N-508

# LES MESURES DE SURFACE, ET LES EROSIONS INFINITESIMALES

-=-=-=-=-=-

G. MATHERON

FONTAINEBLEAU FEVRIER 1977

Table

# Les Mesures de Surface, et les Erosions Infinitésimales

# Les Mesures de Surface, et les Erosions infinitésimales

Dans l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ des compacts convexes, les homothétiques $\rho K$ d'un $K \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ donné forment un demi-groupe, que nous pouvons aussi considérer comme un demi-groupe d'opérateurs associant à chaque $A \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ les érodés $A_\rho = A \ominus \rho \check{K}$. (Il s'agit bien d'un demi groupe d'<u>opérateurs</u>, puisque $A_\rho \ominus \rho' \check{K} = A \ominus (\rho+\rho')\check{K} = A_{\rho+\rho'}$.) L'idée directrice, dans ce qui suit, consiste à essayer de caractériser ce demi-groupe d'opérateurs par son générateur, ou <u>érosion infinitésimale</u>. Du fait que les opérateurs en question ne sont pas linéaires, l'opération ne réussira que partiellement, et c'est seulement dans $\mathbb{R}^2$ que l'intégrale de la dérivée des érodés d'un ensemble donné reconstitue toujours l'ensemble de départ. Dès que $n$ est $\geq 3$, il y a des contre exemples.

Dans la première partie, j'introduis la notion de mesure de surface $G_A$ associée à un $A \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, et je donne la condition nécessaire et suffisante que doit vérifier une mesure $G$ donnée sur la sphère unité pour être la mesure de surface $G_A$ d'un $A \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, d'ailleurs nécessairement unique (dans le cas non dégénéré). Je définis ensuite l'opérateur d'érosion infinitésimale dans le cas général de l'espace à $n$ dimensions. On voit s'introduire de manière très naturelle des notions qui s'apparentent à la théorie du potentiel, le „potentiel" associé à une mesure de surface $G_A$ n'étant autre que la fonction d'appui $\varphi_A$ du convexe $A$ correspondant. Dans la troisième partie, j'examine plus en détail le cas de l'espace $\mathbb{R}^2$.

# I- Les mesures de surface

A tout $A \in \mathcal{C}_0(\mathcal{K})$ (compact convexe contenant l'origine $O$) est associée une mesure positive $G_A$ sur la sphère unité $S_0$, appelée mesure de surface ou mesure superficielle de $A$, qui vérifie la propriété suivante :

$$(1) \qquad n\, W_1(A,K) = \int \varphi_K(u)\, G_A(du) \qquad (K \in \mathcal{C}_0(\mathcal{K}))$$

($n$ est le nombre de dimensions de l'espace euclidien, $W_1$ la première fonctionnelle mixte de la Géométrie Intégrale, $\varphi_K$ la fonction d'appui de $K$). Comme les fonctions d'appui $\varphi_K$, $K \in \mathcal{C}_0(\mathcal{K})$ forment une partie totale dans l'espace $\mathcal{C}(S_0)$ des fonctions continues sur la sphère unité $S_0$ (muni de la convergence uniforme) la relation (1) suffit pour caractériser complètement la mesure $G_A$, qui est donc nécessairement unique.

## 1-1- Existence

Il reste à établir l'existence de la mesure superficielle. Le plus simple est de partir du cas où $A$ est un polyèdre, et de faire un passage à la limite.

Soit donc, tout d'abord, $A$ un polyèdre compact convexe, $F_i$, $i = 1, 2, \dots k$ ses $(n-1)$-faces et $G_i$ le $(n-1)$-volume de $F_i$. Nous poserons par définition :

$$G_A = \sum_{i=1}^{k} G_i\, \delta_{u_i}$$

($u_i$ est le vecteur normal unitaire, orienté vers l'extérieur, associé à la face $F_i$, et $\delta_{u_i}$ la mesure de Dirac concentrée au point $u_i \in S_0$). Il est facile de voir que la mesure $G_A$ ainsi définie vérifie bien la relation (1). En particulier, si nous prenons $K = B$ (boule unité de $\mathbb{R}^n$), nous obtenons

$$n W_1(A, B) = \int G_A(du)$$

c'est-à-dire la *surface* du polyèdre convexe.

Si, maintenant, $A$ est un compact convexe quelconque, nous pouvons toujours trouver une suite $\{A_n\}$ de polyèdres convergeant vers $A$ dans $C(\mathcal{K})$. Alors, la suite $\{\int G_{A_n}\}$ converge vers la surface de $A$, donc reste bornée. Par suite, la suite $\{G_{A_n}\}$ admet une valeur d'adhérence $G_A$ (pour la convergence faible). Comme la relation (1), vérifiée par chacun des $A_n$, passe à la limite, elle est encore vérifiée par la mesure $G_A$. Du fait que les fonctions d'appui $\varphi_K$ forment une partie totale dans $\mathcal{C}(S_0)$, $G_A$ est l'unique mesure satisfaisant à cette relation. La suite compacte $\{G_{A_n}\}$, admettant cette unique valeur d'adhérence, converge donc vers $G_A$. Le même raisonnement montre la *continuité de* l'application $A \to G_A$ de $C(\mathcal{K})$ dans l'espace des mesures positives sur la sphère unité :

$$A_n \to A \text{ dans } C(\mathcal{K}) \Longrightarrow G_{A_n} \to G_A \text{ dans } \mathcal{M}^+(S_0)$$

Dans le cas de la *boule unité* $B$, la mesure de surface $G_B(du)$ coïncide avec la mesure associée avec la notion usuelle d'angle solide. Si le convexe $A$ est assez régulier pour admettre des rayons de courbure en tout point de sa surface, la mesure superficielle qui lui est associée est donnée par :

$$G_A(du) = \frac{1}{C(u)} G_B(du)$$

où $C(u)$ est la courbure totale (au point de la frontière $\partial A$ de $A$ où la normale extérieure est $u$)

D'après sa définition même, la mesure superficielle $G_A$ est invariante pour toute translation affectant $A$. Notons aussi que la fonctionnelle $W_1(A, K)$ figurant dans la relation (1) est également invariante pour les translations de $K$. Or changer $K$ en son translaté $K_h$ revient à remplacer la fonction d'appui $\varphi_K$ par $u \to \varphi_K(u) + \langle u, h \rangle$ (produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ du vecteur unité $u \in S_0$ par le vecteur translation $h$). Ainsi, toute mesure superficielle doit vérifier :

$$(2) \qquad \int \langle u, u_0 \rangle \, G_A(du) = 0 \qquad (u_0 \in S_0)$$

La mesure $G_A$ sur $S_0$ peut également être considérée comme une mesure dans $\mathbb{R}^n$ concentrée sur la sphère unité. La relation (2) est alors équivalente à :

$$(2') \qquad \int u \, G_A(du) = 0$$

et exprime que toute mesure superficielle admet $O$ comme barycentre. Nous verrons dans un instant que, du moins dans le cas non dégénéré, cette condition nécessaire est également suffisante pour qu'une mesure positive donnée soit la mesure de surface d'un compact convexe.

## 1-2 Caractérisation des mesures de Surface

Cherchons maintenant sous quelle condition une mesure $G \geq 0$ donnée sur $S_0$ est une mesure de surface. Il y a lieu de considérer 2 cas, selon que $G$ est concentrée sur un grand cercle (cas dégénéré) ou non. Pour le voir, à tout $A \in C(S_c)$ associons la quantité :

$$(3) \qquad \alpha = \alpha(A) = \operatorname{Inf} \left\{ \int G_A(du) \langle u, u_0 \rangle_+ \, , \ u_0 \in S_0 \right\}$$

Cet inf est obtenu en un point $u_a \in S_0$. Si $\alpha = 0$, la condition barycentrique (2) donne :

$$\int G_A(du) \langle u, u_a \rangle_+ = \int G_A(du) \langle u, u_a \rangle_- = 0$$

donc $\int G_A(du) \, | \langle u, u_a \rangle | = 0$. Cela signifie que $G_A$ est <u>concentrée sur le grand cercle</u> $S_0 \cap u_a^{\perp}$. Le vol(n-1)-volume de la projection $\Pi_{u_a^{\perp}} A$ de $A$ sur l'hyperplan $u_a^{\perp}$ orthogonal à $u_a$ est alors

$$V_{n-1}(\Pi_{u_a^{\perp}} A) = \int \langle u, u_a \rangle_+ \, G_A(du) = 0$$

Donc $A$ est contenu dans un hyperplan $H$ contenant $u_a$ et $V(A) = 0$. La mesure de surface $G_A$ est alors nécessairement de la forme

$$(4) \qquad G_A = a(\delta_{u_1} + \delta_{\check{u}_1})$$

c'est-à-dire concentrée sur les 2 vecteurs unitaires symétriques $u_1$ et $\check{u}_1$ orthogonaux à $H$ (les poids $a = G_A(u_1) = G_A(\check{u}_1)$ sont nécessairement les mêmes, à cause de la condition barycentrique (2).

Inversement, si $G$ est une mesure de la forme (4), elle est la mesure de surface de n'importe quel compact convexe contenu dans l'hyperplan $U_1^\perp$ et admettant un $(n-1)$-volume égal à a. Dans le cas dégénéré, la correspondance $A \to G_A$ n'est donc pas biunivoque. Au contraire, dans le cas non dégénéré ($G_A$ non concentrée sur un grand cercle, ou, ce qui revient au même, $\alpha(A) > 0$ strictement) nous allons voir que $A$ est entièrement déterminé par la donnée de sa mesure superficielle. Plus précisément, nous allons démontrer l'énoncé suivant :

<u>Théorème 1</u> - Soit $G$ une mesure positive sur la sphère unité $S_0$ dans $\mathbb{R}^n$. Si $G$ n'est pas concentrée sur un grand cercle, elle est la mesure de surface $G_A$ associée à un compact convexe $A \in C(\mathcal{K})$, <u>nécessairement unique</u> (à une translation près), et de volume $V(A) > 0$, si et seulement si elle vérifie la condition barycentrique :

$$(2) \qquad \int u \, G(du) = 0$$

Si $G$ est concentrée sur un grand cercle, elle est la mesure de surface d'un compact convexe (non unique) $A$ de volume $V(A)$ nécessairement nul si et seulement si elle est de la forme :

$$(4) \qquad G = a \left[ \delta_{u_1} + \delta_{\check{u}_1} \right]$$

Le second énoncé, relatif au cas dégénéré, a déjà été démontré. En ce qui concerne le premier, nous avons déjà vu que la condition barycentrique (2) est nécessaire, et noté aussi que l'on a

$$(5) \qquad \alpha = \operatorname{Inf} \left\{ \int \langle u, u_0 \rangle_+ G(du) \,,\ u_0 \in S_0 \right\} > 0$$

(strictement) si et seulement si la mesure positive $G$ de barycentre $O$ n'est pas concentrée sur un grand cercle.

Inversement, soit $G$ une mesure positive vérifiant les conditions (2) et (5). Nous devons montrer $G = G_A$ pour un $A \in C(S)$ nécessairement unique (son volume sera nécessairement $> 0$, puisque $G$ n'est pas de la forme (4)). Pour cela, nous utiliserons le résultat classique suivant :

**Théorème de Brünn-Minkowski** Soient $A$ et $K$ compacts convexes et $V(A) > 0$. Alors :

$$(6) \qquad V(A \oplus K) \geq \left[ (V(A))^{1/n} + (V(K))^{1/n} \right]^n$$

avec égalité si et seulement si $K = \lambda A$ pour un $\lambda \geq 0$

De même :

$$(7) \qquad W_1(A, K) \geq (V(A))^{\frac{n-1}{n}} (V(K))^{\frac{1}{n}}$$

avec égalité si et seulement si $K = \lambda A$ pour un $\lambda \geq 0$

Outre la quantité $\alpha$, défini en (5), nous utiliserons la quantité $\gamma = \gamma(G)$ définie par :

$$(8) \qquad \gamma(G) = \operatorname*{Inf}_{K \in C_1(S)} \left\{ \int G(du)\, \varphi_K(u) \right\}$$

($C_1(S)$ désigne l'ensemble des compacts convexes de volume $V(K) = 1$). Posons d'abord un lemme :

**Lemme 1** - On a $\gamma > 0$, et cet Inf est atteint pour un compact convexe $K_0 \in C_1(S_k)$ unique (à une translation près)

En effet, soit $K \in C_1(S_k)$ (i.e. $V(K) = 1$) tel que $0 \in K$, $\varphi_K$ sa fonction d'appui et :

$$M_K = \sup \{ \varphi_K(u),\ u \in S_0 \} \tag{9}$$

Ce Sup est atteint pour un $u_0 \in S_0$, et on vérifie sans peine que l'on a alors nécessairement :

$$\varphi_K(u) \geq M_K \langle u, u_0 \rangle_+ \qquad (u \in S_0)$$

Donc :

$$\int G \varphi_K \geq M_K \int G_A(du) \langle u, u_0 \rangle_+ \geq \alpha M_K$$

Soit alors $\{K_n\}$ une suite dans $C_1(S_k)$ telle que $\int G \varphi_{K_n} \to \gamma$. On peut supposer $0 \in K_n$ (quitte à effectuer des translations convenables qui ne modifient pas l'intégrale $\int G K_n$, à cause de la condition barycentrique) et poser $M_n = M_{K_n}$. Comme on a $\int G \varphi_{K_n} \to \gamma$, $\int G \varphi_{K_n} \geq \alpha M_n$ et $\alpha > 0$ (condition (51)), il en résulte que la suite $M_n$ est bornée : $M_n \leq M < \infty$ pour un $M$ de la forme $(\gamma + \varepsilon)/\alpha$. Ainsi les $K_n$ restent contenus dans la boule de rayon $M$ et forment donc une partie compacte de $C_1(S_k)$. Cette suite admet donc une valeur d'adhérence $K_0 \in C_1(S_k)$ et on a :

$$\int G \varphi_{K_0} = \gamma$$

Comme $V(K_0)=1$, on a $M_{K_0} = \sup \varphi_{K_0} > 0$, donc $\gamma = \int G \varphi_{K_0} \geq \alpha M_0$ et par suite $\gamma > 0$.

