Fontainebleau/CMM N-604

CALCUL DE LA DISPERSION MACROSCOPIQUE DANS LE CAS A UNE SEULE DIMENSION

G. MATHERON Juin 1979

CALCUL DE LA DISPERSION MACROSCOPIQUE

DANS LE CAS A UNE SEULE DIMENSION

Table des Matières

CALCUL DE LA DISPERSION MACROSCOPIQUE DANS LE CAS A UNE SEULE DIMENSION

Par

G. MATHERON

0 - INTRODUCTION

Dans ce qui suit, nous considérons un phénomène de dispersion dans $\mathbb{R}^1$ qui, à l'échelle microscopique, se laisse décrire comme un mouvement brownien homogène dans le temps mais non dans l'espace. Autrement dit, il existe deux fonctions $\lambda(x)$ et $\nu(x)$ (vérifiant des hypothèses de régularité convenables, par exemple continues et bornées, et, naturellement, ν est positive) telles que la densité de probabilité ρ_t de la position X_t de la particule au temps t obéisse à l'équation de diffusion :

$$(0\text{-}1) \qquad \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nu \rho_t) - \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \rho_t)$$

Il s'agit donc du processus de Markov défini par le générateur infinitésimal A tel que :

$$(0\text{-}2) \qquad Af = \frac{\nu}{2} f'' + \lambda f'$$

Je suppose de plus qu'il existe une porosité, i.e. une fonction $\omega(x)$ (positive et bornée) telle que la mesure $\omega(x)\,dx$ soit invariante pour le processus. Autrement dit, d'après (0-1) :

$$\frac{1}{2} (\omega \nu)'' - (\omega \lambda)' = 0$$

Soit, avec une constante d'intégration b convenable :

$$(0\text{-}3) \qquad \frac{1}{2} (\omega \nu)' - \omega \lambda = - b$$

Comme ω et b sont définis à une constante positive près seulement, il n'y a que trois cas à envisager, selon que b est négative, nulle ou positive. Quitte à changer l'orientation de l'axe des x, on peut supposer $b \geq 0$.

Compte tenu de l'existence de la porosité $\omega(x)$, le générateur infinitésimal A admet l'expression

$$(0\text{-}4) \qquad Af = \frac{1}{2\omega} \frac{d}{dx} \omega \nu \frac{df}{dx} + \frac{b}{\omega} \frac{df}{dx}$$

Pour passer de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, et étudier l'émergence éventuelle de ce demi-groupe de dispersion, nous supposons maintenant que les fonctions $\lambda(x)$ et $\nu(x)$ sont des fonctions aléatoires stationnaires et ergodiques (FAST), ainsi que la porosité $\omega(x)$.

Comme $\omega\,\nu$ est elle-même une FAST, $E[(\omega\,\nu)']$ est nulle, et, d'après (0-3)

$$(0\text{-}5) \qquad b = E(\omega\,\lambda)$$

Ainsi, $b = 0$ correspond à l'absence d'entrainement au niveau macroscopique (la tache s'élargit, mais son centre reste fixe). Si $b = 0$, on doit avoir :

$$\frac{1}{2} \frac{(\omega\,\nu)'}{\omega\,\nu} = \frac{\lambda}{\nu}$$

Le coefficient λ/ν est la dérivée d'une FAST, à savoir $\frac{1}{2} \log \omega\,\nu$.

Dans tout ce qui suit, <u>nous supposerons essentiellement $b > 0$</u>, ce qui correspond au cas le plus intéressant du point de vue physique. <u>S'il y a émergence</u>, le phénomène se laissera décrire, au niveau macroscopique, par une équation du type (0-1), mais à <u>coefficients constants</u>, soit :

$$(0\text{-}6) \qquad \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \rho_t}{\partial x^2} - v \frac{\partial \rho_t}{\partial x}$$

Je me propose dans ce qui suit de calculer *la vitesse d'entrainement* (constante) v et la *dispersion macroscopique* (constante) D à partir de la loi spatiale des FAST $\omega(x)$ et $\nu(x)$. Pour y parvenir, nous passerons par l'intermédiaire du calcul des *temps d'attente*.

I . METHODE DES TEMPS D'ATTENTE.

Considérons d'abord le cas de l'équation (0-6) à coefficients constants (mouvement brownien homogène dans le temps et dans l'espace). On sait que, la particule étant placée au point 0 à l'instant initial $t = 0$, la densité de probabilité $\rho_t(x)$ de sa position X_t au temps t positif est la loi de Gauss de moyenne t v et de variance t D :

$$\rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ D\ t}} \ \exp\left\{\frac{(x-v\ t)^2}{2\ D\ t}\right\}$$

dont la transformée de Laplace en t est :

$$(1\text{-}1) \qquad \tilde{\rho}_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\ \rho_t(x)\ dt = \frac{1}{\sqrt{2\lambda\ D+v^2}} \ \exp\left\{\frac{v}{D}\ x - |x|\sqrt{\frac{2\lambda}{D} + \frac{v^2}{D^2}}\right\}$$

