Fontainebleau/CG. N-547

LES MESURES MIXTES ET LEURS SUPPORTS

-=-=-=-=-=-=-

G. MATHERON Décembre 1977

LES MESURES MIXTES ET LEURS SUPPORTS

LES MESURES MIXTES ET LEURS SUPPORTS

1 - LA C-ADDITIVITE DES MESURES DE SURFACE.

On sait que les fonctionnelles usuelles de Minkowski possèdent la propriété dite d'additivité convexe, ou C-additivité, dont la définition est la suivante :

Def.- Une fonction ψ sur $C(\mathcal{K})$ est dite C-additive si

$$\psi(K) + \psi(K') = \psi(K \cup K') + \psi(K \cap K')$$

pour tous $K, K' \in C(\mathcal{K})$ tels que la réunion $K \cup K'$ soit convexe.

Cette prorpiété s'étend aux fonctionnelles mixtes de Minkowski, qui sont, en effet, C-additives par rapport à chacun de leurs arguments.

Dans ce qui suit, je vais montrer que la C-additivité est encore valable pour les mesures de surfaces elles-mêmes. L'énoncé précis est le suivant :

Th. 1 : (C-additivité des mesures de surface). Soient A et K compacts convexes non vides dans $\mathbb{R}^n$, G_A et G_K leurs mesures de surface. Si $A \cup K$ est convexe, on a :

$$G_A + G_K = G_{A\cup K} + G_{A\cap K}$$

Dans ce qui suit, A, K désignent des compacts convexes non vides dans $\mathbb{R}^n$. Pour démontrer le Th. 1, je vais m'appuyer sur un lemme qui fournit quatre propriétés équivalentes à la convexité de la réunion $A \cup K$. Je désigne par φ_K la fonction d'appui d'un compact convexe K, par G_K sa mesure de surface sur la sphère unité. Je dis qu'un ensemble C sépare A et K si, pour tout $a \in A$ et $k \in K$, le segment de droite $[a,k]$ rencontre C.

LEMME 1 - Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $A \cap K$ sépare A et K

(ii) $A \cup K$ est convexe

(iii) $A \oplus K = (A \cup K) \oplus (A \cap K)$

(iv) $\varphi_{A\cap K} = \varphi_A \wedge \varphi_K$

(v) $\forall C \in C(\mathcal{K}),\ (A \cap K) \oplus C = (A \oplus C) \cap (K \oplus C)$

De plus, si A et K vérifient ces propriétés, pour tout $C \in C(\mathcal{K})$ les convexes $A \oplus C$ et $K \oplus C$ les vérifient également.

Démonstration du lemme.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $a \in A$ et $k \in K$. Si $A \cap K$ sépare A et K, il existe un point $x \in A \cap K$ sur le segment $[a,k]$. On a donc $[a\ x] \subset A$ et $[x\ k] \subset K$. Par suite, le segment $[a,k]$ est contenu dans la réunion $A \cup K$. Donc $A \cup K$ est convexe.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $A \cup K$ convexe, $a \in A$ et $k \in K$. Pour $0 \leq \lambda \leq 1$, posons $x_\lambda = (1-\lambda)a + \lambda k$, de sorte que $x_\lambda \in A \cup K$. Soit $\lambda_0 =$ $= \operatorname{Sup} \{\lambda,\ \lambda \in (0,1),\ x_\lambda \in A\}$. Si $\lambda_0 = 1$, $x_{\lambda_0} = k \in A \cap K$. Si $\lambda_0 < 1$, on a $x_\lambda \in A$ pour $\lambda < \lambda_0$ et $x_\lambda \in K$ pour $\lambda > \lambda_0$. Comme A et K sont compacts, il en résulte $x_{\lambda_0} \in A \cap K$, et $A \cap K$ sépare A et K.

(i) ou (ii) $\Rightarrow$ (iii). L'inclusion $(A \cup K) \oplus (A \cap K) \subset A \oplus K$ est toujours vraie. Il faut montrer que l'inclusion inverse est vérifiée si $A \cup K$ est convexe. Soit $a \in A$, $k \in K$. Comme $A \cup K$ est convexe, le point médian $a' = \frac{a+k}{2}$ appartient, par exemple, à A. Comme $A \cap K$ sépare A et K, il existe un point x sur le segment $(a'k)$ tel que $x \in A \cap K$. Si x' est le symétrique de x par rapport à a', x' appartient au segment $[a,a']$, donc $x' \in A$. Mais alors on a $a' =$ $= (x+x')/2$, c'est-à-dire $a+k = x + x'$ avec $x \in A \cap K$ et $x' \in A \cup K$. Donc $A \oplus K$ est contenu dans $(A \cup K) \oplus (A \cap K)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Soit C l'enveloppe convexe de $A \cup K$. On a $\varphi_C =$ $\varphi_A \vee \varphi_K$. Si (iii) est vraie, on a également $A \oplus K = C \oplus (A \cap K)$, donc $\varphi_{A\cap K} = \varphi_A + \varphi_K - \varphi_A \vee \varphi_K = \varphi_A \wedge \varphi_K$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Si (iv) est vraie, pour tout $C \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$, la fonction d'appui de $C \oplus (A \cap K)$ est $\varphi_C + \varphi_A \wedge \varphi_K = \varphi_{A\oplus C} \wedge \varphi_{K\oplus C}$. Or $\varphi_{(A\oplus C)\cap(K\oplus C)}$ est le sup des fonctions d'appui majorées par $\varphi_{A\oplus C} \wedge \varphi_{K\oplus C}$: comme cette borne supérieure est elle-même une fonction d'appui, on a bien $\varphi_{(A\oplus C)\cap(K\oplus C)} = \varphi_{A\oplus C} \wedge \varphi_{K\oplus C}$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $A \cap K$ ne sépare pas A et K. On peut donc trouver $a \in A$ et $k \in K$ tels que le segment $[a,k]$ ne rencontre pas $A \cap K$. La droite D engendrée par ce segment $[a,k]$ ne peut pas, non plus, rencontrer $A \cap K$ (sinon, on aurait soit $a \in K$, soit $k \in A$). Prenons pour C le segment $[\frac{k-a}{2}, \frac{a-k}{2}]$. Alors, le point $(a+k)/2$ est dans $(A \oplus C) \cap (K \oplus C)$. Mais on ne peut pas avoir $(a+k)/2 \in (A \cap K) \oplus C$, car cela entrainerait que D rencontre $A \cap K$. Donc (v) n'est pas vérifiée.

Enfin, si A et K vérifient (v), pour C, C' compacts convexes on aura :

$$(A \cap K) \oplus (C \oplus C') = (A \oplus C \oplus C') \cap (K \oplus C \oplus C')$$

et aussi :

$$[(A \cap K) \oplus C] \oplus C' = ((A \oplus C) \cap (K \oplus C)) \oplus C'$$

Donc $A \oplus C$ et $K \oplus C$ vérifient encore la propriété (v).

Démonstration du Th. 1.

Si $A \cup K$ est convexe, A et K vérifient la propriété (v) ci-dessus. Par suite, pour tout $C \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ et tout $\rho > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} V((A \cup K) \oplus \rho C) + V((A \cap K) \oplus \rho C) &= \\ &= V((A \oplus \rho C) \cup (K \oplus \rho C)) + V((A \oplus \rho C) \cap (K \oplus \rho C)) \\ &= V(A \oplus \rho C) + V(K \oplus \rho C) \end{aligned}$$

(d'après l'additivité du volume V). En égalant les dérivées en $\rho = 0$ des deux membres extrêmes, nous obtenons :

$$W_1(A \cup K, C) + W_1(A \cap K, C) = W_1(A,C) + W_1(K,C)$$

Cette relation étant vérifiée pour tout compact convexe C, il en résulte bien

$$G_{A\cup K} + G_{A\cap K} = G_A + G_K$$

(en effet, $W_1(A,C) = (1/n)\int G_A\, \varphi_C$, et les fonctions d'appui φ_C forment une partie totale dans l'espace des fonctions continues sur la sphère unité).

<u>Corollaire</u>. <u>Les mesures de surface mixtes</u> $G_{A_1}^{k_1}\, {}_{A_2}^{k_2} \cdots {}_{A_p}^{k_p}$ $(k_1 + \dots + k_p = n-1)$ <u>sont C-additives par rapport à chacun de leurs arguments</u> $A_1, \dots A_p$ - (<u>et, en particulier, toutes les fonctionnelles mixtes de Minkowski sont C-additives</u>).

En effet, soient A, K, C compacts convexes et $A \cup K$ convexe. D'après le lemme, $A \oplus \rho C$ et $K \oplus \rho C$ $(\rho > 0)$ vérifient les propriétés (i) ... (v) et $(A \oplus \rho C) \cap (K \oplus \rho C) = (A \cap K) \oplus \rho C$. En appliquant le théorème, on trouve donc :

$$G_{A\oplus\rho C} + G_{K\oplus\rho C} = G_{(A\cup K)\oplus\rho C} + G_{(A\cap K)\oplus\rho C}$$

En développant en ρ et en procédant par identification, on obtient :

$$G_{A}^{k,}\,{}_{C}^{n-1-k} + G_{K}^{k}\,{}_{C}^{n-1-k} = G_{A\cup K}^{k}\,{}_{C}^{n-1-k} + G_{A\cap K}^{k}\,{}_{C}^{n-1-k}$$

Il suffit ensuite de prendre $C = \rho_2\, C_2 \oplus \dots \oplus \rho_{n-k}\, C_{n-k}$ pour en déduire l'énoncé général.

<u>Exemple</u>.

