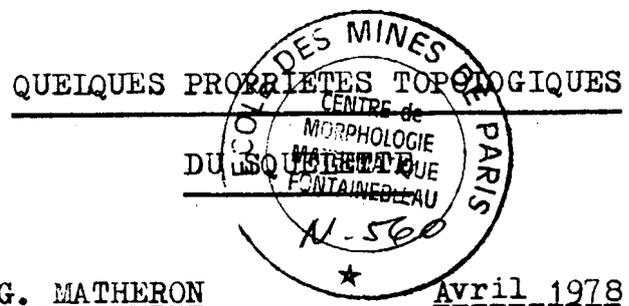


Fontainebleau/MM

N-560



G. MATHERON

Avril 1978

QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DU SQUELETTE

G. MATHERON

Table des Matières

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>1 - LE SQUELETTE D'UN FERME</u>	2
Squelette de l'érodé	4
Synthèse de A et de ses érodés	5
Mauvaises propriétés de $R(A)$	6
<u>2 - LE SQUELETTE D'UN OUVERT</u>	7
Squelette de l'érodé	9
Synthèse de G et de ses érodés	10
Synthèse de F_ρ	10
<u>3 - SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE DU SQUELETTE $r(G)$</u>	12
Lemme 3	13
Théorème 3 ($G \rightarrow \bar{r}(G)$ est s.c.i.)	15
<u>4 - LA FONCTION ρ, ET LES APPLICATIONS AVAL, AMONT ET ARETE</u>	15
L'application Aval	18
L'application Amont	18
L'application Arête	19
Premières propriétés de Av , Am et Ar	20
<u>5 - CARACTÉRISATION DES FONCTIONS ρ</u>	22
Théorème 5 (différentiabilité de ρ)	23
<u>6 - L'ADHÉRENCE \bar{r} DU SQUELETTE</u>	27
Un contre-exemple (\bar{r} non négligeable)	27

L'ensemble \bar{r}	29
<u>Théorème 6-1</u> (A_m discontinu sur A_V ($\bar{r} \setminus r$))	29
<u>Lemme 6-1</u>	30
<u>Lemme 6-2</u> (\bar{r} est stable pour A_m)	31
<u>Théorème 6-2</u> (connexité de \bar{r})	32
L'ensemble $D(G)$ des points multiples	33
<u>Théorème 6-3</u> ($D(G)$ est dense dans r)	33
Indications sur l'intérieur de \bar{r}	34
<u>7 - CAS DE L'ESPACE A 2 DIMENSIONS</u>	36
<u>Théorème 7</u> ($D(G)$ est négligeable)	42

QUELQUES PROPRIETES TOPOLOGIQUES DU SQUELETTE

- INTRODUCTION -

Je note ci-dessous quelques résultats topologiques concernant le squelette. Ces résultats sont, en un sens, un peu décevants. Ils n'ont rien de définitif et certains d'entre eux pourront sans doute être améliorés. Mais la notion de squelette, malgré son évidence intuitive, se révèle à l'analyse singulièrement déroutante. On trouvera ci-dessous davantage de contre-exemples que de théorèmes. Ainsi, par exemple, le squelette r n'est pas nécessairement un ensemble fermé. On s'attend à ce que le squelette r , et aussi son adhérence \bar{r} , soient des ensembles très "minces" (arcs de courbe dans \mathbb{R}^2 , surfaces dans \mathbb{R}^3 etc...). Mais dès qu'on essaye de préciser, des difficultés surgissent. Concernant cette minceur du squelette, on peut se poser les quatre questions suivantes :

Le squelette r est-il d'intérieur vide ?

r est-il négligeable pour la mesure de Lebesgue ?

L'adhérence \bar{r} du squelette est-elle d'intérieur vide ?

\bar{r} est-il négligeable pour la mesure de Lebesgue ?

A la première question, qui correspond à la propriété la plus faible, la réponse est oui, l'intérieur $\overset{\circ}{r}$ du squelette est vide. A la quatrième question, qui correspond à la propriété la plus forte, la réponse est non : l'adhérence du squelette n'est pas nécessairement un ensemble λ -négligeable, nous verrons un contre-exemple. Je ne suis pas arrivé à trancher les deux questions intermédiaires, n'ayant réussi ni à démontrer ces propriétés, ni à construire de contre-exemple.

De même, en ce qui concerne la connexité : si G est un ouvert connexe (ne contenant pas de demi-espace) je démontre que l'adhérence $\bar{r}(G)$ de son squelette est connexe, mais je ne suis pas arrivé à établir que le squelette $r(G)$ est lui-même connexe, bien que cela paraisse très plausible et que je n'ai pas non plus de contre-exemple.

1 - LE SQUELETTE D'UN FERME

Dans ce qui suit, on désigne par \bar{B} et $\overset{\circ}{B}$ la boule unité de \mathbb{R}^n , respectivement fermée et ouverte, et par $\bar{B}_\rho(x)$, $\overset{\circ}{B}_\rho(x)$ de même la boule fermée ou ouverte de rayon ρ et de centre $x \in \mathbb{R}^n$. Comme la famille des boules fermées (ouvertes) n'est pas fermée dans \mathfrak{X} (dans \mathcal{G}), il y aura parfois lieu de la compléter en introduisant également les cas limite possibles : l'ensemble vide \emptyset , \mathbb{R}^n lui-même, et les demi-espaces fermés (ouverts).

Soit A un fermé de \mathbb{R}^n (non vide et non identique à \mathbb{R}^n , pour éliminer ces cas triviaux sans intérêt). Alors l'ensemble des boules fermées et des demi-espaces fermés (s'il y en a) contenus dans A constitue un ensemble inductif pour l'inclusion : en effet, si I est un ensemble totalement ordonné et V_i , $i \in I$ est une famille de boules et (éventuellement) de demi-espaces fermés inclus dans A, telle que :

$$V_i \subset V_j \quad \text{si } i \leq j$$

la limite dans \mathfrak{X} de cette famille filtrante est :

$$V = \overline{\bigcup_{i \in I} V_i}$$

Mais cette limite V est elle-même une boule ou un demi-espace fermé contenu dans A, et contient chacun des V_i , $i \in I$.

Par suite, d'après le théorème de Zorn, toute boule ou demi-espace contenu dans A est contenu dans une boule ou un demi-espace maximal inclus dans A.

Si V est un demi-espace fermé, on peut le considérer comme une boule de rayon infini, dont le centre est rejeté à l'infini dans la direction de la normale intérieure à l'hyperplan limite. Il convient alors de remplacer l'espace \mathbb{R}^n par l'espace compact E_n obtenu en adjoignant à \mathbb{R}^n les directions à l'infini (si u est un vecteur unitaire, le point à l'infini dans la direction u admet comme système fondamental de voisinages les cônes C_x , translatés par $x \in \mathbb{R}^n$

des cônes ouverts C contenant le vecteur u). On peut alors définir le squelette de A comme l'ensemble des centres (à distance finie ou non) des boules ou demi-espaces maximaux contenus dans A . Par exemple, si A est le complémentaire d'un ouvert borné et convexe, son squelette est constitué de la sphère à l'infini tout entière, et ne contient aucun point à distance finie. Autrement dit, la restriction à \mathbb{R}^n de ce squelette est vide.

Toutefois, l'introduction des directions à l'infini et l'usage de l'espace E_n au lieu de \mathbb{R}^n entraînent quelques complications, et je me limiterai le plus souvent au cas où A ne contient pas de demi-espace et où, par conséquent, son squelette est contenu dans \mathbb{R}^n . Notons la condition évidente suivante :

Pour que A ne contienne pas de demi-espace, c'est-à-dire pour que son squelette soit contenu dans \mathbb{R}^n , il faut et il suffit que l'enveloppe convexe du complémentaire de A soit égale à \mathbb{R}^n :

$$(1-1) \quad C(A^c) = \mathbb{R}^n$$

Soit donc A un fermé non vide vérifiant cette condition (1-1). Désignons par $R(A)$ l'ensemble des centres des boules maximales contenues dans A , et par $S_\rho(A)$ l'ensemble des centres des boules maximales de rayon ρ . On a donc :

$$(1-2) \quad R(A) = \bigcup_{\rho \geq 0} S_\rho(A)$$

et les $S_\rho(A)$ constituent une partition de $R(A)$. En effet, deux boules concentriques admettant des rayons ρ et ρ' inégaux ne peuvent être toutes deux maximales, et l'intersection $S_\rho \cap S_{\rho'}$ est donc vide.

Désignons par $A_\rho = A \ominus \rho B$ l'érode de A par la boule ρB de rayon $\rho \geq 0$ (en particulier $A_0 = A$). On a la relation suivante :

$$(1-3) \quad S_\rho(A) = S_0(A_\rho)$$

Autrement dit, une boule de rayon ρ et de centre x est maximale dans A si et seulement si la boule de centre x et de rayon nul,

c'est-à-dire le point x lui-même, est une boule maximale dans l'érode A_ρ .

On le voit simplement à partir des équivalences suivantes :

$$\bar{B}_\rho(x) \subset A \Leftrightarrow x \in A_\rho$$

$$\bar{B}_\rho(x) \subset \bar{B}_{\rho+\alpha}(y) \Leftrightarrow x \in \bar{B}_\alpha(y)$$

$$\bar{B}_{\rho+\alpha}(y) \subset A \Leftrightarrow \bar{B}_\alpha(y) \subset A_\rho$$

Donc, pour que $\bar{B}_\rho(x)$ soit incluse dans A et qu'il n'existe aucune boule de rayon $\rho + \alpha > \rho$ contenant $\bar{B}_\rho(x)$ et contenue dans A , il faut et il suffit que $x \in A_\rho$ et qu'il n'existe aucune boule de rayon $\alpha > 0$ contenant x et contenue dans A . D'où la relation (1-3).

Notons que $S_0(A)$, ensemble des points de A qui n'appartiennent à aucune boule de rayon $\mu > 0$ contenue dans A , est donné par la relation

$$S_0(A) = \bigcap_{\mu > 0} A \setminus A_\mu \bar{B}$$

et $R(A)$ lui-même est donc caractérisé par la formule suivante due à Lantuéjoul :

$$R(A) = \bigcup_{\rho \geq 0} \bigcap_{\mu > 0} (A_\rho \setminus (A_\rho)_\mu \bar{B})$$

Squelette de l'érode A_{ρ_0} .

Dans la relation (1-3), remplaçons A_ρ par l'érode A_{ρ_0} ($\rho_0 > 0$ tel que l'érode A_{ρ_0} ne soit pas vide, c'est-à-dire $\rho_0 \leq \rho_M$ où ρ_M est le module de l'érosion ultime). On trouve ainsi :

$$S_\rho(A_{\rho_0}) = S_0(A_{\rho+\rho_0}) = S_{\rho+\rho_0}(A)$$

Il en résulte aussitôt, en appliquant (1-2) à A_{ρ_0} :

$$(1-4) \quad R(A_{\rho_0}) = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} S_{\rho}(A)$$

Synthèse de A et de ses érodés.

Comme tout point de A est contenu dans une boule maximale, A lui-même est la réunion de ces boules maximales. Les centres x de ces boules décrivent R(A), par définition, et les rayons de ces boules sont égaux à ρ lorsque $x \in S_{\rho}(A)$. D'après (1-2), on trouve donc :

$$A = \bigcup_{\rho \geq 0} S_{\rho}(A) \oplus \rho \bar{B}$$

Pour améliorer cette formule, notons que $\rho \bar{B}$ est la réunion des boules $\rho' \bar{B}$, $\rho' \leq \rho$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{\rho \geq 0} S_{\rho}(A) \oplus \bigcup_{\rho' \leq \rho} \rho' \bar{B} = \bigcup_{\rho \geq 0} \bigcup_{\rho' \leq \rho} S_{\rho}(A) \oplus \rho' \bar{B} \\ &= \bigcup_{\rho' \geq 0} \rho' \bar{B} \oplus \bigcup_{\rho \geq \rho'} S_{\rho}(A) \end{aligned}$$

Compte tenu de (1-4), nous trouvons donc :

$$(1-5) \quad A = \bigcup_{\rho \geq 0} R(A_{\rho}) \oplus \rho \bar{B}$$

Ainsi, on peut reconstituer A connaissant la famille $R(A_{\rho})$. Remplaçant maintenant A par un érodé A_{ρ_0} , la formule (1-5) devient :

$$(1-6) \quad A_{\rho_0} = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} R(A_{\rho}) \oplus (\rho - \rho_0) \bar{B}$$

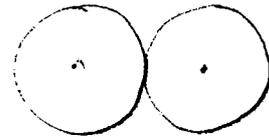
Il en résulte immédiatement une formule analogue pour l'ouverture $A_{\rho_0} \bar{B} = A_{\rho_0} \oplus \rho_0 \bar{B}$:

$$(1-7) \quad A_{\rho_0} \bar{B} = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} R(A_{\rho}) \oplus \rho \bar{B}$$

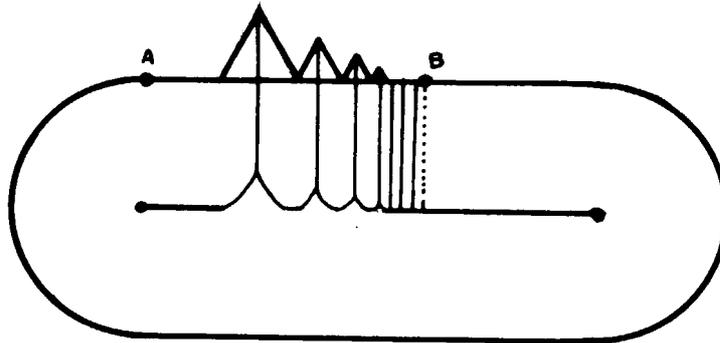
Comparée à (1-5), cette relation exprime simplement que l'on obtient l'ouverture $A_{\rho_0} \overline{B}$ en ne retenant, parmi les boules maximales dans A , que celles dont le rayon est supérieur ou égal à ρ_0 .