Désignons par T_z l'instant (aléatoire) où la particule, partant de $x = 0$, atteint pour la première fois l'abscisse $z > 0$ et par $g_z(\tau)$ la densité de probabilité de T_z. Compte tenu de la continuité presque sûre de la trajectoire du mouvement brownien, en écrivant que la particule ne peut se trouver en $x > z$ au temps t qu'après être passée par z en un temps $T_z = \tau \leq t$, nous trouvons :

$$\rho_t(x) = \int_0^t g_z(\tau)\ \rho_{t-\tau}(x-z)\ d\tau$$

Prenant la transformée de Laplace en t de cette équation de convolution, nous trouvons

$$\tilde{\rho}_\lambda(x) = \tilde{g}_z(\lambda)\ \tilde{\rho}_\lambda\ (x-z)$$

($\tilde{g}_z(\lambda)$ est la transformée de Laplace en t de $g_z(t)$). Compte tenu de (1-1) et de $x > z > 0$, cela donne

$$\tilde{g}_z(\lambda) = \exp\left\{\frac{v}{D} z - z\sqrt{\frac{v^2}{D^2} + \frac{2\lambda}{D}}\right\} \tag{1-2}$$

Pour $v \geq 0$, $\tilde{g}_z(o) = \int_0^\infty g_z(\tau)\, d\tau = 1$: il y a une probabilité unité pour que la particule atteigne l'abscisse z en un temps fini.

Au contraire, pour $v < 0$, on trouve :

$$\tilde{g}_z(o) = \int_0^\infty g_z(\tau)\, d\tau = \exp\left\{-2\frac{|v|}{D} z\right\} < 1$$

Il y a une probabilité non nulle pour que la particule n'atteigne jamais l'abscisse z. L'expression ci-dessus indique de plus que $\sup_t X_t$ est p.s. fini, et que cette variable admet la loi exponentielle d'espérance $D/2|v|$.

Plaçons-nous dans le cas $v \geq 0$. La relation (1-2) montre que la VA T_z est indéfiniment divisible, et qu'elle admet une espérance $m(z)$ et une variance $\sigma^2(z)$ finies si (et seulement si) v est strictement positive :

$$\boxed{\begin{aligned} m(z) &= \frac{z}{v} \\ \sigma^2(z) &= \frac{Dz}{v^3} \end{aligned}} \tag{1-3}$$

Ce sont ces relations (1-3) qui vont, dans ce qui suit, nous servir de <u>critère d'émergence</u>. Nous allons calculer les moments d'ordre 1 et 2 du temps d'attente d'une abscisse y (à partir d'une position initiale $x < y$) par le processus microscopique X_t à coefficients λ et ν non constants. Si les expressions obtenues sont bien de la forme (1-3), nous admettrons qu'il y a émergence, et, en procédant par identification, nous en déduirons l'expression des coefficients macroscopiques constants v et D.

Cette méthode est évidemment critiquable car, si l'équation (0-6) implique la relation (1-3), l'inverse n'est évidemment pas vrai. Il s'agit donc, en toute rigueur, d'une condition nécessaire mais non suffisante. Par contre, cette méthode présente le très grand avantage de fournir une expression explicite de la dispersion macroscopique D.

2 - METHODE (HEURISTIQUE) DU PASSAGE A LA LIMITE.

Pour faciliter la compréhension du résultat final, nous allons en premier lieu en donner une justification purement heuristique, avant de passer à une démonstration plus rigoureuse. Pour cela, nous allons remplacer le mouvement brownien défini par les fonctions λ et ν par un processus plus simple (du type dit de Feller) qui en diffère aussi peu que l'on veut.

Choisissons une longueur ε (que nous ferons ensuite tendre vers 0) et considérons le processus X_t susceptible de prendre les seules valeurs $\pm\, n\, \varepsilon$ (n entier) défini comme suit : lorsque $X_o = n\, \varepsilon$, X_t reste constant jusqu'à un instant T_1 aléatoire (admettant une loi exponentielle d'espérance $1/a_n$), où il subit un saut d'amplitude $+\, \varepsilon$ (avec la probabilité p_n) ou $-\, \varepsilon$ (avec la probabilité $q_n = 1 - p_n$). Si l'on prend

$$(2\text{-}0) \qquad a_n = \frac{\nu(n\varepsilon)}{\varepsilon^2} \quad : \quad p_n = \frac{1}{2}\left(1 + \varepsilon\,\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\nu(n\varepsilon)}\right) \;;\quad q_n = \frac{1}{2}\left(1 - \varepsilon\,\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\nu(n\varepsilon)}\right)$$

et si l'on fait tendre ε vers 0, il est facile de voir (par exemple, en écrivant l'expression du générateur infinitésimal) que ce processus converge (en un sens qu'il est inutile de préciser) vers le mouvement brownien défini en (0-2).

Désignons par T_n le temps d'attente de l'abscisse $(n+1)\varepsilon$ lorsque le processus est en $n\,\varepsilon$, et par $\Phi_n(\lambda) = E[\exp(-\lambda\, T_n)]$ sa transformée de Laplace. On a clairement :

$$(2\text{-}1) \qquad \Phi_n = p_n\,\frac{a_n}{a_n+\lambda} + q_n\,\frac{a_n}{a_n+\lambda}\;\Phi_{n-1}\,\Phi_n$$

Posons $\varpi_n = \Phi_n(o)$: ϖ_n est la probabilité pour que le processus, partant de n ε, atteigne $(n+1)\varepsilon$, et cherchons la condition pour que l'on ait $\varpi_n = 1$. D'après (2-1), il vient :

$$\varpi_n = p_n + q_n \varpi_n \varpi_{n-1}$$

d'où :

$$1 - \varpi_n = \frac{\frac{q_n}{p_n}(1 - \varpi_{n-1})}{1 + \frac{q_n}{p_n}(1 - \varpi_{n-1})} \leq \frac{q_n}{p_n}(1 - \varpi_{n-1})$$

Ainsi :

$$1 - \varpi_n \leq \prod_{k=-\infty}^{n} \frac{q_k}{p_k} = \prod_{k=-\infty}^{n} \frac{1 - \varepsilon \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\nu(n\varepsilon)}}{1 + \varepsilon \frac{\lambda(n\varepsilon)}{\nu(n\varepsilon)}}$$

