $A_{i,q}$ telles que $A_i = \lim_q A_{i,q}$ et que $\varphi_{A_{i,q}}$ soit deux fois continûment différentiable. Avec $A_n = B$ (boule unité), nous trouvons :

$$\frac{1}{n} \int G_{A_{1,q}, \dots A_{n-1,q}} = W(A_{1,q} \dots A_{n-1,q}, B)$$

La suite $\{G_{A_{1,q}, \dots A_{n-1,q}}\}$ est donc bornée, et admet une valeur d'adhérence (pour la convergence vague des mesures sur S_0), qui est une mesure G positive. Pour tout A_n, la relation

$$W(A_{1,q}, \dots A_{n-1,q}, A_n) = \frac{1}{n} \int G_{A_{1,q}, \dots A_{n-1,q}} \varphi_{A_n}$$

passe à la limite (à cause de la continuité de W), et la mesure G' vérifie donc

$$W(A_1, \dots A_n) = \frac{1}{n} \int G' \varphi_{A_n}$$

pour tout $A_n \in C_0(\mathcal{K})$. Comme les fonctions d'appui φ_{A_n} forment une ~~som~~ partie totale dans l'espace des fonctions continues sur S_0, cette relation détermine la mesure G', qui est ainsi l'unique valeur d'adhérence de la suite $G_{A_{1,q}}, \dots A_{n-1,q}$. Par suite, cette suite converge elle-même vers G'. En posant ~~Elle~~ $G_{A_1, \dots A_{n-1}} = G'$, on voit que (4-3) est vérifiée.

On note de plus (en reprenant le même raisonnement dans le cas de suites quelconques dans $C_0(\mathcal{K})$) que l'application

$$(A_1, \dots A_{n-1}) \to G_{A_1, \dots A_{n-1}}$$

est continue sur $(C_0(\mathcal{K}))^{n-1}$ pour la convergence vague.

5 - Cas particuliers et Exemples

Soient $A_1, \dots A_p \in \mathcal{C}_0(\mathcal{S})$ p compacts convexes de $\mathbb{R}^n$ (p n'est pas nécessairement égal à n). Nous designerons par $W_{q_1,\dots q_p}(A_1,\dots A_p)$ la valeur de $W(A'_1,\dots A'_n)$ lorsque q_i de ses arguments A'_j sont egaux à A_i (evidemment, ceci suppose $\sum q_i = n$). On a alors

$$V(\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_p A_p) = \sum \frac{n!}{q_1! \dots q_p!} \lambda_1^{q_1} \dots \lambda_p^{q_p} W_{q_1,\dots q_p}(A_1,\dots A_p)$$

De même (mais cette fois $\sum q_i = n-1$), on designera par $G_{A_1,\dots A_p}^{q_1,\dots q_p}$ la mesure $G_{A'_1,\dots A'_{n-1}}$ lorsque q_i des arguments A'_j sont egaux à A_i

Par exemple, pour $p=2$, on trouvera :

$$V(\lambda A \oplus \rho K) = \sum_{q=0}^{n} C_n^q \lambda^q \rho^{n-q} W_{q,n-q}(A,K)$$

si nous comparons à la formule habituelle

$$V(\lambda A \oplus \rho K) = \sum_{q=0}^{n} C_n^q \lambda^q \rho^{n-q} W_{n-q}(A,K)$$

il vient $W_{q,n-q}(A,K) = W_{n-q}(A,K)$. Si $K=B$ est la boule unité, $W_q(A,B) = W_q(A)$ est la fonctionnelle simple d'ordre q, donc

$$W_{q,n-q}(A,B) = W_{n-q}(A)$$

Avec les mesures, ceci peut s'écrire de deux manières equivalentes :

$$W_{n-q}(A) = \frac{1}{n}\int G_{A,B}^{q,n-q-1} = \frac{1}{n}\int G_{A,B}^{q-1,n-q} \varphi_A$$

D'après la relation

$$G_{\alpha A \oplus \beta B} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \alpha^q \beta^{n-q-1} G_{A,B}^{q,n-q-1}$$

nous voyons qu'il est possible d'exprimer ces mesures à l'aide des invariants du tenseur de courbure R associé à A (lorsque φ_A est 2 fois continûment différentiable). Car, dans ce cas, la mesure $G_{\alpha A \oplus \beta B}$ admet la densité

$$g_{\alpha A \oplus \beta B} = \mathrm{Det}(\alpha R_A + \beta I) \qquad (I = \text{tenseur unité } \delta^\alpha_\beta)$$

Si $R_1, \dots R_{n-1}$ sont les rayons de courbure principaux (valeurs propres de R_A) on a donc

$$g_{\alpha A \oplus \beta B} = \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha R_i + \beta) = \sum_{q=0}^{n-1} \chi_q(A)\, \alpha^q \beta^{n-1-q}$$

avec

$$\chi_q(A) = \sum_{i_1 < \dots < i_q} R_{i_1} R_{i_2} \dots R_{i_q}$$

Autrement dit :

$$C^q_{n-1}\, G^{q,\, n-q-1}_{A\,,\, B} = \chi_q(A)\, G_B$$

Pour $q = n-1$, $\chi_q(A) = \mathrm{Det}\, R$ et on retrouve la mesure de surface.
L'autre cas le plus intéressant est $q = 1$: $\chi_1(A)$ est alors la trace R^α_α du tenseur de courbure, soit

$$\chi_1(A) = (n-1)\, \varphi_A + \Delta \varphi_A$$

Son intégrale est, à un facteur près, la norme de A :

$$W_{n-1}(A) = \frac{1}{n} \int \frac{\chi_1(A)}{n-1}\, G_B = \frac{1}{n} \int \varphi_A\, G_B$$