Soient, dans $\mathbb{R}^n$, K compact convexe d'intérieur non vide, S et S' fermés de la boule unité S_0 tels que K(S) et K(S') soient compacts. Nous désignerons par

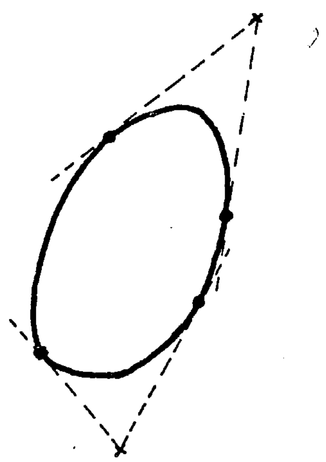
$$\tilde{S} = \{u : \varphi_{K(S)}(u) = \varphi_K(u)\} \quad ; \quad \tilde{S}' = \{\varphi_{K(S')} = \varphi_K\}$$

les plus grands fermés T, T' tels que $K(T) = K(S)$ et $K(T') = K(S')$. (en particulier $K(\tilde{S}) = K(S)$).

Pour $u \in S_o$, on a $\varphi_{K(S)}(u) = \varphi_K(u)$ si et seulement si $u \in \tilde{S}$, et de même $\varphi_{K(S')}(u) = \varphi_K(u)$ si et seulement si $u \in \tilde{S}$. Donc

$$\varphi_K = \varphi_{K(S)} \wedge \varphi_{K(S')} \Leftrightarrow \tilde{S} \cup \tilde{S}' = S_o$$

Ainsi, la condition $\tilde{S} \cup \tilde{S}' = S_o$ entraine évidemment $K(S) \cap K(S') = K$, mais aussi (d'après le lemme) que cette intersection sépare $K(S)$ et $K(S')$, ou encore que la réunion $K(S) \cup K(S')$ est convexe.



[N.B. : On a $K(S) \cap K(S') = K(S \cup S')$. Par conséquent $K = K(S) \cap K(S')$ si et seulement si $S \cup S' \supset S_K$. Mais cette condition, nécessaire, n'est pas suffisante pour que $\tilde{S} \cup \tilde{S}' = S_o$].

Lorsque $\tilde{S} \cup \tilde{S}' = S_o$, donc, $K(S) \cup K(S')$ est convexe. De plus, on a alors :

$$K(S) \cup K(S') = K(\tilde{S} \cap \tilde{S}')$$

En effet, l'inclusion $K(\tilde{S} \cap \tilde{S}') \supset K(\tilde{S}) \cup K(\tilde{S}')$ est toujours vraie, et il faut montrer l'inclusion inverse. D'après la C-additivité, on a :

$$G_{K(S) \cup K(S')} + G_K = G_{K(S)} + G_{K(S')}$$

puisque $K = K(S) \cap K(S')$. Sur l'<u>ouvert</u> $\tilde{S}'^c \subset \tilde{S}$, on a $\varphi_{K(S) \cup K(S')} = \varphi_{K(S)} \vee \varphi_{K(S')} = \varphi_{K(S')}$, puisque $\varphi_{K(S)} = \varphi_K \leq \varphi_{K(S')}$ sur $\tilde{S}$. Donc $G_{K(S) \cup K(S')} = 0$ sur $\tilde{S}'^c$, et le support de cette mesure est inclus dans $\tilde{S}'$. De la même façon, il est inclus dans $\tilde{S}$, d'où

$$S_{K(S) \cup K(S')} \subset \tilde{S} \cap \tilde{S}'$$

Par ailleurs, $\varphi_{K(S) \cup K(S')} = \varphi_K$ sur $\tilde{S} \cap \tilde{S}'$. L'inclusion ci-dessus entraine donc bien $K(S) \cup K(S') = K(\tilde{S} \cap \tilde{S}')$.

2 - REMARQUES SUR L'APPLICATION $S \to K(S)$.

Soit K un compact convexe fixe d'intérieur non vide. A tout fermé $S \in \mathfrak{F}(S_o)$ de la sphère unité est associé le convexe $K(S)$, défini comme le plus grand des convexes K' vérifiant $\varphi_{K'} \leq \varphi_K$ sur S. On peut aussi définir $K(S)$ comme le plus grand des convexes K' tels que :

$$K' \supset K \quad \text{et} \quad \int G_K \varphi_K = \int G_K \varphi_{K'}$$

Désignons par $\mathcal{K}(K)$ l'ensemble $K(\mathfrak{F}(S_o))$ des convexes K' de la forme $K' = K(S)$ pour $S \in \mathfrak{F}(S_o)$n et cherchons à caractériser $\mathcal{K}(K)$.

A tout K' convexe d'intérieur non vide, nous associons le support $S_{K'} \in \mathfrak{F}(S_o)$ de sa mesure de surface, et le fermé $\tilde{S}_{K'} \in \mathfrak{F}(S_o)$ défini par :

$$\tilde{S}_{K'} = \{u : u \in S_o \ , \ \varphi_{K'}(u) = \varphi_K(u)\}$$

Si $K' = K(S)$ appartient à $\mathcal{K}(K)$, on a évidemment aussi $K' = K(\tilde{S}_{K'})$ et donc $S_{K'} \subset \tilde{S}_{K'}$. Inversement, si $S_{K'} \subset \tilde{S}_{K'}$, on trouve aussitôt $K' = K'(\tilde{S}_{K'})$. Mais, puisque $\varphi_{K'} = \varphi_K$ sur $K'(\tilde{S}_{K'})$, on a toujours $K'(\tilde{S}_{K'}) = K(\tilde{S}_{K'})$. Donc $S_{K'} \subset \tilde{S}_{K'}$ entraine $K' = K(\tilde{S}_{K'})$, soit $K' \in \mathcal{K}(K)$.

Ainsi : <u>$K' = K(S)$ pour un fermé $S \subset S_o$ si et seulement si $S_{K'} \subset \tilde{S}_{K'}$.</u>

Il en résulte que l'espace <u>$\mathcal{K}(K)$</u> des K' de la forme $K' = K(S)$ est <u>fermé</u> dans $C(K)$.

En effet, <u>l'application $K' \to S_{K'}$ est s.c.i.</u> Car l'application $K' \to G_{K'}$ est continue, et l'application $G \to \operatorname{Supp} G$ est s.c.i. D'autre part <u>l'application $K' \to \tilde{S}_{K'}$ est s.c.s.</u>

En effet, si $K'_n \rightrightarrows K'$, soit $\{u_{n_k}\}$ une suite dans S_o vérifiant $u_{n_k} \in \tilde{S}_{K'_{n_k}}$ (i.e. $\varphi_{K'_{n_k}}(u_{n_k}) = \varphi_K(u_{n_k})$) et $u_{n_k} \to u$. Comme $\varphi_{K'_{n_k}} \to \varphi_{K'}$ uniformément, il vient $\varphi_{K'}(u) = \varphi_K(u)$, c'est-à-dire $u \in \tilde{S}_{K'}$. Donc $\tilde{S}_{K'} \supset \overline{\lim}\, \tilde{S}_{K'_n}$, et $K' \to \tilde{S}_{K'}$ est s.c.s.

Soit alors $\{K'_n\}$ une suite dans $\mathcal{K}(K)$, c'est-à-dire telle que $S_{K'_n} \subset \tilde{S}_{K'_n}$ pour chaque n, convergeant vers K' : d'après les semi-continuités ci-dessus, on a $S_{K'} \subset \underline{\lim}\ S_{K'_n}$ et $\overline{\lim}\, \tilde{S}_{K'_n} \subset \tilde{S}_{K'}$. Donc $S_{K'} \subset \tilde{S}_{K'}$, et $K' \in \mathcal{K}(K)$: cet espace est bien <u>fermé</u>.

Montrons maintenant que <u>l'application $S \to K(S)$ est continue</u> (K étant d'intérieur non vide) en tout S tel que <u>K(S) soit compact</u>. (Notons qu'en général K(S) est un fermé, non nécéssairement compact dans $\mathbb{R}^n$: pour que K(S) soit compact, il faut et il suffit que l'enveloppe convexe C(S) de S admette 0 comme point intérieur).

L'ensemble des S tels que K(S) soit compact <u>est ouvert dans $\mathfrak{Z}(S_o)$</u>. En effet, K(S) est non compact si et seulement si il existe un $u_o \in S_o$ tel que $< u_o\ u > \geq 0$ pour tout $u \in S$. On en déduit sans peine que $\{S : S \in S_o\ ,\ K(S) \text{ non compact}\}$ est fermé dans $\mathfrak{Z}(S_o)$, et son complémentaire est bien ouvert.

Par suite, si $S_n \to S$ et si K(S) est compact, les $K(S_n)$ sont compacts pour n assez grand.

Toujours pour n assez grand, les $K(S_n)$ restent contenus dans une boule fixe. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut trouver une suite $x_{n_k} \in K(S_{n_k})$ telle que $|x_{n_k}| \to \infty$ et $u_{n_k} = x_{n_k}/|x_{n_k}| \to u_o$. Comme $\varphi_{K(S_{n_k})}(u) \geq \varphi_K(u) \vee < u\ x_{n_k} >$, l'ensemble S_{n_k}, sur lequel $\varphi_{K(S_{n_k})} = \varphi_K$, est contenu dans $S'_{n_k} = \{< u\ x_{n_k} > \leq \varphi_K(u)\}$. Or S'_{n_k} converge, dans $\mathfrak{Z}(S_o)$ vers la limite $S' = \{ < u\ u_o > \leq 0\}$ et on trouve $S \subset S'$: mais cela contredit le fait que K(S) est compact.

Ainsi, pour n assez grand, les $\{K(S_n)\}$ forment une famille relativement compacte dans $C(\mathcal{K})$. Soit donc K' une valeur d'adhérence de la suite $K(S_n)$, et S_{n_k} une suite partielle telle que $K(S_{n_k}) \to K'$.