On aura donc $1 - \varpi_n = 0$ pourvu que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda(\xi)}{\nu(\xi)} d\xi$$

soit p.s. égale à $+\infty$. Or, d'après (0-3) :

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{b}{\omega\nu} + \frac{1}{2} \frac{(\omega\nu)'}{\omega\nu}$$

et donc

$$\int_{z}^{x} \frac{\lambda}{\nu} d\xi = \frac{1}{2} \log \frac{(\omega\nu)_x}{(\omega\nu)_z} + b \int_{z}^{x} \frac{d\xi}{(\omega\nu)_\xi}$$

Comme cette intégrale converge p.s. vers $+\infty$ (pour $z \to -\infty$) dès que $b > 0$, nous concluons que l'on a bien $\varpi_n = 1$ sous cette même hypothèse.

Par des raisonnements analogues, qu'il serait fastidieux d'expliciter, on peut montrer que le temps d'attente de l'abscisse $(n+1)\varepsilon$ admet des moments d'ordre 1 et 2. On obtient leurs valeurs en dérivant en λ l'équation (2-1). Posant :

$$\mu_n = E(T_n) \qquad S_n = E(T_n^2)$$

il vient ainsi, après quelques manipulations :

$$(2\text{-}2)\qquad \begin{cases} p_n\,\mu_n - q_n\,\mu_{n-1} = 1/a_n \\ p_n\,S_n - q_n\,S_{n-1} = 2\,p_n\,\mu_n^2 \end{cases}$$

Que se passe-t-il si ε tend vers 0 ? Pour le mouvement brownien, il est clair que le temps d'attente $T_y(x)$ de l'abscisse $y > x$ à partir de x est une VA indéfiniment divisible, en ce sens que pour toute suite finie $x = x_o < x_1 < \dots < x_n = y$, les VA $T_{x_{i+1}}(x_i)$ sont indépendantes et

$$T_y(x) = \sum_{i=o}^{n-1} T_{x_{i+1}}(x_i)$$

On en déduit classiquement qu'il existe deux mesures positives $\mu(d\xi)$ et $S(d\xi)$ telles que l'espérance et la variance du temps d'attente, soient :

$$\begin{cases} E\ T_y(x) = \int_x^y \mu(d\xi) \\ \\ \mathrm{Var}\ T_y(x) = \int_x^y S(d\xi) \end{cases}$$

Admettons (nous verrons qu'il en est bien ainsi) que ces mesures admettent des densités positives $\mu(\xi)$ et $S(\xi)$. Pour ε petit, on s'attend à ce que les termes μ_n et S_n des relations (2-2) soient équivalents à $\varepsilon\,\mu(n\varepsilon)$ et $\varepsilon\,S(n\varepsilon)$. En remplaçant p_n, q_n et a_n par leurs expressions (2-0), la première relation (2-2) devient :

$$\frac{\varepsilon}{2}\,(\mu(n\varepsilon) - \mu((n-1)\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}\,[\mu(n\varepsilon)\,\frac{\lambda(n\varepsilon)}{\nu(n\varepsilon)} + \mu((n-1)\varepsilon)\,\frac{\lambda((n-1)\varepsilon)}{\nu((n-1)\varepsilon)}\,]$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\nu(n\varepsilon)}$$

Lorsque ε tend vers 0, on constate sur cette expression que la densité d'espérance $\mu(\xi)$ doit vérifier l'équation différentielle

$$(2\text{-}3)\qquad \frac{\nu}{2}\,\frac{d\mu}{dx} + \lambda\,\mu = 1$$

De la même façon, on obtiendra pour la densité de variance $S(\xi)$ la relation :

$$\frac{\nu}{2}\frac{dS}{dx} + \lambda S = \nu \mu^2 \tag{2-4}$$

Il est préférable, pour ce qui suit, de remplacer ces équations par celles que l'on obtient en exprimant λ à l'aide de $b > 0$ et de la porosité ω : le calcul est le même que celui qui nous a permis de remplacer par (0-4) l'expression (0-2) du générateur infinitésimal, et on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\omega \nu \mu) + b \mu = \omega \\ &\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\omega \nu S) + b S = \omega \nu \mu^2 \end{aligned}\right. \tag{2-5}$$

D'une manière générale, considérons l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\omega \nu f) + b f = g \omega \tag{2-6}$$

dont la solution générale est de la forme

$$\omega \nu f(x) = C e^{-2b\int_a^x \frac{d\xi}{\omega\nu}} + 2\int_a^x \omega(z) g(z) e^{-2b\int_a^x \frac{d\xi}{\omega\nu}} dz$$

Avec $b > 0$, le premier terme tend p.s. vers 0 si a tend vers $-\infty$. Si $g(x)$ est une FAST, et moyennant des hypothèses assez faibles, le second terme, pour $a \to -\infty$, admet une limite p.s. qui est elle-même une FA stationnaire en x, et il est facile de voir que l'expression obtenue est la seule solution stationnaire de (2-6), à savoir :

$$f(x) = \frac{2}{\omega(x)\nu(x)} \int_{-\infty}^x \omega(z) g(z) e^{-2b\int_z^x \frac{d\xi}{\omega\nu}} dz \tag{2-7}$$

Or, les densités d'espérance et de variance, solution de (2-5), sont certainement des FAST $\mu(x)$ et $S(x)$: elles admettent donc des expressions de la forme (2-7).

La densité d'espérance du temps d'attente.