Mauvaises propriétés de $R(A)$.

$R(A)$ n'est pas forcément connexe, même si le fermé A est connexe. On a un contre-exemple simple en prenant pour A la réunion de deux boules fermées tangentes extérieurement : $R(A)$ est constitué de deux points, à savoir les centres des deux boules.

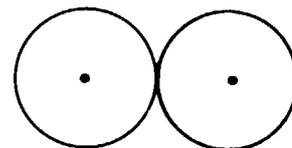
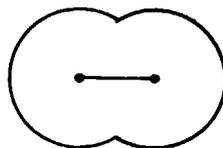
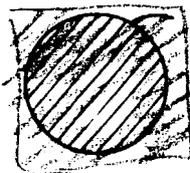


$R(A)$ n'est pas forcément un ensemble fermé. Voici un contre-exemple : sur le segment (a, b) , nous prenons une suite x_n de points



convergeant vers b , et sur chacun des segments (x_n, x_{n+1}) nous posons une encoche triangulaire comme indiqué sur la figure ci-jointe : $R(A)$ contient les médiatrices des segments (x_n, x_{n+1}) , mais non leur limite qui est la perpendiculaire en b à (a, b) .

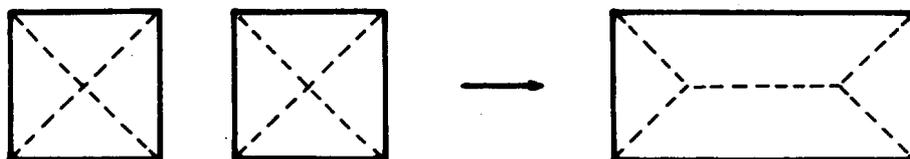
D'autre part, l'application $A \rightarrow \overline{R(A)}$ associant à tout fermé A l'adhérence de son squelette n'est ni semi-continue supérieurement, ni semi-continue inférieurement. Voici des contre-exemples :



Soit $A = B \cup B_h$ réunion de la boule unité et de sa translatée par h . Pour $|h| < 2$, le squelette $R(A)$ est le segment $(0, h)$. Pour $|h| = 2$, il est réduit à 2 points. Cela contredit la semi-continuité supérieure.

Soit maintenant pour A_n un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité : le squelette est formé de n rayons. lorsque n tend vers l'infini, A_n tend vers le cercle unité B , son squelette $R(A_n)$ tend vers B mais $R(B)$ est réduit à un point (le centre de B) : à nouveau, la semi-continuité supérieure est contredite.

L'exemple suivant montre que $R(A)$ n'est ni s.c.s. ni s.c.i. Soit, dans \mathbb{R}^2 , C le carré de côtés a parallèles aux axes des coordonnées et C_h son translaté par un vecteur de longueur h parallèle à l'axe des x . Prenons $A = C \cup C_h$, et faisons tendre h vers a en



décroissant : pour $h > a$, $R(A)$ est constitué des quatre diagonales des deux carrés disjoints. Pour $h = a$, les deux carrés fusionnent en un rectangle dont le squelette comprend la moitié de la limite de ces quatre diagonales, plus un segment de droite joignant les centres des deux carrés. (Le fait que A ne soit pas connexe pour $h > a$ ne joue aucun rôle dans ce contre-exemple : on pourrait aussi bien connecter les deux carrés disjoints par un segment de droite ou un arc continu).

En raison de ces mauvaises propriétés, je suggère de travailler avec des boules ouvertes, plutôt que des boules fermées, et de définir plutôt le squelette de l'intérieur d'un ensemble donné : ce qui revient, comme on le verra, à supprimer les composante frontalière $S_0(A)$ de la décomposition (1-2).

2 - LE SQUELETTE D'UN OUVERT

Soit A un ensemble quelconque (non nécessairement ouvert ou fermé), $\overset{\circ}{A}$ son intérieur : le squelette $r(A)$ que nous allons définir

ne dépendra que de cet intérieur $\overset{\circ}{A}$ et non de A lui-même. Nous poserons $G_0 = \overset{\circ}{A}$ et, pour tout $\rho > 0$:

$$G_\rho = G_0 \ominus \rho \bar{B} \quad ; \quad F_\rho = G_0 \ominus \rho \overset{\circ}{B}$$

G_ρ est ouvert, F_ρ est fermé. On a

$$\overset{\circ}{F}_\rho = G_\rho \quad ; \quad F_\rho \supset \bar{G}_\rho$$

l'égalité $F_\rho = \bar{G}_\rho$ étant fautive en général. Dans l'expression de F_ρ , on peut remplacer G_0 par A , soit $F_\rho = A \ominus \rho \overset{\circ}{B}$ (la relation $G_\rho = A \ominus \rho \bar{B}$ est évidemment fautive en général). Notons aussi pour tout $\varepsilon > 0$:

$$F_{\rho+\varepsilon} = G_\rho \ominus \varepsilon \overset{\circ}{B} = F_\rho \ominus \varepsilon \overset{\circ}{B} = F_\rho \ominus \varepsilon \bar{B}$$

$$G_{\rho+\varepsilon} = G_\rho \ominus \varepsilon \bar{B}$$

De ces deux familles décroissantes en ρ , la première, G_ρ , est continue à droite, et la seconde, F_ρ , est continue à gauche. Plus précisément, on trouve :

$$(2-1) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_\rho = \overset{\circ}{F}_\rho = \bigcup_{\varepsilon > 0} F_{\rho+\varepsilon} = \bigcup_{\varepsilon > 0} G_{\rho+\varepsilon} \\ F_\rho = \bigcap_{\rho' < \rho} F_{\rho'} = \bigcap_{\rho' < \rho} G_{\rho'} \end{array} \right.$$

Nous supposons toujours G_0 non vide et non identique à \mathbb{R}^n . Dans ces conditions, toute limite de boules ouvertes contenues dans G_0 est une boule ouverte, l'ensemble vide, ou un demi-espace ouvert contenu dans G_0 . Ainsi, l'ensemble des boules et des demi-espaces ouverts contenus dans G_0 est inductif pour l'inclusion, et le théorème de Zorn nous assure que toute boule (ou demi-espace) ouverte contenue dans G_0 est elle-même contenue dans une boule ou un demi-espace maximale.

Pour ne pas compliquer inutilement l'exposé, je me limite au cas où G_0 ne contient pas de demi-espace : G_0 est donc le complé-

mentaire d'un fermé dont l'enveloppe convexe est égale à \mathbb{R}^n (lorsque cette condition n'est pas vérifiée, le squelette comprend des points à l'infini).

Nous appellerons squelette de A (ou de $\overset{\circ}{A} = G_0$) et nous désignerons par $r = r(A) = r(\overset{\circ}{A}) = r(G_0)$ l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales contenues dans A (ou, ce qui revient au même, dans $\overset{\circ}{A} = G_0$). De même, nous désignerons par $s_\rho = s_\rho(A) = s_\rho(G_0)$ l'ensemble des centres des boules ouvertes maximales de rayon $\rho > 0$ donné. Du fait que A ne contient pas de demi-espace, on a, comme dans le paragraphe précédent, la partition :

$$(2-2) \quad r = \bigcup_{\rho > 0} s_\rho$$

De même encore, les équivalences :

$$\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset G_0 \Leftrightarrow x \in F_\rho$$

$$\overset{\circ}{B}_{\rho+\alpha}(y) \subset G_0 \Leftrightarrow \overline{B}_\alpha(y) \subset F_\rho$$

$$\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset \overset{\circ}{B}_{\rho+\alpha}(y) \Leftrightarrow x \in \overline{B}_\alpha(y)$$

nous déduisons que la boule ouverte de rayon $\rho > 0$ et de centre x est maximale dans G_0 si et seulement si la boule fermée de centre x et de rayon 0 , c'est-à-dire le point x lui-même, est une boule fermée maximale contenue dans le fermé $F_\rho = G_0 \ominus \rho\overline{B}$. Avec les notations du paragraphe précédent, ceci s'écrit :

$$(2-3) \quad s_\rho(G_0) = S_0(F_\rho) \quad (\rho > 0)$$

Le squelette lui-même sera donc

$$r(G_0) = \bigcup_{\rho > 0} \bigcap_{\mu > 0} (F_\rho \setminus (F_\rho)_{\mu\overline{B}})$$

Squelette de l'érodé G_{ρ_0}

Dans la formule (2-3), remplaçons G_0 par $G_{\rho_0} = G_0 \ominus \rho_0\overline{B}$ pour

un ρ_0 donné (tel que cet érodé ne soit pas vide). Le fermé $F_{\rho} = G_0 \ominus \rho \overset{\circ}{B}$ doit être remplacé par $G_{\rho_0} \ominus \rho \overset{\circ}{B} = F_{\rho+\rho_0}$. Il vient donc :

$$(2-3') \quad s_{\rho}(G_{\rho_0}) = S_0(F_{\rho+\rho_0}) = s_{\rho+\rho_0}(G_0)$$

Par suite, le squelette de l'érodé G_{ρ_0} est :

$$(2-4) \quad r(G_{\rho_0}) = \bigcup_{\rho > \rho_0} s_{\rho}(G_0)$$

Synthèse de G_0 et de ses érodés.

Comme G_0 est réunion des boules ouvertes maximales qu'il contient, on obtient :

$$G_0 = \bigcup_{\rho > 0} s_{\rho} \oplus \rho \overset{\circ}{B}$$

Compte tenu de (2-4), on en déduit comme dans le paragraphe précédent :

$$(2-5) \quad G_0 = \bigcup_{\rho > 0} r(G_{\rho}) \oplus \rho \overset{\circ}{B}$$

De même, en remplaçant dans cette formule G_0 par G_{ρ_0} et en utilisant l'expression (2-4) du squelette de G_{ρ_0} , il vient

$$(2-6) \quad G_{\rho_0} = \bigcup_{\rho > \rho_0} r(G_{\rho}) \oplus (\rho - \rho_0) \overset{\circ}{B}$$

En ce qui concerne l'ouverture $G_{\rho_0} \overline{B} = G_{\rho_0} \oplus \rho_0 \overline{B} = G_{\rho_0} \oplus \rho_0 \overset{\circ}{B}$ de G_0 selon la boule fermée de rayon ρ_0 , nous trouvons

$$(2-7) \quad G_{\rho_0} \overline{B} = \bigcup_{\rho > \rho_0} r(G_{\rho}) \oplus \rho \overset{\circ}{B}$$

Synthèse de F_{ρ_0} .

Pour $\rho_0 > 0$ donné, nous pouvons appliquer les résultats du paragraphe précédent au fermé $F_{\rho_0} = G_0 \ominus \rho_0 \overset{\circ}{B}$. Comme on a

$$F_{\rho_0} \ominus \rho \bar{B} = F_{\rho+\rho_0}$$

et, d'après (2-3')

$$S_{\rho}(F_{\rho_0}) = S_0(F_{\rho+\rho_0}) = s_{\rho+\rho_0}$$

on obtiendra

$$(2-8) \quad F_{\rho_0} = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} s_{\rho} \oplus (\rho - \rho_0) \bar{B}$$

et, pour le squelette du fermé F_{ρ_0} (au sens du paragraphe précédent)

$$(2-9) \quad R(F_{\rho_0}) = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} s_{\rho}$$

Ainsi, $R(F_{\rho_0})$ diffère de $r(G_{\rho_0})$ par l'adjonction de la composante s_{ρ_0} , c'est-à-dire des centres des boules maximales de rayon ρ_0 exactement.

Pour abrégé, posons (pour $\rho > 0$)

$$R_{\rho} = R(F_{\rho}) ; \quad r_{\rho} = r(G_{\rho})$$

Ces deux familles décroissantes sont données par :

$$R_{\rho} = \bigcup_{\rho' \geq \rho} s_{\rho'} ; \quad r_{\rho} = \bigcup_{\rho' > \rho} s_{\rho'}$$

La première est donc continue à gauche, et la seconde continue à droite. Plus précisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\rho} = \bigcap_{\rho' < \rho} R_{\rho'} = \bigcap_{\rho' < \rho} r_{\rho'} \\ r_{\rho} = \bigcup_{\rho' > \rho} r_{\rho'} = \bigcup_{\rho' > \rho} R_{\rho'} \end{array} \right.$$

Ni R_ρ , ni r_ρ ne sont nécessairement des ensembles fermés. Le contre-exemple donné au paragraphe précédent permet de le voir, moyennant une modification simple (remplacer cet ensemble A par son intérieur).