Il reste à montrer l'unicité de $K_0$. Supposons que l'on ait $\int G \varphi_{K_1} = \gamma$ pour un $K_1 \in C_1(S_K)$. Alors, pour $\lambda$ tel que $0 < \lambda < 1$, le compact

$$K_\lambda = \lambda K_0 \oplus (1-\lambda) K_1$$

vérifie $\varphi_{K_\lambda} = \lambda \varphi_{K_0} + (1-\lambda)\varphi_{K_1}$, donc aussi

$$\int G \varphi_{K_\lambda} = \gamma$$

D'après l'inégalité (6), d'autre part, on trouve $V(K_\lambda) \geq 1$ avec égalité si et seulement si $K_1$ est homothétique à $K_0$, c'est-à-dire ici égal à $K_0$ (à une translation près) puisque $V(K_1) = V(K_0) = 1$.

Supposons d'abord $V(K_\lambda) > 1$ strictement. Alors le convexe $K' = (V(K_\lambda))^{-1/n} K_\lambda$ vérifie $V(K') = 1$ et :

$$\int G \varphi_{K'} = \gamma \, V(K_\lambda)^{-1/n} < \gamma$$

Mais cela est impossible, d'après la définition même de $\gamma$. Donc $V(K_\lambda) = 1$, et $K_0 = K_1$ à une translation près.

## Démonstration du Théorème 1

Le $K_0 \in C_1(S_K)$ dont l'existence et l'unicité résultent du lemme 1 a un intérieur non vide (puisque $V(K_0) = 1$). Compte tenu de la condition barycentrique (2), nous pouvons donc (quitte à effectuer une translation sur le $K_0$, qui ne modifie pas l'intégrale $\int G \varphi_{K_0} = \gamma$) supposer que l'origine O des coordonnées est un point intérieur de $K_0$, soit $O \in \mathring{K}_0$ [N.B. : c'est ici seulement qu'est utilisée la condition barycentrique (2), qui n'intervient nulle part ailleurs dans la démonstration. Mais aussi bien l'hypothèse $O \in \mathring{K}_0$ va jouer un rôle essentiel]

Dans ces conditions, pour tout $K \in C_0(S_c)$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit, l'ensemble $K_0 \ominus \varepsilon \check{K} \in C_0(S_c)$ est non vide, de volume non nul et :

$$\varphi_{K_0 \ominus \varepsilon \check{K}} \leq \varphi_{K_0} - \varepsilon \varphi_K$$

En remarquant que $K' = [V(K_0 \ominus \varepsilon \check{K})]^{-1/n} K_0 \ominus \varepsilon \check{K}$ est dans $C_1(S_c)$, on trouve donc :

$$\gamma \, [V(K_0 \ominus \varepsilon \check{K})]^{1/n} \leq \int G \varphi_{K_0 \ominus \varepsilon \check{K}} \leq \int G \varphi_{K_0} - \varepsilon \int G \varphi_K$$

$$= \gamma - \varepsilon \int G \varphi_K$$

Mais, pour $\varepsilon \downarrow 0$, on a aussi (puisque $V(K_0) = 1$)

$$\left(V(K_0 \ominus \varepsilon \check{K})\right)^{1/n} = 1 - \varepsilon W_1(K_0, K) + o(\varepsilon)$$

et par suite :

(a) $$\int G \varphi_K \leq \gamma \, W_1(K_0, K)$$

De la même manière, la somme de Minkowski $K_0 \oplus \varepsilon K$ a comme fonction d'appui $\varphi_{K_0} + \varepsilon \varphi(K)$ et un volume vérifiant ~~de la forme~~ :

$$[V(K_0 \oplus \varepsilon K)]^{1/n} = 1 + \varepsilon W_1(K_0, K) + o(\varepsilon)$$

La relation :

$$\gamma \left[V(K_0 \oplus \varepsilon K)\right]^{1/n} \le \int G \left[q_{K_0} + \varepsilon q_K\right] = \gamma + \varepsilon \int G q_K$$

donne donc cette fois :

$$(6) \qquad \gamma W_1(K_0, K) \le \int G q_K$$

En comparant (a) et (6), on voit que l'égalité :

$$\int G q_K = \frac{\gamma}{n} \int G_{K_0} q_K$$

est vérifiée pour tout $K \in C_0(S_\sigma)$. Comme les fonctions d'elles forment une partie totale dans $\mathcal{C}(S_0)$, il en résulte $G = (\gamma/n)\, G_{K_0}$, c'est à dire :

$$G = G_A \quad , \text{ avec } \quad A = \left(\frac{\gamma}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} K_0$$

Donc, $G$ est bien la mesure de surface d'un $A \in C(S_\sigma)$ de volume non nul. Il reste à montrer son unicité. Supposons $G = G_{A'}$ pour un $A' \in C(S_\sigma)$ (de volume nécessairement). D'après l'inégalité (7) de Brünn-Minkowski, l'inf :

$$\gamma = \inf \left\{ \int G_{A'} q_K \; ; \; K \in C_1(S_\sigma) \right\}$$

est atteint si et seulement si $K$ est homothétique à $A'$. Or, d'après le lemme 1, cet inf est atteint si et seulement si $K = K_0$. Donc : $A' = \lambda K_0$, et la condition $\int G_{A'} q_{K_0} = \gamma$ donne $\lambda = (\gamma/n)^{1/(n-1)}$ et par suite $A' = A$.

<u>Corollaire 1</u> Soient $A$, $A'$ compacts convexes et $V(A) > 0$. Si $W_1(A, K) = W_1(A', K)$ pour tout $K \in C(S_0)$, on a $A = A'$ à une translation près.

En effet, on a $G_A = G_{A'}$ (puisque les $\varphi_K$ forment une partie totale dans $\mathcal{C}(S_0)$). Comme $V(A)$ est $> 0$, $G_A$ n'est pas concentrée sur un grand cercle et l'énoncé d'unicité du théorème donne $A = A'$ à une translation près.

<u>Corollaire 2</u>. Soient $A$ et $A' \in C(S_0)$ tels que $W_1(K, A) = W_1(K, A')$ pour tout $K \in C(S_0)$. Alors $A = A'$ à une translation près.

En effet, d'après le théorème, l'ensemble $G_K$ des mesures de surface des $K \in C(S_0)$ est dense dans l'ensemble des mesures positives vérifiant la condition barycentrique (?). On a donc $\varphi_A = \varphi_{A'}$ à un terme près de la forme $\langle u, t \rangle$, c'est à dire $A = A'$ à une translation près.

<u>Remarque</u> Dans le cas où $G(B) = g\, G_B$ admet une <u>densité</u> $g(u)$ par rapport à la mesure des angles solides $G_B$, (égale à l'inverse ~~~~ de la courbure totale), on voit qu'un compact convexe régulier $A$ est uniquement déterminé par la donnée de sa courbure totale $1/g$, et inversement <u>toute</u> <u>fonction</u> positive $C(u) = 1/g(u)$ <u>est la courbure totale d'un unique convexe</u> $A$ … pourvu qu'elle ne soit pas identiquement infinie à … d'un grand cercle, et que $\int (1/C)\, G_B$ soit finie, et que $\int (1/C)\, u\, G_B$ soit nul.

Notons encore une propriété importante : <u>La mesure de surface est décroissante par érosion</u>. Autrement dit, si $A$ et $K$ sont compacts et convexes dans $\mathbb{R}^n$, et si $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$, on a :

(10) $$G_{A \ominus \check{K}} \leq G_A$$

En effet, si $A$ est un polyèdre, $A \ominus \check{K}$, intersection de polyèdres translatés de $A$, est lui même un polyèdre dont chaque face est parallèle à une face de $A$ et plus petite que celle ci. L'inégalité (10), vraie pour les polyèdres, passe sans difficulté à la limite, à cause de la continuité de l'application $A \to G_A$, et reste donc valable pour tout $A \in C(\mathcal{K})$.

Dans le cas de l'espace à <u>deux dimensions $\mathbb{R}^2$</u>, nous avons un résultat plus fort :

(10') $$G_{A \ominus \check{K}} \leq (G_A - G_K)_+$$

Bien que cette relation (10') paraisse géométriquement très intuitive, je n'ai pourtant pas trouvé de démonstration directe simple, et il me faudra un assez long détour pour l'établir.

## 1-3 - Les mesures périmétriques dans $\mathbb{R}^2$

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application continue $A \to G_A$ de $C(\mathcal{K})$ dans l'ensemble des mesures vérifiant la condition barycentrique devient une <u>bijection</u> : autrement dit, <u>toute</u> mesure $G$ sur le cercle unité $S_0$ vérifiant

$$\int \cos\theta \, G(d\theta) = \int \sin\theta \, G(d\theta) = 0$$

est la mesure périmétrique d'un compact convexe de $\mathbb{R}^2$ <u>unique</u> à une translation près.

Dans $\mathbb{R}^2$, en effet, les restrictions relatives aux cas dégénérés disparaissent : car, ici, les „grands cercles„ de la sphère unité sont constitués de deux points diamétralement opposés sur $S_0$. Toute mesure $G$ vérifiant (7) et concentrée sur un grand cercle est donc, automatiquement, de la forme requise (4) pour être une mesure périmétrique ; et, inversement, une mesure de cette forme est la mesure périmétrique d'un segment de droite orthogonal à $u_1$, donc unique à une translation près.

La relation entre fonction d'appui $\varphi_A$ et mesure périmétrique $G_A$ peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes équivalentes suivantes :

$$\varphi_A + \varphi''_A = G_A \tag{11}$$

$$\varphi_A(\theta) = a \cos(\theta - \theta_0) + \int_0^\theta \sin(\theta - \varphi)\, G_A(d\varphi) \tag{11'}$$

Dans (11), la dérivée seconde $\varphi''_A$ doit (en général) être entendue au sens des distributions. C'est une relation de caractère <u>local</u>. Elle exprime que la mesure périmétrique $G_A$ sur un ouvert $\sigma$ du cercle unité $S_0$ est déterminée univoquement (par la donnée de) $\varphi_A$ sur ce même ouvert. La relation réciproque (11'), au contraire, a un caractère intégral. Les deux constantes arbitraires a [illegible] contient correspondent au fait que A, [illegible], n'est déterminé par $G_A$ qu'à une translation près.

De ces relations résulte aussitôt :

<u>Proposition 1.1</u> Si $A$ et $K$ sont compacts et convexes dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$G_{A\oplus K} = G_A + G_K \qquad (11'')$$

En particulier, $A$ est ouvert selon $K$ si et seulement si :

$$G_A \geq G_K$$

En effet, $(11'')$ découle immédiatement de $(11)$. Si $A$ est ouvert selon $K$, on a $A = C\oplus K$ pour un $C \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, donc $G_A = G_K + G_C \geq G_K$. Inversement, si $G_A \geq G_K$, la mesure positive $G_C = G_A - G_K$ vérifie la condition barycentrique, donc est la mesure périmétrique d'un $C \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$. Mais la relation $G_{C\oplus K} = G_C + G_K = A$ entraîne alors $A = C \oplus K$ (à une translation près), donc $A$ est ouvert selon $K$.

<u>Corollaire</u> Soient $A$ et $K$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^2$, tels que $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$. Posons

$$A_1 = A\ominus \check{K} \quad ; \quad K_1 = A \ominus \check{A}_1$$

Alors : $A = A_1 \oplus K_1$ et $A_1 = A \ominus \check{K}_1$

$K_1$ est la fermeture de $K$ selon le complément $A^c$ de $A$, c.à.d. l'intersection de toutes les translatées de $A$ qui contiennent $K$.

De plus : $A$ est ouvert selon $K$ si et seulement si $K$ est fermé selon $A^c$, i.e si $K = K_1$ –

En effet, d'après $(10)$, on a $G_{A_1} \leq G_A$, donc $A$ est ouvert selon $A_1$, d'après la proposition, soit $A = A_1 \oplus K_1$ pour un $K_1 \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ défini par $K_1 = A \ominus \check{A}_1$. Et $A = A_1 \oplus K_1$ entraîne de même $A_1 = A \ominus \check{K}_1$.

On a donc $K_1 = A \ominus (\check{A} \ominus K)$, soit $K_1 = (\check{A}\ominus K)^c \ominus A^c = (K \ominus \check{A}^c) \ominus A^c = K^{A^c}$, donc $K_1$ est bien la fermeture de $K$

selon $A^c$. Maintenant, $A_K = (A \ominus \check{K}) \oplus K$ vérifie $A_K = A_1 \oplus K$. Comme $A = A_1 \oplus K_1$, l'égalité $A = A_K$ équivaut à $K = K_1$.

Remarque. Dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, la relation $A = A_1 \oplus K_1$ est fausse en général. Mais on a toujours $A_1 = A \ominus \check{K}_1$ : en effet, $A \ominus \check{K}_1 = A \ominus (\check{A} \ominus A_1)$ est la fermeture de $A_1$ selon $A^c$, mais $A_1$ est déjà fermé selon $A^c$, en tant qu'intersection de translatés de $A$. De même, si $A_K = A_1 \oplus K$ est égal à $A$, cela entraîne $K_1 = A \ominus \check{A}_1 = (A_1 \oplus K) \ominus \check{A}_1 = K$. Mais la réciproque n'est plus vraie.

En vue d'établir la relation (10'), nous allons poser quelques lemmes qui ne seront également utiles par la suite.

**Lemme 2** - Soient $A, B, C, D$ compacts et convexes dans $\mathbb{R}^n$. Alors

(12) $$(A \oplus D) \ominus (\check{B} \oplus \check{C}) \subset (A \ominus \check{B}) \ominus (\check{C} \ominus D)$$

En effet, posons $P = (A \oplus D) \ominus (\check{B} \oplus \check{C})$ et $Q = (A \ominus \check{B}) \ominus (\check{C} \ominus D)$. On a $P \subset Q$ si et seulement si $P \oplus (C \ominus \check{D}) \subset (A \ominus \check{B})$. Or :

$$\begin{aligned} P \oplus (C \ominus \check{D}) &= [(A \oplus D) \ominus (\check{B} \oplus \check{C})] \oplus (C \ominus \check{D}) \\ &\subset [(A \oplus D) \oplus (C \ominus \check{D})] \ominus (\check{B} \oplus \check{C}) \\ &\subset [(A \oplus C \ominus D) \ominus \check{D}] \ominus (\check{B} \oplus \check{C}) = (A \ominus \check{B}) \end{aligned}$$

**Lemme 3** Soient $A, K, C$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^2$, $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$ et $C$ ouvert à la fois selon $A$ et selon $K$. Alors $C$ est ouvert selon $A_K = (A \ominus \check{K}) \oplus K$.