En ce qui concerne $\mu(x)$, tout d'abord, nous trouvons :

$$\text{(2-8)} \qquad \mu(x) = \frac{2}{\omega(x)\ \nu(x)} \int_{-\infty}^{x} \omega(z) \ e^{-2b\int_z^x \frac{d\xi}{\omega\nu}} dz$$

Comme le temps d'attente $T_z(o)$ de z à partir de 0 admet l'espérance

$$m(z) = E \int_0^z \mu(x)\ dx = z\ E(\mu)$$

la première relation (1-3) montre que la vitesse macroscopique v doit vérifier :

$$\frac{1}{v} = E\ \mu$$

Pour calculer $E\ \mu$, il vaut mieux partir de l'équation (2-5). En effet, $\omega\ \nu\ \mu$ étant une FAST, sa dérivée a une espérance nulle, et (2-5) donne $b\ E\ \mu = E\ \omega$. D'où le premier résultat

$$v = b/E(\omega)$$

soit, compte tenu de (0-5) :

$$\text{(2-9)} \qquad \boxed{v = \frac{b}{E\ \omega} = \frac{E\ \omega\ \lambda}{E\ \omega}}$$

La variance du temps d'attente.

Lorsque les réalisations des FAST ω et ν sont fixées, le temps d'attente $T_z(o)$ admet le moment (conditionnel) d'ordre 2 non centré :

$$E[(T_z(o))^2/\omega,\nu] = \int_0^z S(x)\ dx + \left[\int_0^z \mu(x)\ dx\right]^2$$

Par conséquent, sa variance (non conditionnelle) sera :

$$\mathrm{Var}\ T_z(o) = E \int_0^z S(x)\, dx + E\left[\int_0^z \mu(x)\, dx\right]^2 - \left[E \int_0^z \mu(x)\, dx\right]^2$$

Le premier terme est z E S. Le second s'exprime simplement à l'aide de la <u>covariance centrée</u> C_μ de la FAST $\mu(x)$, soit :

$$\mathrm{Var}\ T_z(o) = z\, E(S) + 2 \int_0^z (z-x)\, C_\mu(x)\, dx$$

D'après la relation (1-3), nous devons avoir, pour $z \to \infty$:

$$\frac{D}{v^3} = \lim \frac{\mathrm{Var}\ T_z}{z} = E(S) + 2 \lim \frac{1}{z} \int_0^z (z-x)\, C_\mu(x)\, dx$$

Sous la seule hypothèse $\int_0^\infty |C_\mu|\, dx < \infty$, on sait que l'on a :

$$\lim \frac{1}{z} \int_0^z (z-x)\, C_\mu(x)\, dx = \int_0^\infty C_\mu(x)\, dx$$

Par conséquent, la <u>dispersion macroscopique</u> D sera donnée par

$$D = v^3\, E\, S + 2\, v^3 \int_0^\infty C_\mu(x)\, dx \tag{2-10}$$

Elle comporte deux termes : le premier, v^3 E S, peut être qualifié de <u>dispersion pure</u>, ou <u>dispersion homocinétique</u>. Le second, lié à l'intégrale de la covariance C_μ, est une <u>dispersion d'entrainement</u>, liée au fait que le centre de gravité de la distribution microscopique ρ_t ne coïncide pas exactement avec v_t, mais constitue seulement une VA d'espérance v_t.

Evaluons ces deux termes. Pour E S, en prenant membre à membre l'espérance de la seconde relation (2-5), nous trouvons :

$$E\ S = \frac{1}{b}\ E\ (\omega\, \nu\, \mu^2)$$

Pour simplifier un peu cette expression, où μ figure par son carré, multiplions par $\omega \vee \mu$ la première relation (2-5), ce qui donne

$$\frac{1}{4} \frac{d}{dx} (\omega \vee \mu)^2 + b\, \omega \vee \mu^2 = \omega^2 \vee \mu$$

Prenant l'espérance membre à membre, nous trouvons :

$$b \; E\,(\omega \vee \mu^2) = E\,(\omega^2 \vee \mu)$$

D'où l'expression suivante du terme E S, plus facile à évaluer :

$$(2\text{-}11) \qquad E\,S = \frac{1}{b^2} \; E\,(\omega^2 \vee \mu)$$

En ce qui concerne le second terme de (2-10), on peut remplacer la covariance centrée C_μ de la FAST μ par celle de la FAST ω, soit C_ω :

$$(2\text{-}12) \qquad b^2 \int_0^\infty C_\mu(x)\, dx = \int_0^\infty C_\omega(x)\, dx$$

Pour le voir, intégrons de 0 à z la première relation (2-5). Il vient :

$$\frac{1}{2} (\omega \vee \mu)_z - \frac{1}{2} (\omega \vee \mu)_o + b \int_0^z \mu(x)\, dx = \int_0^z \omega(x)\, dx$$

Comme $E\,\omega = b\,E\,\mu$, nous pouvons remplacer $\mu(x)$ et $\omega(x)$ par leurs valeurs centrées $\mu(x) - E\,\mu$, $\omega(x) - E\,\omega$. Appliquant ensuite l'inégalité triangulaire à la norme de L_2 , nous trouvons

$$\left| b \left\| \int_0^z (\mu(x) - E\,\mu)\, dx \right\| - \left\| \int_0^z (\omega(x) - E\,\omega)\, dx \right\| \right| \leq \| \omega \vee \mu \|$$

et cette inégalité implique bien la relation (2-12).