Si φ_A n'est pas différentiable, la mesure $G^{1,\, n-2}_{A\,,\, B}$ existe toujours, bien qu'elle n'ait peut-être plus de densité par rapport à G_B. Nous poserons

$$G^{1,\, n-2}_{A\,,\, B} = \tau_A$$

de sorte que l'on aura toujours :

$$W_{n-1}(A) = \frac{1}{n} \int \tau_A$$

et $\tau_A = [\varphi_A + (1/n-1)\, \Delta \varphi_A]\, G_B$ si φ_A est différentiable.
et aussi

$$W_{n-2}(A) = \frac{1}{n} \int \tau_A\, \varphi_A$$

On notera surtout que τ_A dépend linéairement de A:

$$\tau_{\lambda A \oplus \mu A'} = \lambda \tau_A + \mu \tau_{A'} \qquad (\lambda, \mu \geq 0,\ A, A' \in C(S_0))$$

A cette mesure est associée la fonctionnelle bilinéaire:

(5.1) $$W_{1,1,n-2}(A, K, B) = \frac{1}{n} \int \tau_A \varphi_K = \frac{1}{n} \int \tau_K \varphi_A$$

que nous désignerons plutôt par $T(A,K)$. Elle vérifie:

(5.2) $$W_{n-2}(A \oplus \lambda K) = W_{n-2}(A) + 2\lambda T(A,K) + \lambda^2 W_{n-2}(K)$$

et l'inégalité isopérimétrique:

(5.3) $$T(A,K) \geq \sqrt{W_{n-2}(A)} \cdot \sqrt{W_{n-2}(K)}$$

avec égalité si et seulement si A et K sont homothétiques.

Pour le démontrer, plaçons nous d'abord dans le cas où φ_A et φ_K sont 2 fois continûment différentiables:

$$T(A,K) = \frac{1}{n} \int \left(\varphi_A + \frac{1}{n-1} \Delta \varphi_A\right) \varphi_K$$
$$= \frac{1}{n} \int \varphi_A \varphi_K - \frac{1}{n(n-1)} \int \nabla^\alpha \varphi_A \cdot \nabla_\alpha \varphi_K$$

Dans l'espace $L^2(S_0, G_B)$, le laplacien Δ est hermitien négatif. Ses valeurs propres, négatives ou nulles, forment une suite dénombrable $\{-\lambda_q\}$. A $\lambda_0 = 0$ est associée la fonction propre $\varphi = 1$. A $-\lambda_1 = -(n-1)$ sont associées les fonctions propres $\langle u, u_0 \rangle$. Pour $q > 1$, $-\lambda_q$ est $< -(n-1)$. La mesure τ_A vérifie la condition barycentrique $\int u \, \tau_A(du) = 0$, à cause de l'invariance par translation de la fonctionnelle $T(A,K)$. En désignant par a_q et b_q les coefficients de Fourier de φ_A et φ_K relativement à une suite orthonormée de fonctions propres du Laplacien (les harmoniques sphériques) on trouve donc

$$n\,T(A,K) = a_0 b_0 - \sum_{q>1} \left(\frac{\lambda_q}{n-1} - 1\right) a_q b_q$$

Posons $\mu_q = \frac{\lambda_q}{n-1} - 1$, donc $\mu_q > 0$ pour $q > 1$: il vient

(5,4) $$n\,T(A,K) = a_0 b_0 - \sum_{q>1} \mu_q a_q b_q \geq 0$$

Il est commode d'introduire les quantités :

$$\alpha^2 = \sum \mu_q a_q^2 \quad , \quad \beta^2 = \sum \mu_q b_q^2$$

On a $\sum \mu_q a_q b_q \leq \alpha\beta$, avec égalité si et seulement si $a_q = \lambda b_q$. Par suite

$$n\,T(A,K) \geq a_0 b_0 - \alpha\beta$$
$$n\,W_{n-2}(A) = a_0^2 - \alpha^2 \geq 0$$
$$n\,W_{n-2}(K) = b_0^2 - \beta^2 \geq 0$$

Les deux dernières inégalités entraînent $a_0 b_0 - \alpha\beta \geq 0$

Comme $(a_0 b_0 - \alpha\beta)^2 - (a_0^2 - \alpha^2)(b_0^2 - \beta^2) = (a_0\beta - b_0\alpha)^2$, il vient

$$a_0 b_0 - \alpha\beta \geq \sqrt{a_0^2 - \alpha^2}\,\sqrt{b_0^2 - \beta^2}$$

avec égalité si et seulement si $a_0\beta = b_0\alpha$. Au total, donc il vient

$$T(A,K) \geq \sqrt{W_{n-2}(A)}\,\sqrt{W_{n-2}(K)}$$

avec égalité si et seulement si $a_q = \lambda b_q$ et $a_0 = \lambda b_0$, c.a.d. si et seulement $A = \lambda K$ à une translation près.