D'après les semi-continuités mentionnées ci-dessus, on trouve :

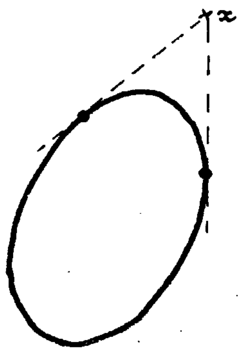
$$S_{K'} \subset \underline{\lim}\, S_{K(S_{n_k})} \subset \lim S_{n_k} = S$$

et

$$S \subset \overline{\lim}\; \tilde{S}_{K(S_{n_k})} \subset \tilde{S}_K .$$

Mais $S_{K'} \subset S \subset \tilde{S}_{K'}$ équivaut à $K' = K(S)$. Par suite, la suite $K(S_n)$, étant compacte et n'admettant qu'une valeur d'adhérence, converge elle-même vers $K' = K(S)$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^n$ un point donné et $K(x)$ l'enveloppe convexe de $K \cup \{x\}$. Convenons d'appeler secteur normal du point x le cône ouvert convexe T_x défini par :



$$T_x = \{u \in S_o : \langle u\, x \rangle > \varphi_K(u)\}$$

Le cône ouvert T_x est vide si et seulement si x appartient à K :

$$T_x = \emptyset \Leftrightarrow x \in K$$

et, si $T_x \neq \emptyset$, T_x est l'intérieur du cône des normales en x à l'enveloppe convexe $K(x)$.

Désignons par S_x le complémentaire de T_x dans S_o :

$$S_x = \{u \in S_o \,,\, \langle u\, x \rangle \leq \varphi_K(u)\}$$

On a

$$\varphi_{K(x)}(u) = \begin{matrix} \langle u\, x \rangle \text{ sur } T_x \\ \varphi_K(u) \text{ sur } S_x \end{matrix}$$

et $\varphi_{K(x)}(u) > \varphi_K(u)$ sur T_x. Il en résulte $K(x) \subset K(S_x)$ et $S_x = \tilde{S}_x$, i.e. S_x est le plus grand fermé S tel que $K(S_x) = K(S)$. Mais, comme $\varphi_{K(x)}(u) = \langle u\ x \rangle$ sur l'ouvert T_x, la mesure de surface $G_{K(x)}$ est nulle sur T_x, d'après le principe de localisation, et par suite $S_{K(x)} \subset S_x$. Or cela entraine $K(x) \supset K(S_x)$. On a donc l'égalité :

$$K(x) = K(S_x)$$

Soit maintenant S un fermé dans S_o. On a $x \in K(S)$ si et seulement si $\langle u\ x \rangle \leq \varphi_K(u)$ pour tout $u \in S$; mais cela équivaut à $S \subset S_x$:

$$x \in K(S) \Leftrightarrow S \subset S_x$$

En particulier, $\tilde{S}$, i.e. le plus grand des fermés S' tels que $K(S') = K(S)$ (ou encore : $\tilde{S} = \{u \in S_o\ ,\ \varphi_{K(S)}(u) = \varphi_K(u)\}$, est donné par :

$$\tilde{S} = \bigcap \{S_x\ ,\ x \in K(S)\}$$

Comme $S \to K(S)$ est une application continue, et $K' \to \tilde{S}_{K'}$ une application s.c.s., on voit que <u>l'application $S \to \tilde{S}$ est une fermeture s.c.s. sur S_o</u>.

Cette fermeture vérifie $K(S) = K(\tilde{S})$ et, plus généralement :

$$K(S) \subset K(S') \Leftrightarrow \tilde{S}' \subset \tilde{S}$$

<u>L'application $x \to S_x$ est elle-même s.c.s.</u> En effet, $s \to K(x)$ est continue, et $K(x) \to \tilde{S}_{K(x)} = S_x$ est s.c.s.

En ce qui concerne $S_{K(x)}$, support de la mesure de surface de l'enveloppe convexe de $K \cup \{x\}$, on a vu $S_{K(x)} \subset S_x$. Du fait que $\varphi_{K(S_x)} = \langle u\ x \rangle$ sur T_x , on a même un résultat plus fort : si $\tau_{K(x)} = G^{1}_{K(x)},\ B^{n-2}$ est la mesure-trace associée à $K(x)$, et $S_{\tau_{K(x)}}$ son support, on a même :

$$S_{\tau_{K(x)}} \subset S_x$$

On le voit encore en remarquant que le complémentaire du support de $\tau_{K(x)}$, réunion des intérieurs des cônes des normales aux sommets de $K(x)$, contient nécessairement T_x , puisque T_x est justement l'intérieur du cône des normales en x à $K(x)$.

3 - LES SUPPORTS DES MESURES MIXTES.

Si $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ sont compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement d'intérieurs non vides), nous désignerons par $S_{A_1,\ldots A_{n-1}}$ le support de la mesure mixte $G_{A_1\ldots A_n}$. Parmi les A_i, certains peuvent être égaux. L'utiliserai la notation

$$G^{k_1 \quad k_p}_{K_1,\ldots K_p} \quad \text{et} \quad S^{k_1 \quad k_p}_{K_1,\ldots K_p}$$

(avec $k_1+\ldots+k_p = n-1$) lorsque, parmi les $n-1$ compacts A_i, k_j sont égaux à K_j $(j = 1,2,\ldots p)$. Si K_p est <u>la boule unité B</u> j'écrirai

$$G^{k_1 \quad k_{p-1}}_{K_1,\ldots,K_{p-1}} \quad \text{et} \quad S^{k_1 \quad k_{p-1}}_{K_1,\ldots K_{p-1}}$$

en sous-entendant $K_p = B$ (avec évidemment $k_1+\ldots+ k_{p-1} \leq n-1$).

En particulier, la <u>mesure-trace</u> $\tau_A = G^{1 \; n-2}_{A \; B}$ s'écrit :

$$\tau_A = G^1_A \quad ; \quad S_{\tau_A} = S^1_A$$

et la <u>mesure de surface</u> G_A est elle-même :

$$G_A = G^{n-1}_A \quad ; \quad S_A = S^{n-1}_A$$

S^1_A est le complémentaire des intérieurs des cônes des normales à A. Pour $1 < k \leq n-1$, la caractérisation est un tout pètit peu plus compliquée : S^k_A est l'adhérence du complémentaire de la réunion des intérieurs <u>relatifs</u> des cônes des normales à A de dimension $\geq n-k$.

(si $k = n-1$, $S_A^{n-1} = S_A$ est l'adhérence des directions extrémales pour A).

Pour $k = 1$, le support $S_A^1 = S_{\tau_A}$ de la mesure-trace admet une caractérisation simple : si $H \in \mathcal{S}_2$ est un sous-espace à 2 dimensions, désignons par $A_H = \Pi_H A$ la projection de A sur H, par $G_A^H = G_{A_H}$ sa mesure de surface dans H (concentrée sur le cercle unité de H) et par $S_{A_H} \subset H$ le support de G_A^H. Alors :

(3-1) $$S_A^1 = \bigcup_{H \in \mathcal{S}_2} S_{A_H}$$

En effet, une direction u est dans S_A^1 si et seulement si elle n'est intérieure à aucun cône des normales à A. Or u est intérieure à un cône des normales de A si et seulement si elle est intérieure (dans H) à un cône des normales de la projection $A_H = \Pi_H A$ pour tous les 2-plans $H \in \mathcal{S}_2$ contenant u. Cela signifie donc

$$u \notin S_A^1 \Leftrightarrow \forall H \in \mathcal{S}_2 \text{ tel que } u \in H,\ u \notin S_{A_H}.$$

Par suite S_A^1 est bien la réunion des supports S_{A_H}, H parcourant $\mathcal{S}_2$.

A côté de l'érosion infinitésimale $K(S_A)$ de K par A, nous pouvons considérer des opérations du type $K(S_{A_1,\ldots A_{n-1}})$, $K(S_A^k)$ etc... Dans ce qui suit, je considèrerai surtout le cas $k = 1$, c'est-à-dire <u>l'opération</u>

$$K(S_A^1) = K(S_{\tau_A})$$

La relation 3-1 donne une première interprétation géométrique de cette opération. Par définition, on a

$$K(S_{\tau_A}) = \bigcap_{u \in S_A^1} E_{u,\varphi_K(u)}$$

(avec la notation $E_{u,a} = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle u\, x \rangle \le a\}$, $a \ge 0$). D'après (3-1) ceci peut s'écrire :

$$K(S_{\tau_A}) = \bigcap_{H\in\mathcal{G}_2} \; \bigcap_{u\in S_{A_H}} E_{u\varphi_K(u)}$$

c'est-à-dire :

$$(3\text{-}2) \qquad K(S_{\tau_A}) = \bigcap_{H\in\mathcal{G}_2} K(S_{A_H})$$

Pour un 2-plan $H \in \mathcal{G}_2$ donné, $K(S_{A_H})$ est un cylindre : sa base dans H est l'érodé infinitésimal $K_H(S_{A_H})$ de la projection A_H de A sur H par la projection K_H de K sur H, et, $H^{\perp} \in \mathcal{G}_{n-2}$ désignant le (n-2) plan orthogonal à H, on a :

$$K(S_{A_H}) = K_H(S_{A_H}) \oplus H^{\perp}$$

Ainsi, $K(S_{\tau_A})$ est l'intersection, H parcourant $\mathcal{G}_2$, des cylindres $K(S_{A_H})$ obtenus en prenant les érosions infinitésimales des projections de A par celles de K.

Cette opération présente des propriétés remarquables dont l'essentiel a été mis en évidence par Minkowski. Nous y reviendrons dans le paragraphe suivant. Notons d'abord un lemme qui nous sera utile.

LEMME 3 - Pour $K_1,\dots K_p$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$ et $k_1 + \dots + k_p = n-1$, on a :

$$S^{k_1,k_2,\dots,k_p}_{K_1,K_2,\dots,K_p} \subset S^{k_1}_{K_1} \cap S^{k_2}_{K_2} \cap \dots \cap S^{k_p}_{K_p}$$

Il suffit, évidemment, de montrer

$$S^{1\;\dots\;1\;\;k}_{K_1,\dots,K_{n-k-1},\,A} \subset S^k_A$$

J'écrirai, pour abréger, $S_{K_i,A}$ au lieu de $S^{1\;\dots\;1\;\;k}_{K_1,\dots K_{n-k-1}\;A}$.