Reportant ces résultats dans (2-10), et tenant compte aussi de la relation (2-9) qui donne $b = v\ E\ \omega$, nous obtenons finalement l'expression suivante pour la <u>dispersion macroscopique</u>

$$(2\text{-}13) \qquad \boxed{D = v\ \frac{E\ (\omega^2\ \nu\ \mu)}{(E\ \omega)^2} + \frac{2v}{(E\ \omega)^2} \int_0^\infty C_\omega(x)\ dx}$$

L'expression $E\ (\omega^2\ \nu\ \mu)$ qui figure dans le premier terme du second membre est explicitement donnée, d'après (2-8), par :

$$(2\text{-}14) \qquad E\ (\omega^2\ \nu\ \mu) = 2\ E\left[\omega(o) \int_{-\infty}^{o} \omega(z)\ e^{-2b\int_z^o \frac{d\xi}{\omega\nu}}\ dz\right]$$

3 - EXEMPLES SIMPLES ET VERIFICATION

Comme ces formules (2-13) et (2-14) ont été obtenues en passant par l'intermédiaire des temps d'attente, nous ne pouvons pas affirmer, mais seulement conjecturer, que la variance de X_t est asymptotiquement égale à Dt. Il n'est donc pas inutile de procéder à une vérification dans quelques cas particuliers simples.

Essayons d'abord une méthode directe. Si $f(x)$ est une fonction bornée (aléatoire ou non), nous avons :

$$(3\text{-}1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\ E\ f(X_t) = E \int \rho_t(x)(Af)(x)\ dx = E \int \rho_t(x)\ [\tfrac{\nu}{2}\ f'' + \lambda\ f']\ dx$$

On peut conjecturer que cette formule reste applicable à des fonctions non bornées, mais à croissance pas trop rapide, comme x ou x^2. Admettant qu'il en soit bien ainsi, essayons d'abord la fonction $f(x) = x$. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\ E\ X_t = E \int \rho_t(x)\ \lambda(x)\ dx$$

soit, en supposant $x_o = 0$ (particule partant à l'instant initial de l'origine x = 0)

$$\frac{1}{t} E X_t = E \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(X_\tau)\, d\tau$$

On peut montrer, en toute généralité, que, t tendant vers l'infini, cette expression converge bien vers $v = E(\omega\lambda)/E(\omega)$. Sans invoquer ce résultat général, notons que dans le cas particulier où $\lambda(x)$ est une <u>constante</u> $\lambda = v$, on a en toute rigueur $E X_t = v\, t$.

Pour la fonction $f(x) = x^2$, la relation (3-1) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} E X_t^2 = E \int \rho_t(x)\, [\nu + 2\, x\, \lambda(x)]\, dx$$

Plaçons-nous dans le cas "homocinétique" où l'on a :

$$\lambda(x) = v = C^{ste}$$

Alors, toujours avec $X_0 = 0$, il vient :

$$E X_t^2 = E \int_0^t \nu(X_\tau)\, d\tau + 2\, v \int_0^t d\tau \int x\, \rho_\tau(x)\, dx$$

Mais $\int x\, \rho_\tau(x)\, dx = E\,(X_\tau) = v\, \tau$, et le second terme est $v^2\, t^2$, d'où

$$\mathrm{Var}\, X_t = E \int_0^t \nu(X_\tau)\, d\tau$$

D'après le résultat général invoqué ci-dessus, on trouve ainsi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \mathrm{Var}\, X_t = \frac{E\, \omega\, \nu}{E\, \omega} \qquad (3\text{-}2)$$

Montrons que la formule (2-13), dans le cas homocinétique $\lambda = v$, conduit à la même expression.

Si $\lambda = v = C^{ste}$, la relation (0-3) montre que l'on a

$$(3\text{-}3) \qquad \omega = \frac{b}{v} + \frac{1}{2}\,\frac{(\omega\,\nu)'}{v}$$

Par conséquent, la première équation (2-5) admet la solution $\mu = \frac{1}{v} = C^{ste}$, et, comme $\mu(x)$ est la seule solution stationnaire, on a bien $\mu = 1/v$. Inversement, d'ailleurs, en se reportant à (2-3), on voit que $\mu = C^{ste}$ entraine $\lambda = 1/\mu = C^{ste}$. Autrement dit, <u>on a $\lambda(x) = C^{ste}$ si et seulement si $\mu(x) = C^{ste}$, et dans ce cas $\lambda\,\mu = 1$.</u> Le cas que nous avons appelé <u>homocinétique</u> est donc caractérisé, indifféremment, par $\lambda = v$ ou par $\mu = 1/v$.

Comme, d'après (2-12), $\mu = C^{ste}$ entraine $\int_0^\infty C_\omega(x)\,dx = 0$, le second terme de la formule (2-13), celui que nous avons appelé terme d'entrainement, est effectivement nul dans le cas homocinétique, et il reste (puisque $\mu = 1/v$) :

$$D = \frac{E\,(\omega^2\nu)}{(E\,\omega)^2}$$

Mais, multipliant (3-3) par $\omega\,\nu$, nous trouvons

$$\omega^2\nu = \frac{b}{v}\,\omega\,\nu + \frac{1}{4}\,\frac{(\omega^2\,\nu^2)'}{v}$$

et par suite

$$E\,(\omega^2\nu) = \frac{b}{v}\,E\,(\omega\,\nu) = E(\omega)\,E(\omega\,\nu)$$

Il reste donc :

$$D = \frac{E\,(\omega\,\nu)}{E\,(\omega)}$$

c'est-à-dire justement le résultat obtenu directement en (3-2). Ainsi notre formule est correcte dans le cas homocinétique.

<u>Deuxième Exemple</u>.