Étant ouvert selon $K$, $C$ est de la forme $C = C' \oplus K$ avec $C' = C \ominus \check{K} \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$. Posons $A_1 = A \ominus \check{K}$, de sorte que $A_K = A_1 \oplus K$. D'après le corollaire de la Prop. 1.1, $C$ est ouvert selon $A_K$

si et seulement si $C\ominus(\check{C}\ominus A_K) = A_K$, ou, ce qui est equivalent, si $C'\ominus(\check{C}'\ominus A_K) = A_1$ (puisque $C = C'\oplus K$ et $A_K = A_1\oplus K$). On :

$$C\ominus\check{A}_K = C\ominus(\check{K}\oplus\check{A}_1) = C'\ominus\check{A}_1$$

Nous devons donc montrer $C'\ominus(\check{C}'\ominus A_1) = A_1$. En utilisant le lemme 2, nous trouvons :

$$A_1\ominus[\check{C}'\ominus(C'\ominus\check{A}_1)] = (A\ominus\check{K})\ominus[\check{C}'\ominus(C'\ominus\check{A}_1)] \supset$$
$$\supset [A\oplus(C'\ominus\check{A}_1)]\ominus(\check{C}'\oplus\check{K}) = [A\oplus(C'\ominus\check{A}_1)]\ominus\check{C} =$$
$$= [A\oplus(C\ominus\check{A}_K)]\ominus\check{C} \supset [A\oplus(C\ominus\check{A})]\ominus\check{C} =$$
$$= (C_A)\ominus\check{C}$$

Mais, par hypothèse, $C_A = C$, puisque $C$ est ouvert selon $A$, donc $C_A\ominus\check{C} = \{0\}$. On a donc $0 \in A_1\ominus[\check{C}'\ominus(C'\ominus\check{A}_1)]$, c.a.d. $C'\ominus(\check{C}'\ominus A_1) \subset A_1$, donc l'egalité, puisque l'inclusion inverse est toujours vraie. Ce qui achève la demonstration.

<u>N.B.</u> Le lemme 3 est faux dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Au contraire, le lemme 2 a valeur generale.

<u>Lemme 4</u> Designons par $\mathcal{M}(a, b)$ l'ensemble des mesures $G \geq 0$ sur le cercle unité verifiant $\int \cos\theta\, G(d\theta) = a$ et $\int \sin\theta\, G(d\theta) = b$, $a$ et $b$ réels donnés. Alors :

$$\text{Inf}\,\{G : G \in \mathcal{M}(a, b)\} = 0$$

En effet, on peut trouver une mesure $G_1 \in \mathcal{M}(a, b)$ concentrée sur les 4 points $\ell\frac{\pi}{2}$, $\ell = 0, 1, 2, 3$, et une autre $G_2 \in \mathcal{M}(a, b)$ concentrée sur les 4 points $\frac{\pi}{4} + \ell\frac{\pi}{2}$, $\ell = 0, 1, 2, 3$. On a alors déjà $G_1 \wedge G_2 = 0$.

<u>Proposition 1-2</u> Soient $A$ et $K$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^2$, tels que $A \ominus \check{K} \neq \phi$. Posons $A_1 = A \ominus \check{K}$, $K_1 = A \ominus \check{A}_1$, $A_K = A_1 \oplus K$. Alors :

(13) $$G_{A_1} \leq (G_A - G_K)_+ \; ; \quad G_{A_K} \leq G_A \vee G_K \; ; \quad G_{K_1} \geq G_A \wedge G_K$$

Compte tenu de la Proposition 1-1 et de son corollaire, ces trois relations sont équivalentes, et il suffit de démontrer l'une d'elles, par exemple la seconde.

Pour qu'un $C \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ soit ouvert à la fois selon $A$ et selon $K$, il faut et il suffit, d'après la Prop. 1.1, que l'on ait $G_C \geq G_A \vee G$ c'est à dire :

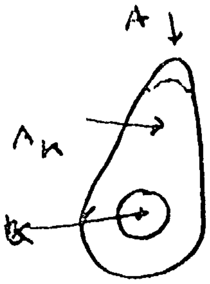
$$G = G_C - G_A \vee G_K \in \mathcal{M}(a, b)$$

avec $a = -\int \cos\theta \, (G_A \vee G_K)$, $b = -\int \sin\theta \, (G_A \vee G_K)$, $\mathcal{M}(a, b)$ étant définis comme dans le lemme 4. Inversement, si $G \in \mathcal{M}(a, b)$, la mesure $G_C = G + G_A \vee G_K$ vérifie la condition barycentrique, donc est la mesure périmétrique d'un $C \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, et $C$ est ouvert à la fois selon $A$ et $K$, puisque $G_C \geq G_A \vee G_K$. D'après le lemme 2, $C$ est ouvert selon $A_K$, et par suite on a aussi $G_C \geq G_{A_K}$ (Prop. 1.1). Par suite :

$$G_{A_K} \leq \operatorname{Inf}\{G + G_A \vee G_K,\; G \in \mathcal{M}(a, b)\}$$

Donc, d'après le lemme 4 : $G_{A_K} \leq G_A \vee G_K$ —

<u>N.B.</u> Ce résultat traduit un fait géométrique qui paraît presque évident : si $A$ et $K$ sont assez réguliers, le contour de $A_K$ comporte d'une part des arcs appartenant à la frontière $\partial A$ de $A$, sur lesquels $G_{A_K} = G_A \leq G_K$ ; et d'autre part des arcs intérieurs à $A$, sur lesquels $G_{A_K} = G_K$. Le résultat




est aussi très intuitif dans le cas de polygones.
Cependant, le fait d'avoir dû recourir à une démonstration très indirecte, utilisant explicitement des propriétés valables seulement dans $\mathbb{R}^2$ (Prop. 1.1 et Lemme 3) indique qu'il ne s'agit pas d'une propriété tellement élémentaire. En particulier, j'ignore si les relations (13), ou certaines d'entre elles, restent vraies dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ -

<u>Corollaire 1</u> - $K_1$ est le plus petit compact convexe $C \supset K$ tel que $A$ soit ouvert selon $C$.

En effet, $A_C = A$ entraîne $C = C^{A^c}$ (Corollaire de Prop. 1.1). Donc $C \supset K$ entraîne $C \supset K^{A^c} = K_1$.

<u>Corollaire 2</u> Soient $A, K, C$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^2$. Si $A$ et $K$ sont ouverts selon $C$, alors $K_1 = K^{A^c}$ est ouvert selon $C$.

En effet, $A_C = A$ et $K_C = K$ si et seulement si $G_C \leq G_A \wedge G_K$ (Prop. 1.1), et ceci entraîne $G_C \leq G_{K_1}$, d'après la $3^{me}$ relation (13), donc $K_1$ est ouvert selon $C$ (Prop. 1.1)

## 2- Les Erosions Infinitesimales

Dans tout ce qui suit, $A$ et $K$ désignent deux compacts convexes de $\mathbb{R}^N$, tels que $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$. Nous supposons de plus, que l'intérieur $\mathring{A}$ de $A$ n'est pas vide (Dans le cas contraire, $A$ serait contenu dans une variété linéaire de dimension $k < N$, minimale, dans laquelle son intérieur serait non vide, et on serait donc ramené à la situation ci-dessus dans l'espace $\mathbb{R}^k$). Quitte à effectuer des translations convenables sur $A$ et $K$, nous pouvons également supposer $O \in K \subset A$, soit $A$ et $K \subset C_0(S_0)$, ce qui nous permettra d'utiliser les fonctions d'appui. Pour tout $\rho \geq 0$ tel que $A \ominus \rho\check{K} \neq \emptyset$, nous posons :

$$A_\rho = A \ominus \rho \check{K} \quad ; \quad K_\rho = A \ominus \check{A}_\rho$$

Comme nous l'avons vu dans la remarque qui suit la Prop. 1-1, on a alors $A_\rho = A \ominus \check{K}_\rho$, et les inclusions :

(2-1) $$A_{\rho K} = A_\rho \oplus \rho K \subset A_{K_\rho} = A_\rho \oplus K_\rho \subset A$$

Notons aussi que $K_\rho$ est le plus grand compact convexe $C$ tel que $A_\rho = A \ominus \check{C}$. Car, si $A_\rho = A \ominus \check{C}$, on trouve $K_\rho = A \ominus A_\rho = A \ominus (\check{A} \ominus C) = C^{A^c} \supset C$. Inversement, d'ailleurs, $K_\rho = C^{A^c}$ entraîne $A_\rho = A \ominus \check{C}$, de sorte que :

$$\text{On a } A_\rho = A \ominus \check{C} \text{ si et seulement si } (C)^{A^c} = K_\rho$$

En ce qui concerne $A_\rho$, notons aussi que l'application $\rho \to A_\rho$ est concave. Autrement dit, pour $0 \leq \rho \leq \rho'$ (avec $A \ominus \rho'\check{K} \neq \emptyset$) et $0 \leq \alpha \leq 1$, on a

(2-2) $$\alpha A_\rho \oplus (1-\alpha) A_{\rho'} \subset A_{\alpha\rho + (1-\alpha)\rho'}$$

En effet, on trouve

$$A_{\alpha\rho+(1-\alpha)\rho'} = [(\alpha A \oplus (1-\alpha) A) \ominus \alpha\rho\check{K}] \ominus (1-\alpha)\rho'\check{K} \supset$$

$$\supset [\alpha A_\rho \oplus (1-\alpha) A] \ominus (1-\alpha)\rho'\check{K} \supset \alpha A_\rho \oplus (1-\alpha) A_{\rho'}$$

Si $\varphi_{A_\rho}$ est la fonction d'appui de l'ensemble $A_\rho$, on voit ainsi que (pour tout $u$ appartenant à la sphère unité $S_0$), l'application $\rho \to \varphi_{A_\rho}(u)$ est concave. En particulier, pour $\alpha \geq \varepsilon$

$$\frac{\varphi_{A_\rho} - \varphi_{A_{\rho+\alpha}}}{\alpha} \geq \frac{\varphi_{A_\rho} - \varphi_{A_{\rho+\varepsilon}}}{\varepsilon}$$

$$\frac{\varphi_{A_{\rho-\alpha}} - \varphi_{A_\rho}}{\alpha} \leq \frac{\varphi_{A_{\rho-\varepsilon}} - \varphi_{A_\rho}}{\varepsilon}$$

**2-1 - Dérivées**

On en déduit l'existence des dérivées en $\rho$ à droite et à gauche. Mais, ce qui est plus intéressant, c'est que les relations ci-dessus entraînent :

$$(2\text{-}3) \quad \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\alpha}) \supset \frac{1}{\varepsilon}(A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}) \\ \frac{1}{\alpha}(A_{\rho+\alpha} \ominus \check{A}_\rho) \subset \frac{1}{\varepsilon}(A_{\rho-\varepsilon} \ominus \check{A}_\rho) \end{cases}$$

En effet, $\varphi_{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}} \leq \varphi_{A_\rho} - \varphi_{A_{\rho+\varepsilon}}$ donne $\varphi_{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}(\varphi_{A_\rho} - \varphi_{A_{\rho+\alpha}})$.
Or $\varphi_{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\alpha}}$ est la plus grande des fonctions d'appui majorées par $(\varphi_{A_\rho} - \varphi_{A_{\rho+\alpha}})$. Par conséquent, on a aussi

$$\varphi_{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}\, \varphi_{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\alpha}}$$

c'est-à-dire la première des deux inclusions ci-dessus. L'autre ~~sion~~ se déduit de la même manière de la seconde inégalité.

Ainsi, l'application $\varepsilon \to (1/\varepsilon)[A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}]$ est décroissante, et la limite :

$$k'_\rho = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}}{\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \frac{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}}{\varepsilon}$$

existe (pour $\rho > 0$). De même, l'application $\varepsilon \to (1/\varepsilon)[A_{\rho-\varepsilon} \ominus \check{A}_\rho]$ est croissante, et par suite, pour $\varepsilon \downarrow 0$, la limite :

$$k'^{-}_\rho = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{A_{\rho-\varepsilon} \ominus \check{A}_{\rho}}{\varepsilon} = \overline{\bigcup_{\varepsilon > 0} \frac{A_{\rho-\varepsilon} \ominus \check{A}_\rho}{\varepsilon}}$$

existe également, et $k'^{-}_\rho \subset k'_\rho$.

Pour justifier la notation $K'_\rho$, remarquons que l'on a

(2-4) $$A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon} = K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho = K_{\rho+\varepsilon} \ominus \rho \check{K}$$

En effet, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon} &= A \ominus (\check{K}_\rho \oplus \check{A}_{\rho+\varepsilon}) &&= A \ominus [\rho \check{K} \oplus \check{A}_{\rho+\varepsilon}] \\ &= (A \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}) \ominus \check{K}_\rho &&= (A \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}) \ominus \rho \check{K} \\ &= K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho &&= K_{\rho+\varepsilon} \ominus \rho \check{K} \end{aligned}$$

Par conséquent :

(2-5) $$\begin{cases} K'_\rho = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho}{\varepsilon} = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \dfrac{K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho}{\varepsilon} \\ K'^{-}_\rho = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{K_\rho \ominus \check{K}_{\rho+\varepsilon}}{\varepsilon} = \overline{\bigcup\limits_{\varepsilon > 0} \dfrac{K_\rho \ominus \check{K}_{\rho-\varepsilon}}{\varepsilon}} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $A \ominus \check{K}$ d'intérieur non vide, la dérivée à droite $K'_\rho$ est définie pour $0 \leq \rho < 1$, et de même la dérivée à gauche $K'^{-}_\rho$ est définie pour $0 < \rho \leq 1$. Sur l'intervalle ouvert $(0,1)$, on a évidemment $K'^{-}_\rho \subset K'_\rho$, mais non, en général, l'égalité.