Dans le cas particulier où $A = \bar{A}$ est un fermé d'intérieur $G_0 = \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\bar{A}}$, pour tout $\rho > 0$ on a l'équivalence :

$$\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset G_0 \Leftrightarrow \bar{B}_\rho(x) \subset A$$

En effet, $\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset \overset{\circ}{A}$ entraîne $\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset A$, donc $\bar{B}_\rho(x) = \bar{\overset{\circ}{B}_\rho(x)} \subset A$, puisque A est fermé. Inversement, $\bar{B}_\rho(x) \subset A$ entraîne toujours $\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset A$, donc $\overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset \overset{\circ}{A} = G_0$. Ainsi, on a

$$F_\rho = A \ominus \rho \bar{B} = A_\rho$$

Le squelette $R_\rho = R(F_\rho)$ ne diffère donc pas, pour $\rho > 0$, du squelette $R(A_\rho)$ défini au paragraphe précédent. Par contre :

$$R(A) = r(\overset{\circ}{A}) \cup S_0(A)$$

Comme $S_0(A)$ est contenu dans la frontière de A, on a aussi :

$$r(\overset{\circ}{A}) = R(A) \cap \overset{\circ}{A}$$

Ainsi, dans le cas d'un fermé, le squelette $r(\overset{\circ}{A})$, au sens de la définition de ce paragraphe, est la restriction à l'intérieur $\overset{\circ}{A}$ du fermé A du squelette $R(A)$ défini dans le premier paragraphe.

3 - SEMI-CONTINUITÉ INFÉRIEURE DU SQUELETTE $r(G)$

Nous allons maintenant montrer que l'application $G \rightarrow \bar{r}(G)$ est semi-continue inférieurement. Cela signifie ceci : pour tout ouvert G_0 de \mathbb{R}^n , l'ensemble des ouverts G tels que $\bar{r}(G) \cap G_0 \neq \emptyset$ est un sous-espace ouvert de l'espace \mathcal{G} des ouverts de \mathbb{R}^n . Or, G_0 étant ouvert, $\bar{r}(G) \cap G_0 \neq \emptyset$ équivaut à $r(G) \cap G_0 \neq \emptyset$, de sorte que la

référence à l'adhérence $\bar{r}(G)$ du squelette $r(G)$ est superflue en ce qui concerne la semi-continuité inférieure : il s'agit d'une propriété de l'application r elle-même, et non de son adhérence \bar{r} . En termes plus analytiques, cette semi-continuité inférieure équivaut à la propriété suivante :

Pour toute suite G_n convergeant dans \mathcal{G} vers une limite G , et pour tout point $x \in r(G)$, on peut trouver un entier N et, pour tout $n \geq N$ un point $x_n \in r(G_n)$ tel que la suite x_n , $n \geq N$ converge vers x . En bref : tout point du squelette de G est limite d'une suite de points $x_n \in r(G_n)$.

Dans la définition du squelette $r(G)$, telle que nous l'avons donnée ci-dessus, nous avons supposé que G ne contenait pas de demi-espaces. La semi-continuité inférieure n'est nullement liée à cette hypothèse limitative. Pour obtenir un énoncé aussi général que possible, convenons d'appeler boule ouverte généralisée tout ensemble ouvert V qui est soit vide, soit \mathbb{R}^n , soit un demi-espace ouvert, soit enfin une boule ouverte. A tout ouvert G , associons la famille $\mathcal{U}(G)$ des boules ouvertes généralisées maximales contenues dans G . $\mathcal{U}(G)$ est un sous-ensemble, non fermé en général, de l'espace \mathcal{G} . Désignons par $\bar{\mathcal{U}}(G)$ son adhérence dans \mathcal{G} (i.e. : l'ensemble des boules ouvertes maximales contenues dans G et de leurs limites).

Dans ces conditions, l'application $G \rightarrow \bar{\mathcal{U}}(G)$ de \mathcal{G} dans $\mathfrak{F}(\mathcal{G})$ est s.c.i. En termes plus simples, cette propriété équivaut à la suivante :

LEMME 3 - Pour toute suite G_n convergeant dans \mathcal{G} vers un ouvert G , et pour toute boule ouverte généralisée maximale $V \subset G$, il existe une suite V_n convergeant vers V dans \mathcal{G} , telle que, pour chaque n , V_n soit une boule généralisée maximale contenue dans G_n .

Soit, en effet, V une boule ouverte généralisée maximale dans G . Nous pouvons trouver une suite croissante K_p de boules compactes généralisées (i.e. : vides ou de rayon fini) telles que

$$K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1} \quad \text{et} \quad V = \bigcup K_p = \bigcup \overset{\circ}{K}_p$$

Comme K_p est compacte, pour chaque p il existe un entier N_p tel que $K_p \subset G_n$ pour $n \geq N_p$ (d'après la définition de la convergence dans \mathcal{G}). Posons

$$W_n = \overset{\circ}{K}_p \quad \text{pour} \quad n = N_p, 1 + N_p, \dots, N_{p+1} - 1$$

de sorte que la suite des boules ouvertes généralisées W_n (vides ou de rayons finis) vérifie pour tout n :

$$W_n \subset \overline{W}_n \subset G_n \quad ; \quad V = \bigcup W_n$$

Comme W_n est contenue dans G_n , il existe une boule V_n ouverte généralisée maximale dans G_n qui la contient :

$$W_n \subset V_n \subset G_n$$

Dans l'espace compact \mathcal{G} , la suite V_n admet une valeur d'adhérence V_0 , qui est encore une boule ouverte généralisée. Les inclusions $W_n \subset V_n \subset G_n$ passant à la limite, et la suite croissante W_n convergeant vers $V = \bigcup W_n$ dans \mathcal{G} , il vient :

$$V \subset V_0 \subset G$$

Mais, par hypothèse, V est maximale dans G . Donc $V_0 = V$. Comme la suite V_n n'admet, dans l'espace compact \mathcal{G} , pas d'autres valeurs d'adhérence que $V_0 = V$, cette suite converge elle-même dans \mathcal{G} vers cette unique valeur d'adhérence V : ce qui démontre la proposition.

De cette proposition générale, on déduit sans peine la semi-continuité inférieure du squelette $r(G)$. Pour que l'application $G \rightarrow r(G)$ soit définie dans \mathcal{G} tout entier, définissons, pour tout G , le squelette $\underline{r}(G)$ comme l'ensemble des centres des boules ouvertes au sens strict (de rayon fini, non nul) maximales dans G : cet ensemble peut être vide (par exemple, si G est le complémentaire d'un fermé convexe), mais cela n'empêche nullement la semi-continuité inférieure. Avec cette définition, on a le théorème suivant :

THEOREME 3 - L'application : $G \rightarrow \bar{r}(G)$ est une application s.c.i. de \mathcal{G} dans \mathfrak{F} .

En effet, soit G_n une suite convergeant dans \mathcal{G} vers un ouvert G , et x un point du squelette $r(G)$. Il faut montrer qu'il existe dans chaque $r(G_n)$ (pour $n \geq$ à un certain N fixé) un point x_n tel que $x = \lim x_n$. Comme $x \in r(G)$, soit $\overset{\circ}{B}_\rho(x)$ la boule ouverte maximale de rayon fini ρ centrée en x et contenue dans G . D'après le résultat précédent, il existe une suite V_n de boules généralisées telles que chaque V_n soit maximale dans G_n et que $\overset{\circ}{B}_\rho(x) = \lim V_n$. Comme $\overset{\circ}{B}_\rho(x)$ est non vide et de rayon fini, les V_n sont elles-mêmes des boules $\overset{\circ}{B}_{\rho_n}(x_n)$ non vides et de rayon fini pour n assez grand. La convergence $V_n \rightarrow \overset{\circ}{B}_\rho(x)$ entraîne ensuite $\rho_n \rightarrow \rho$ et $x_n \rightarrow x$. Comme $x_n \in r(G_n)$, cela démontre le théorème.

COROLLAIRE - Pour chaque $\rho > 0$, l'application $G \rightarrow r(G_\rho) = r_\rho(G)$ est s.c.i.

En effet, l'application $G \rightarrow G_\rho = G \ominus \rho\bar{B}$ est continue dans \mathcal{G} , et $G_\rho \rightarrow r(G_\rho)$ est s.c.i. d'après le théorème.

4 - LA FONCTION $\rho(x)$, ET LES APPLICATIONS AVAL, AMONT ET ARETE

G étant un ouvert quelconque, posons

$$\rho_G(x) = \text{Sup}\{\rho : \overset{\circ}{B}_\rho(x) \subset G\}$$

pour tout $x \in G$, et $\rho(x) = 0$ à l'extérieur de G . Si $x \in G$, $\overset{\circ}{B}_{\rho(x)}(x)$ est la plus grande boule de centre x contenue dans G : elle n'est pas forcément maximale, au sens du paragraphe précédent, car il peut exister des boules ouvertes, non centrées en x , qui la contiennent et sont contenues dans G . Notons que $\rho_G(x)$ est simplement la distance du point x au complémentaire G^c de l'ouvert G soit :

$$(4-1) \quad \rho_G(x) = d(x, G^c) = \text{Inf}_{y \notin G} d(x, y)$$

Cela implique, en particulier, la continuité de cette fonction, et, plus précisément, les inégalités

$$(4-2) \quad |\rho_G(x) - \rho_G(y)| \leq d(x,y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$$

Rappelons le résultat suivant : une suite G_n converge dans \mathcal{G} si et seulement si pour chaque point x la suite $\rho_{G_n}(x)$ converge vers une limite $\rho(x)$, et on a alors $\rho(x) = \rho_G(x)$ où $G = \lim G_n$. Ce résultat peut être renforcé de la manière suivante :

Si $G_n \rightarrow G$ dans \mathcal{G} et si $x_n \rightarrow x$ dans \mathbb{R}^n , alors $\rho_{G_n}(x_n)$ tend vers $\rho_G(x)$. (Continuité de l'application $(G, x) \rightarrow \rho_G(x)$).

L'interprétation de la relation (4-2) est simple. Si x_1 et x_2 sont deux points, ρ_1 et ρ_2 deux nombres ≥ 0 , on a l'équivalence :

$$\bar{B}_{\rho_1}(x_1) \subset \bar{B}_{\rho_2}(x_2) \Leftrightarrow \rho_2 - \rho_1 \geq d(x_1, x_2)$$

et, pour $\rho_2 > 0$,

$$\bar{B}_{\rho_1}(x_1) \subset \overset{\circ}{B}_{\rho_2}(x_2) \Leftrightarrow \rho_2 - \rho_1 > d(x_1, x_2)$$

L'inégalité (4-2) exprime donc que la boule fermée de centre x et de rayon ρ_x n'est contenue dans aucune boule ouverte incluse dans G (de fait, dans le cas contraire, $\bar{B}_{\rho_x}(x)$ serait contenue dans une boule ouverte concentrique $\bar{B}_{\rho_x}(x) \subset \overset{\circ}{B}_{\rho_{x+\varepsilon}} \subset G$, ce qui contredirait la définition de ρ_x).

Si x et y appartiennent au squelette, l'inégalité (4-2) est stricte, sauf si $x = y$:

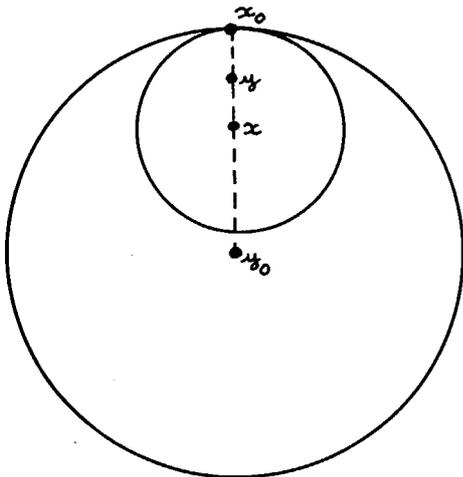
$$|\rho_G(x) - \rho_G(y)| < d(x,y) \quad (x, y \in r(G), x \neq y)$$

En effet, si $x \in r(G)$, l'inclusion $\overset{\circ}{B}_{\rho_x}(x) \subset \overset{\circ}{B}_{\rho_y}(y)$ est impossible, et on a donc :

$$(4-3) \quad \rho_G(y) - \rho_G(x) < d(x,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq x$$

et, de même, $\rho_G(x) - \rho_G(y) < d(x,y)$ si $y \in r(G)$.

Notons que la relation (4-3) est une condition nécessaire et suffisante pour que x appartienne au squelette $r(G)$: elle exprime, en effet, que la boule ouverte de centre x et de rayon $\rho_G(x)$ est maximale dans G .