Un autre cas de simplification est celui où $\omega^2\nu$ est une constante, ce que nous écrirons (puisque ω n'est défini qu'à un facteur près) :

(3-4) $$\omega^2 \nu = C(E\ \omega)^2$$

Comme $E\ \mu = 1/v$, le premier terme de la formule (2-13), ou terme homocinétique, est égal à la constante C qui figure en (3-4), et il reste :

(3-5) $$D = C + \frac{2\ v}{(E\ \omega)^2} \int_0^\infty C_\omega(x)\ dx$$

Or, si l'on introduit le processus Z_t défini par

(3-6) $$Z_t = \frac{1}{E\ \omega} \int_0^{X_t} \omega(x)\ dx$$

on montre, par un changement de variable simple, que Z_t est le mouvement brownien homogène dans l'espace, dont le générateur $\tilde{A}$ est défini par :

$$\tilde{A}\ f = \frac{C}{2}\ f'' + v\ f'$$

Autrement dit, Z_t est (en toute rigueur) une VA gaussienne d'espérance v t et de variance C t. Il est ensuite possible, en inversant la relation (3-6) par une technique sur laquelle je ne m'étendrai pas ici, de déduire de ce résultat que la variance de X_t est bien asymptotiquement égale à D t, avec un coefficient D donné par l'expression (3-5).

Dans ce deuxième exemple, par conséquent, la formule (2-13) conduit encore au résultat exact.

<u>Troisième Exemple</u>.

Considérons maintenant le cas où $\omega\ \nu$ est une constante, soit

(3-7) $$\omega\ \nu = C\ E\ \omega$$

D'après (0-3), il en résulte aussitôt :

$$\omega\ \lambda = b = C^{ste}$$

On peut vérifier sans peine qu'inversement $\omega\,\lambda = C^{ste}$ entraine $\omega\,\nu = C^{ste}$.

Dans ce cas, on trouve d'après (2-8)

$$(\omega^2 \nu\ \mu)_x = 2\ \omega_x \int_{-\infty}^{x} \omega(z)\ e^{-\frac{2\,\nu}{v}(x-z)}\ dz$$

et par suite :

$$E\ (\omega^2 \nu\ \mu) = \frac{c}{v}\ (E\ \omega)^2 + 2 \int_0^{\infty} C_\omega(h)\ e^{-\frac{2\,\nu h}{c}}\ dh$$

et la formule (2-13) conduit à :

$$(3\text{-}8) \qquad D = C + \frac{2\,v}{(E\ \omega)^2} \int_0^{\infty} C_\omega(h)\ e^{-\frac{2\,\nu h}{c}}\ dh + \frac{2\,v}{(E\ \omega)^2} \int_0^{\infty} C_\omega(h)\ dh$$

Si la portée de la covariance C_ω n'est pas très grande vis-à-vis de la longueur c/ν, le second terme de (3-8) sera peu important, et la formule (3-8) diffèrera peu de (3-5).

D'une manière générale, d'ailleurs, comme $E\ \mu = 1/v$, on peut penser que $E\ (\omega^2 \nu\ \mu)$ diffère peu de $(1/v)\ E\ (\omega^2 \nu)$ et prendre, en première approximation (si l'on désire éviter le calcul de l'expression (2-14)) :

$$(3\text{-}9) \qquad \boxed{D \# \frac{E\ (\omega^2 \nu)}{(E\ \omega)^2} + \frac{2\,v}{(E\ \omega)^2} \int_0^{\infty} C_\omega(h)\ dh}$$

<u>Quatrième Exemple</u>.

Considérons, pour terminer, le cas $\nu = 0$, c'est-à-dire le cas d'un <u>entrainement pur</u>. Le premier terme de la formule (2-13) est alors égal à 0. D'autre part, puisque $\nu = 0$, la relation (0-3) donne $\omega\,\lambda = b$. Comme $b = v\ E\ \omega$, il vient :

$$v = (E\ (1/\lambda))^{-1}$$

La vitesse d'entrainement macroscopique est égale à la moyenne harmonique de la vitesse microscopique λ. Compte tenu de ce résultat, on trouve ensuite $E\,\omega = b\,E(1/\lambda) = b/v$. Par suite, la formule (2-13) donne :

$$D = 2\,v^3 \int_0^\infty C_{1/\lambda}(h)\,dh \tag{3-10}$$

$C_{1/\lambda}$ désignant la covariance centrée de l'inverse $1/\lambda$ de la vitesse microscopique λ. J'ai montré dans une autre Note, par une méthode directe, que l'on avait bien, dans ce cas

$$\lim \frac{1}{t}\ \mathrm{Var}\ X_t = D$$

de sorte que la formule (2-13) conduit au résultat correct.

4 - LE POTENTIEL.

Notre résultat final, qui est la formule (2-13), apparait comme une conséquence directe des équations différentielles (2-5). Or, dans ce qui précède, nous n'avons établi ces relations (2-5) que par un raisonnement approximatif, de nature simplement heuristique. Nous allons maintenant en donner une justification plus sérieuse, qui aura d'ailleurs l'avantage de souligner le rapport existant entre l'espérance du temps d'attente et le potentiel du processus X_t.