Considérons d'abord le cas particulier où il existe pour chaque $i = 1,\dots n-k-1$, un homothétique de la boule unité ouvert selon K_i, soit $\rho_i\ B = K_i \oplus K_i'$. Il suffit pour cela que φ_{K_i} soit deux fois différentiable, de sorte que les K_i, possédant cette propriété sont denses dans $C(\mathcal{K})$. Si $\rho_i\ B = K_i \oplus K_i'$, il en résulte évidemment :

$$G_{\rho_i\ B,A} = \Pi\ \rho_i\ \ G_A^k \geq G_{K_i A}$$

et donc $S_{AK_i} \subset S_A^k$. Si maintenant les K_i sont quelconques, je peux trouver des suites $K_i(n) \to K_i$ telles que pour chaque i et chaque n il existe un homothétique de B ouvert selon $K_i(n)$. On a donc $S_{K_i(n),A} \subset S_A^k$. Si $K_i(n) \to K_i$, $G_{K_i(n),A} \to G_{K_i A}$ et, l'application support étant s.c.i., on trouve bien :

$$S_{K_i A} \subset \underline{\lim}\ S_{K_i(n),A} \subset S_A^k$$

<u>4 - L'OPERATION $K(S_{\tau_A})$ ET LE THEOREME DE MINKOWSKI.</u>

Dans ce paragraphe, je suis pas à pas la démarche de Minkowski. L'illustre mathématicien remarque d'abord qu'en vertu de la croissance des fonctionnelles mixtes, on a toujours :

(4-1) $$\int G_{K'}\ \varphi_A \geq \int G_K\ \varphi_A$$

pour K, K', A compacts convexes et $K' \supset K$. Il montre ensuite que la réciproque est vraie ; autrement dit :

<u>Th. 4.1</u> (Minkowski) : <u>Une fonction bornée φ sur la sphère unité est la fonction d'appui d'un compact convexe A, si et seulement si on a</u> :

$$\int G_{K'}\ \varphi \geq \int G_K\ \varphi$$

<u>pour tous compacts convexes K, K' tels que $K' \supset K$.</u>

Pour montrer que φ est une fonction d'appui, il suffit de montrer que la fonction homogène $(x \to \varphi(x) = |x|\ \varphi(x/|x|))$ qui la prolonge dans $\mathbb{R}^n$, et que nous noterons encore φ, est convexe. En modifiant légèrement la démonstration de Minkowski, je considère d'abord le cas $n = 2$.

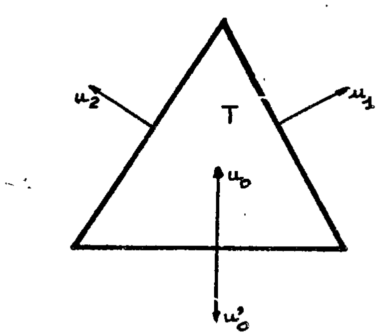
<u>Cas $n = 2$</u>. Soient u_0, u_1 et u_2 trois vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^2$ tels que $u_o = \lambda\ u_1 + \mu\ u_2$, λ et $\mu > 0$. Il faut montrer :

$$\varphi(u_o) \leq \lambda\ \varphi(u_1) + \mu\ \varphi(u_2)$$

Désignons par $u_o' = - u_o$ le vecteur unitaire opposé à u_o , de sorte que $u_o' + \lambda\ u_1 + \mu\ u_2 = 0$. La mesure :

$$G_T = \delta_{u_o'} + \lambda\ \delta_{u_1} + \mu\ \delta_{u_2}$$

vérifie la condition barycentrique et constitue donc la mesure périmétrique d'un triangle T.



De même, $G_L = \delta_{u_o'} + \delta_{u_o}$ est la mesure périmétrique d'un segment L, de longueur unité, orthogonal à u_o, et L est inclus dans T à une translation près (L est l'un des côtés du triangle T). On a donc $\int G_T\ \varphi \geq \int G_L\ \varphi$, ce qui donne bien $\varphi(u_o) \leq$ $\leq \lambda\ \varphi(u_1) + \mu\ \varphi(u_2)$.

<u>Cas général</u>. Supposons le théorème vrai pour $\mathbb{R}^{n-1}$, et montrons qu'il subsiste dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, je note que si K est compact convexe et u un vecteur unité, on a :

$$G_{K \oplus \rho u} = G_K + \rho\ G_K^{u^\perp}$$

$G_K^{u^\perp}$ désignant la mesure de surface (dans $u^\perp$ identifiée à $\mathbb{R}^{n-1}$) de la projection de K sur l'hyperplan $u^\perp$. Si $K \supset K'$, on a donc pour tout $\rho > 0$:

$$\frac{1}{\rho}\int G_K\,\varphi + \int G_K^{u^\perp}\,\varphi \geq \frac{1}{\rho}\int G_{K'}\,\varphi + \int G_{K'}^{u^\perp}\,\varphi$$

Pour $\rho \to \infty$, il vient par suite :

$$\int G_K^{u^\perp}\,\varphi \geq \int G_{K'}^{u^\perp}\,\varphi$$

En particulier, si $K_1 \supset K_1'$ sont deux convexes dans $u^\perp$, en prenant $K = K_1 \oplus u$ et $K' = K_1' \oplus u$, il vient $G_K^{u^\perp} = G_{K_1}$, et $G_{K'}^{u^\perp} = G_{K_1'}$, donc (dans $u^\perp$ identifiée à $\mathbb{R}^{n-1}$) $\int G_{K_1}\,\varphi \geq \int G_{K_1'}\,\varphi$. D'après l'hypothèse de récurrence, la restriction de φ au sous-espace $u^\perp$ est donc convexe. Comme ceci est vrai pour n'importe quel sous-espace $u^\perp \in \mathcal{S}_{n-1}$, φ est elle-même convexe dans $\mathbb{R}^n$.

<u>N.B.</u> On pourrait penser qu'inversement la condition $\int G_{K'}\,\varphi_A \geq \int G_K\,\varphi_A$ (K, K' donnés) pour tout convexe A entraine $K' \supset K$ à une translation près. Mais il n'en est rien (sauf si $n = 2$). Il y a des contre-exemples.

Notons, en passant, le résultat suivant :

<u>Si, pour tout convexe A, on a</u> $\int G_A\,\varphi_{K'} \geq \int G_A\,\varphi_K$, <u>alors $K' \supset K$ à une translation près</u>.

En effet, la famille G_A des mesures de surface est dense dans l'espace $\mathcal{M}_b$ des mesures $G \geq 0$ vérifiant la condition barycentrique $\int u\,G(du) = 0$. On a $G \in \mathcal{M}_b$ si et seulement si $\int G\,\varphi \geq 0$ pour toute fonction φ continue sur S_0 de la forme $\varphi(u) = \psi(u) + \langle u\, x \rangle$, où $x \in \mathbb{R}^n$ et $\psi(u) \geq 0$. Or m'ensemble $\mathcal{M}_b'$ des fonctions de cette forme est fermé pour la convergence uniforme, comme on le vérifie facilement. Par conséquent on a aussi $\varphi \in \mathcal{M}_b'$ si et seulement si $\int G\,\varphi \geq 0$ $\forall\, G \in \mathcal{M}_b$, ou, ce qui suffit, puisque les mesures de surface sont denses dans $\mathcal{M}_b$, si $\int G_A\,\varphi \geq 0$ pour tout convexe compact A. Dans le cas qui nous occupe, on trouve donc $\varphi_{K'} - \varphi_K \in \mathcal{M}_b'$, c'est-à-dire $K' \supset K$ à une translation près.

Dans le cas $n = 2$, $\int G_A \varphi_K = \int G_K \varphi_A$, et l'énoncé (faux pour $n \geq 3$) : "$\int G_{K'} \varphi_A \geq \int G_K \varphi_A$ pour tout compact convexe A entraine $K' \ominus \check{K} \neq \emptyset$" est donc vrai.

Après cette digression, revenons au Théorème 4-1. Ayant établi ce théorème, Monkowski se demande ensuite quelles conditions doivent vérifier les compacts $K' \supset K$ et A pour que l'égalité soit réalisée dans la relation (4-1). Il obtient alors le résultat suivant (que j'énonce avec mes notations) :

Th. 4-2 (Minkowski) : Soient K, K' et A compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$ tels que $K' \supset K$ et que K soit d'intérieur non vide. On a

$$\int G_{K'} \varphi_A = \int G_K \varphi_A \tag{4-2}$$

si et seulement si $K' \subset K(S_{\tau_A})$.

Montrons d'abord que la condition $K' \subset K(S_{\tau_A})$ est suffisante. Notons que l'on peut toujours écrire :

$$\int G_K \varphi_A = \int G_K^{n-2}{}_A^{1} \, \varphi_K$$

On a vu (lemme du paragraphe précédent) que le support $S_K^{n-2}{}_A^{1}$ est inclus dans S_{τ_A}. Par conséquent, dans la seconde intégrale, on peut remplacer φ_K par $\varphi_{K'}$ pourvu que $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur S_{τ_A}, c'est-à-dire $K' \subset K(S_{\tau_A})$. Ainsi :

$$\int G_K \varphi_A = \int G_K^{n-2}{}_A^{1} \, \varphi_{K'} = \int G_K^{n-2}{}_{K'}^{1} \, \varphi_A$$

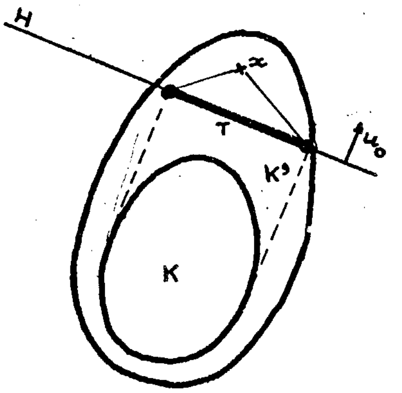
En réitérant le raisonnement, on voit de même

$$\int G_K^{n-k}{}_{K'}^{k-1} \, \varphi_A = \int G_K^{n-k-1}{}_{K'}^{k} \, \varphi_A$$

et finalement $\quad \int G_K \varphi_A = \int G_{K'} \varphi_A$

Il faut maintenant montrer que la condition est <u>nécessaire</u>. Cela signifie ceci : si $\int G_{K'} \varphi_A = \int G_K \varphi_A$ et si $u \in S_o$ est une direction pour laquelle $\varphi_{K'}(u) > \varphi_K(u)$ strictement, alors, nécessairement, $u \notin S_{\tau_A}$, i.e. : u est <u>intérieure</u> au cône des normales à A en un sommet de A.