Soit x un point de G et $\rho_x = \rho_G(x)$. Comme $\overset{\circ}{B}_{\rho_x}(x)$ est contenue dans G , mais non $\overline{B}_{\rho_x}(x)$, la frontière de $\overset{\circ}{B}_{\rho_x}(x)$ contient au moins un point x_0 de la frontière de G . Si une boule ouverte $\overset{\circ}{B}_{\rho}(y)$ de centre y et de rayon ρ contient $\overset{\circ}{B}_{\rho_x}(x)$, elle ne contient pas le point frontière x_0 : les deux boules fermées sont donc tangentes en x_0 , autrement dit, y appartient à la demi-droite $\{x_0 + \lambda \frac{x-x_0}{|x-x_0|}, \lambda > 0\}$ et, plus précisément:

$$y = x_0 + \rho \frac{x-x_0}{\rho_x}$$

Cette remarque simple entraîne des conséquences importantes : pour tout y appartenant au segment (x_0, x) , la boule ouverte de centre y et de rayon $d(x_0, y) = \rho_x - d(x, y)$ est contenue dans G , et aucune boule ouverte de rayon supérieur ne peut être incluse dans G ; On a donc :

$$(4-4) \quad \rho(y) = \rho(x) - d(x, y)$$

sur le segment fermé (x_0, x) . Inversement, si la relation (3-4) est vérifiée pour deux points $x \neq y$, la demi-droite $\{x + \lambda(y-x), \lambda \geq 0\}$ rencontre la frontière de G en un point $x_0 \in \overline{B}_{\rho_x}(x)$, et la relation $\rho(y') = \rho(x) - d(x, y')$ est vérifiée pour tout y' appartenant au segment de droite (x, x_0) : dans le cas contraire, en effet, la boule fermée $\overline{B}_{\rho(y)}(y)$ serait contenue dans G .

L'application Aval.

Nous appellerons Aval de x , en abrégé $Av(x)$, l'ensemble des $y \in G$ vérifiant cette relation (4-4) : pour tout $x \in G$, $Av(x)$ est non vide et fermé dans G (pour la topologie induite sur G . Il est clair, en effet, que la relation (4-4) passe à la limite, puisque les fonctions ρ et d sont continues).

L'aval de x est ainsi constitué d'un ou plusieurs segments de droite issus du point x . Nous dirons qu'un point $x \in G$ est un point simple si son aval est constitué d'un segment unique, et qu'il est un point multiple dans le cas contraire. Nous désignerons par $D(G)$ l'ensemble des points multiples de G .

Tout point multiple est un point du squelette, soit

$$(4-5) \quad D(G) \subset r(G)$$

Cette inclusion peut être stricte : le squelette peut comporter des points simples. Nous verrons cependant plus loin que $D(G)$ est dense dans $r(G)$, soit

$$\overline{D(G)} = \overline{r(G)}$$

(tout point simple du squelette est limite de points multiples).

En effet, supposons que la boule fermée \overline{B}_{ρ_x} rencontre la frontière de G en deux points distincts x_0 et x_1 . Alors toute boule ouverte contenant $\overset{\circ}{B}_{\rho_x}(x)$ est centrée en un point y appartenant aux demi-droites $\{x_0 + \lambda(x-x_0), \lambda \geq 0\}$ et $\{x_1 + \lambda(x-x_1), \lambda \geq 0\}$, donc nécessairement $y = x$, et $\overset{\circ}{B}_{\rho_x}(x)$ est maximale, c'est-à-dire $x \in r(G)$.

L'application Amont.

Considérons, maintenant, la partie amont de la demi-droite d'origine x_0 et de direction $x-x_0$, soit l'ensemble des points

$$x_\lambda = x_0 + \lambda \frac{x-x_0}{\rho(x)} \quad , \quad \lambda \geq 1$$

Désignons par λ_0 le plus grand $\lambda \geq 1$ tel que $\rho(x_\lambda) = \rho(x) + d(x, y)$. Si $\lambda_0 = 1$, la boule $\overset{\circ}{B}_{\rho(x)}(x)$ est maximale dans G et $x \in r(G)$. Inversement $x \in r(G)$ entraîne $\lambda_0 = 1$, à cause de l'inégalité (4-3). Supposons $x \notin r(G)$, c'est-à-dire $\lambda_0 > 1$, et posons $y_0 = x_{\lambda_0}$. On a évidemment encore $\rho(y_0) = \rho(x) + d(x, y_0)$, à cause de la continuité, et $\rho(x_\lambda) < \rho(x) + d(x, x_\lambda)$ pour $\lambda > \lambda_0$. Mais cela signifie que $\overset{\circ}{B}_{\rho(y_0)}(y_0)$ est la plus grande boule ouverte contenant $\overset{\circ}{B}_{\rho(x)}(x)$ et contenue dans G .: c'est donc l'unique boule maximale contenant $\overset{\circ}{B}_{\rho(x)}(x)$, et, en particulier, $y_0 \in r(G)$.

Nous appellerons Amont de x , en abrégé $Am(x)$ l'ensemble fermé des points y vérifiant :

$$(4-5) \quad \rho(y) = \rho(x) + d(x, y) \quad (x \in G)$$

Si $x \in r(G)$, son amont est réduit au point x lui-même, et inversement d'après (4-3) :

$$Am(x) = \{x\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in r(G)$$

Si $x \notin r(G)$, x est un point simple dont l'aval est réduit à un unique segment (x_0, x) , et $Am(x)$ constitue lui aussi un unique segment (x, y_0) prolongeant (x_0, x) , dont l'extrémité y_0 est le centre de l'unique boule maximale contenant $\overset{\circ}{B}_{\rho(x)}(x)$.

L'application Arête.

Nous appellerons Arête de x , en abrégé $Ar(x)$ la réunion de l'amont et de l'aval de x :

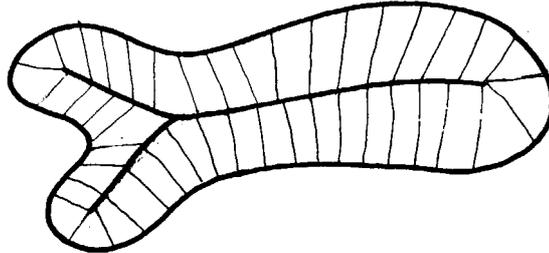
$$Ar(x) = Av(x) \cup Am(x)$$

Si x est un point simple, $Ar(x)$ est l'unique segment fermé dans G passant par x sur lequel $\rho(y)$ croisse de l'aval vers l'amont avec une pente constante et égale à 1.

Si $x \in D(G)$, il existe deux ou plusieurs tels segments de droite,

mais tous admettent le point x comme l'une de leurs extrémités.
En résumé :

Deux arêtes non identiques sont disjointes ou se coupent en un point $x \in D(G)$ qui est alors, obligatoirement, leur commune extrémité amont.



Premières propriétés de A_v , A_m et A_r .

Tout ceci peut être imagé à l'aide d'une représentation topographique. Si G est un ouvert dans \mathbb{R}^2 , nous interpréterons la surface $z = \rho(x)$ dans \mathbb{R}^3 comme une île (ou un continent si G n'est pas borné). Les courbes $\rho(x) = C$ ste figurent les lignes de niveau, le squelette $r(G)$ constitue les lignes de crête, les arêtes représentent les lignes de plus grande pente (pente obligatoirement égale à -1 vers l'aval).

Pour tout $x \in G$, les ensembles $A_m(x)$, $A_r(x)$ et $A_v(x)$ sont fermés dans G (pour la topologie induite sur G), car les relations (4-4) et (4-5) passent à la limite. Plus précisément :

Les applications $A_v(x)$, $A_m(x)$ et $A_r(x)$ sont s.c.s. de G dans $\mathcal{F}(G)$.

Soit, en effet, x_{n_k} une suite dans G convergeant vers un point $x \in G$, et soit $y_{n_k} \in A_v(x_{n_k})$ tels que $y_{n_k} \rightarrow y$ dans G (ce qui implique $y \in G$). On a

$$\rho(y_{n_k}) = \rho(x_{n_k}) + d(x_{n_k}, y_{n_k})$$

et donc, ρ et d étant continues, $\rho(y) = \rho(x) + d(x, y)$, c'est-à-dire $y \in A_v(x)$: l'application Aval est s.c.s. Même démonstration pour Amont et Arête. Nous indiquerons plus loin des propriétés plus fines

de ces applications. Notons pour l'instant le résultat simple suivant, qui nous sera utile dans un instant :

L'application A_{val} est continue en tout point simple, et, en particulier, en tout point n'appartenant pas au squelette.

En effet, soit $x \in G$ un point simple, i.e. $x \notin D(G)$, et une suite x_n convergeant vers x . Comme A_{val} est s.c.s., il faut montrer la semi-continuité inférieure. Soit donc $y \in A_{\text{val}}(x)$, et $\rho(y) = \rho(x) - d(x,y) > 0$. Comme ρ est continue, on a $\rho(x_n) > d(x,y)$ pour n assez grand. Nous pouvons donc prendre, dans l'aval de chaque x_n , un point y_n tel que $\rho(y_n) = \rho(x_n) - d(x,y)$, ce qui implique $d(x_n, y_n) = d(x,y)$. La suite y_n admet donc une valeur d'adhérence y_0 , et, par continuité, $\rho(y_0) = \rho(x) - d(x,y)$. Il en résulte $y_0 = y$, puisque $A_{\text{val}}(x)$ est constitué d'un unique segment de droite. Comme la suite y_n n'admet qu'une seule valeur d'adhérence y , elle converge vers y . Donc A_{val} est s.c.i. en x , et par suite continue.

Notons encore ceci : A_{am} et A_{val} sont réciproques l'une et l'autre, puisque $x \in A_{\text{val}}(y)$ équivaut à $y \in A_{\text{am}}(x)$. Ainsi, pour tout ensemble $H \subset G$, on a $x \in A_{\text{val}}(H)$ si et seulement si $A_{\text{am}}(x)$ rencontre H , et de même pour la fonction A_{am} . Comme A_{am} et A_{val} sont s.c.s., il en résulte :

Pour tout compact $K \subset G$, $A_{\text{am}} K$ et $A_{\text{val}} K$ sont fermés dans G . Du fait que $\rho(x)$ est bornée sur tout compact, on peut même préciser que $A_{\text{val}} K$ est compacte. $A_{\text{am}} K$ n'est pas forcément compacte dans le cas général. Toutefois, si G ne contient pas de demi-espace, $A_{\text{am}} K$ est compacte.

Si F est fermé dans G , $A_{\text{am}} F$ est fermé dans G .

En effet, si $x_n \in A_{\text{am}} F$ converge vers x , soit y_n un point de $F \cap A_{\text{val}} x_n$. Comme x_n converge et que ρ est borné sur les compacts, la suite y_n admet une valeur d'adhérence y , qui appartient évidemment à $F \cap A_{\text{val}} x$. Donc $x \in A_{\text{am}} F$, et $A_{\text{am}} F$ est fermé.

Si G ne contient pas de demi-espace, pour tout F fermé dans G $A_{\text{val}} F$ est fermé dans G .

Même démonstration, l'hypothèse que G ne contient pas de demi-espace assurant que la suite $y_n \in F \cap A_{\text{am}} x_n$ reste bornée.

5 - CARACTERISATION DES FONCTIONS ρ_G

Si ρ est la fonction ρ_G associée à un ouvert G , elle vérifie les deux conditions :

(a) $|\rho_x - \rho_y| \leq d(x,y) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$

(b) pour tout x tel que $\rho(x) > 0$, il existe un point $y \neq x$ avec

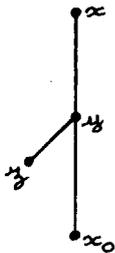
$$\rho(y) = \rho(x) - d(x,y) > 0$$

La condition (a), en effet, est identique à (4-2), et la condition (b) exprime que $A_v(x)$ n'est vide pour aucun $x \in G$. En fait, ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $\rho \geq 0$ soit $\rho = \rho_G$ pour un ouvert G .

En effet, supposons-les vérifiées par une fonction $\rho \geq 0$. Comme ρ est continue (d'après (a)) l'ensemble

$$G = \{x : \rho(x) > 0\}$$

est ouvert, et il faut montrer $\rho = \rho_G$. Si $x \notin G$, $\rho(x) = \rho_G(x) = 0$. Soit $x \in G$, et $y \neq x$ tel que $\rho(y) = \rho(x) - d(x,y) > 0$.



Appliquons (b) au point y : il existe un $z \neq y$ tel que

$$\rho(z) = \rho(y) - d(y,z) > 0$$

On a donc

$$\rho(z) = \rho(x) - d(x,y) - d(y,z)$$

Soit :
$$\rho(x) - \rho(z) = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$$

D'après (a), il en résulte l'égalité

$$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$$

Donc $z \neq y$ appartient au prolongement du segment (x,y) , soit $z = y + \lambda(y-x)$, $\lambda > 0$. En réitérant le raisonnement, on voit que le Sup des λ tels que la relation $\rho(z) = \rho(x) - d(x,z) > 0$ soit

vérifiée correspond à un point x_0 de la frontière de G , pour lequel

$$\rho(x_0) = \rho(x) - d(x, x_0) = 0$$

D'après (a), on a évidemment $\rho(y) = \rho(x) - d(x, y) > 0$ pour tout $y \in (x, x_0)$. Il suit de là que le segment (x, x_0) appartient à l'Aval de x dans l'ouvert G : cela implique $\rho_G(x) = d(x, x_0)$, c'est-à-dire $\rho_G(x) = \rho(x)$.