Le résultat subsiste si φ_A et φ_K ne sont pas deux fois continûment différentiables.

Pour le voir, introduisons l'espace de Sobolev $\mathcal{S}$ défini comme la complétion Hilbertienne de l'espace des fonctions continûment différentiables pour la norme

$$\|\varphi\|_{\mathcal{S}}^2 = \int |\varphi|^2 + \int \nabla^\alpha \varphi \, \nabla_\alpha \varphi$$

Compte tenu de la continuité sur $C_0(S)$ de la fonctionnelle

$$n W_{n,2}(A) = \int \varphi_A^2 - \frac{1}{n-1}\int \nabla^\alpha \varphi_A \nabla_\alpha \varphi_A$$

il est facile de voir que $C_0(S)$ est un sous ensemble de $\mathcal{S}$, et que la topologie induite par $\mathcal{S}$ sur $C_0(S)$ coïncide avec la topologie propre de cet espace, (définie par la norme $\|A\| = \operatorname{Sup} \varphi_A(u)$). ~~En~~ On en déduit sans difficulté que la relation (5-4) subsiste pour A et K quelconques dans $C_0(S)$, et le reste de la démonstration se poursuit sans modification.

N.B. Lorsque φ_A est différentiable, le point de contact $x(u)$ associé ~~de~~ au plan tangent orthogonal à la direction u est $x(u) = u\,\varphi_A(u) + g^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha \varphi_A(u)\cdot\partial_\beta u$, et par suite :

$$|x|^2 = \varphi_A^2 + \nabla^\alpha\varphi_A \nabla_\alpha \varphi_A$$

Ainsi, la norme de φ_A dans l'espace $\mathcal{S}$ est :

$$\|\varphi_A\|^2_{\mathcal{S}} = \int |x(u)|^2 \; G_B(du)$$

De ce résultat on peut déduire :

<u>La donnée de la mesure τ_A détermine A à une translation près</u>

Notons, inversement, qu'il n'est pas vrai que toute mesure $\tau \geq 0$ vérifiant la condition barycentrique soit la mesure τ_A d'un $A \in C(S)$. Du point de vue, les mesures τ_A diffèrent profondément des mesures de surface G_A (sauf dans l'espace à 2 dimensions dans lequel $\tau_A = G_A$)

Notons aussi que les mesures $\{\tau_A, A \in C(S)\}$ forment une partie totale dans l'espace des mesures vérifiant la condition barycentrique $\int u\,\tau(du) = 0$. En effet, cela est déjà vrai si τ_A est de la forme $\varphi_A + (1/n-1)\,\Delta\varphi_A$. En particulier : $T(A,K) = T(A,K')$ $\forall A \in C(S)$ entraîne $K = K'$ à une translation près.

Si A est un segment de droite de direction u, il est facile de voir que τ_A est concentrée sur le grand cercle orthogonal à u, et uniformément distribuée sur celui-ci. D'où résulte en particulier que l'on a

$$T(A,K)=0$$

si et seulement si A et K sont deux segments parallèles

Dans l'espace à 3 dimensions, $n\, W_{n-2}(A) = 3\, W_1(A) = F(A)$ est la surface de A. En posant $F(A,K) = 3\,T(A,K)$, on obtient une fonctionnelle qui mérite le nom de cosurface. Pour la cosurface, on a donc les inégalités isopérimétriques

$$F(A,K) \geq \sqrt{F(A)}\ \sqrt{F(K)}$$

avec égalité si et seulement si A et K sont homothétiques.
Comme

$$F(A \oplus K) = F(A) + 2F(A,K) + F(K)$$

on en déduit

$$\sqrt{F(A\oplus K)} \geq \sqrt{F(A)} + \sqrt{F(K)}$$

avec toujours égalité si et seulement si A et K sont homothétiques.

Notons encore que, dans $\mathbb{R}^3$, la connaissance des mesures de surface G_A et G_K et des mesures τ_A et τ_K suffit pour exprimer le volume de $\alpha A \oplus \lambda K \oplus \rho B$:

$$\begin{aligned}V(\alpha A \oplus \lambda K \oplus \rho B) = {} & \alpha^3 V(A) + \lambda^3 V(K) + \rho^3 V(B)\\ & + 3\alpha^2\lambda\, W_1(A,K) + 3\lambda^2 \alpha\, W_1(K,A)\\ & + 3\alpha^2\rho\, W_1(A) + 3\alpha\rho^2\, W_2(A)\\ & + 3\lambda^2\rho\, W_1(K) + 3\lambda\rho^2\, W_2(K)\\ & + 6\,\alpha\lambda\rho\, T(A,K)\end{aligned}$$

6 - Caractère local de la correspondance $\varphi_A \to G_A$

Lorsque φ_A est deux fois continûment différentiable, la mesure de surface G_A admet la densité Det R, où R est le tenseur $R^\alpha_\beta = \varphi_A \delta^\alpha_\beta + \partial^\alpha_\beta \varphi_A$. Par conséquent, pour tout ouvert σ de la sphère unité S_0, la restriction de G_A à σ est univoquement déterminée par la donnée de la fonction d'appui φ_A sur cet ouvert σ. Le caractère local de la correspondance $\varphi_A \to G_A$ est également évident dans le cas des polyèdres convexes : on a alors simplement

$$(6\text{-}1) \qquad G_A(\sigma) = \sum_{u \in \sigma} \mu_{n-1}(F_A(u))$$

(μ_{n-1} : mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{n-1}$, $F_A(u) = \{x : x \in A, \langle u x \rangle = \varphi_A(u)\}$ est la face de A associée à la direction u, et la somme en $u \in \sigma$ ne comporte qu'un nombre fini de termes). Que l'expression (6-1) ne dépende que de la donnée de φ_A sur l'ouvert σ résulte du lemme général suivant.