La démonstration que donne Minkowski est très directe et très géométrique. Je la résume comme suit :



Soit $u_o \in S_o$ telle que $\varphi_{K'}(u_o) > \varphi_K(u_o)$ strictement. Considérons l'hyperplan $H = \{y : \langle u_o\, y\rangle = a\}$ avec $\varphi_K(u_o) < a < \varphi_{K'}(u_o)$ strictement. Comme K, et donc aussi $K' \supset K$, sont d'intérieur non vide, on peut trouver <u>dans H</u> un (n-1) simplexe (i.e. un polyèdre d'intérieur non vide à n sommets) T contenu dans <u>l'intérieur</u> de K', puis un point $x \in K' \cap \complement H$ tel que T <u>sépare</u> x et K.

Soient alors C l'enveloppe convexe de $T \cup K$ et C" celle de $T \cup \{x\}$. Il est clair sur T sépare encore C et C", et que $T = C \cap C''$: d'après le paragraphe 1, $C' = C \cup C''$ est donc <u>convexe</u>. De plus, K et T étant inclus dans K', on a $K \subset C \subset K'$. De même, T et x étant dans K', on a aussi $C'' \subset K'$. Donc $K \subset C \subset C' \subset K'$. Par suite, d'après la croissance des fonctionnelles mixtes, C et C' vérifient également la propriété :

$$\int G_C \varphi_A = \int G_{C'} \varphi_A$$

Maintenant, $T = C' \cap C''$ séparant C' et C", la C-additivité des mesures de surface donne :

$$G_C + G_T = G_{C'} + G_{C''}$$

Par suite

$$\int G_T \varphi_A = \int G_{C''} \varphi_A \qquad (4\text{-}3)$$

Or, G_T est de la forme $G_T = \lambda_o(\delta_{u_o} + \delta_{\check{u}_o})$, $\lambda_o > 0$ désignant le (n-1) volume de T et $\check{u}_o = - u_o$, puisque le simplexe T est contenu dans l'hyperplan H. De plus, C", enveloppe convexe de x et de T est un simplexe dans $\mathbb{R}^n$, admettant T comme face avec la normale extérieure $\check{u}_o = - u_o$ (puisque T sépare x et K). Désignons par $u_1, \ldots u_n$ les normales unitaires aux n autres faces du simplexe C". La mesure de surface de C" est alors de la forme :

$$G_{C''} = \lambda_o \, \delta_{\check{u}_o} + \lambda_1 \, \delta_{u_1} + \ldots + \lambda_n \, \delta_{u_n}$$

(avec toujours λ_o = (n-1) volume de T, et $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots n$). De plus, la condition barycentrique donne $\lambda_o \, \check{u}_o + \lambda_1 \, u_1 + \ldots + \lambda_n \, u_n = 0$, c'est-à-dire (puisque $\check{u}_o = - u_o$) :

$$\text{(4-4)} \qquad \lambda_o \, u_o = \lambda_1 \, u_1 + \ldots + \lambda_n \, u_n$$

Reportons dans (4-3) les expressions obtenues pour G_T et $G_{C''}$. Il vient :

$$\text{(4-5)} \qquad \lambda_o \, \varphi_A(u_o) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \varphi_A(u_i)$$

Compte tenu de (4-4), λ_o et les λ_i étant > 0 et $u_1, \ldots u_n$ linéairement indépendants, cette relation (4-5) signifie bien que u_o appartient à l'intérieur d'un cône des normales à A, i.e. $u_o \notin S_{\tau_A}$. ■

Un corollaire simple est le suivant : si <u>A n'a pas de sommet</u> et si $K' \supset K$, alors $\int G_{K'} \, \varphi_A = \int G_K \, \varphi_A$ entraine $K' = K$. En particulier, en prenant pour A la boule unité, on voit que si $K' \supset K$ et si K et K' <u>ont la même surface</u>, alors $K' = K$.

En effet, A étant sans sommet, on a $S_{\tau_A} = S_o$ et donc $K(S_{\tau_A}) = K$.

Plus généralement, si $S_K \subset S_{\tau_A}$, c'est-à-dire si aucune des directions chargeant la mesure de surface de K n'est intérieure au cône des normales d'un sommet de A, et si $\int G_K \, \varphi_A = \int G_{K'} \, \varphi_A$, alors l'inclusion $K \subset K'$ entraine l'égalité $K = K'$.

Voici maintenant des conséquences moins triviales.

K étant d'intérieur non vide, et $K' \supset K$, le théorème de Minkowski nous dit que :

$$\int G_K \varphi_A = \int G_{K'} \varphi_A \Leftrightarrow \varphi_K = \varphi_{K'} \text{ sur } S_{\tau_A}$$

Or, si $C_1, C_2, \ldots C_{n-1}$ sont compactes convexes quelconques, on a encore $K' \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n-1} \supset K \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n-1}$ et $\varphi_{K \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n-1}} = \varphi_{K' \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n-1}}$ sur S_{τ_A}, donc aussi :

$$\int G_{K \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n-1}} \varphi_A = \int G_{K' \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_{n-1}} \varphi_A$$

En dévelpppant ces intégrales au moyen de la formule de Steiner et en identifiant terme à terme, on trouve donc :

$$\text{(4-6)} \qquad \int G_K^{k_1} \, C_2^{k_2} \ldots C_p^{k_p} \, \varphi_A = \int G_{K'}^{k_1} \, C_2^{k_2} \ldots C_p^{k_p} \, \varphi_A$$

quels que soient les $C_2, \ldots C_p$.

Dans cette formule, prenons $k_p = 1$ et permutons A et C_p. En changeant les notations, on voit que pour $0 \leq k \leq n$ et $C_1, C_2 \ldots C_{n-k-2}$ arbitraires donnés, on a pour tout $C \in C(\mathcal{K})$:

$$\text{(4-7)} \qquad \int G^{k}_{K, C_1 \ldots C_{n-k-2}} A \, \varphi_C = \int G^{k}_{K' C_1, \ldots C_{n-k-2}} A \, \varphi_C$$

Par suite aussi les mesures mixtes elles-mêmes sont égales :

$$\text{(4-8)} \qquad G^{k}_{K, C_1, \ldots C_{n-k-2}} A = G^{k}_{K' C_1 \ldots C_{n-k-2}} A \quad (\forall \; C_1 \ldots C_{n-k-2})$$

En particulier

$$\text{(4-9)} \qquad G_K^{n-2} A = G_{K'}^{n-2} A$$

Dans le cas n = 3, la seule valeur non triviale possible pour k dans (4-8) est k = 1 et on obtient simplement (en supprimant les indices supérieurs, superflus puisque tous égaux à 1) :

$$G_{AK} = G_{AK'} \tag{4-10}$$

Montrons la réciproque. Pour mieux éclairer la démarche, je me place d'abord dans le cas de l'espace à n = 3 dimensions. Soient donc, dans $\mathbb{R}^3$, K et K' compacts convexes vérifiant (4-10). Il n'est pas nécessaire de supposer $K' \supset K$. Pour tout compact convexe C, il vient $\int G_{AK}\,\varphi_C = \int G_{AK'}\,\varphi_C$ et, en permutant A et C :

$$\int G_{KC}\,\varphi_A = \int G_{K'C}\,\varphi_A$$

Avec C = K, ceci donne $\int G_K\,\varphi_A = \int G_{KK'}\,\varphi_A$, et avec C = K', de même, $\int G_{KK'}\,\varphi_A = \int G_{K'}\,\varphi_A$. Par suite, dans $\mathbb{R}^3$, l'égalité (4-10) entraine

$$\int G_K\,\varphi_A = \int G_{K'}\,\varphi_A \tag{4-2}$$

et cela, d'ailleurs, sans même postuler l'inclusion $K' \supset K$. Ainsi :

<u>Corollaire 1.</u> <u>Si K, K', A sont compacts convexes dans $\mathbb{R}^3$, tels que $K' \supset K$ et K d'intérieur non vide, les 5 propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

i/ $K' \subset K(S_{\tau_A})$

ii/ $\int G_K\,\varphi_A = \int G_{K'}\,\varphi_A$

iii/ $\int G_{KC}\,\varphi_A = \int G_{K'C}\,\varphi_A$ <u>pour tout compact convexe C</u>

iv/ $G_{AK} = G_{AK'}$

v/ $\int G_K\,\varphi_A = \int G_{KK'}\,\varphi_A$

[L'équivalence de ii/ avec la propriété v/ en apparence plus faible sera démontrée plus loin].

Dans le cas général n > 3, la réciproque est moins facile à écrire, à cause de la prolifération des indices. Je suppose, cette fois, toujours $K' \supset K$.

Notons d'abord que si la relation (4-8) est vraie pour un entier k donné strictement compris entre 0 et n-2, alors (4-9) est vérifiée aussi, et plus généralement (4-8) est vérifiée pour tous les entiers $k' > k$.

En effet, (4-8) entraine évidemment (4-7) pour tout C et, comme $K' \supset K$, la croissance des fonctionnelles mixtes montre que l'on a aussi

$$\int G_K^k \, C_1 \ldots C_{n-k-2} \, A \quad \varphi_C = \int G_K^k \, {}_{K'}^{k-p} \, C_1 \ldots C_{n-2-k} \, A \quad \varphi_C$$

pour tout entier p compris entre 0 et K et donc :

$$G_K^k \, C_1 \ldots C_{n-k-2} \, A = G_K^p \, {}_{K'}^{k-p} \, C_1 \ldots C_{n-2-k} \, A \qquad (0 \leq p < k)$$

En écrivant cette relation avec $C_{n-k-2} = K$ il vient

$$G_K^{k+1} \, C_1 \ldots C_{n-k-3} \, A = G_K^{p+1} \, {}_{K'}^{k-p} \, C_1 \ldots C_{n-k-3} \, A \qquad (0 \leq p < k)$$

et avec $C_{n-k-2} = K'$

$$G_K^k \, K' \, C_1 \ldots C_{n-k-3} \, A = G_K^p \, {}_{K'}^{k+1} \, C_1 \ldots C_{n-k-3} \, A \qquad (0 \leq p < k)$$

Avec p = k-1, la première de ces deux relations donne :

$$G_K^{k+1} \, C_1 \ldots . A = G_K^k \, K' \, C_1 \ldots A$$

De même, avec p = 0, la seconde donne :

$$G_{KK'}^k \, C_1 \ldots A = G_{K'}^{k+1} \, C_1 \ldots A$$

et on a donc bien, finalement :

$$G_K^{k+1} \, C_1 \ldots C_{n-k-3} \, A = G_{K'}^{k+1} \, C_1 \ldots C_{n-k-3}$$

En réitérant le raisonnement, on aboutit à (4-9).