D'après (a), la restriction à toute droite D de la fonction ρ est, sur cette droite, une fonction à variation bornée, donc admet en tout point de D une dérivée à droite et une dérivée à gauche. On peut prévoir qu'à l'extérieur du squelette ces deux dérivées seront égales, c'est-à-dire ρ dérivables sur D . Nous allons établir un résultat plus fort, à savoir la différentiabilité de ρ à l'extérieur du squelette, c'est-à-dire sur l'ouvert $G \setminus \bar{r}(G)$. Pour fixer la terminologie, convenons d'appeler singuliers les points de l'adhérence $\bar{r}(G)$ du squelette, et réguliers les points du complémentaire $G \setminus \bar{r}(G)$.

THEOREME 5 - La fonction $\rho = \rho_G$ est différentiable en tout point régulier $x \in G$, et grad $\rho(x)$ est le vecteur unitaire de $Ar(x)$, orienté vers l'amont.

En effet, soit $x \in G \setminus \bar{r}(G)$ un point régulier que nous pouvons choisir comme origine des coordonnées, soit $x = 0$. Comme $G \setminus \bar{r}(G)$ est ouvert, il existe une boule εB centrée en $x = 0$, de rayon $\varepsilon > 0$, dont tous les points sont réguliers.

En chaque $x \in \varepsilon B$, désignons par $u(x)$ le vecteur unitaire orienté vers l'amont de l'arête (unique, puisque x est régulier) passant par ce point. Comme l'application Aval est continue en tout point régulier, la fonction $x \rightarrow u(x)$ est continue sur la boule εB .

En particulier, soit $u_0 = u(0)$ le vecteur unitaire de l'arête du point 0 : on a donc :

$$\rho(\lambda u_0) = \rho_0 + \lambda \quad (|\lambda| \leq \varepsilon)$$

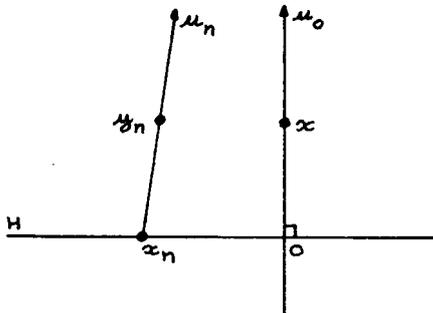
Nous voulons montrer que u_0 est le gradient de ρ au point $x = 0$, soit

$$(5-1) \quad \lim_{|y| \rightarrow 0} \left| \frac{\rho(y) - \rho_0 - \langle y, u_0 \rangle}{|y|} \right| = 0$$

Supposons que cette relation (5-1) ne soit pas vérifiée, et montrons que cela entraîne une contradiction. En effet, si (5-1) n'est pas vérifiée, il existe une suite y_n convergeant vers le point 0, contenue dans la boule εB , telle que l'on ait pour tout n :

$$\Delta_n = \left| \frac{\rho(y_n) - \rho_0 - \langle y_n, u_0 \rangle}{|y_n|} \right| \geq a > 0$$

a/ Notons que l'on ne peut avoir $y_n \in Ar(o)$, puisque Δ_n est identiquement nulle sur cette arête. Soit u_n le vecteur unitaire de l'arête unique passant par y_n , et x_n le point où cette arête rencontre l (hyperplan H orthogonal à u_0 , passant par le point 0).



Comme les points de la boule εB sont réguliers, on a $u_n \rightarrow u_0$, $x_n \rightarrow 0$ et, en particulier, $x_n \in \varepsilon B$ pour n assez grand.

Définissons λ_n par la condition

$$y_n = x_n + \lambda_n u_n$$

ce qui implique $\lambda_n \rightarrow 0$ et :

$$\rho(y_n) = \rho(x_n) + \lambda_n$$

$$\langle y_n, u_0 \rangle = \lambda_n \langle u_0, u_n \rangle$$

Comme $\langle u_0, u_n \rangle \rightarrow |u_0|^2 = 1$, posons

$$\langle u_0, u_n \rangle = 1 - \alpha_n$$

avec $\alpha_n \rightarrow 0$. Avec ces notations, il vient donc

$$(5-2) \quad \rho(y_n) - \rho_0 - \langle y_n, u_0 \rangle = \rho(x_n) - \rho_0 + \alpha_n \lambda_n$$

Voilà pour le numérateur de Δ_n . Passons à son dénominateur. Il vient

$$|y_n|^2 = |x_n|^2 + \lambda_n^2 + 2 \lambda_n \langle x_n, u_n \rangle$$

Comme $u_n \rightarrow u_0$ et que $x_n \in H$, on a $\langle x_n, u_n \rangle = |x_n| \beta_n$ avec $\beta_n \rightarrow 0$ et :

$$\frac{|y_n|^2}{|x_n|^2 + \lambda_n^2} = 1 + \beta_n \frac{(x_n + \lambda_n)^2 - (x_n^2 + \lambda_n^2)}{x_n^2 + \lambda_n^2}$$

Le second terme du second membre converge vers 0, puisque $\beta_n \rightarrow 0$ et que l'expression

$$\frac{(x_n + \lambda_n)^2}{x_n^2 + \lambda_n^2}$$

reste bornée. Ainsi, $|y_n|$ est équivalent à $\sqrt{|x_n|^2 + \lambda_n^2}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous avons donc :

$$0 < a \leq \Delta_n = \frac{|\rho(x_n) - \rho_0 - \alpha_n \lambda_n|}{|y_n|} \leq \frac{|\rho(x_n) - \rho_0|}{|y_n|} + \frac{|\alpha_n \lambda_n|}{|y_n|}$$

Or $|\lambda_n|/|y_n|$, équivalent à $|y_n|/\sqrt{x_n^2 + \lambda_n^2}$ reste borné et $\alpha_n \rightarrow 0$: donc le second terme tend vers 0. Donc, il existe un $b > 0$ tel que

$$(5-3) \quad 0 < b \leq \frac{|\rho(x_n) - \rho_0|}{\sqrt{x_n^2 + \lambda_n^2}} \leq \frac{|\rho(x_n) - \rho_0|}{|x_n|}$$

Notre hypothèse ((5-1) non vraie) implique donc l'existence d'une suite x_n de points (différents de 0) convergeant vers 0 dans l'hyperplan H et contredisant l'existence du gradient.

b/ Il reste à montrer que (5-3) conduit à une contradiction, autrement dit que $\rho(x)$ est différentiable dans l'hyperplan H.

Choisissons un point z_n sur l'arête de x_n , soit

$$z_n = x_n - \delta \rho_n u_n$$

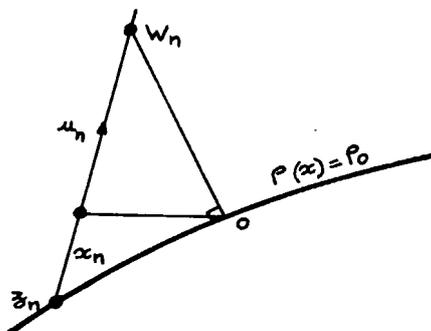
de telle manière que l'on ait

$$\rho(z_n) = \rho(o)$$

Il convient donc de prendre

$$\delta \rho_n = \rho(x_n) - \rho(o)$$

Prenons de même sur cette arête un point $W_n = x_n + \mu_n u_n$ tel que :



$$\langle z_n, W_n \rangle = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\langle x_n - \delta \rho_n u_n, x_n + \mu_n u_n \rangle = 0$$

Soit :

$$\begin{aligned} |x_n|^2 - \delta \rho_n \langle u_n, x_n \rangle \\ = \mu_n (\delta \rho_n - \langle u_n, x_n \rangle) \end{aligned}$$

On a vu ci-dessus que $\langle u_n, x_n \rangle = |x_n| \beta_n$ avec $\lim \beta_n = 0$, et μ_n est donné par la relation

$$(5-4) \quad |x_n| - \beta_n \delta \rho_n = \mu_n \left(\frac{\delta \rho_n}{|x_n|} - \beta_n \right)$$

Mais le point W_n ne peut pas appartenir à la boule εB .

En effet, si $W_n \in \varepsilon B$, le segment (x_n, W_n) est contenu dans εB , et donc ne contient pas de point du squelette : par suite W_n appartient encore à l'arête de x_n , et par suite aussi :

$$\rho(W_n) = \rho(z_n) + d(W_n, z_n) = \rho(o) + d(W_n, z_n)$$

et donc, puisque $d(W_n, z_n) > d(o, W_n)$ strictement :

$$\rho(W_n) > \rho(o) + d(o, W_n)$$

ce qui est impossible d'après (4-2).

Donc $W_n \notin B$, et cela implique que $|\mu_n|$ reste supérieur à un nombre $\alpha > 0$. Or, dans (5-4), le premier membre tend vers 0 et $\beta_n \rightarrow 0$ également. Comme μ_n reste $\geq \alpha > 0$, on ne peut pas avoir

$$\frac{|\delta \rho_n|}{|x_n|} \geq b > 0$$

ce qui contredit (5-3), et établit la différentiabilité de ρ .

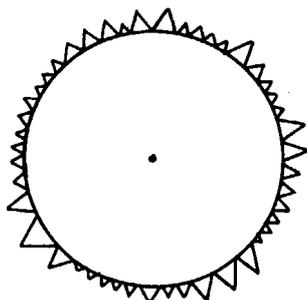
6 - L'ADHERENCE \bar{r} DU SQUELETTE

L'intérieur du squelette, $\overset{\circ}{r}(G)$, est toujours vide. En effet, pour tout $x \in r(G)$, il existe au moins un segment $(x, x_0) \subset Ar(x)$ (avec $x \neq x_0$) dont tous les points, sauf x , sont dans le complémentaire du squelette : par suite $r(G)$ est contenu dans sa frontière, et son intérieur est vide.

Cette propriété correspond bien à l'intuition selon laquelle le squelette doit être un ensemble suffisamment mince. Toutefois je ne suis pas arrivé à démontrer que le squelette est négligeable pour la mesure de Lebesgue, ni d'ailleurs à trouver de contre-exemple. De même, en ce qui concerne l'adhérence $\bar{r}(G)$ du squelette, j'ignore si elle est, ou non, nécessairement d'intérieur vide.

Un contre-exemple.

Par contre, l'adhérence $\bar{r}(G)$ du squelette n'est pas nécessairement négligeable pour la mesure de Lebesgue (par $\bar{r}(G)$, j'entends ici la définition la plus restrictive : adhérence de $r(G)$ dans G , c'est-à-dire intersection de G lui-même et de l'adhérence de $r(G)$ dans (\mathbb{R}^n)). Voici un contre-exemple.



Soit B le disque unité dans \mathbb{R}^2 , et $C = \partial B$ sa frontière, qui est le cercle unité. Construisons sur C un ensemble fermé d'intérieur vide et non négligeable pour la mesure de Lebesgue sur C . Pour

cela, suivant le procédé classique, on se donne une suite θ_n dénombrable dense sur C , et, en chaque θ_n , on plante un arc ouvert $(\theta_n - \frac{\varepsilon^n}{2}, \theta_n + \frac{\varepsilon^n}{2}) = I_n$, avec $\varepsilon > 0$ choisi d'avance aussi petit que l'on veut. La réunion I des I_n est un ouvert dense dans C (puisque'il contient les θ_n) et de mesure au plus égale à $\sum \varepsilon^n = \varepsilon / (1-\varepsilon)$: pourvu que nous ayons choisi ε suffisamment petit, le complémentaire J de cet ouvert est un fermé d'intérieur vide, et admet une mesure aussi voisine que l'on veut de 2π .

L'ouvert $I = \cup I_n$ est, en tant que tel, réunion dénombrable d'une famille d'intervalles ouverts I_n (chaque I_n est réunion d'un certain nombre d'ouverts I_n) disjoints. Le fermé J contient, évidemment, les extrémités de ces intervalles I_n (qui forment un sous-ensemble dénombrable de J) et aussi beaucoup d'autres points (formant cette fois un ensemble non dénombrable) à savoir toutes les limites de ces extrémités.

Coiffons le disque unité ouvert d'un petit triangle isocèle (ouvert) T_n admettant les deux extrémités de l'intervalle I_n comme sommets de base. La figure ci-jointe donne une idée (approximative) de cette construction.

L'ouvert G ainsi construit admet comme squelette $r(G)$ tous les rayons (o, φ_n) , où φ_n désigne le milieu de l'arc ouvert I_n . Les φ_n sont dénombrables, donc $r(G)$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue. Quant à $\bar{r}(G)$, outre la famille dénombrable des rayons (o, φ_n) qui forment $r(G)$ lui-même, il comporte aussi tous les rayons associés aux points d'accumulation de la suite φ_n . Soit J' l'ensemble de ces points d'accumulation. J' est un peu plus petit que le fermé J , puisqu'il ne comprend pas les points de J qui séparent deux intervalles ouverts I_n et I_m . Mais, par contre, il contient tous les points de J qui sont limite soit à droite, soit à gauche, d'une suite d'extrémités de segments I_n . Autrement dit, J' ne diffère de J que par un ensemble dénombrable, et il a en particulier la même mesure > 0 (aussi voisine de 2π que l'on veut) que J lui-même.