A partir de la relation (2-4) et de la concavité de $A_\rho$, il est facile de vérifier que l'on a :

$$K'_\rho \subset \frac{K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho}{\varepsilon} \subset \frac{K_{\rho'+\varepsilon'} \ominus K_{\rho'}}{\varepsilon'} \subset K'^{-}_{\rho'+\varepsilon'}$$

dès que $\rho \leq \rho'$ et $\rho+\varepsilon \leq \rho'+\varepsilon'$. On en déduit que $K'_\rho$ et $K'^{-}_\rho$ sont, toutes deux, des fonctions croissantes de $\rho$. De plus, la dérivée à droite $K'_\rho$, est continue à droite, et, de même, la dérivée à gauche, $K'^{-}_\rho$, est continue à gauche. En effet, on peut écrire :

$$\bigcap_{\rho > \rho_0} K'_{\rho} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\rho > \rho_0} \frac{K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho}{\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{\rho > \rho_0} \frac{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}}{\varepsilon}$$

$$= \bigcap_{\varepsilon > 0} \frac{A_{\rho_0} \ominus \check{A}_{\rho_0+\varepsilon}}{\varepsilon} = K'_{\rho_0}$$

(Dans l'avant dernière égalité, on utilise la continuité de $\rho \to A_\rho$, conséquence directe de la concavité de $A_\rho$, et la semi-continuité supérieure de la soustraction de Minkowski). En ce qui concerne la dérivée à gauche $k'^{-}_\rho$, on notera d'abord que, pour $\alpha > 0$ et $\rho_0$ donnés, on doit avoir, à cause de la concavité de $A_\rho$ :

$$\frac{1}{\alpha}\left[\varphi_{A_{\rho_0-\alpha}} - \varphi_{A_{\rho_0}}\right] \leq \frac{\varphi_{A_{\rho-\varepsilon}} - \varphi_{A_\rho}}{\varepsilon}$$

dès que $\varepsilon$ est assez petit et $\rho < \rho_0$ assez voisin de $\rho$. On en déduit à nouveau

$$\frac{1}{\alpha}\,\varphi_{A_{\rho_0-\alpha}\ominus \check{A}_{\rho_0}} \leq \frac{\varphi_{A_{\rho-\varepsilon}} - \varphi_{A_\rho}}{\varepsilon}$$

puis

$$\frac{1}{\alpha}\left(A_{\rho_0-\alpha}\ominus \check{A}_{\rho_0}\right) \subset \frac{A_{\rho-\varepsilon}\ominus \check{A}_\rho}{\varepsilon} \subset k'^{-}_\rho \subset \overline{\bigcup_{\rho<\rho_0} k'^{-}_\rho}$$

En faisant $\alpha \downarrow 0$, il vient donc :

$$k'^{-}_{\rho_0} \subset \overline{\bigcup_{\rho<\rho_0} k'^{-}_\rho}$$

donc l'égalité. Compte tenu de l'inclusion $k'^{-}_{\rho'} \supset k'_\rho$ dès que $\rho' > \rho$, on trouve, en résumé :

$$(2\text{-}6)\quad \begin{cases} k'_{\rho_0} = \bigcap\limits_{\rho>\rho_0} k'_\rho = \bigcap\limits_{\rho>\rho_0} k'^{-}_\rho & (0 \leq \rho_0 < 1) \\[2ex] k'^{-}_{\rho_0} = \overline{\bigcup\limits_{\rho<\rho_0} k'^{-}_\rho} = \overline{\bigcup\limits_{\rho<\rho_0} k'_\rho} & (0 < \rho_0 \leq 1) \end{cases}$$

## 2-2 – L'intégrale de $k'_\rho$

La famille croissante $k'_\rho$ est évidemment intégrable (au sens d'une intégrale de Stieltjes-Minkowski), mais, en général, ~~[illegible]~~ $k_\rho$ n'est pas égal à l'intégrale de sa dérivée $k'_\rho$. En effet, on a seulement l'inégalité :

$$\frac{1}{\varepsilon}\,\varphi_{K_{\rho+\varepsilon}\ominus \check{K}_\rho} \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi_{K_{\rho+\varepsilon}} - \varphi_{K_\rho}\right]$$

d'où résulte que $\varphi_{k'_\rho}$, en général, n'est pas égal à la dérivée $\frac{d}{d\rho}\varphi_{K_\rho}$. On trouve seulement :

$$\varphi_{K'_\rho} \leq \underline{\lim} \frac{\varphi_{K_{\rho+\varepsilon}} - \varphi_{K_\rho}}{\varepsilon} \qquad (\varepsilon \downarrow 0)$$

Par suite, on a seulement l'inclusion

$$\int_0^{\rho_0} K'_\rho \, d\rho \subset K_{\rho_0}$$

Toutefois, on a également $K'_\rho \supset K$ et par suite :

$$\rho_0 K \subset \int_0^{\rho_0} K'_\rho \, d\rho$$

En effet, $K'_\rho \supset K'_0$, et $K'_0 = \lim \frac{K_\varepsilon}{\varepsilon} \supset K$, puisque $K_\varepsilon \supset \varepsilon K$.
Comme $A \ominus \rho_0 \check{K} = A \ominus \check{K}_{\rho_0} = A_{\rho_0}$, on déduit alors de ces deux inclusions que l'on a encore :

$$A \ominus \int_0^{\rho_0} \check{K}'_\rho \, d\rho = A_{\rho_0}$$

Dans le cas de l'espace à 2 dimensions, les choses se présentent beaucoup mieux, et $K_\rho$ est alors l'intégrale de sa dérivée $K'_\rho$.
En effet, pour $N = 2$, le corollaire de la Prop. 1.1 nous garantit l'égalité

$$A_\rho \oplus K_\rho = A$$

De plus, $A_{\rho+\varepsilon}$, pour $\varepsilon > 0$, est de la forme $A_{\rho+\varepsilon} = A_\rho \ominus \varepsilon \check{K}$, d'où résulte, d'après le même corollaire, que $A_\rho$ est ouvert selon $A_{\rho+\varepsilon}$, soit :

$$\varphi_{K_{\rho+\varepsilon} \ominus \check{K}_\rho} = \varphi_{A_\rho \ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}} = \varphi_{A_\rho} - \varphi_{A_{\rho+\varepsilon}}$$

Par conséquent, ici, on a :

$$\varphi_{K'_\rho} = -\frac{d}{d\rho} \varphi_{A_\rho}$$

et en intégrant de $0$ à $\rho_0$, on voit que la fonction d'appui de $\int_0^{\rho_0} K'_\rho d\rho$ est

$$\int_0^{\rho_0} \varphi_{K'_\rho} \, d\rho = \varphi_A - \varphi_{A_{\rho_0}} = \varphi_{K_{\rho_0}}$$

puisque $A = A_{\rho_0} \oplus K_{\rho_0}$. Donc, dans ce cas, on a bien.

$$K_\rho = \int_0^\rho k'_u \, du$$

Mais cette relation est fausse, en général, dans un espace à $N \geq 3$ dimensions.

## 2-3 - Caractérisation de $k'_0$

Nous allons maintenant étudier plus en détail la structure de la dérivée à droite en $\rho = 0$, soit $k'_0 = \lim (1/\varepsilon) K_\varepsilon$. Notons qu'il suffit de remplacer l'ensemble A initial par $A_\rho$ pour que $k'_0$ soit changé en $k'_\rho$ : par conséquent, les propriétés trouvées pour $k'_0$ se transposeront d'elles mêmes à $k'_\rho$, $\rho > 0$.

En premier lieu, notons la relation :

(2,7) $$W_1(A, k'_0) = W_1(A, K)$$

En d'autres termes :

**Lemme 2-1.** On a $\varphi_{k'_0} = \varphi_K$ sur le support $S_A$ de la mesure $G_A$, et $\varphi_{k'_0} \geq \varphi_K$ ailleurs.

En effet, on a $\rho K \subset \rho k'_0 \subset K_\rho$ pour tout $\rho > 0$. Comme $A_\rho = A \ominus \rho \check{K} = A \ominus K_\rho$, ceci entraine aussi $A_\rho = A \ominus \rho k'_0$, et

$$V(A_\rho) = V(A \ominus \rho k'_0)$$

Il suffit de prendre en $\rho = 0$ la dérivée à droite des deux membres de cette relation pour obtenir (2-7). Cette relation (2-7) signifie : $\int (\varphi_{k'_0} - \varphi_K) G_A \geq 0$, donc $\varphi_{k'_0} = \varphi_K$ sur $S_A$ puisque $\varphi_{k'_0} \geq \varphi_K$ et que ces fonctions sont continues.

En fait, nous allons établir un résultat beaucoup plus fort :

**Théorème 2-1** $k'_0$ est le plus grand des compacts convexes C tels que $C \supset K$ et $W_1(A, C) = W_1(A, K)$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de quelques résultats préliminaires, d'ailleurs intéressants par eux mêmes -

Lemme 2-2 On a $\varphi_{K_\rho} = \rho\varphi_K$ sur le support $S_{A_\rho}$ de $G_{A_\rho}$

D'après la concavité de $A_\rho$, en effet, on a $\frac{A\ominus \check{A}_\rho}{\rho} \subset \frac{A_\rho\ominus \check{A}_{\rho+\varepsilon}}{\varepsilon}$, et par suite $K_\rho \subset \rho K'_\rho$. D'après le lemme 2-1 appliqué au convexe $A_\rho$ (au lieu de $A$), on trouve $\varphi_{K'_\rho} = \varphi_K$ sur $S_{A_\rho}$, donc $\rho\varphi_K \le \varphi_{K_\rho} \le \rho\,\varphi_{K'_\rho} = \rho\varphi_K$ sur $S_{A_\rho}$ et l'égalité.

Proposition 2-1. Soit $C$ compact convexe d'intérieur non vide, et $D \in \mathcal{C}_0(K)$. Si $\varphi_D \le \varphi_C$ sur le support $S_C$ de $G_C$, alors $\varphi_D \le \varphi_C$ sur la sphère unité $S_0$, i.e. $D \subset C$.

En effet, notons d'abord que $D' \supset C$ et $W_1(C, D') = V(C)$ entraînent $C = D'$. C'est une conséquence des inégalités de Brunn-Minkowski:

$$W_1(C, D') \geq (V(C))^{\frac{n-1}{n}} \, V(D')^{1/n} \geq V(C)$$

Pour que la première inégalité soit une égalité, il faut que l'on ait $D' = \lambda C$. Comme $D' \supset C$, soit $V(D') = \lambda^n V(C) \geq V(C)$, la seconde inégalité devient une égalité si et seulement si $\lambda = 1$, soit $C = D'$.

Ainsi, $\varphi_C \le \varphi_{D'}$ et $\varphi_C = \varphi_{D'}$ sur $S_C$ impliquent $\varphi_C = \varphi_{D'}$. Désignons par $D_0$ le plus grand compact convexe dont la fonction d'appui minore $\varphi_C$ sur $S_C$: il vérifie $\varphi_{D_0} \geq \varphi_C$ et $\varphi_{D_0} = \varphi_C$ sur $S_C$. Donc $\varphi_{D_0} = \varphi_C$ sur la sphère unité. D'où la Proposition.

Démonstration du théorème 2.1. ~~Soit $C \supset K$ et $\varphi_C = \varphi_K$ sur le support $S_A$ de $G_A$. Pour $\rho > 0$ assez petit pour que $A_\rho \neq \emptyset$, on a $S_{K_\rho} \subset S_A$, d'après la relation (10), puisque $K_\rho$ est l'érodé de $A$ par $A_\rho$. Sur $S_{K_\rho} \subset S_A$, on a $\varphi_{K_\rho} = \rho\varphi_K$ (d'après le lemme 2.2.) et $\varphi_C = \varphi_K$, donc $\rho\varphi_C = \varphi_{K_\rho}$ sur $S_{K_\rho}$. D'après la Proposition 2-1, ceci implique $\rho\varphi_C \le \varphi_{K_\rho}$ sur $S_{K_\rho}$, donc $C \subset \frac{1}{\rho} K_\rho$. En faisant tendre $\rho$ vers 0, il en résulte $C \subset K'_0$.~~

Si $C \supset K$ et $W_1(A, C) = W_1(A, K)$, on a $\varphi_C = \varphi_K$ sur $S_A$, donc (lemme 2-1) $\varphi_C = \varphi_{K'_0}$ sur $S_A$. Comme $S_{K'_0} \subset S_A$, $\varphi_C = \varphi_{K'_0}$ sur $S_{K'_0}$ entraîne $\varphi_C \le \varphi_{K'_0}$ (Prop. 2-1), i.e. $C \subset K'_0$

**Corollaire** $K'_0$ est le plus grand des compacts convexes $C$ tels que l'on ait $\varphi_C \leq \varphi_K$ sur le support $S_A$ de $G_A$

En effet, si l'on designe par $C_0$ le plus grand des compacts convexes verifiant cette propriété, on a evidemment $C_0 \supset K$ et $\varphi_C = \varphi_K$ sur $S_A$. D'après le theorème, cela implique $C_0 \subset K'_0$. Mais d'autre part $K'_0$ lui-même verifie $\varphi_{K'_0} \leq \varphi_K$ sur $S_A$. Donc $C_0 = K'_0$.

2-4 - Le support des mesures de surface

D'après ce corollaire, $K'_0$ ne depend de $A$ que par l'intermediaire du support $S_A$ de sa mesure de surface. De manière generale, pour $u \in S_0$ et $a \geq 0$, designons par $E_{a,u}$ le demi espace defini par:

$$E_{a,u} = \{ x : \langle ux \rangle \leq a \}$$

Alors, d'après le corollaire ci dessus, nous pouvons écrire:

$$(2\text{-}8) \qquad K'_0 = \bigcap_{u \in S_A} E_{u, \varphi_K(u)}$$

En effet, le plus grand convexe verifiant $\varphi_C \leq \varphi_K$ (sur $S_A$) est l'intersection des demi espaces fermés $E_{u,\varphi_K(u)} = \{ x : \langle ux \rangle \leq \varphi_K(u) \}$ lorsque $u$ parcourt $S_A$. Cette relation montre bien que $K'_0$ ne depend que du support $S_A$ et non de $A$ lui même.