En sens inverse, supposons maintenant (4-9) vérifiée, avec toujours $K' \supset K$. On a pour tout C

$$\int G_K^{n-2}{}_A \, \varphi_C = \int G_{K'}^{n-2}{}_A \, \varphi_C$$

puis, compte tenu de la croissance des fonctionnelles mixtes :

$$\int G_K^{n-2-k} {}^{k}_{K'} \, \varphi_C = \int G_K^{n-2}{}_A \, \varphi_C$$

pour tout k compris entre 0 et n-2. Ceci entraine l'égalité des mesures elles-mêmes :

$$G_K^{n-2}{}_A = G_K^{n-2-k} {}^{k}_{K'}{}_A \qquad (0 < k \leq n-2)$$

Si nous multiplions par φ_K (par $\varphi_{K'}$) et intégrons, il vient :

$$\begin{cases} \int G_K^{n-1} \, \varphi_A = \int G_K^{n-1-k} {}^{k}_{K'} \, \varphi_A \\ \int G_K^{n-2} {}^{1}_{K'} \, \varphi_A = \int G_K^{n-2-k} {}^{k+1}_{K'} \, \varphi_A \end{cases}$$

Avec k = 1, la première relation donne

$$\int G_K \, \varphi_A = \int G_K^{n-2} {}^{1}_{K'} \, \varphi_A$$

et la seconde, avec k = n-2 :

$$\int G_K^{n-2} {}^{1}_{K'} \, \varphi_A = \int G_{K'} \, \varphi_A$$

Par suite $\int G_K \, \varphi_A = \int G_{K'} \, \varphi_A$, donc $K' \subset K(S_{\tau_A})$, et, comme on l'a vu, cela entraine (4-8).

Nous pouvons donc énoncer, sous forme de corollaire, la version suivante du Th. de Minkowski, qui est en même temps une caractérisation de l'opération $K(S_{\tau_A})$: l'équivalence des 5 premières propriétés vient d'être démontrée. La propriété vi/ fait l'objet du paragraphe suivant.

Corollaire 2. Soient K, K' et A compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$ tels que $K' \supset K$ et que K soit d'intérieur non vide. Les 6 propriétés suivantes sont équivalentes :

i/ $K' \subset K(S_{\tau_A})$

ii/ $\int G_K \varphi_A = \int G_{K'} \varphi_A$

iii/ il existe un entier k ($0 < k < n-2$) tel que pour $C_1, C_2 \ldots C_{n-k-2}$ compacts convexes quelconques on ait

$$G^{k}_{K, C_1, \ldots C_{n-k-2}, A} = G^{k}_{K', C_1, \ldots C_{n-k-2}, A}$$

iv/ $G^{n-2}_{K\ A} = G^{n-2}_{K'\ A}$

v/ pour tout entier $k = 1, 2 \ldots n-2$ et tous compacts convexes $C_1, \ldots C_{n-k-2}$

$$G^{k}_{K\ C_1 \ldots C_{n-k-2}\ A} = G^{k}_{K'\ C_1 \ldots C_{n-k-2}\ A}$$

vi/ $\int G_K \varphi_A = \int G^{n-2\ 1}_{K\ \ K'} \varphi_A$

Montrons maintenant l'équivalence de vi/ et des autres propriétés.

5 - GENERALISATIONS ET CONJECTURES.

En supposant toujours $K' \supset K$, la croissance des fonctionnelles mixtes donne :

$$\int G_K \varphi_A \leq \int G^{n-2\ 1}_{K\ \ K'} \varphi_A \leq \int G^{n-3\ 2}_{K\ \ K'} \varphi_A \leq \ldots \leq \int G_{K'} \varphi_A$$

Autrement dit, la propriété ii/ du corollaire 2 est équivalente à la conjonction des n égalités :

$$\int G_K\, \varphi_A = \int G_K^{n-2}\,{}^{1}_{K'}\, \varphi_A$$

$$\int G_K^{n-2}\,{}^{1}_{K'}\, \varphi_A = \int G_K^{n-3}\,{}^{2}_{K'}\, \varphi_A$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$\int G_K^{1}\,{}^{n-2}_{K'}\, \varphi_A = \int G_{K'}\, \varphi_A$$

Ainsi l'une ou l'autre des propriétés i/ à v/ entraine vi/. Il reste à montrer la réciproque. Cette propriété vi/ peut s'écrire, en permutant A avec K ou K' :

$$\text{(5-1)} \qquad \int G_K^{n-2}\,{}^{1}_{A}\, \varphi_K = \int G_K^{n-2}\,{}^{1}_{A}\, \varphi_{K'}$$

Compte tenu de l'inclusion $K' \supset K$ ceci équivaut à l'égalité $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur le support $S_A^1\,{}^{n-2}_K$ de la mesure mixte $G_K^{n-2}\,{}^{1}_{A}$, soit encore à :

$$\text{(5-2)} \qquad K' \subset K(S_A^1\,{}^{n-2}_K)$$

Nous aurons donc achevé la démonstration du Corollaire 2. Si nous montrons que l'on a l'égalité :

$$\text{(5-3)} \qquad K(S_{\tau_A}) = K(S_A^1\,{}^{n-2}_K)$$

pour tout $A \in C(\mathcal{H})$ et tout $K \in C(\mathcal{H})$ d'intérieur non vide.

D'après le lemme du paragra phe 3, on a toujours l'inclusion (en général stricte) $S_A^1\,{}^{n-2}_K \subset S_{\tau_A}$ et par conséquent :

$$K(S_{\tau_A}) \subset K(S_A^1\,{}^{n-2}_K)$$

et il faut donc établir l'inclusion inverse.

Soit x un point n'appartenant pas à K, et K(x) l'enveloppe convexe de $K \cup \{x\}$. Je dis que l'on a :

(5-4) $$\int G_K^{n-1} \varphi_A = \int G_{K\ K(x)}^{n-2\ 1} \varphi_A$$

(c'est-à-dire (5-1) avec $K' = K(x)$) si et seulement si $x \in K(S_{A\,K}^{1\,n-2})$

En effet, (5-4) équivaut à $K(x) \subset K(S_{A\,K}^{1\,n-2})$, puisque (5-1) équivaut à (5-2). Mais, $K(x)$ étant l'enveloppe convexe du point x et de $K \subset K(S_{A\,K}^{1\,n-2})$, cette inclusion équivaut elle-même à $x \in K(S_{A\,K}^{1\,n-2})$.

L'étape suivante consiste à montrer que la relation (5-4) entraine la relation plus forte :

(5-5) $$\int G_K^{n-1} \varphi_A = \int G_{K(x)}^{n-1} \varphi_A$$

Ceci achèvera la démonstration. En effet, d'après le théorème de Minkowski, (5-5) équivaut à $K(x) \subset K(S_{\tau_A})$, c'est-à-dire à $x \in K(S_{\tau_A})$ et on a vu que (5-4) équivalait à $x \in K(S_{A\,K}^{1\,n-2})$. Dire que (5-4) entraine (5-5) équivaut donc à l'inclusion voulue $K(S_{A\,K}^{1\,n-2}) \subset K(S_{\tau_A})$. Partons du lemme simple suivant :

<u>LEMME 5. Pour $K', K_1 \dots K_{n-2}$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$, on a</u> :

$$G_{K',K_1,\dots K_{n-2}} = G_{K',K_1(S_{\tau_{K'}})\dots K_{n-2}(S_{\tau_{K'}})}$$

En effet, pour tout compact convexe C, le lemme du paragraphe 3 donne $S_{K',C,K_2,\dots K_{n-1}} \subset S_{\tau_{K'}}$. On peut donc écrire :

$$\int G_{K',K_1\dots K_{n-2}} \varphi_C = \int G_{K',C,K_2,\dots K_{n-2}} \varphi_{K_1} =$$

$$= \int G_{K',C,K_2,\dots K_{,-2}} \varphi_{K_1(S_{\tau_{K'}})} = \int G_{K',K_1(S_{\tau_{K'}}),K_2,\dots K_{n-2}} \varphi_C$$

Par suite :

$$G_{K',K_1\dots K_{n-2}} = G_{K',K_1(S_{\tau_{K'}}),K_2,\dots K_{n-2}}$$

et il suffit de réitérer le raisonnement.

Appliquons ce lemme avec $K_1 = \ldots = K_{n-2} = K$ et $K' = K(x)$. Il vient :

$$G_K^{n-2} \, {}^{1}_{K(x)} = G^{n-2}_{K(S_{\tau_{K(x)}})} \, {}^{1}_{K(x)}$$

et donc

$$\text{(5-6)} \qquad \int G_K^{n-2} \, {}^{1}_{K(x)} \, \varphi_A = \int G^{n-2}_{K(S_{\tau_{K(x)}})} \, {}^{1}_{K(x)} \, \varphi_A$$

Or, à la fin du paragraphe 2, nous avons établi l'inclusion

$$S_{\tau(K(x))} \subset S_x$$

qui implique évidemment

$$K(x) \subset K(S_{\tau(K(x))})$$

Compte tenu de cette inclusion et de la croissance des fonctionnelles mixtes, nous voyons donc que (5-6) entraine l'égalité :

$$\text{(5-7)} \qquad \int G_K^{n-2} \, {}^{1}_{K(x)} \, \varphi_A = \int G_{K(x)} \, \varphi_A$$

Compte tenu de (5-7), il est clair que (5-4) entraine (5-5), ce qui achève la démonstration.