Il en résulte que $\bar{r}(G)$, qui contient les rayons (o, φ) pour tous les φ appartenant à cet ensemble J' , a lui-même une mesure

de Lebesgue > 0 dans \mathbb{R}^2 , et aussi voisine que l'on veut de la mesure de G lui-même.

Cet ensemble $\bar{r}(G)$ ne peut certainement pas être qualifié de très mince. Notons toutefois qu'il est d'intérieur vide, d'après la manière même dont nous l'avons construit : notre exemple contredit la propriété la plus forte, $\lambda(\bar{r}) = 0$, mais pas les propriétés plus faibles $\lambda(r) = 0$ et $\bar{r} = 0$.

L'ensemble $\bar{r} \setminus r$.

Cherchons maintenant à caractériser un peu mieux cet ensemble $\bar{r}(G)$, c'est-à-dire, d'après la terminologie introduite ci-dessus, l'ensemble des points singuliers de G : l'intérêt va, évidemment, se concentrer sur l'ensemble $\bar{r} \setminus r$ des points singuliers n'appartenant pas au squelette lui-même. Notons d'abord un premier résultat qui mérite, à la rigueur, le nom de théorème :

THEOREME 6-1 - L'ensemble des points de discontinuité de l'application Amont est l'Aval de $\bar{r} \setminus r$.

En effet, soit x un point n'appartenant pas à $Av(\bar{r} \setminus r)$ c'est-à-dire tel que $Am(x)$ ne contienne pas d'autre point singulier (i.e. $\in \bar{r}$) que son extrémité amont, qui est l'unique point y de $r \cap Am(x)$, et soit x_n une suite convergeant vers x dans G . Il faut distinguer deux cas, selon que $x \in r$ ou non.

1er cas : $x \in r$. Dans ce cas $Am(x) = \{x\}$. Comme $x_n \in Am(x_n)$ et que Am est s.c.s., il vient $x \in \underline{\lim} Am(x_n) \subset \overline{\lim} Am(x_n) \subset \{x\}$. Donc $Am(x_n)$ converge vers x .

2ème cas : $x \notin r$, c'est-à-dire (puisque $x \notin Av(\bar{r} \setminus r)$ par hypothèse) $x \notin \bar{r}$. Dans ce cas, x est un point régulier, et les x_n sont eux-mêmes des points réguliers pour n assez grand (puisque $G \setminus \bar{r}$ est ouvert). $Am(x_n)$ est donc un segment de droite (x_n, y_n) avec $y_n \in r$, $x_n \neq y_n$. Soit L une valeur d'adhérence dans $\mathfrak{z}(G)$ de la suite de segments (x_n, y_n) : L est elle-même une demi-droite d'origine x et contenue dans $Am(x)$, puisque Am est s.c.s. Soit $L = (x, y)$ avec $y \in Am(x)$: mais y est alors lui-même une valeur d'adhérence de la suite $y_n \in r$. Donc $y \in \bar{r}$, et $x \in Av(y)$. Mais,

par hypothèse, $x \in \text{Av}(\bar{r} \setminus r)$. Par suite, en fait, $y \in r$, de sorte que y est l'extrémité amont de $\text{Am}(x)$. Cela veut dire que la suite $\text{Am}(x_n) = (x_n, y_n)$ n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, soit $(x, y) = \text{Am}(x)$, et donc converge vers $\text{Am}(x)$. Donc, la fonction Amont est continue en x .

Soit maintenant, au contraire, un point $x \in \text{Av}(\bar{r} \setminus r)$: il faut montrer que la fonction Amont n'est pas continue en x . Soit $y \in \bar{r} \setminus r$ tel que $x \in \text{Av}(y)$. Comme $y \in \bar{r}$ (mais non à r) il existe une suite $y_n \in r$ convergeant vers y . Mais la fonction Aval est continue en y (puisque $y \notin r$). Il existe donc une suite $x_n \in \text{Av}(y_n)$ convergeant vers $x \in \text{Av}(y)$. Or $\text{Am}(x_n)$ est le segment (x_n, y_n) . Donc la suite $\text{Am}(x_n)$ converge vers le segment $(x, y) \neq \text{Am}(x)$: la fonction Amont n'est pas continue en x .

COROLLAIRE 1 - Le squelette $r(G)$ est fermé dans G si et seulement si l'application Amont est continue sur G .

Immédiat.

COROLLAIRE 2 - Le squelette est fermé si et seulement si l'aval de tout ouvert $\Gamma \subset G$ est ouvert dans G .

C'est là, en effet, la condition pour que Am soit s.c.i., donc continue.

Nous allons maintenant nous acheminer vers la démonstration du résultat suivant, qui est le théorème de connexité. Nous allons pour cela poser deux lemmes, d'ailleurs fort intéressants par eux-mêmes, surtout le second qui éclaire de manière assez précise la structure de l'ensemble $\bar{r} \setminus r$.

LEMME 6-1 - Si $\Gamma \subset G$ est un ouvert régulier (c'est-à-dire disjoint du squelette, ou, ce qui revient au même, disjoint de \bar{r}) son aval est un ouvert régulier.

Les points $x \in \Gamma$ étant réguliers, donc simples, $\text{Ar}(x)$ est

constituée d'un seul segment de droite. Désignons par $u(x)$ le vecteur unitaire, orienté vers l'amont, du segment $Ar(x)$. Comme $Av(x)$ est continue en tout point régulier, la fonction $u(x)$ est continue sur Γ . Pour $t > 0$, l'application T_t définie sur Γ en posant

$$T_t x = x - t u(x)$$

est donc elle-même continue sur Γ . Soit alors x_0 un point quelconque de Γ , et $\varepsilon > 0$ assez petit pour que la boule fermée $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ soit contenue dans Γ . Comme T_t est continue, l'image $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ est compacte, et on vérifie sans difficulté que $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ converge dans \mathcal{K} vers $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ lorsque $t \downarrow 0$. Donc, en particulier, pour t assez petit, l'image $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ est contenue dans G . Tout point $y_t = T_t y = x - t u(y)$ de cette image est donc dans l'aval d'un unique $y \in \bar{B}_\varepsilon(x_0)$. En particulier, $u(y_t) = u(y)$, et, inversement, $y = y_t + t u(y_t)$. La restriction à $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ de l'application T_t est donc une bijection de $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ sur son image : comme elle est continue et que $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ est compacte, c'est un homéomorphisme. Ainsi $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ est un voisinage de $T_t x_0$.

Or tout $x \in Av(x_0)$ est de la forme $T_t x_0$, avec $t = d(x, x_0)$. D'autre part, pour $t > 0$ donné, $\bar{B}_\varepsilon(x_0)$ et $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ convergent dans \mathcal{K} vers $\{x_0\}$ et $\{T_t x_0\}$ respectivement lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Donc, pour ε assez petit, on a $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset \Gamma$, $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset G$, et par suite $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset Av \Gamma$: or, d'après ce qui précède, $T_t \bar{B}_\varepsilon(x_0)$ est alors un voisinage de $x = T_t x_0$. A plus forte raison, $Av \Gamma$ est un voisinage de x . Comme x_0 est un point quelconque de Γ , $Av \Gamma$ est ouvert.

Il reste à montrer que cet ouvert est régulier, c'est-à-dire disjoint de \bar{r} , ou, ce qui revient au même (puisque cet ensemble est ouvert) disjoint de r . Mais cela est évident : si $x \in \Gamma$, $x \notin r$ par hypothèse. Si $x \in Av \Gamma \setminus \Gamma$ et si y est un point de Γ tel que $x \in Av y$, on a $y \neq x$ et donc $x \notin r$.

LEMME 6-2 - L'adhérence \bar{r} du squelette est stable pour l'application

Amont. En particulier, si $x \in \bar{r} \setminus r$ et si y est l'extrémité

Amont de $Am x$, tous les points du segment (x, y) , sauf y , sont

dans $\bar{r} \setminus r$.

En effet, soit $x \in \bar{r}$. Si $x \in r$, $Am(x) = \{x\}$ est contenu dans \bar{r} . Supposons $x \in \bar{r} \setminus r$, et soit y l'extrémité Amont de $Am(x)$, ce qui implique $y \in r$ et $\bar{y} \neq x$. Soit z un point du segment ouvert (x,y) . Si on avait $z \notin \bar{r}$, il existerait un voisinage ouvert Γ de z disjoint de \bar{r} . D'après le lemme précédent, $Av \Gamma$ serait un ouvert régulier et contiendrait le point x : mais cela contredit $x \in \bar{r}$. Donc le segment ouvert (x,y) est contenu dans \bar{r} , et par suite dans $\bar{r} \setminus r$ (y étant le seul point de $Am(x)$ contenu dans r).

THEOREME 6-2 - Si G est connexe et ne contient pas de demi-espace, l'adhérence $\bar{r}(G)$ de son squelette est connexe.

Supposons \bar{r} non connexe, soit :

$$(a) \quad r = r_1 \cup r_2 \quad ; \quad \bar{r}_1 \cap \bar{r}_2 = \emptyset$$

et montrons que cela contredit la connexité de G . Pour abrégier, posons $A_1 = Av(r_1)$ et $A_2 = Av(r_2)$. D'après (a), ces deux ensembles constituent une partition de G :

$$(b) \quad G = A_1 \cup A_2 \quad ; \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Montrons d'abord que l'on a :

$$(c) \quad A_1 = Av(\bar{r}_1) \quad ; \quad A_2 = Av(\bar{r}_2)$$

Il suffit évidemment d'établir l'inclusion $Av(\bar{r}_1) \subset A_1$. Soit x un point de $Av(\bar{r}_1)$. D'après (b), on a soit $x \in A_1$, soit $x \in A_2$. Montrons que cette dernière éventualité est exclue. En effet, si $x \in A_2$, $Am(x)$ contient un point $y \in \bar{r}_1$ et un point $z \in r_2$. D'après le lemme 6-2, le segment fermé (donc connexe) d'extrémités y et z est contenu dans $\bar{r} = \bar{r}_1 \cup \bar{r}_2$. Comme $y \in \bar{r}_1$ et $z \in r_2$, et que (y,z) est connexe, ce segment contient un point de $\bar{r}_1 \cap \bar{r}_2$. Mais cela est impossible, d'après (a). Les relations (c) en résultent.

Mais, d'après les résultats de la fin du paragraphe 4, l'aval d'un fermé est un fermé, puisque G ne contient pas de demi-espace. Donc, d'après (c), A_1 et A_2 sont fermés. Les relations (b) expriment donc que G n'est pas connexe.

L'ensemble $D(G)$ des points multiples.

Je rappelle qu'un point $x \in G$ est simple si $Ar(x)$ ne contient qu'un seul segment de droite, et multiple dans le cas contraire. On désigne par $D(G)$ l'ensemble des points multiples. On a vu que l'on a toujours

$$D(G) \subset r(G)$$

mais non, en général, l'égalité. Le théorème suivant montre cependant que ces deux ensembles restent très proches.

THEOREME 6-3 - L'ensemble $D(G)$ des points multiples est dense dans le squelette $r(G)$, et $\overline{D(G)} = \overline{r(G)}$.

Comme $D(G)$ est inclus dans $r(G)$, il faut montrer $\overline{r(G)} \subset \overline{D(G)}$. Considérons l'ouvert $\Gamma = G \setminus \overline{D(G)}$, complémentaire de $\overline{D(G)}$ dans G . Tous les points x de Γ étant simples, $Ar(x)$ est constitué d'un unique segment de droite, dont le vecteur unitaire, orienté vers l'amont, sera noté $u(x)$. De plus, comme la fonction Aval est continue en tout point simple, $u(x)$ est continu sur Γ .

La suite se passe à peu près comme pour la démonstration du Lemme 6-1. L'application T_t définie par

$$T_t x = x - t u(x)$$

est continue sur Γ . Soit x_0 un point quelconque de Γ , et $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ une boule fermée de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit pour que cette boule soit contenue dans Γ , c'est-à-dire disjointe de $\overline{D(G)}$. On montre ensuite, comme dans le lemme 6-2, que l'image $T_t \overline{B}_\varepsilon(x_0)$ est elle-même contenue dans Γ pour $t > 0$ assez petit, et que T_t est un homéomorphisme de $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$ sur son image : l'application inverse T_{-t} est définie, pour tout $y_t \in T_t \overline{B}_\varepsilon(x_0)$, par :

$$T_t y_t = y_t + t u(y_t)$$

Pour t assez petit, on aura $x_0 \in T_t \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0)$. En effet, on vérifie sans difficulté que $T_t \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0)$ converge dans G vers

$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0)$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. Il existe alors une image inverse $y = T_{-t} x_0 \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0)$, et, inversement, $x_0 = y - t u(y)$. Mais cela implique $x_0 \in Av y$, donc x_0 n'appartient pas au squelette.