De manière plus generale, soit $S$ un sous ensemble de la sphère unité $S_0$ dont l'enveloppe convexe admette comme point le point $O$ intérieur. Considerons le compact convexe $K(S)$ defini par

$$(2\text{-}9) \qquad K(S) = \bigcap_{u \in S} E_{u, \varphi_K(u)}$$

i.e le plus grand des compacts convexes dont la fonction d'appui minore $\varphi_K$ sur $S$. Comme la fonction $\varphi_K$ est continue sur $S_0$, on a $K(S) = K(\bar{S})$, de sorte que l'on peut se limiter au cas où $S$ est un sous ensemble fermé de $S_0$. Comme l'enveloppe convexe de $S$ admet $O$ comme point intérieur, on peut (Th. 1-1) trouver un $A \in C_0(S)$ d'intérieur non vide dont la mesure de surface $G_A$ admette le support $S_A = S$. On a alors $K(S) = K'_0 = \lim (1/\rho)(A \ominus \check{A}_\rho)$. Mais le support de $A \ominus \check{A}_\rho$ est contenu dans $S_A = S$, et par suite on a aussi : $S_{K'_0} \subset S$. Par suite, le $K(S)$ défini en (2-9) vérifie la condition :

$$(2\text{-}9') \qquad \text{Supp}\; G_{K(S)} \subset S$$

On en déduit un résultat intéressant concernant le support des mesures de surface :

<u>Théorème 2-2</u> Soit $K$ compact convexe d'intérieur non vide, et $S_K$ le support de sa mesure de surface $G_K$. Alors $S_K$ est le plus petit des sous-ensembles fermés $S \subset S_0$ tels que l'on ait :

$$K = \bigcap_{u \in S} E_{u, \varphi_K(u)}$$

et on a $K(S) = K$ si et seulement si le fermé $S$ contient $S_K$

En effet, avec les notations ci-dessus, $K(S) = K$ entraîne $S_K \subset S$ d'après la relation (2-9'). Maintenant, $K(S_K) = K$. Car, en prenant $A = K$, on trouve $A_\rho = (1-\rho)K$, $A \ominus \check{A}_\rho = \rho K$ et $K(S_K) = K'_0 = K$. En conséquence, $S_K$ est bien le plus petit des fermés $S$ tels que $K(S) = K$. Si $S \supset S_K$, on trouve alors $K \subset K(S) \subset K(S_K) = K$, et l'égalité.

Ce théorème conduit à une caractérisation très géométrique du support $S_K$ de la mesure de surface $G_K$. Comme $K$ est d'intérieur non vide, nous pouvons supposer $O \in \mathring{K}$. Dans ces conditions, le <u>dual</u> $K^* = \{y : \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle \leq 1\}$ est lui même un compact convexe admettant $O$ comme point intérieur.

On sait que les points de la frontière $\partial K^*$ du dual de $K$ sont les points de la forme $x = u/\varphi_K(u)$, $u$ parcourant la sphère unité $S_0$. A l'intersection $K(S)$ définie en (2,9) est associé par dualité un compact convexe $K^*(S)$, qui est l'enveloppe convexe de $K^* \cap \tilde{S}$ ($\tilde{S}$ désignant le cône engendré par les demi-droites de directions $u \in S$).

(? )

Mais, d'autre part, l'enveloppe convexe fermée d'un sous ensemble $D \subset K^*$ coïncide avec $K^*$ lui même si et seulement si l'adhérence $\bar{D}$ de $D$ contient tous les points extremaux de $K^*$. On aura donc $K^*(S) = K^*$, c.a.d. $K(S) = K$, si et seulement si le fermé $S$ contient la direction $u = x/|x|$ de tout $x$ extremal sur $\partial K^*$. Convenons de dire que ces directions sont les directions extremales pour $K$. On voit d'ailleurs, par dualité, que ces directions extremales sont effectivement celle des generatrices extremales des cones $C(y)$ des normales aux differents points $y$ de $\partial K$. De ce qui précède, resulte donc que l'on a $K(S) = K$ si et seulement si le fermé $S$ contient toutes les direction extremales pour $K$. Autrement dit, encore, le plus petit fermé $S$ tel que $K = K(S)$ est l'adhérence de l'ensemble des directions extremales. En rapprochant ce resultat du Theorème precedent, nous concluons :

Corollaire  Le support $S_K$ de la mesure de surface associée à un compact convexe $K$ d'interieur non vide est egal à l'adhérence de l'ensemble des directions $u \in S_0$ extremales pour $K$

## 2-5- L'érosion ultime

Si $A$ et $K$ sont compacts convexes et $A$ d'intérieur non vide, $A_\rho = A \ominus \rho \check{K}$ est non vide (et même d'intérieur non vide) pour $\rho$ assez petit. Posons :
$R = \operatorname{Sup}\{\rho : A_\rho \neq \emptyset\}$. Notons que $A_R = \bigcap_{\rho < R} A_\rho$ (puisque l'érosion est s.c.s) de sorte que $A_R$, intersection de compacts décroissants non vides, n'est pas vide. Par contre, $V(A_R) = 0$ : car, si $A_R$ avait un intérieur non vide, on pourrait trouver un $\varepsilon > 0$ tel que $A_{R+\varepsilon} \neq \emptyset$. En particulier, donc, le volume $V(A_\rho)$ est continu sur l'intervalle fermé $(0, R)$.
Nous disons que $A_R$ est l'<u>érodé ultime</u> de $A$ par $K$, et que $R$ est le <u>module de l'érosion ultime</u> de $A$ par $K$. En particulier, si ~~K~~ $= B$ est la boule unité, $R$ est le rayon de la boule inscrite dans $A$. Inversement, si $A = B$ est la boule unité, $1/R$ est le rayon de la boule circonscrite à $A$. Notons un premier résultat.

**<u>Proposition 2-2</u>** On a $R \leq V(A) / W_1(A, K)$, avec égalité si et seulement si $A \ominus \rho \check{K}$ est homothétique à $A$ pour tout $\rho \in (0, R)$, ou, ce qui revient au même, si et seulement si $K'_0 = \lambda A$.

D'après le théorème 2-8, $K'_0$ réalise le maximum de $V(C)$ pour $C \in \mathcal{C}(S_K)$, $C \supset K$ et $W_1(A, C) = W_1(A, K)$. Si nous écartons la condition $C \supset K$, le théorème de Brunn Minkowski nous indique que le maximum de $V(C)$ est atteint lorsque $C = \lambda_0 A$, avec alors nécessairement $\lambda_0 = W(A, K)/V(A)$. Si $\lambda_0 A \supset K$, on a donc aussi $K'_0 = \lambda_0 A$. Inversement, $K'_0 = \lambda A$ entraîne $\lambda V(A) = W_1(A, K'_0) = W_1(A, K)$, d'après (2-7), et par suite $\lambda = \lambda_0$. Comme $K \subset K'_0$, on a alors $K \subset \lambda_0 A$.

Autrement dit, on a $K'_0 = \lambda A$, avec alors nécessairement $\lambda = \lambda_0 = W_1(A, K)/V(A)$, si et seulement si $K \subset \lambda_0 A$ (égalités et inclusions sont prises ici à une translation près).

Dans ces conditions, supposons que l'on ait $R \geq V(A)/W_1(A,K)$, c.a.d. $K \subset \lambda_0 A$. Il en résulte donc aussi $K'_0 = \lambda_0 A$. Pour tout $\rho \in (0,R)$, on a toujours $\rho K \subset \rho K'_0 \subset K_\rho$, donc $A \ominus \rho K'_0 = A_\rho$. Comme ici $K'_0 = \lambda_0 A$, il en résulte $A_\rho = (1-\lambda_0 \rho) A$. Pour $\rho = R$, ceci entraine $\lambda_0 R \leq 1$, soit $R \leq V(A)/W_1(A,K)$, donc en fait l'égalité. Ainsi, l'inégalité $R \leq V(A)/W_1(A,K)$ est vraie dans tous les cas, et l'égalité entraine $K'_0 = \lambda_0 A$. Réciproquement, si $K'_0 = \lambda_0 A$, on trouve $W_1(A,K) = W_1(A,K'_0) = \lambda_0 V(A)$. Comme $R = 1/\lambda_0$, on a bien l'égalité $R = V(A)/W_1(A,K)$.

Pour achever la démonstration, il faut montrer que $K'_0 = \lambda A$ équivaut à $A \ominus \rho \check{K}$ homothétique à $A$ pour tout $\rho \in (0,R)$. En fait, on a déjà vu ci-dessus l'implication directe. Inversement, si $A_\rho$ est homothétique à $A$, il en est de même de $K'_0 = \lim (A \ominus \check{A}_\rho)/\rho$.

<u>Exemple</u> Dans l'espace à $n$ dimensions, soit $K = B$ boule unité, et $S_A = n W_1(A,K)$ la surface de $A$. Alors, le rayon $R$ de la boule inscrite dans $A$ vérifie

$$R \leq n (V_A / S_A)$$

Nous allons améliorer notablement ce premier résultat, en utilisant le lemme suivant

<u>Proposition 2-3</u> Pour $0 \leq \rho \leq R$, on a $\varphi_A = \varphi_{A_\rho} + \rho \varphi_K$ sur le support $S_{A_\rho}$ de la mesure $G_{A_\rho}$. Pour $0 < \rho_0 \leq R$, on a même $\varphi_A = \varphi_{A_{\rho_0}} + \rho_0 \varphi_K$ sur $S'_{\rho_0} = \bigcap_{\rho < \rho_0} S_{A_\rho}$

En effet, le dual $A^*_\rho$ de $A_\rho$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble ~~l'ensemble $\{\lambda u, u \in S_0, \lambda \leq 1/(\varphi_A(u) ...$~~ $D = \{\lambda u, u \in S_0, \lambda [\varphi_A(u) - \rho \varphi_K(u)] \leq 1\}$, soit $C(D)$. Mais on sait que $C(D)$ est également l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, qui constituent un ensemble $\ddot{D}$ inclus dans $D$. Si $y \in \ddot{D}$ est un point extrémal de $A^*_\rho$, et $u$ sa direction, on a $u \in S_{A_\rho}$ (corollaire du Th 2.2) et $\varphi_{A_\rho}(u) = 1/|y|$. Mais comme $y \in D$, on a aussi $\varphi_A(u) - \rho\varphi_K(u) \leq 1/|y|$, donc l'égalité $\varphi_{A_\rho}(u) = \varphi_A(u) - \rho\varphi_K(u)$. Inversement, si $u \in S_{A_\rho}$, on peut, d'après le corollaire du Th 2.2, trouver une suite $u_n$ de directions extrémales ~~points réguliers~~ convergeant vers $u$, et l'égalité $\varphi_{A_\rho}(u_n) = \varphi_A(u_n) - \rho\varphi_K(u_n)$ passe à la limite.

Si maintenant $\rho \uparrow \rho_0$, on a ~~[illegible]~~ $\varphi_{A \ominus \rho\check{K}} = \varphi_A - \rho\varphi_K$ sur $S_\rho \supset S'_{\rho_0}$ pour tout $\rho < \rho_0$, et $\varphi_{A\ominus\rho\check{K}} \to \varphi_{A_{\rho_0}}$. Par suite, $\varphi_{A_{\rho_0}} = \varphi_A - \rho_0\varphi_K$ sur $S'_{\rho_0}$ –

<u>Théorème 2-3</u> Le module $R$ de l'érosion ultime est :

$$R = \operatorname{Inf}\{W_1(C,A)/W_1(C,K),\ C \in C(S)\}$$

Autrement dit, on a $A \ominus \check{K} \neq \phi$ (c.à.d $K \subset A$ à une translation près) pour tout compact convexe $C$ si et seulement si $W_1(C,K) \leq W_1(C,A)$ pour tout compact convexe $C$

En effet, $A_R$ n'étant pas vide, nous pouvons (quitte à effectuer une translation) supposer $RK \subset A$, et par suite $R\,W_1(C,K) \leq W_1(C,A)$ pour tout $C \in C(S)$

Pour montrer l'inégalité inverse, nous devons exhiber une mesure $G \geq 0$ sur $S_0$, vérifiant la condition barycentrique $\int u\, G(du) = 0$ et telle que $\int G\varphi_A = R\int G\varphi_K$.

On a vu que $A_R = A \ominus R\check{K}$ est sous dimensionnel, puisque $V(A_R) = 0$. Considérons d'abord le cas le plus simple, où l'on a $A_R = \{0\}$. Pour $0 \leq \rho < R$, le support de $G_{K'_\rho}$ est contenu dans $S_{A_\rho}$, et, d'après la Prop. 2-3, il en résulte :

$$W_1(K'_\rho, A_\rho) + \rho W_1(K'_\rho, K) = W_1(K'_\rho, A)$$

Il en résulte $(W_1(K'_\rho, A)/W_1(K'_\rho, K)) \to R$ (i.e. le théorème).

En effet, deux cas sont possibles, selon que la limite

$$K'^{-}_R = \overline{\bigcup_{\rho < R} K'_\rho}$$

est compacte ou non. Si $K'^{-}_R$ est compact, $K'_\rho \to K'^{-}_R$ dans $C(S)$, ~~donc~~ et $A_\rho \to A_R$ lorsque $\rho \uparrow R$, donc $W_1(K'_\rho, A_\rho) \to W_1(K'^{-}_R, A_R) = 0$ (puisque $A_R = 0$). Si $K'^{-}_R$ n'est pas compact, on peut toujours

normer les mesures de surface $G_{k'_p}$, en posant par exemple :
$G_p = G_{k'_p} / \int G_{k'_p}$. On extraira alors une suite $p_n \uparrow R$ telle que $G_{p_n}$ converge vers une limite $G$ : cette limite vérifiera les conditions voulues. Notons que, dans un cas comme dans l'autre, la mesure $G$ a son support contenu dans $S'_R = \bigcap_{p<R} S_{A_p}$, de sorte que $\varphi_A = R\varphi_K$ sur Supp $G$.