<u>Lemme de Localisation</u> Soit $A \in C_0(\mathcal{K})$, φ sa fonction d'appui. Pour tout $u \in S_0$, on pose $\cancel{F(u) = A \cap \{x : \langle u x \rangle = \varphi(u)\}}$ $H(u) = \{x : \langle u x \rangle = \varphi(u)\}$ (hyperplan d'appui associé à u), $F(u) = A \cap H(u)$ (face de A associée à u) et $E_u = \{x : \langle u x \rangle \leq \varphi(u)\}$.

Alors, pour tout ouvert σ de la sphère unité et tout $u_0 \in \sigma$, on a

$$(6\text{-}2) \qquad F(u_0) = H(u_0) \cap \Big(\bigcap_{u \in \sigma} E_u \Big) = A(\sigma) \cap H(u_0)$$

Il est clair que le fermé $A(\sigma) = \bigcap_{u \in \sigma} E_u$ ne dépend que de la donnée de φ sur σ, de sorte que (6-2) exprime le caractère local de la correspondance $\varphi \to F(u)$.

On a évidemment $F(u_0) \subset A(\sigma) \cap H(u_0)$, puisque $A \subset A(\sigma)$, et il faut montrer l'inclusion inverse. Pour cela, nous prolongerons la fonction d'appui φ sur $\mathbb{R}^n$ entier en posant $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(y) = |y|\,\varphi(y/|y|)$ si $y \neq 0$. On sait que cette fonction $y \to \varphi(y)$ est convexe sur $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que le cône T_x défini par :

$$T_x = \{ y : \langle x, y \rangle > \varphi(y) \} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

est un cône ouvert convexe, et $T_x = \emptyset$ si et seulement si $x \in A$.

Si T_x n'est pas vide (i.e. si $x \notin A$) sa frontière est :

$$\partial T_x = \{ y : \langle x, y \rangle = \varphi(y) \}$$

Il est clair, en effet, que tout point de la frontière ∂T_x est de cette forme, à cause de la continuité de φ. Inversement, soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle x, y_0 \rangle = \varphi(y_0)$, et soit $y_1 \in T_x$ (puisque $T_x \neq \emptyset$) i.e. tel que $\langle x, y_1 \rangle > \varphi(y_1)$. Pour tout $\lambda \in [0,1)$, on a

$$\langle x, \lambda y_0 + (1-\lambda) y_1 \rangle > \lambda \varphi(y_0) + (1-\lambda)\varphi(y_1) \geq \varphi(\lambda y_0 + (1-\lambda) y_1)$$

c'est-à-dire $\lambda y_0 + (1-\lambda) y_1 \in T_x$ pour $0 \leq \lambda < 1$. En faisant tendre λ vers 0, on voit donc bien que $y_0 \in \partial T_x$

Soit alors $x \in A(\sigma) \cap H(u_0)$ pour un $u_0 \in \sigma$. Il faut montrer $x \in F(u_0)$. On vient de voir que $x \in H(u_0)$ équivaut à $u_0 \in \partial T_x$ lorsque $T_x \neq \emptyset$ (i.e. lorsque $x \notin A$). Si $x \notin A$, donc, le voisinage σ de u_0 rencontre T_x : il existe donc ~~[illegible]~~ un $u_1 \in \sigma$ tel que $\langle x, u_1 \rangle > \varphi(u_1)$ strictement. Mais cela contredit $x \in A(\sigma)$. Donc $T_x = \emptyset$, c'est-à-dire $x \in A$.

Ce lemme va nous permettre d'établir dans le cas général le caractère local de la correspondance $\varphi_A \to G_A$.

Théorème Soient A, A' compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$, φ_A et $\varphi_{A'}$ leurs fonctions d'appui et G_A, $G_{A'}$ leurs mesures de surface. Si l'on a $1_\sigma \varphi_A = 1_\sigma \varphi_{A'}$ pour un ouvert σ de la sphère unité, il en résulte $1_\sigma G_A = 1_\sigma G_{A'}$

D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que, pour tout ouvert $\sigma \subset S_0$, $G_A(\sigma)$ ne dépend que de l'ensemble

$$F_A(\sigma) = \bigcup_{u \in \sigma} F_A(u)$$

Pour $A \in C(\mathcal{K})$ et $x \in \complement A$, désignons par x' la projection de x sur A, et posons

$$r_A(x) = |x - x'| , \qquad u_A(x) = \frac{x - x'}{|x - x'|}$$

Si $r_A(x) \geq \rho > 0$, et si $A' \in C(\mathcal{K})$ est tel que $d(A, A') \leq \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ inférieur à ρ on trouve :

$$\langle u_A(x), u_{A'}(x) \rangle \geq \frac{\rho - \varepsilon}{\rho + \varepsilon}$$

$$|r_A(x) - r_{A'}(x)| \leq \varepsilon$$

Par suite, l'application $(x, A) \to (r_A(x), u_A(x))$ est uniformément continue sur le sous ensemble $\{x \notin A \oplus \rho B\}$ de $\mathbb{R}^n \times C(\mathcal{K})$