Ainsi, l'ouvert $\Gamma = G \setminus \overline{D}(G)$ est disjoint de r , donc disjoint de \overline{r} (puisque c'est un ouvert). mais cela signifie $\overline{r}(G) \subset \overline{D}(G)$, et achève la démonstration.

Indications sur l'ensemble $\overset{\circ}{r}$.

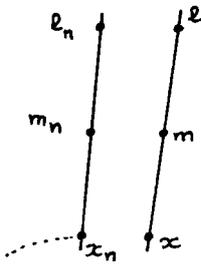
Je ne suis pas arrivé à montrer que $\overset{\circ}{r}$ est nécessairement vide, ni à trouver de contre-exemple : sachant que \overline{r} n'est pas forcément négligeable pour la mesure de Lebesgue, il serait imprudent d'avancer une conjecture. A titre d'indication, je me contenterai de définir deux fonctions L et M et de montrer leurs relations avec l'ensemble $\overset{\circ}{r}$.

Pour tout $x \in G$, désignons par $L(x)$ la longueur de $Am x$. de sorte que $L(x) = 0$ si et seulement si x est un point du squelette. Comme l'application $Amont$ est s.c.s., il est facile de voir que la fonction L est également s.c.s., et admet le même ensemble de discontinuité que Am , à savoir l'aval de $\overline{r} \setminus r$.

Le Lemme 6-2 ci-dessus permet de définir une autre fonction M . Pour tout x , désignons par $M(x)$ la longueur de segment semi-ouvert $Am x \cap \overset{\circ}{r}$. On a $M(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{r}$, $M(x) \leq L(x)$. L'inégalité stricte $M(x) < L(x)$ caractérise l'ensemble de discontinuité de Am , c'est-à-dire $Av(\overline{r} \setminus r)$. Autrement dit : on a $L(x) = M(x)$ si et seulement si l'application $Amont$ est continue en x .

La fonction M est s.c.i., et, plus précisément, c'est la plus grande minorante s.c.i. de L .

En effet, soit $x \in G$, et x_n une suite dans G convergeant vers x . Si $x \in r(G)$, $Am(x_n)$ converge vers $Am(x) = \{x\}$, donc $L(x_n)$ et $M(x_n)$ convergent vers $L(x) = M(x) = 0$. Supposons $x \notin r(G)$, et soit u la direction, orientée vers l'amont, de l'arête de x . Posons $\ell = x + uL(x)$, $m = x + uM(x)$. Si $M(x_n) = 0$, on a $x_n \in \overline{r}$, donc



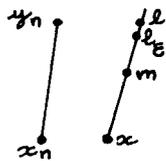
$x \in \bar{r}$ et $M(x) = 0$. Supposons donc $M(x_n) > 0$ pour n assez grand. Soit alors u_n la direction de $Am(x_n)$, et posons $m_n = x_n + u_n M(x_n)$, $l_n = x_n + u_n L(x_n)$. Si $M(x)$ n'est pas $\leq \underline{\lim} M(x_n)$, on peut extraire une suite partielle x_{n_k} telle que $M(x_{n_k})$ converge vers une limite $a < M(x)$. Alors m_{n_k} converge vers le point $x + a u$ appartenant au segment (x, m) et différent de m . Mais ce point $\in \bar{r}$, et cela contredit la définition de $M(x)$: donc M est s.c.i.

D'autre part, le point m appartient à \bar{r} . Si $m = l \in r$, $M(x) = L(x)$ majore en x toute minorante s.c.i. de L . Si $m \neq l$, il existe une suite $y_n \in r$ convergeant vers $m \in \bar{r} \setminus r$: comme $m \notin r$, l'application Av est continue en m , et on peut trouver une suite $z_n \in Av(y_n)$ telle que z_n converge vers x . On a alors $M(x) = \lim L(z_n)$ donc $M(x)$ majore toute minorante s.c.i. de L .

Inversement, on peut se demander si L est la plus petite majorante s.c.s. de M . La réponse n'est pas évidente. On a seulement le résultat suivant :

L est la plus petite majorante s.c.s. de M si et seulement si l'ensemble \bar{r} des points singuliers est d'intérieur vide, $\overset{\circ}{\bar{r}} = \emptyset$.

En effet, supposons $\overset{\circ}{\bar{r}} = \emptyset$, et soit comme ci-dessus un point x appartenant à l'ensemble de discontinuité $Av(\bar{r} \setminus r)$, u la direction de son arête, $l = x + u L(x)$ et $M = x + u M(x)$.



Considérons le point $l_\varepsilon = x + u[L(x) - \varepsilon]$, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Comme $\overset{\circ}{\bar{r}} = \emptyset$, il existe une suite y_n de points réguliers convergeant vers l_ε , et, comme $l_\varepsilon \notin r$, $Av(y_n)$ converge vers $Av(l_\varepsilon)$.

On peut donc trouver $x_n \in Av(y_n)$ avec $x = \lim x_n$. Comme y_n est régulier, $M(x_n)$ majore $d(x_n, y_n)$ et $\overline{\lim} M(x_n) \geq L(x) - \varepsilon$. On en déduit que $L(x)$ minore toute majorante s.c.s. de $M(x)$.

Inversement, supposons $\overset{\circ}{\bar{r}} \neq \emptyset$. Comme r est dense dans l'ouvert $\overset{\circ}{\bar{r}}$, il existe $y \in r \cap \overset{\circ}{\bar{r}}$. Soit x un point de l'aval de y distinct de y . On a $M(x) < L(x)$ strictement, puisque y est un point intérieur de \bar{r} . Si $L(x)$ était la plus petite majorante s.c.s. de $M(x)$,

on pourrait trouver une suite $x_n \rightarrow x$ telle que $x_n + u_n M(x_n)$ converge vers y . Pour n assez grand, le point $y_n = x_n + u_n M(x_n)$ serait dans l'ouvert $\overset{\circ}{F}$, donc il existerait sur $\text{Am } x_n$ un point de \bar{F} strictement à l'aval de y_n : mais cela contredit la définition de la fonction M .

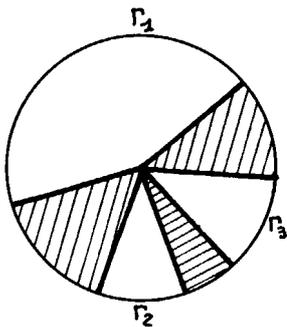
Après, c'est le grand mystère : $\overset{\circ}{F}$ est-il vide ?

7 - CAS DE L'ESPACE A DEUX DIMENSIONS

Jusqu'ici, nous n'avons pas précisé le nombre des dimensions de l'espace euclidien de travail, qui pouvait donc être n'importe quel entier $n > 0$. A partir de maintenant, nous nous limitons explicitement au cas $n = 2$, et la structure particulièrement simple du cercle unité de \mathbb{R}^2 va nous permettre d'obtenir un résultat plus fort, à savoir que l'ensemble $D(G)$ des points multiples est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

La fonction φ .

Soit x un point de l'ouvert $G \subset \mathbb{R}^2$. Au fermé $\text{Av } x$, associons le sous-ensemble J_x du cercle unité, constitué des points $(y-x)/|y-x|$, y parcourant $\text{Av } x$ ($y \neq x$). Inversement, la donnée de J_x détermine $\text{Av } x$. J_x est manifestement fermé. Son complémentaire Γ_x dans le cercle unité est donc réunion d'une famille dénombrable d'arcs ouverts connexes Γ_n . Soit γ_n la mesure, en radians, de l'arc Γ_n , de sorte que :



$$\sum \gamma_n \leq 2\pi$$

Posons $\gamma_x = \text{Sup } \gamma_n$. On a $0 < \gamma_x \leq 2\pi$, et l'un des Γ_n , par exemple Γ_1 , admet la mesure $\gamma_1 = \gamma_x$. Si γ_x est $\geq \pi$, cet arc maximal Γ_1 est unique, mais pour $\gamma_x < \pi$ il peut exister plusieurs arcs maximaux. La fonction $x \rightarrow \gamma_x$ ainsi définie est s.c.i. sur G .

En effet, par définition de $\gamma(x)$, il existe un arc ouvert connexe Γ_x du cercle unité, de mesure $\gamma(x)$, disjoint de J_x , et tout arc fermé connexe de mesure $\geq \gamma(x)$ rencontre J_x . Soit alors x_n une suite convergeant vers $x \in G$, et x_{n_k} une suite partielle telle que $\gamma(x_{n_k})$ converge vers une limite $a \geq 0$. Tout arc connexe fermé A de mesure $\geq a$ est limite d'arcs connexes fermés A_{n_k} de mesure $\geq \gamma(x_{n_k})$. Donc A_{n_k} rencontre $J_{x_{n_k}}$. L'application $x \rightarrow J_x$ est s.c.s., comme on le vérifie sans peine. Par suite, A rencontre J_x . Mais cela signifie $\gamma(x) \leq a$: γ est s.c.i.

Au lieu de γ , nous utiliserons la fonction φ définie par :

$$\varphi(x) = 2\pi - \gamma(x)$$

φ est donc une fonction s.c.s. D'après cette définition, $\varphi(x)$ est la mesure du ou des cônes fermés connexes minimaux contenant $A \cap x$. Si $\gamma(x)$ est $\leq \pi$, il n'y a qu'un cône fermé connexe minimal C_x , mais cette unité ne subsiste pas pour $\gamma(x) > \pi$.

Il est clair que l'on a $\varphi(x) = 0$ si et seulement si x est un point simple. Pour $\beta > 0$, posons

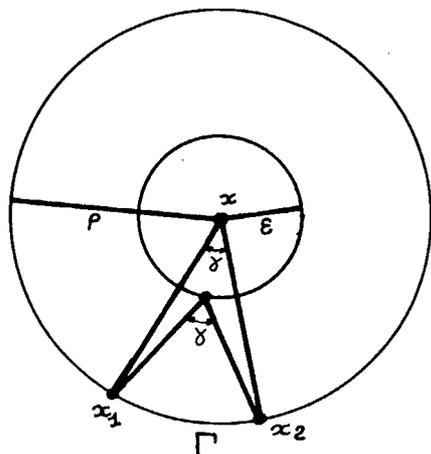
$$D_\beta = \{x : \varphi(x) \geq \beta\}$$

D_β est un ensemble fermé, puisque φ est s.c.s. et $D = \bigcup D_{1/n}$ est réunion dénombrable de fermés. Pour montrer que D est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ , il va donc suffire de montrer que l'on a $\lambda(D_\beta) = 0$ pour tout $\beta > 0$. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 7-1 - Soit $x \in G$ et $\beta > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, le cercle de centre x et de rayon ε ne rencontre D_β qu'en un nombre au plus fini de points distincts.

Si $x \notin D_\beta$, cela est immédiat. En effet, D_β étant fermé, il

existe un $\varepsilon > 0$ tel que le disque fermé $\bar{B}_{\varepsilon_0}(x)$ soit disjoint de D_{β} .



Supposons donc $x \in D_{\beta}$, et posons $\rho = \rho(x)$. Désignons par C le cercle $\partial \bar{B}_{\rho}(x)$ de centre x et de rayon ρ . L'intersection de C et du complémentaire d' $\text{Av } x$ est constituée d'une famille dénombrable $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ d'arcs connexes ouverts, dont nous désignerons par $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les mesures exprimées en radians. Nous pouvons supposer ces arcs rangés par ordre décroissant, soit $\gamma_1 \geq \gamma_2 \dots$. Evidemment, $\sum \gamma_n \leq 2\pi$, de sorte qu'un nombre fini seulement d'arcs Γ_n ont une mesure \geq à un nombre > 0 donné.

Soit Γ un arc de la famille de Γ_n , γ son angle au sommet, x_1 et x_2 ses extrémités sur $\partial B_{\rho}(x)$ (ce sont des points de ∂G), et $\tilde{\Gamma}$ le cône de sommet x et de base $\Gamma = (x_1, x_2)$. Lorsque y parcourt l'intersection $\tilde{\Gamma} \cap \bar{B}_{\varepsilon}(x)$ ($0 < \varepsilon < \rho$), l'angle (x_1, y, x_2) reste inférieur ou égal à γ' défini par

$$\rho \sin \frac{\gamma}{2} = (\rho - \varepsilon) \sin \frac{\gamma'}{2}$$

Choisissons $\varepsilon_1 > 0$ inférieur à ρ , et β_1 tel que :

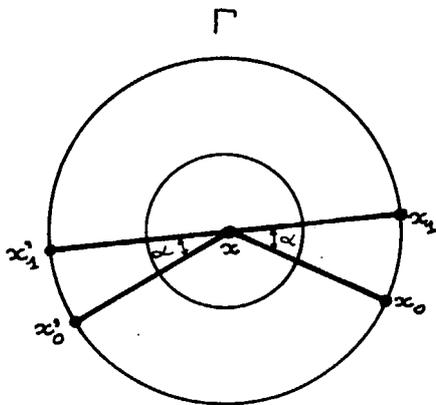
$$\rho \sin \frac{\beta_1}{2} = (\rho - \varepsilon_1) \sin \frac{\beta}{2}$$

Alors, si $\gamma < \beta_1$, l'angle (x_1, y, x_2) reste $< \beta$ lorsque y parcourt $\tilde{\Gamma} \cap \bar{B}_{\varepsilon_1}(x)$: autrement dit $\tilde{\Gamma} \cap \bar{B}_{\varepsilon_1}(x)$ est disjoint de D_{β} .