Supposons maintenant que $A_R$ ne se réduise pas au point O, et soit $H_1$ le sous espace de dimension minimale $p$ ($p<n$) contenant $A_R$. Désignons par $H = H_1^{\perp}$ l'orthogonal de $H$. On a :

(a) $$\Pi_H((A\oplus H_1)\ominus R\check{K}) = \Pi_H A_R = \{0\}$$

Pour le voir, on remarque que l'on a $\Pi_H[(A\oplus H_1)\ominus R\check{K}] = \Pi_H[(A\oplus \lambda A_R)\ominus R\check{K}]$ pour $\lambda$ assez grand. Or, on trouve d'une part :

$$(A\oplus\lambda A_R)\ominus R\check{K} = [A\oplus\lambda(A\ominus R\check{K})]\ominus R\check{K} \supset (1+\lambda)[A\ominus R\check{K}]$$

et de l'autre

$$(A\oplus\lambda A_R)\ominus R\check{K} \subset [((1+\lambda)A)\ominus\lambda R\check{K}]\ominus R\check{K} = (1+\lambda)[A\ominus R\check{K}]$$

donc, l'égalité est vraie, et, comme $\Pi_H A_R$ est réduit à $\{0\}$, on obtient bien la relation (a). Mais cela signifie

$$\Pi_H A \ominus (\Pi_H \check{K}) = \{0\}$$

Alors, en appliquant la première partie de la démonstration (aux ensembles $\Pi_H A$ et $\Pi_H K$) on voit, en raisonnant dans l'espace $H$ (de dimension $n-p$) qu'il existe une mesure $G$ sur $H\cap S_0$, vérifiant $\int u\,G(du) = 0$ et $\int G\varphi_A = \int G R\varphi_K$. On note que l'on a encore $\varphi_A = R\varphi_K$ sur Supp $G$.

Corollaire Le module $R$ de l'érosion ultime est caractérisé par le fait que l'ensemble $S = \{u : \varphi_A(u) = R\varphi_K(u)\} \subset S_0$ inclut O dans son enveloppe convexe $C(S)$.

En effet, le support de la mesure $G$ trouvé ci-dessus est contenu dans $S$. Comme $G$ vérifie la condition barycentrique, on a $C(S_G) \ni 0$, donc a fortiori $0 \in C(S)$. Inversement, si $0 \in C(S)$, on peut trouver une mesure $G$ à support dans $S$ et vérifiant la condition barycentrique $\int u\,G(du) = 0$. Comme $\varphi_A = R\varphi_K$ sur le support de $G$, on a bien $\int G\varphi_A = R\int G\varphi_K$.

## 2-6- L'équation $X \ominus \check{K} = A$

Soient A et K donnés, compacts convexes dans $\mathbb{R}^N$, et A d'intérieur non vide. Je me propose de caractériser la famille des $X \in C(\mathcal{K})$ tels qu'on ait $X \ominus \check{K} = A$

En premier lieu, il est clair que l'on doit avoir $X \supset A \oplus K$, et d'ailleurs $A \oplus K$ lui-même est solution de l'équation proposée. Autrement dit, $X_0 = A \oplus K$ est la plus petite solution possible. Montrons qu'il existe également une plus grande solution.

D'après la Proposition 2.3, si $X \ominus \check{K} = A$ et si A est d'intérieur non vide, on doit avoir $\varphi_X = \varphi_A + \varphi_K$ sur le support $S_A$ de la mesure de surface associée à $A = X \ominus \check{K}$. Or, il existe un plus grand élément vérifiant cette propriété dans $C(\mathcal{K})$, à savoir :

$$(a) \qquad \tilde{A} = \bigcap_{u \in S_A} E_{u,\, \varphi_A(u) + \varphi_K(u)}$$

Donc, nécessairement, $X \subset \tilde{A}$ pour toute solution X. Mais $\tilde{A}$ lui-même est solution, et par suite est la plus grande solution. En effet, on a $\varphi_{\tilde{A}} = \varphi_A + \varphi_K$ sur $S_A$, donc :

$$\varphi_{\tilde{A} \ominus \check{K}} \leq \varphi_{\tilde{A}} - \varphi_K = \varphi_A \quad \text{sur } S_A$$

D'après la Proposition 2-1, cela entraîne $\tilde{A} \ominus \check{K} \subset A$. Mais, d'autre part, la relation (a) de définition implique $\tilde{A} \supset A \oplus K$, donc $\tilde{A} \ominus \check{K} \supset A$. On a donc bien $\tilde{A} \ominus \check{K} = A$.

Comme $X_0 = A \oplus K$ et $\tilde{A}$ constituent la plus petite et la plus grande solution, toute autre solution X vérifiera $X_0 \subset X \subset \tilde{A}$. Réciproquement, d'ailleurs, si X est compris entre $X_0$ et $\tilde{A}$, X est bien une solution, puisque

$$A = \tilde{A} \ominus \check{K} \supset X \ominus \check{K} \supset X_0 \ominus \check{K} = A$$

de sorte que nous caractérisons bien ainsi la famille de toutes les solutions de l'équation proposée.

Cette solution maximale vérifie $\tilde{A} \supset A \oplus K'_0$. En effet, si nous comparons les relations (a) et (2-8), nous voyons que $\tilde{A}$ est construit comme $K'_0$, à condition de remplacer $K$ par $A \oplus K$. Explicitement, cela donne

$$(c) \qquad \tilde{A} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ A \ominus (\check{A} \ominus \varepsilon (A \oplus K)) \right]$$

Or $A \ominus \varepsilon (\check{A} \oplus \check{K}) = (1-\varepsilon) A \ominus \varepsilon \check{K}$, et $A \ominus [(1-\varepsilon)\check{A} \ominus \varepsilon K] \supset \varepsilon A \oplus (1-\varepsilon)[A \ominus \check{A}_{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}]$. D'après (c) et la définition de $K'_0$, il vient donc

$$\tilde{A} \supset A \oplus K'_0$$

Dans un espace à $n \geq 3$ dimensions, cette inclusion est, en général, stricte. Mais si $n = 2$ elle devient une égalité. En effet, à 2 dimensions, on a $G_{A \oplus K'_0} = G_A + G_{K'_0}$, donc $S_{A \oplus K'_0} = S_A \cup S_{K'_0}$, et, comme $S_{K'_0} \subset S_A$, $S_{A \oplus K'_0} = S_A$. Or l'inégalité (en fait l'égalité) :

$$\varphi_{\tilde{A}} \leq \varphi_A + \varphi_K \leq \varphi_A + \varphi_{K'_0}$$

est vraie, d'après (a), sur $S_A = S_{A \oplus K'_0}$. D'après la Proposition (2-7), cela implique $\tilde{A} \subset A \oplus K'_0$ — et par suite l'égalité.

Nous pouvons donc énoncer :

**Théorème 2-4** — Soient $A$ et $K$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$, et $A$ d'intérieur non vide. Alors, pour tout $X \in C(S\mathcal{K})$, on a $X \ominus \check{K} = A$ si et seulement si $A \oplus K \subset X \subset \tilde{A}$, avec

$$\tilde{A} = \bigcap_{u \in S_A} E_{u, \varphi_A(u) + \varphi_K(u)}$$

Si l'on pose $K'_0 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{[A \ominus (\check{A} \ominus \varepsilon K)]}{\varepsilon}$, on a $\tilde{A} \supset K'_0 \oplus A$, mais non, en général, l'égalité. Mais, dans l'espace à $n = 2$ dimensions, on a toujours $\tilde{A} = A \oplus K'_0$

N.B. — L'hypothèse que $A$ est d'intérieur non vide ne peut pas être affaiblie. Même à 2 dimensions, l'énoncé serait faux pour $\mathring{A} = \emptyset$.

~~Théorème 2.4 Soient A et K compacts convexes, A d'intérieur non vide et~~ ~~$K'_0 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\frac{A \ominus (\check{A} \ominus \epsilon K)}{\epsilon}\right]$. Alors, pour qu'un élément $X \in C(\mathcal{K})$ soit solution de l'équation~~

~~$$X \ominus \check{K} = A$$~~

~~il faut et il suffit que l'on ait :~~

~~$$A \oplus K \subset X \subset A \oplus K'_0$$~~

~~N.B. L'hypothèse que A est d'intérieur non vide est essentielle. Même à 2 dimensions, le théorème est faux si $\mathring{A} = \emptyset$. Il y a des contre exemples simples.~~

## 3 – Généralisation aux convexes fermés

### 3-1 – Préliminaires Géométriques

Dans tout ce qui précède, bien des indications suggèrent qu'il serait intéressant d'élargir le domaine de travail à l'espace $C_0(\mathcal{F})$ des convexes fermés contenant l'origine O. Par exemple, pour K compact convexe donné, l'opération

$$K'_0 = \bigcap_{u \in S_A} E_{u,\varphi_K(u)}$$

n'est interprétable, dans le code ci-dessus, en termes d'érosion infinitésimale que si $S_A$ est le support de la mesure de surface $G_A$ d'un compact convexe non dégénéré A, c'est à dire, d'après le Théorème 1, si l'enveloppe convexe de $S_A$ contient O comme point intérieur. Or, c'est là, apparemment, une restriction injustifiée. L'opération

$$K(S) = \bigcap_{u \in S} E_{u,\varphi_K(u)}$$

est définie pour tout sous ensemble S de la sphère unité. Simplement, $K(S)$ sera un fermé (non compact) convexe lorsque S ne vérifiera plus la condition barycentrique habituelle.

D'où l'intérêt de prendre en considération l'espace $C_0(\mathcal{F})$. Soit $F \in C_0(\mathcal{F})$, et $\varphi_F$ sa fonction d'appui. En général, $\varphi_F$ n'est pas continue, mais seulement <u>semi-continue inférieurement</u>.

(s.c.i). Toutefois, $\varphi_F$ est continue sur l'intérieur relatif du domaine défini par $\varphi_F < \infty$. On peut même préciser davantage la structure de $\varphi_F$, mais il convient au préalable d'introduire quelques considérations géométriques.

A chaque direction $u \in S_0$ est associé un hyperplan d'appui pour $F$, soit $H_u = \{x : \langle ux \rangle = \varphi_F(u)\}$ et un demi espace d'appui $E_u = \{x : \langle ux \rangle \leq \varphi_F(u)\}$, et on sait que $F$ est l'intersection de ces demi espaces $E_u$. Toutefois, si $\varphi_F(u) = \infty$, $H_u$ est rejeté à l'infini, et $E_u$ coïncide avec $R^N$ entier. Ainsi, parmi les points $u \in S_0$ de la sphère unité, nous pouvons distinguer plusieurs familles :

$S_\infty = \{u : \varphi_F(u) = \infty\}$, directions auxquelles ne correspondent pas d'hyperplans limites à distance finie

$S_n$ : ensemble des $u \in S_0$ tels qu'il existe au moins un point $x \in \partial F$ tel que $\langle ux \rangle = \varphi_F(u)$. Ces directions sont donc associées aux hyperplans $H_u$ qui rencontrent effectivement $F$ ($F \cap H_u \neq \phi$)

$S_c$, enfin, ensemble des directions $u$ telles que $\varphi_F(u) < \infty$ et $F \cap H_u = \phi$. Les $u \in S_c$ seront dites <u>directions critiques</u>. Elles sont associées à ceux des hyperplans d'appui qui ne rencontrent pas $F$ à distance finie. De même, les $u \in S_n$ seront dites <u>directions ordinaires</u>.

Désignons, d'autre part, par $C_\infty$ <u>le cône des points à l'infini</u>, c'est à dire le cône convexe fermé constitué des demi droites $D$ issues de $O$ et contenues dans $F$ (soit $F \oplus \check{D} = F$), et par $C_\infty^\perp$ <u>son dual</u>, engendré par les directions $v \in S_0$ telles que $\langle u, v \rangle \leq 0$ pour tout $u$ dans $C_\infty$. Soit, enfin, $C_0^\perp$ <u>l'intérieur relatif</u> du dual $C_\infty^\perp$, constitué des directions $v \in S_0$ pour lesquelles on a $\langle u, v \rangle < 0$ pour tout $u \in C_\infty$

Si $C_0^\perp$ est vide, $C_\varphi^\perp$ est lui même vide, ou réduit à une demi-droite, ou à une droite entière. Dans ce cas, $C_\varphi$ ~~[illegible]~~ sont soit l'espace entier, soit un demi espace, soit un hyperplan. Dans tous les cas, F est alors la bande comprise entre deux hyperplans parallèles, éventuellement rejetés à l'infini. Dans chacun de ces cas, l'ensemble $S_c$ des directions critiques est vide. Ainsi : s'il existe des directions critiques ($S_c$ non vide) l'intérieur relatif $C_0^\perp$ du cone dual n'est pas vide.

Notons aussi $S_\varphi \cap C_0^\perp = \phi$

En effet, supposons $\varphi_F(u) = \infty$ pour un $u \in S_\varphi$ donné. On peut alors trouver une suite $\{x_n\} \subset F$ telle que $\langle u\, x_n \rangle \uparrow \infty$. Les segments de droite $(0, x_n) \subset F$ admettent dans $\bar{F}$ une valeur d'adhérence $D$, qui est donc une demi droite contenue dans $F$, soit $D \subset C_\varphi$. Soit $v \in S_0$ la direction de cette demi-droite. Comme les $\langle u\, x_n \rangle$ sont $> 0$, on a $\langle u, v \rangle \geq 0$. Donc, $u$ ne peut pas appartenir à l'intérieur relatif $C_0^\perp$ du cône dual.

Notons que ceci implique <u>la continuité de la fonction d'appui $\varphi_F$ sur $C_0^\perp$</u>.

La frontière $\partial C_\varphi^\perp$ du cone dual peut contenir des directions ordinaires (associées à des faces infinies), des directions critiques (associées à des hyperplans limite ne rencontrant pas F), ou enfin des directions $u \in S_\varphi$, c.à.d. telles que $\varphi_F(u) = \infty$

On peut aussi considérer le convexe fermé <u>$F^*$ dual de F</u>, défini par $F^* = \{ y : \sup_{x \in F} \langle y, x \rangle \leq 1 \}$. Le cone $C_\varphi$ est non vide si et seulement si O est un point frontière du dual, soit $O \in \partial F^*$, et dans ce cas $C_\varphi$ est identique au cone des normales à $F^*$ au point O. Le dual $C_\varphi^\perp$ est donc l'enveloppe des hyperplans d'appui à $F^*$ passant par O, et sa frontière $\partial C_\varphi^\perp$ est l'enveloppe des faces de $F^*$ contenant le point O.