Soit alors $(r, u) \to \varphi(r, u)$ une fonction continue à support compact sur $\mathbb{R}^+ \times S_0$, telle que $f(r, u) = 0$ pour $r < \rho$.
On a :

$$\int_{\complement A} \varphi(r_A(x), u_A(x))\, dx = \int_0^\infty dr \int_{S_0} \varphi(r, u)\, G_{A \oplus rB}(du)$$

lorsque φ_A est deux fois continûment différentiable. A cause de la continuité uniforme rappelée ci-dessus, cette relation subsiste pour $A \in C(\mathcal{K})$ quelconque. Autrement dit, la mesure $dr \times G_{A \oplus rB}$ sur $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) \times S_0$ se déduit de la mesure $1_{\complement A}\, dx$ par l'application $x \to (r_A, u_A)$

Notons alors que $\bigcup_{u \in \sigma} F_A(u) \oplus r u$ est l'ensemble des $x \in \complement A$ tels que $u_A(x) \in \sigma$ et $r_A(x) \leq r$. Il en résulte :

$$V\left(\bigcup_{u\in\sigma} F_A(u) \oplus r u\right) = \int_0^r d\rho \int_\sigma G_{A \oplus \rho B}(du)$$

La dérivée en $r=0$ est la surface de $F_A(\sigma)$. Elle est aussi égale à $G_A(\sigma)$, comme on le voit à l'aide de la relation

$$G_{A\oplus\rho B} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \rho^{n-\ell-1} C_{n-1}^{\ell} G_A^{\ell} B^{n-\ell-1}$$

Soit :

(6-3) $$G_A(\sigma) = \text{Surface } F_A(\sigma)$$

ce qui démontre le caractère local de la correspondance $\varphi_A \to G_A$

Corollaire Si $A_1, \dots A_{n-1}$ et $A'_1, \dots A'_{n-1}$ sont des compacts convexes, et si leurs fonctions d'appui vérifient $\varphi_{A_i} = \varphi_{A'_i}$ sur un ouvert σ de la sphère unité, on a :

$$1_\sigma G_{A_1, \dots A_{n-1}} = 1_\sigma G_{A'_1, \dots A'_{n-1}}$$

Il suffit, pour le voir, d'appliquer le théorème aux ensembles $\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_{n-1} A_{n-1}$ et $\lambda_1 A'_1 \oplus \dots \oplus \lambda_{n-1} A'_{n-1}$ et d'utiliser la relation générale

$$G_{\lambda_1 A_1 \oplus \dots \oplus \lambda_{n-1} A_{n-1}} = \sum_{(n-1)^{n-1}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} G_{A_{i_1}, \dots A_{i_{n-1}}}$$

Remarque Par construction, $A(\sigma) = \bigcap_{u \in \sigma} E_{A,u}$ est le plus grand fermé convexe A' tel que $\varphi_{A'} = \varphi_A$ sur $\sigma \subset S_0$ ($A(\sigma)$ est compact si et seulement si 0 appartient à l'enveloppe convexe de σ). Ainsi la classe $C_A(\mathcal{K}) = \{A' : A' \in C_0(\mathcal{K}),\ 1_\sigma \varphi_A = 1_\sigma \varphi_{A'}\}$ admet un plus grand élément. Lorsque σ est un ouvert de S_0, cette classe admet egalement un plus petit element.

D'après le lemme de localisation, l'ensemble $F_A(\sigma) = \bigcup_{u \in \sigma} F_A(u)$ est égal à :

$$F_A(\sigma) = \bigcup_{u \in \sigma} \left(A(\sigma) \cap H(u_0) \right)$$

et ne dépend que de $1_\sigma \varphi_A$: il est donc le même pour tous les $A' \in C_A(\mathcal{K})$. Par conséquent, tout $A' \in C_A(\mathcal{K})$ contient l'enveloppe convexe fermée A_0 de $\{0\} \cup F_A(\sigma)$.

Mais A_0 lui même est dans $C_A(\mathcal{K})$. En effet, $A_0 \subset A'$ pour tout $A' \in C_A(\mathcal{K})$ entraine $\varphi_{A_0} \leq \varphi_{A'}$ sur σ. Mais, si $u_0 \in \sigma$ et $x \in F(u_0) = A(\sigma) \cap H(u_0)$, on a $x \in A_0$ et donc

$$\varphi_{A_0}(u_0) \geq \langle u_0, x \rangle = \varphi_A(u_0)$$

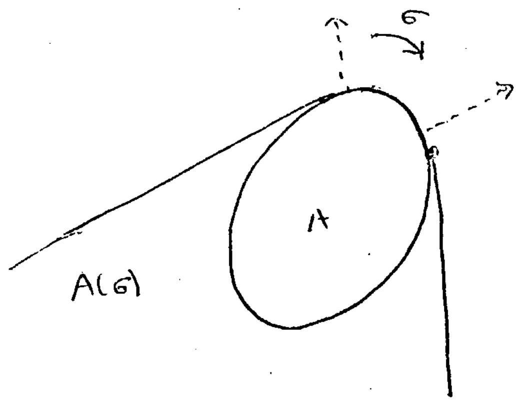
Par suite, $\varphi_{A_0} \geq \varphi_A$ sur σ, et l'égalité en résulte. Donc, A_0 est bien le plus petit élément de la classe $C_A(\sigma)$