Ainsi, dans la famille Γ_n , il n'existe qu'un nombre fini d'arcs Γ_n tels que $\tilde{\Gamma}_n \cap D_{\beta} \cap \bar{B}_{\varepsilon_1}(x) \neq \emptyset$, à savoir ceux qui vérifient $\gamma_n \geq \beta_1$. Désignons par Γ l'un d'entre eux, et par $\gamma \geq \beta_1$ sa mesure. Ces arcs étant en nombre fini, il suffit, pour établir le lemme, de montrer que pour ε assez petit, le cercle $\partial \bar{B}_{\varepsilon}(x)$ ne rencontre $\tilde{\Gamma} \cap D_{\beta}$ qu'en un nombre fini de points.

Choisissons $\alpha < \gamma/2$, suffisamment petit pour que

$$\rho \sin \frac{\alpha}{2} < (\rho - \varepsilon_1) \sin \frac{\beta}{2}$$



Cette condition nous garantit que tout point $y \in \bar{B}_{\varepsilon_1}(x)$ tel que $Av y \cap C$ soit contenu dans un arc $< \alpha$ vérifie $\varphi(y) < \beta$, soit

$$y \notin D_\beta$$

Soient alors x_0 et x'_0 les deux extrémités de Γ sur le cercle $C = \partial \bar{B}_\rho(x)$ orienté selon l'usage, et x_1, x'_1 les points de C tels que

$$(x_0 x x_1) = (x'_1 x x'_0) = \alpha$$

$Av x$ est disjoint de l'arc connexe fermé (x_1, x'_1) . Comme cet arc est compact dans G et que Av est s.c.s., il existe un $\varepsilon_0 > 0$, que l'on peut prendre $\leq \varepsilon_1$, tel que $Av y$ soit disjoint de (x_1, x'_1) pour tout $y \in \bar{B}_{\varepsilon_0}(x)$.

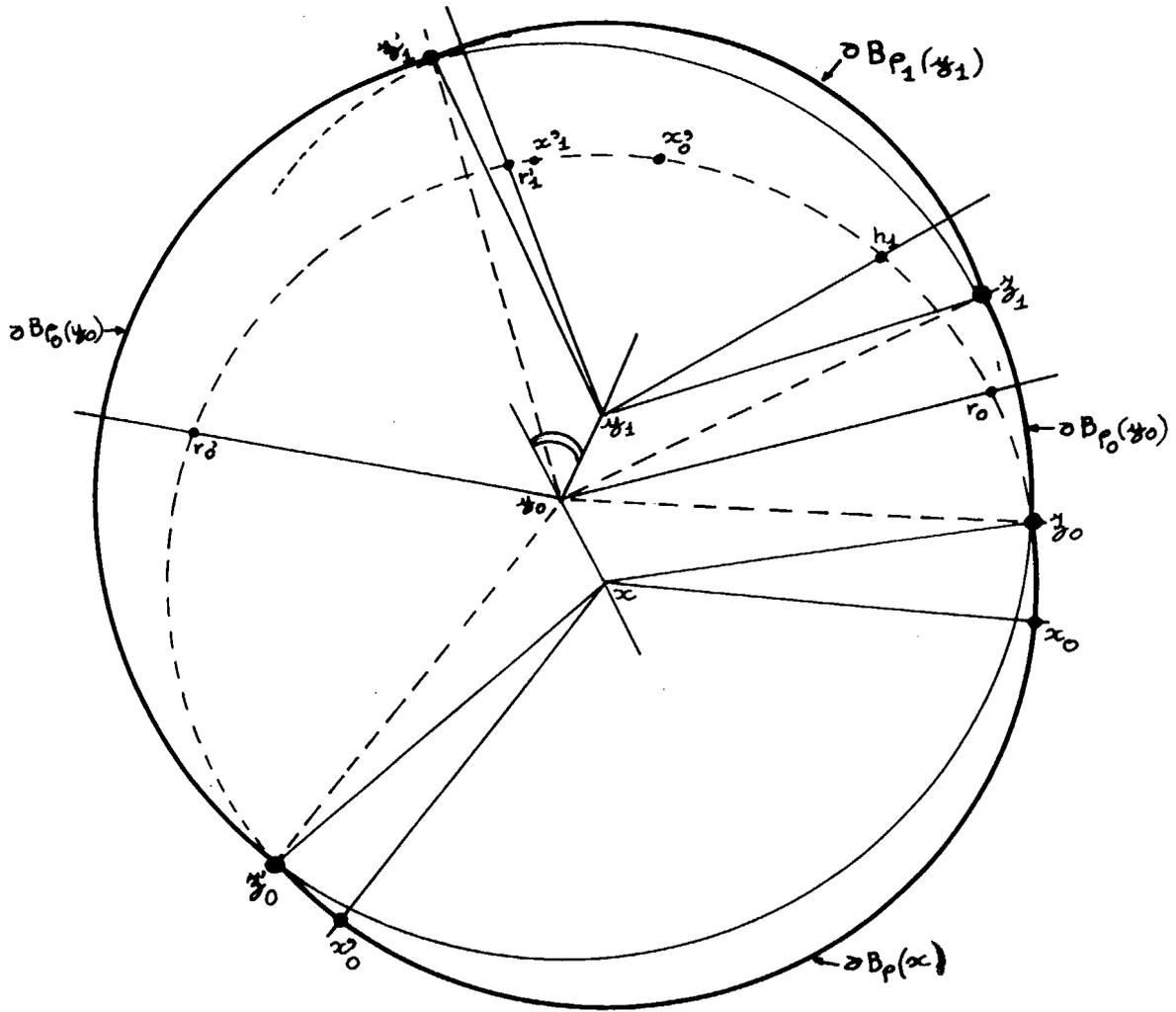
Soit alors $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Nous allons montrer que le cercle $\partial \bar{B}_\varepsilon(x)$ ne rencontre $D_\beta \cap \tilde{\Gamma}$ qu'en un point au plus.

Pour le voir, notons que les points $y \in \tilde{\Gamma} \cap \partial B_\varepsilon(x)$ se rangent en trois classes disjointes :

a/ Les points y tels que $Av y$ soit disjoint de l'arc fermé (x_1, x'_0) forment un ensemble ouvert $E_1 \subset \partial B_\varepsilon(x)$. Pour les points de cette classe, l'intersection $Av y \cap C$ est contenue dans l'arc ouvert $(x_0 x_1)$. Par suite, comme on l'a vu, $\varphi(y) < \beta$ et $E_1 \cap D_\beta = \emptyset$.

b/ De même, les points y tels que $Av y$ soit disjoint de (x_0, x'_1) forment un ensemble ouvert E'_1 disjoint de D_β , et, pour $y \in E'_1$, $Av y \cap C$ est inclus dans (x'_1, x'_0) , d'où $\varphi(y) < \beta$.

c/ Restent enfin les points y dont l'aval (disjoint de l'arc fermé $x_1 x'_1$) rencontre chacun des deux arcs $(x_0 x_1)$ et $(x'_1 x'_0)$.



Ces points forment un sous ensemble fermé E_0 du cercle $\partial B_\varepsilon(x)$.

E_0 n'est pas vide : sinon, les deux ouverts E_1 et E_1' formeraient une partition de l'arc ouvert connexe (x_0, x_0') . Tout va se ramener à montrer que E_0 ne contient qu'un seul point y_0 .

Supposons qu'il existe dans E_0 deux points distincts y_0 et y_1 . L'aval de y_0 contient un point p_0 sur l'arc (x_0, x_0') et un point p_0' sur (x_1', x_1) . De même, AV y_1 rencontre (x_0, x_0') en un point p_1 et (x_1', x_1) en un point p_1' . Comme AV y_0 et AV y_1 sont disjoints, et disjoints de AV x , l'un des deux angles (p_0, y_0, p_0') ou (p_1, y_1, p_1') sépare l'autre, dans C , de (x_0, x_0') . Supposons par exemple :

p_0 intérieur à l'arc (x_0, p_1) et p_0' intérieur à (p_1', x_0') .

Pour la suite du raisonnement, nous pouvons remplacer G par l'ouvert G' réunion des trois boules extrémales centrées en x , y_0 et y_1 , de rayon $\rho = \rho(x)$, $\rho_0 = \rho(y_0)$, $\rho_1 = \rho(y_1)$. En effet, les demi-droites x, x_0 et x, x_0' appartiennent encore à l'Aval de x dans G' , y_0, p_0 et y_0, p_0' à l'Aval de y_0 dans G' et y_1, p_1, y_1, p_1' à l'aval de y_1 dans G' . Ainsi, les Avals de x et de y_1 dans G' sont séparés par celui de y_0 . Mais cela entraîne que les deux cercles $\partial B_\rho(x)$ et $\partial B_{\rho_0}(y_0)$ se rencontrent en deux points z_0 et z_0' qui n'appartiennent pas au disque $\bar{B}_{\rho_1}(y_1)$, et de même les deux cercles $\partial B_{\rho_0}(y_0)$ et $\partial B_{\rho_1}(y_1)$ se rencontrent en deux points z_1 et z_1' qui n'appartiennent pas au disque $\bar{B}_\rho(x)$.

Or la droite x, y_0 est la bissectrice de l'angle z_0, y_0, z_0' , et y_0, y_1 celle de l'angle z_1, y_1, z_1' . L'angle de ces deux droites est donc, algébriquement

$$(x, y_0, y_0, y_1) = \frac{1}{2}[(z_1', y_0, z_0') - (z_0, y_0, z_1)]$$

Mais l'angle (z_0, y_0, z_1) intercepte sur le cercle $\partial B_\rho(x)$ un arc dont la mesure en radians est $< \alpha$. D'après le choix que nous avons fait de α , cela implique (puisque $y_0 \in \partial \bar{B}_\varepsilon(x)$ et $\varepsilon \leq \varepsilon_1$) que cet angle est $< \beta$, et de même $(z_1', y_0, z_0') < \beta$. Donc, en valeur absolue, l'angle des deux demi-droites x, y_0 et y_0, y_1 est $< \beta$.

Par suite, si $\beta \leq \pi/2$, la distance $d(x y_1)$ est strictement supérieure à $d(x y_0)$, et y_1 ne peut pas appartenir au même cercle $\partial B_\varepsilon(x)$ que y_0 . Le lemme est donc prouvé pour $\beta < \pi/2$. Comme l'ensemble D_β est décroissant en β , le lemme est donc vrai à plus forte raison pour $\beta > \pi/2$.

THEOREME 7 - L'ensemble $D(G)$ des points multiples est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

En effet, soit $\beta > 0$. D'après le lemme, à chaque $x_0 \in G$ est associée une boule $B_{\varepsilon_0}(x_0)$ telle que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, le cercle $\partial B_\varepsilon(x_0)$ ne rencontre D_β qu'en un nombre fini de points. On en déduit que $B_{\varepsilon_0}(x_0) \cap D_\beta$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue λ (conséquence immédiate du théorème de Fubini appliqué en coordonnées polaires de centre x_0).

Mais G est réunion d'une suite de compacts dont chacun admet un recouvrement par de telles boules. Donc G lui-même est de la forme

$$G = \bigcup \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_n}(x_n)$$

avec $\lambda(D_\beta \cap \overset{\circ}{B}_{\varepsilon_n}(x_n)) = 0$. On en déduit aussitôt

$$\lambda(G \cap D_\beta) = 0$$

(il reste à faire tendre β vers 0 pour obtenir $\lambda(G \cap D) = \lambda(D) = 0$).

COROLLAIRE - Si F est un fermé quelconque de \mathbb{R}^2 , l'application $x \rightarrow \Pi_F x$ où x est la projection de x sur F est définie presque partout (pour la mesure de Lebesgue) et mesurable

Si $x \in F$, $\Pi_F x = x$. Si $x \in G = F^c$, l'ensemble des $y \in F$ qui réalisent les minima de $d(x,y)$ est l'intersection $\overline{Av x} \cap F$. Elle est réduite à un point unique si et seulement si $x \notin D(G)$, donc λ -presque partout d'après le théorème. Comme $x \rightarrow \overline{Av x}$ est s.c.s., donc mesurable sur G , il en est de même de $x \rightarrow \overline{Av x} \cap F$, c'est-à-

dire de l'application $\Pi_{\mathbb{F}}$, considérée comme application de \mathbb{R}^2 dans $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$. Sur le complémentaire de $D(G)$, $\Pi_{\mathbb{F}}(x)$ est réduite à un point, et définit donc une application mesurable de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

On notera que l'application $\Pi_{\mathbb{F}}$ est continue sur le complémentaire de $D(G)$, mais non, évidemment, sur \mathbb{R}^2 tout entier.