<u>Lemme 3.1</u> Pour toute direction $u \in \partial C_\varphi^\perp$, et en particulier pour toute direction critique, il existe une suite $\{v_n\} \subset C_0^\perp$ de directions ordinaires telle que $v_n \to u$ et $\varphi_F(v_n) \to \varphi_F(u)$.

Donnons la démonstration dans le cas délicat, qui est celui d'une direction critique $u \in S_n$. Soit $H_u$ l'hyperplan limite, tel que $H_u \cap F = \emptyset$.

Comme les hyperplans $\{\langle u\, x\rangle = \varphi_F(u) - \varepsilon\}$ rencontrent $F$ pour $\varepsilon$ assez petit, on peut trouver une suite $\{x_n\} \subset F$ telle que $\langle u\, x_n\rangle \uparrow \varphi_F(u) < \infty$. On a aussi $|x_n| \to \infty$, car, si cette suite de points admettait une valeur d'adhérence $x_0$, on aurait $x_0 \in F \cap H_u$. D'autre part, la suite des segments $(0, x_n) \subset F$ admet dans $\mathcal{F}$ une valeur d'adhérence $D \subset F$, qui est donc une demi-droite $D \subset C_\varphi$. De plus, cette demi-droite $D$ est parallèle à $H_u$, puisque les $\langle u\, x_n\rangle$ restent finis. Si $v$ désigne la direction de $D$, on a donc $v \in C_\varphi$, $\langle u, v\rangle = 0$. Mais on ne peut pas avoir $\langle u\, v'\rangle > 0$ strictement pour une autre direction $v' \in C_\varphi$. Sinon, en effet, la demi droite $D' \subset F$ de direction $v'$ couperait $H_u$ en un point $x' \in F$, et $u$ ne serait pas direction critique. Il suit de là que la direction critique $u$ appartient à la frontière $\partial C_\varphi^\perp$ du cône dual.

D'autre part, l'intérieur relatif $C_0^\perp$ du cône dual n'est pas vide (puisqu'il y a au moins une direction critique $u$). On peut donc trouver une suite $v_n$ convergeant vers $u$ et contenue dans $C_0^\perp \cap V$ où $V$ est un <u>2-plan</u> contenant $u$ et rencontrant $C_0^\perp$. Comme $C_0^\perp \subset S_N$, les directions $v_n$ sont des directions ordinaires et, pour chacune d'elles, il existe $x_n \in F$ tel que $\langle v_n\, x_n\rangle = \varphi_F(v_n)$.

Il reste à montrer que la suite $\varphi_F(u_n)$ converge vers $\varphi_F(u)$. Mais par ceci, nous pouvons nous ramener à un problème à 2 dimensions seulement. Car, pour $w \in V$, $\varphi_F(w)$ est la fonction d'appui (dans $V$ identifié à $\mathbb{R}^2$) de la projection $\Pi_V F$

de $F$ sur le 2-plan $V$, et les $x'_n = \Pi_V x_n$ vérifient encore $\langle v_n\, x'_n \rangle = \varphi_F(v_n)$. Mais, à 2 dimensions, des considérations simples sur les fonctions convexes permettent de voir que l'on a bien $\varphi_F(u) = \lim \varphi_F(v_n)$

Si $u \in \partial \mathcal{C}_\infty^\perp$ est une direction ordinaire, la démonstration se fait de la même manière. Si $u \in S_\varphi$, c'est à dire $\varphi_F(u) = \infty$, on a $\varphi_F(u) = \lim \varphi_F(u_n)$ pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers $u$ (à cause de la semi continuité inférieure de la fonction d'appui).

## 3-2- L'homéomorphisme $F \to F^*$

A tout $F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{F})$, associons la famille $\mathcal{A}_F$ des demi espaces fermés contenant $F$ :

$$\mathcal{A}_F = \{ E_{u,a} \; ; \; u \in S_0, \; a \geq \varphi_F(u) \}$$

étant entendu que $E_{u,a} = \mathbb{R}^n$ pour $a = \infty$. Il est clair qu'une suite de demi espaces $E_{u_n,a_n}$ converge dans $\mathcal{F}$ vers une limite, qui est obligatoirement un demi espace $E_{u,a}$ si et seulement si la suite $(u_n, a_n)$ converge vers $(u,a)$ dans l'espace produit (compact) $S_0 \times \overline{\mathbb{R}}_+$. En particulier, la famille $\mathcal{A}_F$ est fermée dans $\mathcal{F}$, soit $\mathcal{A}_F \in \mathcal{F}(\mathcal{F})$

<u>Théorème 3-1</u> Une suite $F_n$ converge dans $\mathcal{C}_0(\mathcal{F})$ si et seulement si la suite des familles fermées $\mathcal{A}_{F_n}$, constituées des demi espaces contenant chacun des $F_n$, converge dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ vers une limite qui est alors nécessairement $\mathcal{A}_F$, avec $F = \lim F_n$.

La convergence dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ des familles ~~des~~ de demi espaces $\mathcal{A}_{F_n}$ se laisse caractériser en termes de fonction d'appui. Plus généralement, si $\varphi$ est une fonction s.c.i $\geq 0$, posons

$$\mathcal{A}_\varphi = \{ E_{u,a} \; ; \; u \in S_0, \; a \geq \varphi(u) \}$$

C'est une famille fermée (à cause de la semi continuité inférieure).

Alors, une suite $a_{\varphi_n}$ (associée à une suite $\varphi_n$ de fonctions sci $\geq 0$) converge vers $a_\varphi$ au sens de la topologie de $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a/ pour tout $u \in S_0$ et toute suite $u_n$ convergeant vers $u$ dans $S_0$, on a $\varphi(u) \leq \underline{\lim}\ \varphi_n(u_n)$

b/ pour tout $u \in S_0$, il existe une suite $u_n$ convergeant vers $u$ dans $S_0$ telle que $\varphi(u) = \lim \varphi_n(u_n)$

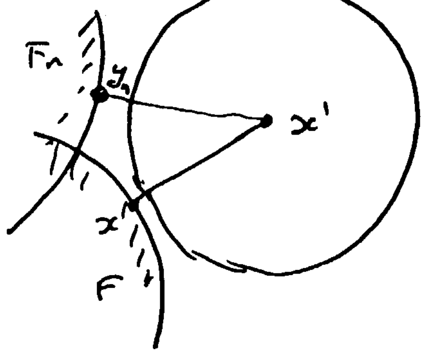
Passons alors à la démonstration du Théorème 3.1.
En premier lieu, nous supposons que $F_n \to F$ dans $C_0(\mathcal{F})$, et nous devons montrer $a_{F_n} \to a_F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$, c'est à dire vérifier que la suite $\varphi_{F_n}$ des fonctions d'appui associées satisfait aux conditions a/ et b/ ci-dessus.

Pour la condition a/, cela est assez facile. En effet, soit $x \in F$ et $u \in S_0$. Comme $F_n \to F$ dans $\mathcal{F}$, il existe une suite $x_n \in F_n$ convergeant vers $x$. Si maintenant $u_n$ converge vers $u$ dans $S_0$, on a $\varphi_{F_n}(u_n) \geq \langle u_n x_n \rangle$, puisque $x_n \in F_n$, et par suite $\langle u x \rangle \leq \underline{\lim}\ \varphi_{F_n}(u_n)$. Cette inégalité a lieu pour tout $x \in F$, et par suite :

$$\varphi_F(u) = \sup_{x \in F} \langle u x \rangle \leq \underline{\lim}\ \varphi_{F_n}(u_n)$$

Passons à la condition b/. Soit $u \in S_0$. Si $\varphi_F(u) = \infty$, la condition b/ est vérifiée pour toute suite $u_n$ convergeant vers $u$ (comme conséquence de la condition a/)

Supposons maintenant que $u$ soit une direction ordinaire pour $F$, c'est à dire qu'il existe $x \in F$ tel que $\langle u x \rangle = \varphi_F(u)$. Prenons $x' = x + u$, $1 > \varepsilon > 0$ et considérons la boule fermée $B_{1-\varepsilon}(x')$ de rayon $1-\varepsilon$ et de centre $x'$. Elle est disjointe de $F$, donc disjointe de tous les $F_n$ pour $n$ assez grand (à cause de la convergence $F_n \to F$). Soit alors $y_n$ la projection de $x'$




sur $F_n$. Il est immédiat que $y_n \to x$. Comme $y_n \notin B_{1-\varepsilon}(x')$, la direction $u_n = (x'-y_n)/|x'-y_n|$ est bien définie, et $u_n \to u$ dans $S_0$. D'autre part, on a $\varphi_{F_n}(u_n) = \langle u_n\, y_n \rangle$, puisque $y_n$ est la projection de $x'$. Comme $\langle u_n\, y_n\rangle \to \langle u\, x\rangle$, on a bien

$$\varphi_F(u) = \langle u\, x\rangle = \lim \varphi_{F_n}(u_n) -$$

Il reste à examiner le cas où $u$ est une direction critique. D'après le lemme 3-1, nous savons qu'il existe une suite $v_p$ de directions ordinaires pour $F$ telle que $v_p \to u$ et $\varphi_F(v_p) \to \varphi_F(u)$. D'après la première partie de la démonstration, pour chaque $p$ il existe une suite $v_{n,p}$ vérifiant

$$\lim_n v_{n,p} = v_p \quad ; \quad \lim_n \varphi_{F_n}(v_{n,p}) = \varphi_F(v_p)$$

Soit alors une suite $\varepsilon_q \downarrow 0$. Pour chaque $\varepsilon_q$, il existe $p_q$ tel que

$$|\varphi_F(v_{p_q}) - \varphi_F(u)| \leq \frac{\varepsilon_q}{2} \, ; \qquad |v_{p_q} - u| \leq \frac{\varepsilon_q}{2}$$

et $N_q$ tel que pour tout $n \geq N_q$

$$|\varphi_{F_n}(v_{n,p_q}) - \varphi_F(v_{p_q})| \leq \frac{\varepsilon_q}{2}\, , \quad |v_{p_q} - v_{n,p_q}| \leq \frac{\varepsilon_q}{2}$$

donc aussi :

$$|\varphi_{F_n}(v_{n,p_q}) - \varphi_F(u)| \leq \varepsilon_q \qquad |v_{p_q} - u| \leq \varepsilon_q$$

et on peut toujours supposer la suite $N_q$ strictement croissante. Posons alors $W_{n,q} = v_{n,p_q}$, de sorte que :

$$n \geq N_q \implies |\varphi_{F_n}(W_{n,q}) - \varphi_F(u)| \leq \varepsilon_q\, , \quad |W_{n,q} - u| \leq \varepsilon_q$$

Il suffit de poser par récurrence $u_n = W_{n,q}$ pour $n = N_q, N_q+1, \ldots, N_{q+1}-1$ pour obtenir la suite cherchée : $u_n \to u$ et $\varphi_{F_n}(u_n) \to \varphi_F(u)$

Réciproquement, soit maintenant $\{F_n\}$ une suite dans $C_0(\mathcal{F})$, telle que la suite $\mathcal{a}_{F_n}$ converge dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$ vers une limite $\mathcal{a}$, qui est évidemment une famille fermée de demi-espaces. Il faut montrer que $F_n$ converge dans $C_0(\mathcal{F})$ vers une limite $F$, et que l'on a $\mathcal{a} = \mathcal{a}_F$.

Soit $F$ une valeur d'adhérence de la suite $\{F_n\}$ dans l'espace compact $C_0(\mathcal{F})$, et $F_{n_q}$ une suite partielle convergeant vers $F$. D'après la première partie de la démonstration, la suite $\mathcal{a}_{F_{n_q}}$ converge vers $\mathcal{a}_F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{F})$. On a donc $\mathcal{a} = \mathcal{a}_F$, et par suite aussi $F = \cap \{E, E \in \mathcal{a}\}$. Comme la suite $\{F_n\}$ n'admet qu'une valeur d'adhérence, à savoir l'intersection des demi-espaces de $\mathcal{a}$, elle converge elle-même vers cette limite $F$.

<u>Corollaire</u> – Si $F^*$ désigne le dual de $F \in C_0(\mathcal{F})$, l'application $F \to F^*$ est bijective et bicontinue.

Comme cette application est involutive, il suffit de montrer qu'elle est continue. Par définition, $F^*$ est l'ensemble :

$$F^* = \{\lambda u \,,\ u \in S_0 \,,\ 0 \leq \lambda \leq 1/\varphi_F(u)\}$$

Supposons que $F_n \to F$ dans $C_0(\mathcal{F})$ et montrons $F_n^* \to F^*$. Pour cela, nous devons vérifier les deux critères habituels :

– Semi-continuité supérieure. Soient $x_{n_q} \in F^*_{n_q}$ et $x_{n_q} \to x$. Il faut montrer $x \in F^*$. Si $|x| = 0$, cela est trivial. Si $|x| \neq 0$, on a $|x_{n_q}| > 0$ pour $q$ assez grand. Posons $\lambda_q = |x_{n_q}|$ et $u_q = x_{n_q}/\lambda_q$. On a $u_q \to u$, $\lambda_q \to \lambda = |x|$ et $\lambda_q \leq 1/\varphi_{F_{n_q}}(u_q)$. D'après le théorème, $\varphi_F(u) \leq \underline{\lim}\, \varphi_{F_{n_q}}(u_q)$, donc $\lambda = \lim \lambda_q \geq 1/\varphi_F(u)$. Mais cela signifie que $x = \lambda u \in F^*$.