Comme point de départ, considérons l'équation $A\,f = -\,g$, soit, explicitement :

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{dx}\ \omega\,\nu\ \frac{df}{dx} + b\,\frac{df}{dx} = -\,\omega\,g \tag{4-1}$$

(avec toujours $b > 0$ strictement). Si g est une fonction bornée à support borné, cette équation admet une seule solution f nulle à l'infini, à savoir :

$$(4\text{-}2)\qquad f(x) = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{x} \omega(z)\, e^{-\frac{2\,bd\xi}{\omega\,\nu}}\, g(z)\,dz + \frac{1}{b}\int_{x}^{\infty} \omega(z)\,g(z)\,dz$$

Désignons par $(P_t\, f)$ l'espérance conditionnelle de $f(X_t)$, lorsque $X_o = x$ (les réalisations des FAST ω et ν étant fixées). On a :

$$-\,P_t\, g = P_t\, A\, f = A\, P_t\, f = \frac{d}{dt} P_t\, f$$

et par suite

$$\int_o^t P_\tau\, g\, d\tau = f - P_t\, f$$

Sans entrer dans les détails, nous admettrons que la particule s'éloigne suffisamment vite vers $+\infty$ pour que $P_t\, f = E\, f(X_t)$, compte tenu de la décroissance de f à l'infini telle qu'elle résulte de (4-2), tende vers 0 lorsque t tend vers l'infini. Ainsi :

$$f = \int_o^\infty P_t\, g\, dt$$

Cette formule nous indique que la mesure-potentiel

$$U(x;.) = \int_o^\infty P_t\,(x;.)\, dt$$

existe, et vérifie pour toute fonction g bornée à support borné :

$$f(x) = \int u(x;dz)\, g(z)$$

$f(x)$ étant donnée par (4-2). Autrement dit, cette mesure-potentiel admet la <u>densité</u>

$$(4\text{-}3)\qquad \frac{U(x;dz)}{dz} = \frac{1}{b}\,\omega(z)\; e^{-\int_z^x \frac{2\,bd\xi}{\omega\,\nu}}\; 1_{z\le x} + \frac{1}{b}\,\omega(z)\; 1_{z>x}$$

On sait que cette mesure-potentiel représente le temps de séjour moyen de la particule, dans le sens précis suivant : pour tout borélien B, $U(x;B)$ est l'espérance du temps de séjour de la particule dans B lorsque $X_o = x$.

Sur l'expression (4-3), on note que la densité du temps de séjour au point z est $\omega(z)/b$ si z est $> x$. Pour $z < x$, on trouve la même expression multipliée par

$$\exp\left\{-\int_z^x \frac{2\,bd\xi}{\omega\,\nu}\right\}$$

On en déduit que cette exponentielle représente la probabilité pour que, partant du point x, la particule atteigne l'abscisse $z < x$:

$$P\left[\operatorname*{Inf}_{t\geq o} X_t \leq z \,/\, X_o = x\right] = e^{-\int_z^x \frac{2\,bd\xi}{\omega\,\nu}}$$

Désignons maintenant par :

$$U(x;y) = \int_{-\infty}^{y} U(x;dz)$$

l'espérance du temps de séjour <u>en-dessous de l'abscisse y</u>, toujours conditionnellement en $X_o = x$ (et ω et ν fixés). Si $T_y(x)$ est le temps d'attente de l'abscisse $y > x$ à partir de x, il est clair que l'on a :

$$U(x;y) = E\,[T_y(x)] + U(y;y)$$

D'où l'on déduit, d'après (4-3) :

$$E\,[T_y(x)] = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{x} \omega(z)\, e^{-\int_z^x \frac{2b}{\omega\nu}\,d\xi}\, dz + \frac{1}{b}\int_x^y \omega(z)\, dz$$

$$- \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{y} \omega(z)\, e^{-2b\int_z^y \frac{d\xi}{\omega\nu}}\, dz$$

Dérivant en x, nous trouvons :

$$\mu(x) = -\frac{\partial}{\partial x} E[T_y(x)] = \frac{2}{(\omega\,\nu)_x}\int_{-\infty}^{x} \omega(z)\, e^{-\int_z^x \frac{2b}{\omega\nu}\, d\xi}\, dz$$

c'est-à-dire la relation (2-8), qui implique elle-même la première équation différentielle (2-7). Du fait que $T_y(x) = 0$ en $x = y$, on a bien

$$E[T_y(x)] = \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi$$

Notons en passant que le terme $U(x;x)$, qui représente l'espérance du temps de séjour de la particule <u>en dessous de son abscisse de départ</u>, est égale, d'après (4-3) et (2-8), à :

$$U(x;x) = \frac{(\omega\,\nu\,\mu)_x}{2\,b} \tag{4-4}$$

Ceci suggère une interprétation du terme homocinétique de la formule (2-13). Pour toute FAST $Y(x)$, en effet, on a :

$$\lim_{t\to\infty} E[Y(X_t)] = \frac{E(\omega\, Y)}{E\,\omega}$$

Par conséquent, ici,

$$\lim_{t\to\infty} E[U(X_t,\, X_t)] = \frac{E\,(\omega^2\,\nu\,\mu)}{2\,b\,E\,\omega}$$

Comme $b = v\,E\,\omega$, on voit que <u>le terme homocinétique</u> est

$$\frac{v\,E\,(\omega^2\,\nu\,\mu)}{(E(\omega))^2} = 2\,v^2 \lim_{t\to\infty} E[U(X_t,\, X_t)]$$

Au facteur $2\,v^2$ près, ce terme est asymptotiquement égal, t tendant vers ∞, au temps de séjour moyen (postérieur à t) de la particule en-dessous de l'abscisse X_t qu'elle a atteinte au temps t.

Calcul du moment d'ordre 2.