L'application $A \to A_0(\sigma) = \bar{C}\left(\{0\} \cup F_A(\sigma)\right)$ associant à tout $A \in C_0(\mathcal{K})$ le plus petit élément de la classe $C_A(\mathcal{K})$ est <u>s.c.i. sur $C_0(\mathcal{K})$</u>.

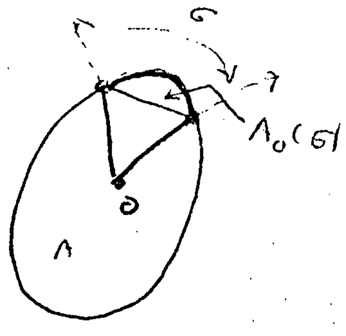
En effet, soit A_n une suite convergeant vers A dans $C_0(\mathcal{K})$, $A' = \lim A_{n_q,0}(\sigma)$ une valeur d'adhérence de $A_{n,0}(\sigma)$. Comme $\varphi_{A_{n_q,0}}(\sigma) = \varphi_{A_{n_q}}$ sur σ, on a $\varphi_{A'} = \varphi_A$ sur σ, donc $A' \supset A_0(\sigma)$. Ceci étant vrai pour toute valeur d'adhérence de la suite $A_{n,0}(\sigma)$, il en résulte bien

$$A_0(\sigma) \subset \underline{\lim}\, A_{n_q,0}(\sigma)$$

On notera que cette application n'est pas continue en général.



A(σ)



$A_0(\sigma)$

Il est clair que $A' \in C_A(\mathcal{S})$ si et seulement si $A_0(\sigma) \subset A' \subset A(\sigma)$.
On vient de voir, en effet, que c'était nécessaire — inversement, ces relations donnent $\varphi_A = \varphi_{A_0(\sigma)} \leq \varphi_{A'} \leq \varphi_{A(\sigma)} = \varphi_A$ sur σ, donc $\varphi_{A'} = \varphi_A$ sur σ -

Notre principe de localisation (Théorème ci-dessus) énonce donc que la restriction à l'ouvert σ de la mesure G_A ne dépend que de la classe $C_A(\mathcal{S})$ et non de A lui-même. Il va nous permettre de définir la mesure de surface G_F (non bornée) associée à un fermé convexe F d'intérieur non vide.

7 - Mesure de surface d'un fermé convexe

Soit $F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{F})$ un fermé convexe contenant O et d'intérieur non vide. Sa fonction d'appui est s.c.i., mais non continue en général. Nous supposerons essentiellement qu'il n'existe pas de droite D telle que $F = F \oplus D$. Cela revient à dire que le cône C_∞ des directions à l'infini de F ne contient pas de droites entières (seulement des demi-droites). On en déduit que son orthogonal $C_\infty^\perp$ a un intérieur C_0° non vide. Nous désignerons encore par C_0 l'ensemble des directions u appartenant à ce cône (en toute rigueur, on devrait écrire $C_0 \cap S_0$). On sait que la fonction d'appui φ_F, s.c.i. sur S_0 est <u>continue</u> sur C_0. C'est sur C_0, sous-espace ouvert de S_0 (donc localement compact, mais non compact) que nous allons définir la mesure de surface G_F.

Pour $u \in C_0$, l'ensemble $F(u) = F \cap H_F(u)$ est borné, donc compact (car φ_F est fini sur l'ouvert C_0). Posons

$$F(G) = \bigcup_{u \in G} F(u)$$

pour tout ouvert $G \subset C_0$ tel que $\overline{G} \subset C_0$: $\overline{G}$ est compact pour la topologie induite par S_0 sur C_0 ; donc φ_F est bornée sur $\overline{G}$ et par suite $F(G)$ lui-même est borné dans $\mathbb{R}^n$. Le compact

$$A_0(G) = \tilde{C}(\{0\} \cup F(G)\}$$

vérifie $\varphi_{A_0(G)} = \varphi_F$ sur G et constitue le plus petit élément de la classe $C_{A_0(G)}(\mathcal{K})$. Le plus grand fermé convexe F' tel que $\varphi_{F'} = \varphi_F$ sur G est $\tilde{F}(G) = \bigcap_{u \in G} E_{u, \varphi_F(u)}$. La classe $C_{A_0(G)}(\mathcal{K})$ est constituée des compacts K tels que $A_0(G) \subset K \subset \tilde{F}$. Le fermé F lui-même vérifie $A_0(G) \subset F \subset \tilde{F}(G)$ et apparaît comme la limite d'une suite $K_n \in C_{A_0(G)}(\mathcal{K})$ (par exemple $K_n = B_n \cap F$, où B_n est la boule de rayon n : pour n assez grand, $n \supset A_0(G)$ et $K_n \in C_{A_0(G)}(\mathcal{K})$) de compacts vérifiant $\varphi_{K_n} = \varphi_F$ sur G. On a alors :

$1_G G_{K_n} = 1_G G_{A_0(G)}$, et on peut donc poser $1_G G_F = 1_G G_{A_0(G)}$.