Chemin faisant, nous avons obtenu un résultat qui mérite d'être énoncé :

<u>Théorème 5. Pour A et K compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$ et K d'intérieur non vide, on a :</u>

$$K(S_{\tau_A}) = K(S^{1}_{A} \, {}^{n-2}_{K})$$

<u>Dans $\mathbb{R}^3$, en particulier,</u> $K(S_{\tau_A}) = K(S_{AK})$

<u>Conjectures</u>.

Voyons maintenant quelques <u>conjectures</u>.

Le théorème de Minkowski énonce que $K(S_{\tau_A}) = K(S^1_A)$ est le plus grand des compacts convexes $K' \supset K$ tels que :

$$W_1(K,A) = W_1(K',A) \quad .$$

De même, l'érodé infinitésimal $K(S_A) = K(S_A^{n-1})$ est le plus grand des compacts convexes $K' \supset K$ tels que :

$$W_{n-1}(K,A) = W_{n-1}(K',A)$$

On est donc tenté de poser à titre de

<u>Conjecture 1</u>. (<u>forme faible</u>) Si $A \in C(\mathcal{S})$ et si K est un compact convexe de dimension supérieure à $n-k$ dans $\mathbb{R}^n$, $K(\underline{S_A^k})$ est le plus grand des compacts convexes $K' \supset K$ tels que

$$W_k(K,A) = W_k(K',A)$$

(<u>forme forte</u>) dans les mêmes conditions, si $A_1, \ldots A_k \in C(\mathcal{S})$, $K(\overline{S}^{1}_{A_1} \ldots \overline{S}^{1}_{A_k} \overline{B}^{n-1-k})$ est le plus grand des compacts convexes $K' \supset K$ tels que

$$\int G_K^{n-k} A_1 \ldots A_{k-1} \varphi_{A_k} = \int G_{K'}^{n-k} A_1 \ldots A_{k-1} \varphi_{A_k} \tag{5-8}$$

Ces conjectures sont vraies pour $k = 1$ et pour $k = n-1$ (en particulier, donc, si $n = 3$, ces conjectures sont des théorèmes). Il reste à les établir, dans $\mathbb{R}^n$ avec $n > 3$, pour $k = 2, \ldots n-2$. Malheureusement, pour $k < n-1$, le raisonnement géométrique direct de Minkowski ne s'applique manifestement plus, et il faudrait trouver une autre démonstration.

Je ne suis pas à même de démontrer ces conjectures, et je note seulement ici quelques remarques préliminaires.

En premier lieu, remarquons que le raisonnement qui nous a permis d'établir la relation (5-7) à partir de l'inclusion $S_{\tau_{K(x)}} \subset S_x$ et du lemme 5, a valeur plus générale, et montre de la même façon le résultat suivant :

Proposition 5. Soient K, $A_1, \ldots A_k$ compacts convexes dans $\mathbb{R}^n$ $(0 < k < n-1)$ et $K(x)$ l'enveloppe convexe de $K \cup \{x\}$. Alors :

$$\int G^{n-k}_{K,}\ {}^{1}_{K(x),}\ {}^{1}_{A_1,}\ldots{}^{1}_{A_{k-1}}\ \varphi_{A_k} = \int G^{n-k}_{K(x),}\ {}^{1}_{A_1,}\ldots{}^{1}_{A_{k-1}}\ \varphi_{A_k}$$

En reprenant le raisonnement déjà fait pour $k = 1$, nous constatons ensuite que l'on a :

$$\int G^{n-k-1}_{K}\ {}^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ \varphi_K = \int G^{n-k-1}_{K}\ {}^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ \varphi_{K(x)}$$

si et seulement si $x \in K(S^{1}_{A_1,}\ldots{}^{1}_{A_k}\ {}^{n-k-1}_{K})$. Compte tenu de la Proposition ci-dessus, on voit que $K' = K(x)$ vérifie (5-8) si et seulement si $x \in K(S^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ {}^{n-k-1}_{K})$. Donc, si la conjecture 1 (forme forte) est vraie, on aura l'inclusion

$$K(S^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ {}^{n-k-1}_{K}) \subset K(S^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ {}^{n-k-1}_{B})$$

i.e. (puisque l'inclusion inverse est toujours vraie) l'égalité

$$K(S^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ {}^{n-k-1}_{K}) = K(S^{1}_{A_1}\ldots{}^{1}_{A_k}\ {}^{n-k-1}_{B}) \tag{5-9}$$

Et il en résultera que la relation (5-8) est équivalente à la relation d'apparence plus faible :

$$\int G^{n-k}_{K}\ A_1\ldots A_{k-1}\ \varphi_{A_k} = \int G^{n-k-1}_{K,}\ K',\ A_1,\ldots A_{k-1}\ \varphi_{A_k} \tag{5-10}$$

De la même manière, si la conjecture 1 (forme faible) est vraie, on aura l'égalité :

$$K(S^{k}_{A}\ {}^{n-k-1}_{K}) = K(S^{k}_{A}) \tag{5-11}$$

et la relation $W_k(K,A) = W_k(K',A)$ sera équivalente à la relation, d'apparence plus faible :

$$\int G^{n-k}_{K}\ {}^{k-1}_{A}\ \varphi_A = \int G^{n-k-1}_{K}\ {}^{1}_{K'}\ {}^{k-1}_{A}\ \varphi_A \tag{5-12}$$

La réciproque est vraie. Autrement dit :

<u>La conjecture faible équivaut</u> à $K(S_A^k\, {}_K^{n-k-1}) = K(S_A^{k'})$, <u>et de même la conjecture forte équivaut à</u> (5-9).

Raisonnons dans le cas de la conjecture faible (pour éviter la prolifération des indices) et supposons que (5-11) soit un théorème. Si $K' \supset K$ et si l'on a :

$$(5\text{-}13) \qquad \int G_K^{n-k}\, {}_A^{k-1}\, \varphi_A = \int G_{K'}^{n-k}\, {}_A^{k-1}\, \varphi_A$$

on en déduit que (5-12) est vérifiée (celà résulte d'un raisonnement déjà fait plusieurs fois et utilisant la croissance de nos fonctionnelles). Or, (5-12) s'écrit aussi :

$$\int G_K^{n-k-1}\, {}_A^{k}\, \varphi_K = \int G_K^{n-k-1}\, {}_A^{k}\, \varphi_{K'}$$

Comme $K' \supset K$, ceci entraine

$$K' \subset K(S_A^k\, {}_K^{n-k-1})$$

c'est-à-dire $K' \subset K(S_A^k)$, puisque (5-11) est supposée vérifiée. Il reste à s'assurer que $K(S_A^k)$ vérifie lui-même la relation (5-13). Mais cela résulte aussitôt de la relation suivante :

$$G^k_{A,K_1,\dots K_{n-k-1}} = G_{A,K_1(S_A^k),\dots K_{n-k-1}}(S_A^k)$$

qui se démontre exactement comme le lemme 5.

D'autres généralisations sont souhaitables, et d'autres conjectures possibles. En particulier, on soupçonne que l'inclusion $K' \supset K$ ne joue pas un rôle essentiel dans les théorèmes et conjectures précédents. En particulier, on peut avancer la

<u>Conjecture 2</u>. On a $G_A^{n-k}\, {}_K^{k-1} = G_A^{n-k}\, {}_{K'}^{k-1}$ $(1 < k < n-1)$ si et seulement si $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur S_A^{n-k} .

Je n'aborderai pas ici ce genre de recherche. Par contre, dans le paragraphe suivant, je vais donner dans le cas $n = 2$ une démonstration de la conjecture 1 (forme faible) à partir d'une inégalité isopérimétrique, qui semble par elle-même constituer aussi une étape vers la conjecture 2.

6 - DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE FAIBLE POUR $k = 2$.

Cette démonstration va s'appuyer sur une relation isopérimétrique dont l'énoncé est le suivant :

<u>Théorème 6. Soient A, K, K' compacts convexes d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$. On a :</u>

$$(6\text{-}1) \qquad W_2(A ; K, K') \geq (W_2(A ; K, K))^{1/2}\, W_2(A ; K', K')^{1/2}$$

<u>avec égalité si et seulement si</u>

$$(6\text{-}2) \qquad G^{n-2}_{A,\, K} = \lambda\, G^{n-2}_{A,\, K'} \qquad (\text{pour un } \lambda \geq 0)$$

(<u>on a posé</u> $W_2(A ; K, K') = \frac{1}{n} \int G^{n-2}_{A\ K}\ \varphi_{K'}$)

A titre de <u>conjecture</u>, j'avancerai également, mais sans être à même de le démontrer, que la relation (6-2) est elle-même équivalente à $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur S^{n-2}_A.

Montrons d'abord que <u>le Théorème 6 entraine la conjecture 1, forme faible, pour $k = 2$</u>.

En effet, supposons $K' \supset K$ et $W_2(A ; K, K) = W_2(A ; K' K')$. D'après la croissance de W_2, on a aussi $W_2(A ; K K) = W_2(A ; K K')$, de sorte que A, K et K' vérifient (6-1) avec égalité. D'après le théorème 6, les mesures mixtes $G^{n-2}_{A\ K}$ et $G^{n-2}_{A\ K'}$ sont proportionnelles, et donc en fait égales, puisque $W_2(A, K K) = W_2(A, K K')$. Soit :

$$G^{n-2}_{A\ K} = G^{n-2}_{A\ K'} \tag{6-3}$$

Pour tout compact convexe C, on a donc :

$$\int G^{n-2}_{A\ C}\, \varphi_K = \int G^{n-2}_{A\ C}\, \varphi_{K'} \tag{6-4}$$

et, comme $K' \supset K$, $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur $S^{n-2}_{A\ C}$. Si $C = B$ est la boule unité, il vient $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur S^{n-2}_{A}, c'est-à-dire

$$K' \subset K(S^{n-2}_{A}) \tag{6-5}$$

Inversement, si (6-5) est vérifiée, on a $\varphi_K = \varphi_{K'}$ sur S^{n-2}_{A}, donc sur $S^{n-2}_{A\ C} \subset S^{n-2}_{A}$ pour tout C. Par suite (6-4) est vraie, et cela équivaut à l'égalité (6-3).