Passons maintenant au calcul de la variance du temps d'attente $T_y(x)$, $y > x$. Pour cela, désignons par

$$\theta(x;y) = \int_0^\infty 1_{X_t \leq y} \; dt$$

le temps passé par la particule sous l'abscisse $y > x$, conditionnellement en $X_o = x$. Il est clair que $\theta(x;y)$ est la somme :

$$\theta(x;y) = T_y(x) + \theta(y;y)$$

les deux VA du second membre étant indépendantes (toujours, évidemment, à $X_o = x$ et ω et ν fixés). Par suite :

$$(4\text{-}5) \qquad E[(\theta(x;y))^2] = E[(T_y(x))^2] + 2\, E[\theta(y;y)]\, E[T_y(x)] + E[\theta^2(y;y)]$$

Au second membre, nous connaissons déjà, d'après (4-4), la valeur de $E[\theta(y;y)]$, qui est $U(y,y)$, soit :

$$(4\text{-}6) \qquad 2\, E[\theta(y,y)]\, E[T_y(x)] = \frac{(\omega\ \nu\ \mu)_y}{b} \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi$$

Cherchons à évaluer le premier membre $E[\theta^2(x,y)]$ de (4-5). On a :

$$\theta^2(x;y) = 2 \int_0^\infty 1_{X_t < y} \; dt \int_t^\infty 1_{X_{t'} < y} \; dt'$$

Prenant l'espérance (à $X_o = x$ et $\omega\ \nu$ fixés), il vient :

$$E[\theta^2(x,y)/\omega\ \nu] = 2 \int_0^\infty dt \int_t^\infty dt' \int_{-\infty}^y P_t(x;dz) \int_{-\infty}^y P_{t'-t}\,(z;d\xi)$$

$$= 2 \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^y P_t(x;dz) \int_{-\infty}^y U(z;d\xi)$$

d'après la définition de la mesure-potentiel, donc, en désignant comme ci-dessus par $U(x;y)$ le temps de séjour moyen sous y lorsque $X_o = x$:

$$E[\theta^2(x,y)/\omega\ \nu] = 2 \int_{-\infty}^{y} U(x;dz)\ U(z;y)$$

Compte tenu de l'expression (4-3) de la mesure-potentiel, nous constatons que cette expression est dérivable en x, et :

$$\frac{\partial}{\partial x} E[\theta^2(x,y)/\omega,\nu] = \frac{4}{(\omega\ \nu)_x} \int_{-\infty}^{x} \omega(z)\ U(z,y)\ e^{-2b\int_z^x \frac{d\xi}{\omega\nu}}\ dz$$

Une nouvelle dérivation montre que $E[\theta^2(x,y)]$ vérifie l'équation différentielle

$$(4\text{-}7)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\omega\ \nu)_x \frac{\partial}{\partial x} E[\theta^2(x,y)] + b\frac{\partial}{\partial x} E[\theta^2(x,y)] = -\ 2\ \omega(x)\ U(x;y)$$

Or, au second membre de (4-5), outre le terme $E[\theta^2(y,y)]$ indépendant de x (donc, s'éliminant par dérivation en x) et le terme $E[(T_y(x))^2]$ que nous voulons évaluer, figure le terme (4-6), dont la dérivée en x est

$$-\ \mu(x)\ \frac{(\omega\ \nu\ \mu)_y}{b}$$

Comme $\mu(x)$ vérifie l'équation différentielle (2-5), il résulte de (4-7) que la fonction

$$M(x;y) = E[T_x^2(y)/\omega,\nu]$$

vérifie elle-même une équation du même type, à savoir :

$$(4\text{-}8)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\omega\ \nu)_x \frac{\partial}{\partial x} M(x,y) + b\frac{\partial}{\partial x} M(x,y) = -\ 2\ \omega(x)\ U(x,y) + \omega(x)\ \frac{(\omega\ \nu\ \mu)_y}{b}$$

D'autre part, $M(x,y)$ est le moment d'ordre 2, non centré, du temps d'attente $T_x(y)$, de sorte que :

$$M(x,y) = \int_x^y S(\xi)\, d\xi + \left(\int_x^y \mu(\xi)\, d\xi \right)^2$$

soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial x} M(x,y) = - S(x) - 2\, \mu(x) \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi$$

En substituant dans (4-8), nous trouvons donc que la densité de variance S(x) du temps d'attente vérifie :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\omega\, \nu\, S) + b\, S = 2\, \omega(x)\, U(x,y) - \omega(x) \frac{(\omega\, \nu\, \mu)_y}{b}$$

$$- 2\, b\, \mu(x) \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi - \frac{d}{dx} (\omega\, \nu\, \mu)_x \times \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi$$

$$+ (\omega\, \nu\, \mu^2)_x$$

Comme μ vérifie (2-5), le second membre se simplifie et il vient :

$$\frac{1}{2} (\omega\, \nu\, S)' + b\, S = 2\, \omega_x\, U(x,y) - \omega_x \frac{(\omega\, \nu\, \mu)_y}{b} - 2\, \omega_x \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi$$

$$+ (\omega\, \nu\, \mu^2)_x$$

Or, d'après (2-5)

$$\frac{1}{2} (\omega\, \nu\, \mu)_y - \frac{1}{2} (\omega\, \nu\, \mu)_x + b \int_x^y \mu(\xi)\, d\xi = \int_x^y \omega(\xi)\, d\xi$$

et, d'autre part, d'après (4-3)

$$U(x,y) = \frac{(\omega\, \nu\, \mu)_x}{2\, b} + \frac{1}{b} \int_x^y \omega(\xi)\, d\xi$$

En substituant ces valeurs, il reste finalement :

(4-9) $$\frac{1}{2}\,(\omega\ \nu\ S)' + b\ S = \omega\ \nu\ \mu^2$$

c'est-à-dire, justement, la seconde équation (2-5).