Si maintenant G_n est une suite croissante d'ouverts de S_0 tels que $\overline{G_n} \subset G_{n+1} \subset C_0$ et $G_n \uparrow C_0$, on aura

$1_{G_n} G_{A_0(G_n)} = 1_{G_n} G_{A_0(G_{n+m})}$ pour tout $n, m > 0$

On peut alors définir la mesure σ-finie G_F sur $\mathcal{C}_0$, en posant pour tout borélien $S \subset C_0$

$$G_F(S) = \lim \uparrow G_{A_0(\sigma_n)}(S)$$

et on a $1_\sigma G_F = 1_\sigma G_{A_0(\sigma)}$ pour tout ouvert σ tel que $\bar{\sigma} \subset C_0$. Autrement, $G_F(\sigma)$ est la mesure de la surface de l'ensemble $F(\sigma) = \bigcup_{u \in \sigma} F(u)$ des faces de F associées aux directions $u \in \sigma$, mesure finie pourvu que $\bar{\sigma} \subset C_0$. Mais, naturellement, $G_F(C_0) = \infty$ si F n'est pas compact.

8 - Support des mesures G_A^k

Si $A \in C(S_K)$, nous savons que le support de la mesure de surface G_A est l'adhérence des directions extrémales. Nous allons obtenir un résultat analogue pour les mesures G_A^k, $k \leq n-1$ ($G_A^k = G_{A_1, \dots A_{n-1}}$ avec k facteurs A_i égaux à A, et $n-k-1$ égaux à la boule unité B. En particulier, $G_A^{n-1} = G_A$ est la mesure de surface elle-même). Pour cela, nous partirons de la relation classique

$$(8\text{-}1) \qquad W_{n-k}(A) = \frac{b_n}{b_k} \int_{\mathcal{S}_k} \mu_k(\Pi_S A)\, \varpi^k(dS)$$

(b_n : volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}_k$: ensemble des sous espaces de dimension k dans $\mathbb{R}^n$, μ_k : mesure de Lebesgue dans $S \in \mathcal{S}_k$ identifié à $\mathbb{R}^k$; $\Pi_S A$: projection de A sur $S \in \mathcal{S}_k$; $\varpi^k(dS)$: probabilité (unique) sur $\mathcal{S}_k$ invariante par rotations)

Remplaçons A par $A \oplus \rho K$ dans (8-1) et prenons la dérivée en $\rho = 0$. A gauche, nous trouvons

$$\frac{d}{d\rho} W_{n-k}(A \oplus \rho K)\Big|_{\rho=0} = \frac{k}{n} \int G_A^{k-1}\, \varphi_K$$

En ce qui concerne le terme du second membre de (8-1), nous voyons facilement (en utilisant la convexité de $\rho \to \mu_k(\Pi_S A \oplus \rho \Pi_S K)$) qu'il est légitime d'effectuer la dérivation sous le signe $\int$. On a

$$\frac{d}{d\rho}\,\mu_q(\Pi_S A \oplus \rho\,\Pi_S K)\Big|_{\rho=0} = \int_S G_A^S(du)\,\varphi_k(u)$$

$G_A^S(du)$ designant la mesure de surface de $\Pi_S A$ (considéré comme un compact convexe dans $S = \mathbb{R}^q$). Cette mesure G_A^S (définie sur la boule unité $S_0 \cap S$ de $S \in \mathcal{S}_q$) peut, évidemment, aussi être considérée comme une mesure sur S_0 concentrée sur le cercle $S_0 \cap S$. On a ainsi:

$$\int G_A^{q-1}\varphi_K = \frac{n\,b_n}{q\,b_q}\int_{\mathcal{S}_q}\varpi^q(ds)\int_S G_A^S\,\varphi_K$$

pour tout $K \in C_0(S_0)$, et par suite:

$$(8\text{-}2)\qquad \boxed{G_A^{q-1}(\cdot) = \frac{n\,b_n}{q\,b_q}\int_{\mathcal{S}_q}\varpi^q(ds)\,G_A^S(\cdot)}\qquad (q=2,3,\dots n)$$

Il est facile de voir que l'application $S \to G_A^S$ est continue sur $\mathcal{S}_q$. Si φ est une fonction continue positive, on a donc $\int G_A^{q-1}\varphi = 0$ si et seulement si $\int G_A^S\varphi = 0$ pour <u>tout</u> $S \in \mathcal{S}_q$. Par suite, si G est un ouvert dans S_0, on aura $G_A^{q-1}(G) = 0$ si et seulement si $G_A^S(G) = 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}_q$. Autrement dit:

le support S_A^{q-1} de G_A^{q-1} est le complémentaire de la réunion des ouverts G tels que $G_A^S(G) = 0$ pour tout $S \in \mathcal{S}_q$