Démonstration du Théorème 6.

Pour avoir des notations plus maniables, je supprimerai les indices et sous-entendrai le convexe fixe A, qui intervient toujours avec le degré n-2, en posant :

$$\begin{aligned} V &= V(A) \\ V_K &= W_1(A,K) \\ V_{KK} &= W_2(A,K)\ ,\ V_{KK'} = W_2(A\ ;\ K,\ K')\ \text{etc...} \end{aligned}$$

Je pars de la concavité bien connue de la fonction $(V)^{1/n}$. Cette concavité entraine que la fonction f définie en posant

$$f = -\ (V(A \oplus x\, K \oplus y\ C))^{1/n}$$

est convexe sur le domaine ($x \geq 0$, $y \geq 0$). La matrice formée par les dérivées partielles d'ordre 2 est donc de type positif sur l'ouvert ($x > 0$, $y > 0$). Mais cette matrice est continue en x et y, et reste donc de type positif en $x = y = 0$. En ce point $x = y = 0$, on trouve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = n(n-1)\ [V_K^2 - V\, V_{KK}]$$

et des relations analogues pour les autres dérivées partielles. Par suite, la matrice symétrique (2 x 2) :

$$M = \begin{pmatrix} V_K^2 - V\,V_{KK} & V_K\,V_C - V\,V_{KC} \\ V_K\,V_C - V\,V_{KC} & V_C^2 - V\,V_{CC} \end{pmatrix}$$

est de type positif, ce qui signifie que les termes diagonaux de M et son déterminant sont ≥ 0.

En ce qui concerne les termes diagonaux, nous trouvons donc pour K la relation bien connue $V_K^2 \geq V\,V_{KK}$, qui s'écrit en notations plus explicites :

$$(6\text{-}6) \qquad W_1(A\ ;\ K) \geq V(A)^{1/2}\, W_2(A\ ;\ K)^{1/2}$$

En écrivant DetM ≥ 0, nous obtenons maintenant :

$$(6\text{-}7) \qquad (V_K\,V_C - V\,V_{KC})^2 \leq (V_K^2 - V\,V_{KK})(V_C^2 - V\,V_{CC})$$

Or, 2 cas sont possibles suivant que $V\,V_{KC}$ est ≥ ou ≤ $V_K\,V_C$.

Supposons, en premier lieu, que l'on ait $V\,V_{KC} \geq V_K\,V_C$. En utilisant (6-6), on trouvera donc

$$V\,V_{KC} \geq V_K\,V_C \geq V\,V_{KK}^{1/2}\;V_{CC}^{1/2}$$

Supposons maintenant $V\,V_{KC} \leq V_K\,V_C$, et posons pour abréger :

$$\alpha = V_K^2 - V\,V_{KK}$$

$$\beta = V_C^2 - V\,V_{CC}$$

α et β sont ≥ 0, d'après (6-6). Nous avons cette fois d'après (6-7)

$$V_K\,V_C - V\,V_{KC} \leq \sqrt{\alpha\,\beta}$$

c'est-à-dire :

(6-8) $$V\,V_{KC} \geq V_K\,V_C - \sqrt{\alpha\,\beta} = \sqrt{(\alpha + V\,V_{KK})(\beta + V\,V_{CC})} - \sqrt{\alpha\,\beta}$$

Or, de manière générale, pour x, y, α, $\beta \geq 0$, il est facile de démontrer (par simple élévation au carré) que l'on a toujours

$$\sqrt{(x + \alpha)(y + \beta)} \geq \sqrt{x\,y} + \sqrt{\alpha\,\beta}$$

avec égalité si et seulement si $\alpha\,y = \beta\,x$. En substituant dans (6-8), il vient l'inégalité cherchée :

(6-9) $$V_{KC} \geq V_{KK}^{1/2}\;V_{CC}^{1/2}$$

Examinons maintenant le cas où l'égalité $V_{KC} = V_{KK}^{1/2}\,V_{KC}^{1/2}$ est réalisée. Dans le cadre de la première hypothèse ($V\,V_{KC} \geq V_K\,V_C$) cette égalité, compte tenu de (6-6), donne

$$V_K = V^{1/2}\;V_{KK}^{1/2} \quad ; \quad V_C = V^{1/2}\;V_{CC}^{1/2}$$

Dans le cadre de la deuxième hypothèse ($V\,V_{KC} \leq V_K\,V_C$), l'égalité $\sqrt{(x + \alpha)(y + \beta)} = \sqrt{x\,y} + \sqrt{\alpha\,\beta}$ entrainant $\alpha\,y = \beta\,x$, on trouve $\alpha\,V\,V_{CC} = \beta\,V\,V_{KK}$, et donc, d'après la définition de α et β :

(6-10) $$V_{CC}\,V_K^2 = V_{KK}\,V_C^2$$

Dans les deux hypothèses, V_K et V_C sont donc proportionnelles à $V_{KK}^{1/2}$ et $V_{CC}^{1/2}$, et (6-10) est vraie dans tous les cas.

Pour étudier plus à fond le cas

$$V_{KC} = V_{KK}^{1/2}\,V_{CC}^{1/2}$$

nous pouvons donc supposer $V_{KK} = V_{CC}$. En effet, si l'un d'eux, par exemple V_{CC} est égal à 0, (6-10) nous donne $V_{KK} = 0$ (puisque C est d'intérieur non vide) et donc $V_{KK} = V_{CC} = V_{KC} = 0$. Comme φ_K et φ_C

sont > 0 strictement, il en résulte $G_{AK} = G_{AC} = 0$ et le théorème est vrai. Supposons donc $V_{CC} > 0$, ce qui entraine, d'après ce qui précède, $V_{KK} > 0$. Il suffit alors de remplacer C par λC avec $\lambda = V_{KK}^{1/2} / V_{CC}^{1/2}$ pour avoir l'égalité $V_{KK} = V_{CC}$.

Pour achever la démonstration du théorème, il faut montrer que les égalités :

(6-11) $$V_{KK} = V_{CC} = V_{KC}$$

entrainent $G^{n-2}_{A\ K} = G^{n-2}_{A\ C}$. D'après (6-10), nous avons également :

(6-12) $$V_K = V_C$$

Soit D un compact convexe qualconque. Considérons la fonction à 3 variables

$$f(x,y,z) = -\,(V(A \oplus x\,K \oplus y\,C \oplus z\,D))^{1/n}$$

Elle est convexe, et par suite on voit comme ci-dessus que la matrice :

$$\begin{bmatrix} V_K^2 - V\,V_{KK} & V_K\,V_C - V\,V_{KC} & V_K\,V_D - V\,V_{KD} \\ V_K\,V_C - V\,V_{KC} & V_C^2 - V\,V_{CC} & V_C\,V_D - V\,V_{CD} \\ V_K\,V_D - V\,V_{KD} & V_C\,V_D - V\,V_{CD} & V_D^2 - V\,V_{DD} \end{bmatrix}$$

est de type positif. Mais, compte tenu de (6-11) et (6-12), et en posant $W_1 = V_K = V_C$ et $W_2 = V_{KK} = V_{CC} = V_{KC}$, cette matrice se réduit à

$$\begin{bmatrix} W_1^2 - V\,W_2 & W_1^2 - V\,W_2 & W_1\,V_D - V\,V_{KD} \\ W_1^2 - V\,W_2 & W_1^2 - V\,W_2 & W_1\,V_D - V\,V_{CD} \\ W_1\,V_D - V\,V_{KD} & W_1\,W_D - V\,V_{CD} & V_D^2 - V\,V_{DD} \end{bmatrix}$$

et son déterminant est :

$$\Delta = - V^2(W_1^2 - V\, W_2)(V_{KD} - V_{CD})^2$$

Ce déterminant doir être ≥ 0. Comme on a $W_1^2 \geq V\, W_2$, d'après (6-6), on a donc soit $W_1^2 = V\, W_2$, soit $V_{KD} = V_{CD}$.

Si $W_1^2 > V\, W_2$, i.e. $V_K^2 > V\, V_{KK}$, pour <u>tout</u> compact convexe D on doit avoir $V_{KD} = V_{CD}$; c'est-à-dire :

$$\int G_{A\ K}^{n-2}\, \varphi_D = \int G_{A\ C}^{n-2}\, \varphi_D$$

d'où résulte l'égalité des mesures mixtes $G_{A\ K}^{n-2} = G_{A\ C}^{n-2}$, c'est-à-dire le théorème .

Il reste à examiner le cas $W_1^2 = V\, W_2$, c'est-à-dire $V_K^2 = V\, V_{KK}$ et $V_C^2 = V\, V_{CC}$. D'après (6-7), si $V_K^2 = V\, V_{KK}$, pour <u>tout</u> compact convexe D, on aura :

$$V_K\, V_D = V\, V_{KD}$$

c'est-à-dire

$$V_K \int G_A\, \varphi_D = V \int G_{A\ K}^{n-2}\, \varphi_D$$

Il en résulte

$$G_{A\ K}^{n-2} = (V_K/V)\, G_A$$

De même, $G_{A\ C}^{n-2} = (V_C/V)\, G_A$, et, comme $V_K = V_C$ par hypothèse, on trouve encore l'égalité des mesures mixtes.

Le théorème 6 est ainsi démontré. Mentionnons, pour terminer, le corollaire simple suivant :

<u>Corollaire</u>. <u>Pour A, K, K' compacts convexes d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$, on a</u>

$$(W_2(A, K \oplus K'))^{1/2} \geq (W_2(A,K))^{1/2} + (W_2(A,K'))^{1/2}$$

avec égalité si et seulement si $G_{A,\ K}^{n-2} = G_{A,\ K'}^{n-2}$.