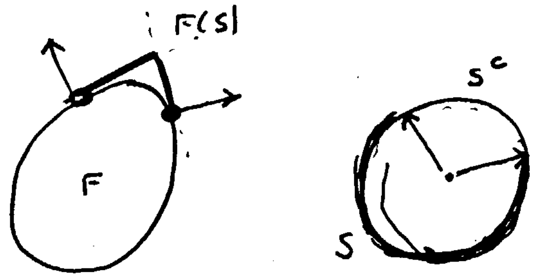
– Semi-continuité inférieure : Soit $x \in F^*$. Il faut montrer qu'il existe $x_n \in F_n$ telle que $x_n \to x$. Si $x = 0$, on peut prendre $x_n = 0$. Si $x \neq 0$, soit $\lambda = |x|$ et $u = x/\lambda$. Comme $x \in F^*$, on a $\lambda \leq 1/\varphi_F(u)$. D'après le théorème, il existe une suite $u_n \to u$ telle que $\varphi_{F_n}(u_n) \to \varphi_F(u)$. Prenons $\lambda_n = \lambda \varphi_F(u)/\varphi_{F_n}(u_n)$ et $x_n = \lambda_n u_n$ : on a $x_n \in F_n^*$ et $x_n \to x$ -

## 3-3 - Coiffure d'un fermé convexe

Si F est un fermé convexe, $F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{F})$, et $S \subset S_0$ un sous ensemble quelconque de la sphère unité, nous dirons que le fermé convexe $F(S)$ défini par

$$F(S) = \bigcap_{u \in S} E_{u,\varphi_F(u)}$$

constitue la coiffure de F par S (ou : l'ensemble F coiffé - « chapeauté » - par S) - (il serait d'ailleurs plus exact de dire que F est coiffé par les directions $u \notin S$). Il résulte de cette définition que l'on a




$$\varphi_{F(S)} \geq \varphi_F \quad \text{sur } S_0$$

et :

$$\varphi_{F(S)} = \varphi_F \quad \text{sur } S \subset S_0$$

Plus précisément : <u>F(S) est le plus grand des fermés convexes tels que</u>

$$\varphi_{F(S)} \leq \varphi_F \quad \text{sur } S$$

Lorsque A et K sont compacts convexes, et A d'intérieur non vide, l'élément $K'_0$ que nous avons rencontré à maintes reprises est $K'_0 = K(S_A)$, i.e l'ensemble K coiffé par le support $S_A$ de la mesure de surface associée à A : il dépend, non de A lui-même, mais des lacunes de son support, c'est-à-dire des caractères d'<u>angulosité</u> que présente l'ensemble A.

Pour un $F \in \mathcal{C}_0(\mathcal{F})$ donné, la coiffure vérifie :

(3-1) $$F(\cup S_i) = \cap F(S_i)$$

pour toute famille $S_i$ de sous ensembles quelconques de la sphère unité - Vis-à-vis de l'intersection, on trouve seulement en général l'inclusion

(3-2) $$F(\bigcap S_i) \supset \overline{\bigcup F(S_i)}$$

mais non l'égalité. De même, $\varphi_F$ étant sci mais non continue (à moins que F ne soit compact), on a pour tout $S \subset S_0$ d'adhérence $\overline{S}$ : $F(\overline{S}) \subset F(S)$, mais non l'égalité si S n'est pas fermé. Cependant, pour $F = K \in C_0(\mathcal{X})$, $\varphi_K$ est continue et la relation $K(\overline{S}) = K(S)$ est vérifiée.

Pour aller plus loin, nous supposerons essentiellement que le fermé convexe F est d'intérieur non vide, soit $\mathring{F} \neq \emptyset$. Quitte à effectuer une translation, nous pouvons alors supposer $0 \in \mathring{F}$, de sorte que le dual $F^*$ de F est un convexe compact. En reprenant des considérations géométriques déjà rencontrées dans le cas des compacts convexes, on voit que le dual de F(S) est alors le compact convexe :

$$F^*(S) = \overline{C(F^* \cap \tilde{S})} = C(\overline{F^* \cap \tilde{S}})$$

(il est compact, puisque $F^*(S) \subset F^*$ et que $F^*$ est compact. Mais, en général, il n'admet pas le point 0 comme point intérieur à moins que F(S) ne soit lui même compact). $\tilde{S}$ est le cône engendré par S.

En général, $F^*(S) \subset F^*$, et $F(S) \supset F$ strictement. Pour que ces inclusions deviennent des égalités, il faut et il suffit que l'ensemble $\overline{F^* \cap \tilde{S}}$ contienne l'ensemble des points extrémaux de $F^*$. Si S est un sous ensemble fermé de $S_0$, le cône $\tilde{S}$ est lui aussi fermé dans $\mathbb{R}^n$, et la condition se réduit à : $F^* \cap \tilde{S}$ contient les points extrémaux de $F^*$. Désignons par $S_F \subset S_0$ l'adhérence de l'ensemble des directions extrémales pour F (c'est à dire des directions $x/|x|$ associées aux points x extrémaux sur $\partial F^*$ et différents de 0. Pour S fermé dans $S_0$, on aura donc $F(S) = F$ si et seulement si $S \supset S_F$, de sorte que $S_F$ est le plus petit des sous ensembles fermés de la sphère unité tels que $F(S) = F$.

Si l'on suppose $\mathring{F}$ non vide et S fermé dans $S_0$, la coiffure $S \to F(S)$ est une application sci (mais non continue) de $\mathcal{F}(S_0)$ dans $C_0(\mathcal{F})$.

En effet, soit $S_n$ une suite de fermés convergeant vers $S$ dans $\mathcal{F}(S_0)$. Comme l'intersection est s.c.s. (mais non continue), la suite $F^* \cap \tilde{S}_n$ ne converge pas vers $F^* \cap \tilde{S}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, mais on a seulement $\overline{\lim}\, F^* \cap \tilde{S}_n \subset F^* \cap \tilde{S}$.

Soit alors $F' = \lim F^* \cap \tilde{S}_{n_k}$ une valeur d'adhérence de la suite $F^* \cap \tilde{S}_n$, et donc $F' \subset F^* \cap \tilde{S}$. Comme les $F^* \cap \tilde{S}_{n_k}$ sont contenus dans le compact fixe $F^*$, la convergence $F^* \cap \tilde{S}_{n_k} \to F'$ a lieu aussi dans $\mathcal{K}$. Par suite, l'enveloppe convexe étant continue sur $\mathcal{K}$, on a également $F^*(S_{n_k}) = C(F^* \cap \tilde{S}_{n_k}) \to C(F') \subset F^*(S)$

Compte tenu du théorème 3-1, la suite $F(S_{n_k})$ converge elle même dans $C_0(\mathcal{F})$ vers la limite $(C(F'))^* \supset F(S)$

Il en résulte $F(S) \subset \underline{\lim}\, F(S_n)$, c'est à dire la semi continuité inférieure de la coiffure $S \to F(S)$ sur $\mathcal{F}(S_0)$

En effet, soit $n_p$ une suite partielle telle que $F(S_{n_p}) \to A$ dans $C_0(\mathcal{F})$. On a aussi, d'après le théorème, $F^*(S_{n_p}) = C(F^* \cap \tilde{S}_{n_p}) \to A^*$. Quitte à extraire de $n_p$ une sous suite convenable, nous pouvons également supposer que $F^* \cap \tilde{S}_{n_p}$ converge dans $\mathcal{K}$ vers une limite $F'$ (avec alors $C(F') = A^*$). Le raisonnement précédent donne donc cette fois $A^* = C(F') \subset F^*(S)$, c'est à dire $A \supset F(S)$. Étant contenu dans toute valeur d'adhérence $A$ de la suite $F(S_n)$, $F(S)$ est bien contenu dans $\underline{\lim}\, F(S_n)$

Comme conséquence immédiate de cette semi continuité inférieure, nous obtenons le résultat suivant :

Si $F \in C_0(\mathcal{F})$ est d'intérieur non vide, pour toute famille $S_i$ de sous ensembles fermés de $S_0$, on a

$$(3\text{-}3) \qquad F(\cap S_i) = \overline{\cup F(S_i)}$$

En effet, la semi continuité inférieure donne ici $F(\cap S_i) \subset \overline{\cup F(S_i)}$, et l'inclusion inverse est toujours vraie d'après (3-2)

## 4- Ordres et Préordres

La richesse de structure du cône convexe $C(Sc)$ ou $C_0(Sc)$ s'avère un peu déroutante. Pour ne parler que des relations d'ordre ou de préordre, nous en comptons au moins six, dont plusieurs restent à interpréter. En effet, nous avons déjà rencontré :

$\boxed{a}$ L'inclusion $K \subset A$, ou, ce qui revient au même, $\varphi_K \leq \varphi_A$

$\boxed{b}$ l'inclusion à une translation près : il existe une translation $h$ telle que $K_h \subset A$, ou, ce qui revient au même, $A \ominus \check{K} \neq \emptyset$ (le module $R$ de l'érosion ultime est $\geq 1$). D'après le théorème 2-3, cette relation équivaut à

$$(b) \qquad W_1(C, K) \leq W_1(C, A) \qquad \forall\ C \in C(Sc)$$

Il s'agit d'un préordre sur $C(Sc)$, et la relation d'équivalence associée à ce préordre est l'égalité à une translation près. Si l'on désigne par $C_\tau(Sc)$ l'espace quotient de $C(Sc)$ par cette équivalence, c'est-à-dire l'ensemble des compacts convexes considérés à une translation près, la relation (b), ainsi que les deux suivantes, sont des relations d'ordre sur $C_\tau(Sc)$

$\boxed{c}$ La relation « A est ouvert selon K », ou « $A = K \oplus D$ pour un $D \in C(Sc)$ », ou encore « $\varphi_A - \varphi_K$ est une fonction d'appui »

$\boxed{d}$ La relation « K est fermé selon $A^c$ ». Dans $\mathbb{R}^2$, les relations d'ordre c et d sont identiques, comme on l'a vu plus haut. Mais, pour un nombre $n \geq 3$ de dimensions, on a seulement $A_K = A \Rightarrow K^{A^c} = K$, mais non l'implication inverse. Il serait intéressant d'exprimer la relation $K^{A^c} = K$ à l'aide des fonctions d'appui et (ou) des mesures de surface de A et de K.

$\boxed{e}$ - Les mesures de surface permettent, à leur tour, de définir une cinquième relation : « $G_K \leq G_A$ ». Si $n \geq 3$, cette relation est seulement un préordre sur $C_\tau(Sc)$, car l'égalité $G_K = G_A$ n'entraîne $A = K$ à une translation près que si A (ou K) est supposé d'intérieur non vide. Dans l'espace à 2 dimensions, la relation e est un ordre sur $C_\tau(Sc)$, et on a vu d'ailleurs que cet ordre est identique à celui que définit la relation c. Pour $n \geq 3$, $A_K = A$ entraîne $G_K \leq G_A$ (car K est alors l'érodé de A par $A_1 = A \ominus \check{K}$, et la mesure de surface est décroissante par érosion) Mais l'implication inverse est fausse (En effet, en posant $A_1 = A \ominus \check{K}$, $K_1 = A \ominus \check{A}_1 = (K)^{A^c}$, on a vu que l'on avait seulement $A \supset A_1 \oplus K_1$, mais non l'égalité si $n \geq 3$ : il y a des contre exemples. Or, on a $G_{A_1} \leq G_A$ et, aussi bien, $G_{K_1} \leq G_A$, puisque ces ensembles $A_1$ et $K_1$ sont déduits de $A$ par érosion. Mais $A$ n'est, en général, ouvert ni selon $A_1$ ni selon $K_1$)

De même, la relation $K^{A^c} = K$, soit $K_1 = K$ avec les notations ci-dessus, entraîne $G_K \leq G_A$ (puisque l'on a toujours $G_{K_1} \leq G_A$). Mais la réciproque n'est pas vraie (sauf, toujours, dans le cas $n = 2$). Il serait intéressant (si cela est possible) de trouver une interprétation géométrique simple de la relation $G_K \leq G_A$

$\boxed{f}$ Il y a lieu, enfin, d'envisager – et d'interpréter – une sixième relation, à savoir :

$$(f) \qquad W_1(K, C) \leq W_1(A, C) \quad , \forall C \in C(\mathcal{K})$$

Pour $n \geq 3$, c'est un préordre sur $C_r(\mathcal{K})$. En effet, la relation $W_1(K, C) = W_1(A, C)$ pour tout $C \in C(\mathcal{K})$ entraîne $G_K = G_A$, et donc $A = K$ à une translation près seulement si l'un des deux convexes $A$ ou $K$ est supposé d'intérieur non vide. A deux dimensions, toutefois, il s'agit bien d'un ordre sur $C_r(\mathcal{K})$. A dire vrai, pour $n = 2$, la fonctionnelle $W_1$ est symétrique : $W_1(K, C) = W_1(C, K)$, de sorte que les relations (f) et (b) sont équivalentes. Mais, pour $n \geq 3$, l'inclusion $K \subset A$ à une translation près entraîne (f), car $W_1$ est une fonction croissante de ses deux arguments, mais j'ignore si la réciproque est encore vraie.

En résumé, pour $n \geq 3$, on a le réseau suivant :

$$(n \geq 3) \qquad \begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \Rightarrow & \boxed{b} & \Rightarrow & \boxed{f} \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \boxed{c} & \Rightarrow & \boxed{d} & \Rightarrow & \boxed{e} \end{array}$$

qui se simplifie pour $n = 2$ : dans ce dernier cas, il n'y a plus que 2 relations substantiellement différentes

$$(n = 2) \qquad \begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \Rightarrow & \boxed{b} & \Leftrightarrow & \boxed{f} \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \boxed{c} & \Leftrightarrow & \boxed{d} & \Leftrightarrow & \boxed{e} \end{array}$$

Problème pour $n \geq 3$ : f entraîne-t-elle b

e entraîne-t-elle b ? : Non (contre exemple : si $K$ est un segment de droite, $G_K = 0 \leq G_A$, mais on n'a pas nécessairement $K \subset A$. Toutefois, on pourrait se limiter à l'espace $\mathring{C}(\mathcal{K})$ des compacts convexes d'intérieur non vides, pour lesquels la question se pose.

Remarque de G.R.

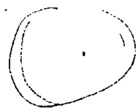
l'ensemble de ces applications

$$i : K \to K^{(A^c)}$$

$$K \to A \otimes \check{K} \quad \text{sont } \underline{\text{continues}}$$

et non pas semi-continues ! ~~...~~ seulement comme l'union

(on connaît les contre-exemples de la semi-continuité de l'union

 un cercle réduit par lui en un point

ou  un segment réduit par un autre qui ne crée rien sauf de la bonne direction