Si $S \cap G = \emptyset$, $G_A^S(G)$ est nul. Si $S \cap G$ n'est pas vide, G_A^S, mesure de surface de $\Pi_S A$ (considéré comme sous ensemble de S) est nul sur G si $G \cap S$ ne contient aucune direction extrémale pour $\Pi_S A$. Or une direction $u \in S$ est extrémale pour $\Pi_S A$ si et seulement si elle est la projection sur S d'une face (de dimension $\leq n-q+1$) d'un cone C_x des normales à un $x \in \partial A$, face contenant évidemment elle même la direction u. On en déduit:

TH. 8 || Le support S_A^{q-1} de G_A^{q-1} est l'adhérence de la réunion des faces de dimension $\leq n-q+1$ des cones C_x des normales à A lorsque x parcourt ∂A

Pour $q = n$, $n-q+1 = 1$, et on retrouve le fait que le support S_A de la mesure de surface est l'adhérence de l'ensemble des directions extrémales. Pour $q = 2$, $G_A^1 = \tau_A$, et la réunion des faces de dimension $\leq n-1$ est la réunion des frontières des cones C_x. Son complémentaire est donc la réunion $\bigcup_{x\in\partial A}\mathring{C}_x$ des intérieurs de ces mêmes cônes, donc un ensemble ouvert. Ainsi:

Cor.1 Le support S_A^{n-1} de la mesure τ_A est le complémentaire de la réunion des intérieurs des cônes des normales à A.

Explicitement: $\complement S_A^{n-1} = S_0 \cap (\bigcup_{x \in \partial A} \mathring{C}_x)$. Comme $\mathring{C}_x$ est un cône ouvert convexe, $\complement S_A^{n-1}$ est la réunion (au plus dénombrable) des cônes ouverts convexes disjoints $\mathring{C}_x$ associés aux sommets de la frontière ∂A (x est un sommet si $\mathring{C}_x \neq \phi$). En particulier, il en résulte que S_A^{n-1} est connexe.

En effet, pour chaque $u \notin S_A^{n-1}$, posons $S_u = \mathring{C}_x \cap S_0$, x désignant le sommet de ∂A tel que $u \in \mathring{C}_x$. La frontière de S_u, comme celle du cône convexe C_x, est connexe. Supposons qu'il existe deux ouverts non vides σ_1 et σ_2 tels que $\sigma_1 \cup \sigma_2 \supset S_A^{n-1}$ et $\sigma_1 \cap \sigma_2 \cap S_A^{n-1} = \phi$. Pour chaque $u \notin S_A^{n-1}$, ∂S_u est $\subset S_A^{n-1}$, donc $\partial S_u \subset \sigma_1$ (ou $\subset \sigma_2$) puisque ∂S_u est connexe. On peut donc remplacer σ_1 par $\sigma_1 \cup S_u$ et σ_2 par $\sigma_2 \setminus \overline{S_u}$, et par suite supposer que pour tout $u \in S_A^{n-1}$ on a soit $S_u \subset \sigma_1$ et $S_u \cap \sigma_2 = \phi$ soit $S_u \subset \sigma_2$ et $S_u \cap \sigma_1 = \phi$. Mais ceci implique $\sigma_1 \cup \sigma_2 = S_0$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \phi$. Or S_0 est connexe, et ceci n'est donc possible que si $\sigma_1 = \phi$ ou $\sigma_2 = \phi$.

Notons aussi:

Cor.2 Pour que τ_A soit nulle sur un ouvert $\sigma \subset S_0$, il faut et il suffit que l'on ait $\varphi_A(u) = \langle u, x_i \rangle$ sur chacune des composantes connexes σ_i de σ.

En effet, $\sigma \subset \complement S_A^{n-1}$ équivaut à $\sigma = \bigcup \sigma_i$ où les ouverts σ_i représentent celles des intersections $\mathring{C}_x \cap \sigma$ qui ne sont pas vides, et $u \in \mathring{C}_x$ équivaut à $\varphi_A(u) = \langle u\, x \rangle$

On a toujours $\tau_A = \varphi_A + \frac{1}{n-1} \Delta \varphi_A$ (le laplacien étant pris au sens de la théorie des distributions). Le résultat ci-dessus signifie que, pour un ouvert connexe $\sigma \subset S_0$ donné, les seules fonctions d'appui φ_A vérifiant $\varphi_A + (1/n-1) \Delta \varphi_A = 0$ sur σ sont celles pour lesquelles on a $1_\sigma \varphi_A = 1_\sigma \langle \cdot\, x \rangle$. Mais l'équation $\varphi_A + (1/n-1) \Delta \varphi_A = 0$ sur σ

admet d'autres solutions (qui ne sont pas des fonctions d'appui).

En particulier, il n'est pas vrai que la donnée de τ_A sur un ouvert convexe G détermine φ_A sur G à une translation près. Il est facile de former des contre exemples (par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, il existe des convexes de révolution admettant une ~~courbure moyenne~~ mesure $\tau_A = c\, G_B$ sur un ouvert G, c'est-à-dire telle que la somme $R_1 + R_2$ des deux rayons de courbure principaux reste constante sur G sans que ni R_1, ni R_2 ne soient séparément constants sur G. La correspondance $\tau_A \to \varphi_A$ est de caractère global, mais non local.